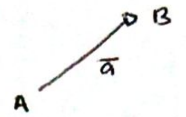
Vektor

- **Defenisi Vektor** : Vektor merupakan besaran yang mempunyai arah.

  Contoh : gaya, pergeseran, dan kecepatan.

- **Secara geometri** : Setiap vektor dinyatakan secara geometris sebagai segmen garis berarah pada bidang atau ruang, dengan notasi garis berpanah. ekor panah garis tersebut merupakan titik awal vektor, sedangkan ujung panah sebagai titik akhir (ujung) vektor tersebut.

contoh : $\bar{a} = \overline{AB}$

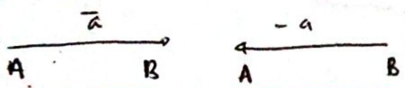


- **Secara aljabar** :
  - Misalkan U vektor di $R^2 \rightarrow U = (u_1, u_2)$ dimana $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$
  - Misalkan V vektor di $R^3 \rightarrow V = (V_1, V_2, V_3)$ dimana $V_1, V_2, V_3 \in \mathbb{R}$.

    u_1, u_2 disebut komponen U, sedangkan V_1, V_2, V_3 disebut komponen V.
  - Dua vektor dikatakan ekivalen jika dan hanya jika besar dan arahnya sama atau dengan kata lain komponen yang bersesuaian sama.

- **Penulisan vektor** :
  - $\bar{a} = 2i - j + 3k$
  - $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \ -1 \ 3)$
  - $\bar{a} = i + 3j$
  - $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vektor garis



$\boxed{\overline{AB} = \bar{a}}$ $\boxed{\overline{BA} = -a}$

Misal $\bar{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\bar{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\overline{AB} = B - A}$

$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\overline{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \bar{a}$

Operasi Vektor

$\bar{a} = 3i - 5j - k$

$\bar{b} = 6i + 7j - 2k$

Penjumlahan : $\boxed{\bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}}$

$\bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Pengurangan : $\boxed{\bar{a} - \bar{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}}$

$\bar{a} - \bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}$

Perkalian

$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_2)}$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left| \begin{matrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} i & j \\ x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{matrix}$$

$$= (x_2 y_3 i + x_3 y_1 j + x_1 y_2 k) - (x_2 y_1 k + x_3 y_2 i + x_1 y_3 j)$$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= 3 \cdot 6 + (-5) \cdot 7 + (-1) \cdot (-2)$

$= 18 - 35 + 2$

$= -15$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left| \begin{matrix} i & j & k \\ 3 & -5 & -1 \\ 6 & 7 & -2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} i & j \\ 3 & -5 \\ 6 & 7 \end{matrix}$$

$= (10i + (-6j) + 21k) - (-30k + (-7i) + (-6j))$

$= 10i - 6j + 21k + 30k + 7i + 6j$

$= 17i + 51k$

$= \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 51 \end{pmatrix}$

Perkalian dot jika diketahui sudutnya : $\boxed{|\bar{a}|.|\bar{b}| . \cos\theta}$ → $\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ → besar vektor a.

$\boxed{\cos\theta = \frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}|.|\bar{b}|}}$ jika tdk diketahui

$|a| = \sqrt{3^2+(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+25+1} = \sqrt{35}$

$|b| = \sqrt{(6)^2+(7)^2+(-2)^2} = \sqrt{36+49+4} = \sqrt{89}$

Perkalian dengan skalar : $\boxed{k\bar{a} = k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.x_1 \\ k.x_2 \end{pmatrix}}$

$2\bar{a} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$

besar jumlah vektor : $\boxed{|\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + 2|a|.|\bar{b}|.\cos\theta}}$ → jika diketahui $|\bar{a}|,|\bar{b}|$ dan sudutnya

boleh dijumlahkan dahulu.

$\bar{a}+\bar{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \to |\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{9^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{94}$ } bisa digunakan ketika tdk diketahui sudutnya dan $|a|, |\bar{b}|$

besar pengurangan vektor : $\boxed{|\bar{a}-\bar{b}| = \sqrt{|\bar{a}|^2+|b|^2 - 2|\bar{a}|.|\bar{b}| . \cos\theta}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nilai eigen : $|A - \lambda I| = 0$

$$\left|\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -3 \\ 2 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

~~$(-\lambda(3-\lambda)(1-\lambda)$~~

$$\left|\begin{matrix} -\lambda & -1 & -3 \\ 2 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{matrix}\right| \begin{matrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \\ -2 & 1 \end{matrix}$$

$-\lambda(3-\lambda)(1-\lambda) + (-1.3.-2) + (-3.2.1) - (-3(3-\lambda)-2) + (-\lambda.3.1) + (-1.2(1-\lambda)) = 0$

-3λ

Matriks

↳ sekumpulan bilangan yang disusun berdasarkan baris dan kolom, serta ditempatkan dalam tanda kurung.

$$\boxed{A_{\underbrace{m\times n}_{\text{ordo}}} = \begin{bmatrix} \overset{\text{elemen}}{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}$$

> Jenis" matriks

- matriks baris ⇒ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$
- matriks kolom ⇒ $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- matriks persegi ⇒ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
- matriks diagonal ⇒ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- matriks identitas ⇒ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- matriks nol ⇒ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- matrik segitiga atas ⇒ $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- matriks segitiga bawah ⇒ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

> Transpose matriks (A^T)

contoh : $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

> Operasi matriks (+, −, ×)

- Penjumlahan dan pengurangan

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \\ A - B &= \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

- Perkalian

∴ skalar

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow kA = k \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$

∴ perkalian dua matrix

$\boxed{A_{i\times m} \times B_{m\times n} = C_{i\times n}}$ (kolom A = baris B)

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a.e + b.h & a.f + b.i & a.g + b.j \\ c.e + d.h & c.f + d.i & c.g + d.j \end{bmatrix}$$

> Invers matriks (A^{-1})

- ordo 2x2

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A}$$

contoh: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, $|A| \neq 0$

$= \frac{1}{1.4 - 2.3} \times \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{-2} \times \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

> Determinan matriks ($|A|$)

- Ordo 2x2

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc}$$

contoh : ① $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

$|A| = ad - bc$

$= 5.2 - 6.(-2)$

$= 10 - (-12)$

$= 10 + 12$

$= 22$

② $A = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = ad - bc$

$= 3.1 - 8.10$

$= 3 - 80$

$= -77.$

• Invers ordo 3x3

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A}$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

∴ Determinan A:

$$|A| = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$|A| = \left((1.2.4) + (0.1.3) + (2.2.1)\right) - \left((2.2.3) + (1.1.1) + (0.2.4)\right)$$

$= (8 + 0 + 4) - (12 + 1 + 0)$

$= 12 - 13$

$= -1$

∴ mencari Adj A

>> menggunakan kofaktor

$$\text{Kof}(A) = \begin{matrix} +\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & +\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & +\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ +\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & +\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Transpose:

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & -4 \\ -5 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Adj } A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \times \begin{bmatrix} 7 & 2 & -4 \\ -5 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

>> menggunakan OBE

$$[A \mid I] \xrightarrow{OBE} [I \mid A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

• Determinan ordo 3x3

① cara sarrus

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left[\begin{array}{ccc|cc} -2 & 4 & -5 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -7 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -8 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$|A| = \left((-2.3.-8) + (4.-7.-1) + (-5.1.4)\right) - \left((-5.3.-1) + (-2.-7.4) + (4.1.-8)\right)$$

$= (48 + 28 + (-20)) - (15 + 56 + (-32))$

$= 56 - 39$

$= 17.$

② cara minor kofaktor

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$|A| = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13}$

$C_{11} = M_{11}$ $\quad M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$C_{12} = -M_{12}$ $\quad M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$

$C_{13} = M_{13}$ $\quad M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$|A| = -2 \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$= -2\left(3.-8 - (-7)(4)\right) - 4.\left(1.-8 - (-7)(-1)\right) + (-5)\left(1.4 - 3.(-1)\right)$

$= -2(-24 + 28) - 4(-8 - 7) - 5(4 + 3)$

$= -8 + 60 - 35$

$= 17.$

③ Cara OBE

catatan:

- $B_1 \leftrightarrow B_2 = (-1)[\ ]$
- $kB_1 = \frac{1}{k}[\ ]$
- $\frac{B_1}{k} = (k)[\ ]$

Himpunan

↳ kumpulan objek yg terdefinisi dgn jelas

> Penulisan :

• enumerasi

$A = \{1, 2, 3\}$ atau $B = \{1, 3, 5, 7\}$

• menggunakan kata-kata.

A = {Bilangan asli kurang dari 4}

B = {Bilangan ganjil kurang dari 8}

• notasi

A = {x | x < 4, x bilangan asli}

B = {x | x < 8, x bilangan ganjil}

> Himpunan kosong (∅)

↳ Himpunan yg tidak memiliki anggota.

contoh : A = {siswa kelas 7 yg usianya < 7 tahun}

Maka A = { } atau A = ∅

B = {Bilangan prima antara 24 dan 28}

Maka B = { } atau B = ∅

> Himpunan Bagian (⊂)

contoh : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$

$C = \{4, 6, 8\}$

Maka : $B \subset A$ → B merupakan himpunan bagian A

$C \subset B$ → C merupakan himpunan bagian B

$A \not\subset B$ → A bukan himpunan bagian B

> anggota himpunan (∈)

contoh : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$1 \in A,\ 7 \in A,\ 9 \notin A$

> Himpunan semesta (S)

↳ himpunan yg memuat semua anggota yg dibicarakan

contoh : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Himpunan semesta yg mungkin :

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

S = {bilangan asli}

S = {bilangan bulat}

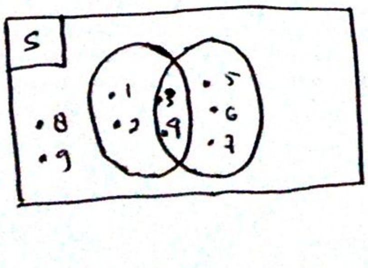
> Diagram venn

contoh : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

Diagram ven :



> Operasi himpunan

(Menggunakan contoh diagram venn)

• irisan (∩) (yg termasuk dlm dua himpunan)

↳ $A \cap B = \{3, 4\}$

• Gabungan (∪) (semua anggota gabungan)

↳ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

• Selisih (−) (semua anggota yg dikurangi irisan)

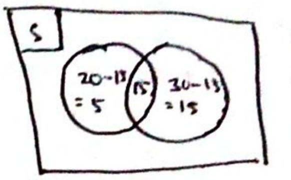
↳ $A - B = \{1, 2\}$, $B - A = \{5, 6, 7\}$

• Komplemen (^{c} atau ') (yg bukan anggota)

↳ $A^c = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $B^c = \{1, 2, 8, 9\}$

> contoh soal cerita.

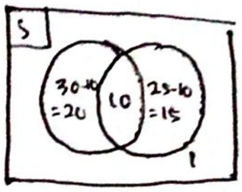
① siswa yg menyukai voli 20 anak, 30 suka basket dan 15 anak suka keduanya. brp total seluruh siswa?



5 + 15 + 15

= 35 anak

② 30 anak suka basket, 25 anak suka voli, satu anak tdk suka keduanya dan 10 anak suka keduanya. brp jumlah total anak?



20 + 10 + 15 + 1

= 46 anak

Himpunan Penyelesaian (HP)

> persamaan

contoh : ① $3x - 6 = 2(3x + 6) + 7$

$3x - 6 = 6x + 12 + 7$

$3x - 6x = 12 + 7 + 6$

$-3x = 25$

$x = \frac{25}{-3}$ $HP = \{-\frac{25}{3}\}$

② $2x + 5y = -3$ dan $3x - 2y = 5$

(menggunakan eliminasi & substitusi)

$2x + 5y = -3$ ...(1) | ×3 | $6x + 15y = -9$

$3x - 2y = 5$ ...(2) | ×2 | $6x - 4y = 10$ −

$19y = -19$

$\boxed{y = -1}$

Substitusi $y = -1$ ke pers (1)

$2x + 5(-1) = -3$

$2x - 5 = -3$

$2x = -3 + 5$

$2x = 2$

$\boxed{x = 1}$

$HP = \{1, -1\}$

> pertidaksamaan

contoh : ① $2x + 6 \leq x + 1$

$2x - x \leq 1 - 6$

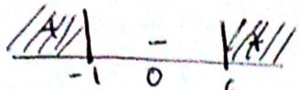
$x \leq -5$

$HP = \{x \mid x \leq -5,\ x \in R\}$.

② $x^2 - 5x - 6 > 0$

$\Rightarrow (x-6)(x+1) > 0$

$x = 6$ atau $x = -1$



HP: $\{x \mid x < -1 \text{ atau } x > 6, x \in \mathbb{R}\}$

menentukan daerah arsir:

$>\ \geq$ → yg diarsir (+)

$<\ \leq$ → yg diarsir (-)

menentukan 0 positif atau negatif:

subs 0 ke pertidaksamaan x:

$x^2 - 5x - 6 > 0$

$(0)^2 - 5(0) - 6 > 0$

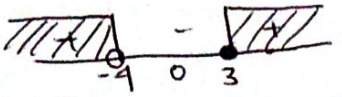
$\boxed{-6} > 0$

↳ (-) maka 0 negatif

③ $\dfrac{x-3}{x+4} \geq 0$

⇒ • $x - 3 \geq 0$ • $x + 4 \geq 0$

$x = 3$ $x = -4$



HP: $\{x \mid x < -4 \text{ atau } x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

menentukan tanda tertutup / terbuka :

• Jika $\geq$ atau $\leq$ maka:

× penyebut (●)

× pembilang (○)

• Jika $>$ atau $<$ maka:

× penyebut (○)

× penutup (○)

> HP nilai mutlak

contoh:

① $|2x - 7| = 3$

• $2x - 7 = 3$
$2x = 3 + 7$
$x = \frac{10}{2} = 5$

• $-(2x - 7) = 3$
$-2x + 7 = 3$
$-2x = 3 - 7$
$2x = 4$
$x = \frac{4}{2} = 2$

HP: $\{2, 5\}$

② $|2x - 1| = |x + 4|$

• $2x - 1 = x + 4$
$2x - x = 4 + 1$
$x = 5$

• $-(2x - 1) = x + 4$
$-2x + 1 = x + 4$
$-2x - x = 4 - 1$
$-3x = 3$
$x = -1$

HP: $\{-1, 5\}$

③ $|2x - 1| < 7$

→ $-7 < 2x - 1 < 7$

$-7 + 1 < 2x - 1 + 1 < 7 + 1$

$-6 < 2x < 8$

$-\frac{6}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{8}{2}$

→ $-3 < x < 4$

HP: $\{-3 < x < 4\}$

④ $|4x + 2| \geq 6$

→ • $4x + 2 \geq 6$ atau • $-(4x + 2) \leq 6$

$4x \geq 6 - 2$
$x \geq \frac{4}{4}$
$x \geq 1$

$-4x - 2 \leq 6$
$-4x \leq 6 + 2$
$x \leq \frac{8}{-4}$
$x \leq -2$

HP: $\{x \leq -2 \text{ atau } x \geq 1\}$

⑤ $|3x - 2| \geq |2x + 7|$

→ • $3x - 2 \geq 2x + 7$ atau • $-(3x - 2) \leq 2x + 7$

$3x - 2x \geq 7 + 2$
$x \geq 9$

$-3x + 2 \leq 2x + 7$
$-3x - 2x \leq 7 - 2$
$-5x \leq 5$
$x \leq -1$

HP: $\{x \leq -1 \text{ atau } x \geq 9\}$.

catatan nilai mutlak:

• Persamaan : $|x| = k$

⇒ • $x = k$ ~~atau~~

• $-x = k$

• pertidaksamaan :

$(\geq, >)$: $|x| \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$

$(\leq, <)$: $|x| \leq k$ → $-k \leq x \leq k$

Relasi dan fungsi

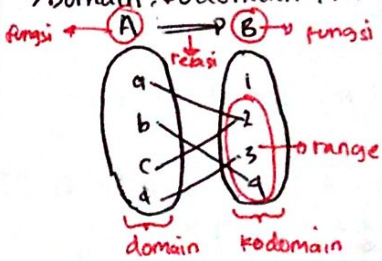
• Relasi

↳ aturan yg menghubungkan anggota suatu himpunan dengan himpunan lainnya. atau hubungan antara domain dan kodomain

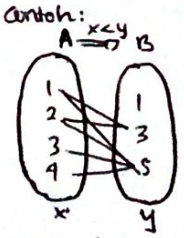
• Fungsi

↳ Fungsi adalah relasi antara domain & kodomain yg memasangkan setiap anggota himpunan daerah asal tepat satu ke himpunan daerah kawan

> Domain, kodomain, range



contoh:



Domain : (1, 2, 3, 4)

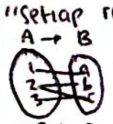
kodomain : (1, 3, 5)

range : (3, 5

> perbedaan relasi dan fungsi.

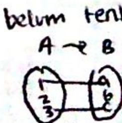
(terletak pd cara memasangkan anggota)

"setiap relasi belum tentu fungsi, setiap fungsi pasti relasi"



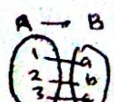
Relasi

"bukan fungsi karena domain ada 2 pasangan"



Relasi.

"bukan fungsi karena domain ada yg blm terpasangan"



Relasi & fungsi

"karena seluruh domain memiliki tepat satu pasangan"

FUNGSI (Domain & Range)

- Domain ⟹ Daerah asal (mencari batas x agar fungsi terdefinisi)
- Range ⟹ Daerah hasil (mencari batas $f(x)$)

• Kodomain ⟹ daerah kawan

tergantung soal, jika ada batas maka kodomain sesuai batas. Jika tdk maka $K_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Syarat agar suatu fungsi terdefinisi:

- $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$
- $f(x) = \sqrt{g(x)}$, $g(x) \geq 0$

Contoh Soal:

1) $F(x) = 3x - 5$, cari domain dan range:

Jawab: (karena bentuk fungsinya bukan akar/pecahan, maka tidak ada syarat yg harus dipenuhi).

- $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

(untuk mencari range, maka kita harus melihat invers fungsinya, apakah memerlukan syarat)

$y = 3x - 5$

$y + 5 = 3x$

$\dfrac{y+5}{3} = x$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{3}$ (bentuk inversnya adalah pecahan, tapi penyebutnya tidak ada fungsi x).

- $R_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ (tidak ada syarat spt domain)

2) $f(x) = x^2 - 4$

Jawab: (bentuknya bukan pecahan/akar, maka tdk ada syarat)

- $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

(invers dari $f(x)$)

$y = x^2 - 4$

$y + 4 = x^2$

$\sqrt{y+4} = x$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ (karena bentuknya akar, maka $\sqrt{g(x)}$, $g(x) \geq 0$)

$x + 4 \geq 0$

$x \geq -4$

- $R_f = \{x \mid x \geq -4, x \in \mathbb{R}\}$.

3) $f(x) = x^2 + 6x - 5$

Jawab: (bukan pecahan/akar, maka tidak ada syarat)

- $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(invers dari $f(x)$)

Tips kuadrat sempurna, untuk menemukan x

$ax^2 + bx + c = 0$

$(ax + \tfrac{1}{2}b)^2 - (\tfrac{1}{2}b)^2 + c$

$y = x^2 + 6x - 5$

$y = (x+3)^2 - 3^2 - 5$

$y = (x+3)^2 - 9 - 5$

$y = (x+3)^2 - 14$

$y + 14 = (x+3)^2$

$\sqrt{y+14} = x + 3$

$\sqrt{y+14} - 3 = x$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+14} - 3$ (karena bentuknya akar, maka $\sqrt{g(x)}$, $g(x) \geq 0$)

$x + 14 \geq 0$

$x \geq -14$

- $R_f = \{x \mid x \geq -14, x \in \mathbb{R}\}$.

4) $F(x) = \dfrac{2x+1}{3x-6}$

Jawab: (bentuknya pecahan, maka $\dfrac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$)

$3x - 6 \neq 0$

$3x \neq 6$

$x \neq 2$

- $D_f = \{x \mid x \neq 2, x \in \mathbb{R}\}$.

(inversnya $f(x)$)

$$f^{-1}(x) = \frac{6x+1}{3x-2}$$

invers fungsi pecahan: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

(karena bentuk invers pecahan, maka $\frac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$)

$3x - 2 \neq 0$

$3x \neq 2$

$x \neq \frac{2}{3}$

- $R_f = \{x \mid x \neq \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}\}$.

5) $f(x) = \sqrt{2x+4}$

Jawab : (bentuknya adalah akar, maka $\sqrt{g(x)}$, $g(x) \geq 0$)

$2x + 4 \geq 0$

$2x \geq -4$

$x \geq -2$

- $D_f : \{x \mid x \geq -2, x \in \mathbb{R}\}$.

(invers dr $f(x)$)

$y = \sqrt{2x+4}$

$y^2 = 2x + 4$

$y^2 - 4 = 2x$

$\frac{y^2 - 4}{2} = x$ → $f^{-1}(x) = \frac{x^2-4}{2}$ (bentuk pecahan, maka $\frac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$)

- $R_f : \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

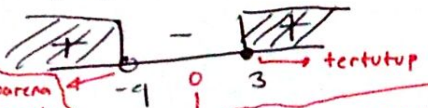
6) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+4}}$

Jawab : (bentuknya adalah akar, $\sqrt{g(x)}$, $g(x) \geq 0$)

$\frac{x-3}{x+4} \geq 0$, $\left.\begin{array}{l} x+4 \neq 0 \\ x \neq -4 \end{array}\right\}$ syarat pecahan

$x - 3 \geq 0$ $\quad$ $x + 4 \geq 0$

$x = 3$ $\quad$ $x = -4$



terbuka karena ada syarat pecahan dimana $x \neq -4$

nilainya negatif karena: $\frac{0-3}{0+4} = \frac{-3}{4} = \frac{-}{+} = -$

- $D_f : \{x \mid x < -4$ atau $x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$

(invers $f(x)$)

$y = \sqrt{\frac{x-3}{x+4}}$

$y^2 = \frac{x-3}{x+4}$ → $y^2(x+4) = x-3$

$xy^2 + 4y^2 = x - 3$

$xy^2 - x = -3 - 4y^2$

$x(y^2 - 1) = -3 - 4y^2$

$x = \frac{-3-4y^2}{y^2-1}$ → $f^{-1}(x) = \frac{-3-4x^2}{x^2-1}$ (bentuk pecahan)

$x^2 - 1 \geq 0$

$(x-1)(x+1) \geq 0$

$x \neq 1, \; x \neq -1$

- $R_f = \{x \mid x \neq 1$ atau $x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$

7) $f(x) = |x| + x - 4$

Jawab : (karena tidak ada akar / pecahan, maka domain tdk ada syarat)

- $D_f = \{x \mid x \in R\}$

(untuk mencari range fungsi nilai mutlak, perlu di definisikan)

Definisi nilai mutlak:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

- $f(x) = x + x - 4 = 2x - 4,\ x \geq 0 \rightarrow x \geq 0,\ 2x \geq 0,\ 2x - 4 \geq -4,\ f(x)_1 \geq -4$
- $f(x) = -x + x - 4 = -4,\ x < 0 \rightarrow f_2(x) = -4$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \geq 0 \\ -4, & x < 0 \end{cases}$$

$R_1 = \{x_1 \mid x_1 \geq -4\} = [-4, \infty)$ dan $R_2 = \{x_2 \mid x_2 = -4\} = \{-4\}$

- $R_f = [-4, \infty) \cup \{-4\} = [-4, \infty)$
$= \{x \mid x \geq -4\}$

8) $f(x) = |-10 + 6x - x^2|$

Jawab : (bukan akar /pecahan)

- $D_f = \{x \mid x \in R\}$

(untuk mencari range, ~~[illegible]~~)

$|x| = |-x|$

$f(x) = |-10 + 6x - x^2|$
$= |x^2 - 6x + 10|$
$= |(x-3)^2 + 1| \rightarrow x^2 - 6x + 10$
$= (x-3)^2 - 3^2 + 10$
$= (x-3)^2 - 9 + 10$
$= (x-3)^2 + 1$

↳ (bil. kuadrat selalu positif)

$(x-3)^2 \geq 0$
$(x-3)^2 + 1 \geq 1$
$|(x-3)^2 + 1| \geq |1|$
$f(x) \geq 1$

- $R_f = \{x \mid x \geq 1\}$

Himpunan Penyelesaian (HP)

SPLDV, SPLTV } eliminasi, substitusi, campuran

Contoh soal Persamaan

1) $2x + 5y = -5$ ...(1)
$3x - 2y = 5$ ...(2)

- Eliminasi

$2x + 5y = 3$ | ×3 | $6x + 15y = -9$
$3x - 2y = 5$ | ×2 | $6x - 4y = 10$ −

$19y = -19$
$\boxed{y = -1}$

$2x - 5 = -3$
$2x = -3 + 5$
$2x = 2$
$\boxed{x = 1}$

- Substitusi

Subs $y = -1$ ke pers. (1)
$2x + 5(-1) = -3$

HP = $\{1, -1\}$

Fungsi kontinu

Syarat fungsi kontinu :
- $f(a)$ ada
- $\lim_{x \to a} f(x)$ ada
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Contoh soal :

1) Selidiki $f(x) = x - 2$, $x \in \mathbb{R}$ kontinu di $x = 2$

Jawab : (i). $a = 2$

$f(2) = 2 - 2 = 0$ (0 ada nilainya)

(ii) $\lim_{x \to 2} x - 2 = 0$ (ada)

(iii) $\lim_{x \to 2} x - 2 = f(2)$

$0 = 0$ (terpenuhi)

(maka fungsi $f(x) = x - 2$ adalah fungsi kontinu)

2) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, diskontinu di $x = 2$, buktikan

Jawab : (i) $a = 2$

$f(2) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = \infty$ (nilainya tdk ada)

(jika salah satu syaratnya tdk terbukti maka sudah terbukti bahwa fungsi tersebut diskontinu).

Nilai dan vektor eigen

nilai eigen
vektor eigen

Definisi

$\bar{v}$ adalah vektor tak nol di $\mathbb{R}$ dan λ adalah skalar real sehingga memenuhi :

$$A\bar{v} = \lambda \bar{v}$$

Maka λ dinamakan nilai eigen dari A sehingga $\bar{v}$ dinamakan vektor eigen A

Contoh soal :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- nilai eigen : $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Metode Saruss

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{matrix} = 0$$

$$\left((2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) + (1) + (1)\right) - \left((2-\lambda) + (2-\lambda) + (2-\lambda)\right) = 0$$

$$\left((\lambda^2 - 4\lambda + 4)(2-\lambda) + 2\right) - (6 - 3\lambda) = 0$$

$$(2\lambda^2 - \lambda^3 - 8\lambda + 4\lambda^2 + 8 - 4\lambda + 8) - (6 - 3\lambda) = 0$$

$$(-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda + 8) + 2 - (6 - 3\lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 + 2 - 6 + 3\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0$$

Metode horner

$k = 4 \to (-1, 1, -2, 2, -4, 4)$ (angka yg bisa dibagi dgn 4)

- -1

-1	-1	6	-9	4
	$\cancel{x}$	1	-7	16
	-1	7	-16	20

(konstanta pers)

+ (cari hingga bernilai 0)

- 1

1	-1	6	-9	4
		-1	5	-4
	-1	5	-4	0

(sudah 0, maka $\lambda_1 = 1$)

didapat persamaan : $-\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0$ (dari hasil tadi)

$-\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$

$\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$

Jadi nilai eigennya:

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = 4$.

• Vektor eigen : $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$

∴ untuk $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (karena nilainya sama, vektornya akan sama)

$(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(substitusi nilai $\lambda = 1$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

didapat persamaan

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_1 = -x_2 - x_3$

misal $x_2 = s$, dan $x_3 = t$, didapat:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika $s = 1$ dan $t = 1$ didapat vektor eigen:

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

∴ untuk $\lambda_3 = 4$

$(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(substitusi $\lambda = 4$)

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

• $-2x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

(metode gauss jordan)

$$\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \text{ tukar } b_1 \text{ dan } b_2$$

$$\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ b_2 + 2b_1 \\ b_3 - b_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{3}b_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} b_1 + 2b_2 \\ \\ b_3 - 3b_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

didapat persamaan

$x_1 - x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3$

$x_2 - x_3 = 0 \rightarrow x_2 = x_3$

misal $x_3 = s$, maka:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Turunan

- Turunan fungsi

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) &= k x^n \\ F'(x) &= k n x^{n-1} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) &= k \\ F'(x) &= 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) &= x \\ F'(x) &= 1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) &= \sqrt{x} = x^{1/2} \\ F'(x) &= \frac{1}{2} x^{1/2 - 1} \end{aligned}}$$

Contoh : $F(x) = -2x^{10}$

$F'(x) = -2 . 10 \, x^{10-1}$

$= -20x^9$

contoh : $F(x) = 5$

$F'(x) = 0$

- Menggunakan limit

$$\boxed{F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}}$$

Contoh : $F(x) = 13x - 6$, cari $F'(4)$

$$F'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{F(4+h) - F(4)}{h} \rightarrow F(4+h) = 13(4+h) - 6$$

$= 52 + 13h - 6$

$= 46 + 13h$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{46 + 13h - 46}{h}$$

$f(4) = 13(4) - 6$

$= 52 - 6$

$= 46$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{13h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 13$$

$= 13$

- Operasi turunan

> Penjumlahan : Misal $f(x) = x$ dan $g(x) = 2x^3$

$$\boxed{F'(x) = dx(A(x)) + dx(B(x))}$$

$Dx\,(f(x) + g(x)) = Dx\,(x + 2x^3)$

$= Dx\,(x) + Dx\,(2x^3)$

$= 1 + 6x^2$

$= 6x^2 + 1$

> Perkalian

: misal $f(x) = x^3 . 2x$

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) &= UV \\ F'(x) &= U'V + U.V' \end{aligned}}$$

$U = x^3 \quad V = 2x$

$U' = 3x^2 \quad V' = 2$

$F'(x) = U'V + U.V'$

$= 3x^2 . 2x + x^3 . 2$

$= 6x^3 + 2x^3$

$= 8x^3$

> Pembagian

: misal $f(x) = \frac{x^3}{2x}$

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) &= \frac{U}{V} \\ F'(x) &= \frac{U'V - U.V'}{V^2} \end{aligned}}$$

$U = x^3 \quad V = 2x$

$U' = 3x^2 \quad V' = 2$

$$F'(x) = \frac{3x^2 . 2x - x^3 . 2}{(2x)^2}$$

$$= \frac{6x^3 - 2x^3}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^3}{4x^2}$$

$= x$

- ~~Turunan fungsi Trigonometri~~

~~- $Dx\,(\sin x) = \cos x$~~

~~- $Dx\,(\cos x) = -\sin x$~~

~~- $Dx\,(\tan x) = \sec^2 x$~~

~~- $Dx\,(\cot x) = -\csc^2 x$~~

~~- $Dx\,(\sec x) = (\sec x)(\tan x)$~~

~~- $Dx\,(\csc x) =$~~

- Turunan fungsi trigonometri

> $Dx\,(\sin x) = \cos x$

> $Dx\,(\cos x) = -\sin x$

> $Dx\,(\tan x) = \sec^2 x$

> $Dx\,(\sec x) = (\sec x)(\tan x)$

> $Dx\,(\csc x) = (-\csc x)(\cot x)$

> $Dx\,(\cot x) = (-\csc^2 x)$

- Turunan aturan rantai

$y = f(u)$, $u = g(x)$

g dapat diturunkan terhadap x, dan f dapat diturunkan terhadap u

Contoh : $y = (2x^2 - 4x + 1)^{20}$

Misalkan $u = 2x^2 - 4x + 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 4x - 4$

$y = u^{20} \rightarrow \frac{dy}{du} = 20u^{19}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= 20u^{19} \cdot 4x - 4$$
$$= 20(2x^2 - 4x + 1)^{19} \cdot 4x - 4$$
$$= (40x^2 - 80x + 20)^{19} (4x - 4)$$

Rumus : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh 2 : $y = \cos^3 \underbrace{(\underbrace{x^2+1}_{v})}_{u}$

Misal : $v = x^2 + 1 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$

$u = \cos v \rightarrow \frac{du}{dv} = -\sin v$

$y = u^3 \rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$
$$= 3u^2 \cdot (-\sin v) \cdot 2x$$
$$= 3(\cos v)^2 \cdot (-\sin v) \cdot 2x$$
$$= 3\cos^2 v \cdot (-\sin(x^2+1)) \cdot 2x$$
$$= 3\cos^2(x^2+1) \cdot (-\sin(x^2+1)) \cdot 2x$$
$$= 3\cos^2(x^2+1) \cdot (-2x \sin x^2 + 1)$$
$$= -6x \cos^2(x^2+1)(-\sin(x^2+1))$$

- Turunan tingkat tinggi

$y' = f'(x)$
$y'' = f''(x)$
$y''' = f'''(x)$

Contoh : > $y = 3x^4 - x^3 - x + 1$

$y' = 12x^3 - 3x^2 - 1$

$y'' = 36x^2 - 6x$

$y''' = 72x - 6$

> $y = \sin(x)$

$y' = \cos(x)$

$y'' = -\sin(x)$

$y''' = -\cos(x)$

- Turunan bentuk khusus

> $D_x \ln x = \frac{1}{x}$
> $D_x e^x = e^x$
> $D_x a^x = a^x \ln a$
> $D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

Integral

> integral tentu

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)}$$

Sifat-sifat integral tentu :

- $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$
- $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

Contoh :

- $\int_2^2 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 \Big]_2^2 = \frac{2}{3}(2)^3 - \frac{2}{3}(2)^3 = 0$
- $\int_1^2 2x^2 dx = -\int_2^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 \Big]_2^1 = \frac{2}{3}(1)^3 - \frac{2}{3}(2)^3 = -\frac{14}{3}$
- $\int_1^3 2x^2 dx = \int_1^2 2x^2 dx + \int_2^3 2x^2 dx$
  $= \frac{2}{3}x^3 \Big]_1^2 + \frac{2}{3}x^3 \Big]_2^3$
  $= \left(\frac{2}{3}(2)^3 - \frac{2}{3}(1)^3\right) + \left(\frac{2}{3}(3)^3 - \frac{2}{3}(2)^3\right)$
  $= \frac{14}{3} + \frac{20}{3} = \frac{34}{3}$

> Integral tak tentu

$$\boxed{\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c}$$

Sifat-sifat integral tak tentu :

- $\int 1\, dx = x + c$
- $\int k\, x\, dx = k \int x\, dx$
- $\int a\, dx = ax + c$
- $\int a x^n\, dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$
- $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + c$
- $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int e^x\, dx = e^x + c$

Integral pada trigonometri

- $\int \sin x\, dx = -\cos + c$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
- $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c$
- $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
- $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$
- $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + c$
- $\int \sec x . \tan x\, dx = \sec x + c$
- $\int \csc x . \cot x\, dx = -\csc x + c$

~~operasi integral~~

(dalam integral, jika ada operasi perkalian dan pembagian, harus diubah ke bentuk biasa dulu)

~~contoh 2~~ $\cancel{\int_1^2 2x^2 + x - 1\, dx}$

$\cancel{= 2x^2 + x - 1 \Big]_1^2}$

$\cancel{= (2(2)^2 + 2 - 1) - (2(1)^2 + 1 - 1)}$

$\cancel{= 9 - 2 = 7}$

contoh :

- $\int_1^2 2x^2 + x - 1\, dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x \Big]_1^2$
  $= \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - 2\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + \frac{1}{2}(1)^2 - 2\right)$
  $= \left(\frac{8}{3} + 0\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)$
  $= \frac{8}{3} + \frac{7}{6} = \frac{23}{6}$

operasi penjumlahan dan pengurangan

- $\int 2x^2 + x - 1\, dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + c$

- $\int 2x(1-x^2)\,dx = \int 2x - 2x^3\,dx$ (kalikan ke dalam terlebih dahulu)

$= \frac{2}{2}x^2 - \frac{2}{4}x^4 + c$

$= x^2 - \frac{1}{2}x^4 + c$

bentuk perkalian kurung

- $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,dx = \int x^{1/2} + x^{1/3}\,dx$ (ubah ke bentuk pangkat dahulu)

$= \frac{1}{1/2+1}x^{1/2+1} + \frac{1}{1/3+1}x^{1/3+1} + c$

$= \frac{1}{3/2}x^{3/2} + \frac{1}{4/3}x^{4/3} + c$

$= \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + c$

bentuk akar

- $\int \frac{4x^6 + 3x^4}{x^3}\,dx = \int 4x^3 + 3x\,dx$ (bagi x nya, kurangkan pangkatnya)

$= \frac{4}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + c$

$= x^4 + \frac{3}{2}x^2 + c$

bentuk pembagian

menggunakan log natural

contoh : $\int \frac{3}{4x-1}\,dx$: ubah ke log natural $\Rightarrow$ $w = 4x-1$

$dw = 4\,dx$

$dx = \frac{dw}{4}$

Substitusi ke integral $\int \frac{3}{4x-1}\,dx = \int \frac{3}{w} \cdot \frac{dw}{4}$

$= \int \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{4}$

$= \int \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{w}\,dw$

$= \frac{3}{4}\int \frac{1}{w}\,dw$ (sifat $\int kx\,dx = k\int x$)

$= \frac{3}{4} \cdot \ln|w| + c$

$= \frac{3}{4} \cdot \ln|4x-1| + c$

> aturan dalam integral

- aturan pangkat secara umum

$$\boxed{\int f(x)^n \cdot f'(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c}$$

contoh : $\int (x^4 + 3x)^{30} \cdot (4x^3 + 3)\,dx = \frac{(x^4+3x)^{31}}{31} + c.$

- aturan substitusi

$$\boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + c}$$

contoh : ① $\int \cos(2x)\,dx \Rightarrow$ misal $u = 2x$, $\frac{du}{dx} = 2 \rightarrow 2\,dx = du$

$dx = \frac{du}{2}$ / $\frac{1}{2}du$

$= \int \cos u \ \frac{1}{2}\,du$

$= \frac{1}{2}\int \cos u\,du$

$= \frac{1}{2}\sin u + C$

$= \frac{1}{2}\sin 2x + C$

② $\int \sin(3x)\,dx \Rightarrow$ misal $u = 3x$,

$\frac{du}{dx} = 3$

$dx = \frac{du}{3}$

$dx = \frac{1}{3}du$

$= \int \sin u \cdot \frac{1}{3}du$

$= \frac{1}{3}\int \sin u\,du$

$= \frac{1}{3}(-\cos u) + C$

$= -\frac{1}{3}\cos 3x + C$

② $\int x\, e^x\, dx$ ⟹ misal $u = x$ $dv = e^x$

$du = 1\, dx$ $v = \int e^x = e^x$

$dx = du$

$= x \cdot e^x - \int e^x\, dx$

$= x \cdot e^x - e^x + C$

LIMIT

• Pengertian : $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ yg diberikan terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan $0 < |x - c| < \delta$

Contoh : ① Buktikan $\lim_{x \to 4} (3x - 7) = 5$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$

$|3x - 12| < \varepsilon$

$|3|\,|x - 4| < \varepsilon$

$|x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}$

$|x - 4| < \delta$

artinya $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Bukti : $|(3x - 7) - 5| = |3x - 12| = |3(x - 4)|$

$= |3|\,|x - 4|$

$= 3\,|x - 4| < 3\delta = \cancel{3} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{3}} = \varepsilon$ ∎

∴ Limitnya ada.

② Buktikan $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

$\Rightarrow \left| \left(\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} \right) - 5 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{2x^2 - 3x - 2 - 5}{x - 2} \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{2(x^2 - 3/2\,x - 1) - 5}{x - 2} \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{2\cancel{(x - 2)}(x + 1/2)}{\cancel{x - 2}} - 5 \right| < \varepsilon$

$|2(x + 1/2) - 5| < \varepsilon$

$|2x + 1 - 5| < \varepsilon$

$|2x - 4| < \varepsilon$

$|2(x - 2)| < \varepsilon$

$|2|\,|x - 2| < \varepsilon$

$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x - 2| < \delta$

maka $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Bukti : $\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| = |2(x + 1/2) - 5|$

$= |2x - 4|$

$= |2(x - 2)|$

$= |2|\,|x - 2|$

$= 2\,|x - 2| < 2\delta = \cancel{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{2}}$

$= \varepsilon$ ∎

Teorema Limit

- $\lim_{x \to c} k = k$
- $\lim_{x \to c} x = c$
- $\lim_{x \to c} k\, f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$
- $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$
- $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$
- $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \to c} f(x) \right)^n$
- $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, n genap dan $\lim_{x \to c} f(x) > 0$

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_a^b f(u)\, du}$$ (kalau 2 fungsi dsb ada hubungan /kalau pangkat salah satu fungsi lebih tinggi)

contoh : ① $\int_{-3}^{3} \sqrt{7+2t^2}\,(8t)\, dt$ ⇒ misal $u = 7 + 2t^2$

$du = 4t\ dt$

$dt = \frac{du}{4t}$

$dt = \frac{1}{4t}\, du$

karena di ubah ke u
$\begin{cases} \text{batas atas} : 7 + 2(3)^2 = 7 + 18 = 25 \\ \text{batas bawah} : 7 + 2(-3)^2 = 7 + 18 = 25 \end{cases}$

$= \int_{25}^{25} \sqrt{u}\ (8t)^2 \frac{du}{\cancel{4t}}$

$= 0$ (sifat $\int_a^a f(x) = 0$)

② $\int_1^7 \frac{1}{\sqrt{2x+2}}\, dx$ ⇒ misal $u = 2x + 2$

$du = 2\, dx$

$dx = \frac{du}{2}$

batas atas $= 2(7) + 2 = 16$

batas bawah $= 2(1) + 2 = 4$

$\int_4^{16} \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2}$

$= \int_4^{16} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$

$= \int_4^{16} \frac{1}{2} u^{-1/2}\, du$

$= \frac{\frac{1}{2}}{-1/2+1} u^{-1/2+1} \Big]_4^{16}$

⇒ $= \frac{1/2}{1/2} u^{1/2} \Big]_4^{16}$

$= u^{1/2} \Big]_4^{16}$

$= (16)^{1/2} - (4)^{1/2}$

$= \sqrt{16} - \sqrt{4}$

$= 4 - 2$

$= 2.$

> Integral parsial

$$\boxed{\int u\ dv = uv - \int v\ du.}$$ (digunakan jika dua fungsi tidak ada hubungan)

contoh : ① $\int (x+3)\sqrt{2x-5}\ dx$

$= \int (x+3)(2x-5)^{1/2}\, dx$ ⇒ misal $u = x + 3$

$du = 1\, dx$

$dx = du.$

$dv = (2x-5)^{1/2}\, dx$

$v = \int (2x-5)^{1/2}\, dx$

misal $w = 2x - 5$

$dw = 2\, dx$

$dx = \frac{dw}{2}$

$v = \int (w)^{1/2} \frac{dw}{2}$

$= \int \frac{1}{2} (w)^{1/2}\, dw$

$= \frac{1/2}{1/2+1} w^{1/2+1} + c$

$= \frac{1/2}{3/2} w^{3/2} + c$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} w^{3/2} + c$

$= \frac{1}{3} w^{3/2} + c$

$v = \frac{1}{3} (2x-5)^{3/2} + c$

$= (x+3)\left(\frac{1}{3}(2x-5)^{3/2}\right) - \int \frac{1}{3}(2x-5)^{3/2}\, dx$

misal : $z = 2x - 5$

$dz = 2\, dx$

$dx = \frac{dz}{2}$

$= \int \frac{1}{3} (z)^{1/2} \cdot \frac{dz}{2}$

$= \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (z)^{3/2}\, dz$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3/2+1} z^{3/2+1} + c$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5/2} z^{5/2} + c$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{5} z^{5/2} + c$

$= \frac{1}{15} z^{5/2} + c$

$= (x+3)\left(\frac{1}{3}(2x-5)^{3/2}\right) - \left(\frac{1}{15} z^{5/2} + c\right)$

$(x+3)\left(\frac{1}{3}(2x-5)^{3/2}\right) - \frac{1}{15} z^{5/2} + c.$

Integral fungsi Rasional

$$\boxed{\int \frac{dv}{dv} = \ln|v| + c}$$

Contoh : ① $\int \frac{2x+1}{x^2-8x+12}\,dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-6)}$

$\frac{2x+1}{\cancel{x^2-8x+12}}\,dx = \frac{A(x-6)+B(x-2)}{\cancel{x^2-8x+12}}$

$= 2x+1 = A(x-6) + B(x-2)$

$2x+1 = Ax - 6A + Bx - 2B$

$2x+1 = x(A+B) + (-6A-2B)$

	kanan	kiri
koef x	2	A + B
konstanta	1	- 6A - 2B

$\to A+B = 2$

$A = 2 - B$

$\to -6A - 2B = 1$

$-6(2-B) - 2B = 1$

$-12 + 6B - 2B = 1$

$4B = 13$

$B = \frac{13}{4}$

Subs nilai B: $A + \frac{13}{4} = 2$

$A = 2 - \frac{13}{4}$

$A = \frac{8-13}{4}$

$A = -\frac{5}{4}$

$\int \frac{2x+1}{x^2-8x+12}\,dx = \int \frac{-5/4}{(x-2)} + \int \frac{13/4}{(x-6)}$

$= -\frac{5}{4}\ln|x-2| + C_1 + \frac{13}{4}\ln|x-6| + C_2$

$= -\frac{5}{4}\ln|x-2| + \frac{13}{4}\ln|x-6| + C.$

② $\int \frac{1}{(x+3)(x-3)}\,dx = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-3)}$

$\frac{1}{\cancel{(x+3)(x-3)}} = \frac{A(x-3)+B(x+3)}{\cancel{(x+3)(x-3)}}$

$1 = Ax - 3A + Bx + 3B$

$1 = x(A+B) + (-3A+3B)$

	kanan	kiri
koef x	0	A + B
konstanta	1	-3A + 3B

$\to A+B = 0$

$A = -B$

$\to -3A + 3B = 1$

$-3(-B) + 3B = 1$

$3B + 3B = 1$

$B = \frac{1}{6}$

Subs nilai B : $A = -B$

$A = -\frac{1}{6}$

$\int \frac{1}{(x+3)(x-3)}\,dx = \int \frac{-1/6}{(x+3)}\,dx + \int \frac{1/6}{(x-3)}$

$= -\frac{1}{6}\ln|x+3| + C_1 + \frac{1}{6}\ln|x-3| + C_2$

$= -\frac{1}{6}\ln|x+3| + \frac{1}{6}\ln|x-3| + C.$

Lanjutan integral rasional

3) $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}$

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x-1)}$$

$$\frac{5x+3}{\cancel{x^3-2x^2-3x}} = \frac{A(x-3)(x-1) + B(x)(x-1) + C(x)(x-3)}{\cancel{x^3-2x^2-3x}}$$

$$5x+3 = A(x^2-4x+3) + B(x^2-x) + C(x^2-3x)$$

$$5x+3 = Ax^2 - 4Ax + 3A + Bx^2 - Bx + Cx^2 - 3Cx$$

$$5x+3 = x^2(A+B+C) + x(-4A-B-3C) + 3A$$

	kanan	kiri
koef x^2	0	$A+B+C$
koef x	5	$(-4A-B-3C)$
konstanta	3	$3A$

- $3A = 3$
  $A = 1$
- $A+B+C=0$
  $1+B+C=0$
  $B+C=-1$
  $B=-1-C$
- $-4A-B-3C=5$
  $-4(1)-(-1-C)-3C=5$
  $-4+1+C-3C=5$
  $-2C=8$
  $C=-4$

$-1-(-4)$
$-1+4$
$B=3$

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{3}{(x-3)}\,dx + \int \frac{-4}{(x-1)}\,dx$$

$$= \ln|x| + C_1 + 3\ln|x-3| + C_2 + (-4)\ln|x-1|$$

$$= \ln|x| + 3\ln|x-3| - 4\ln|x-1| + C.$$

jutan

- Data kelompok

$$\boxed{D_i = Tb_i + \left(\frac{\frac{i}{10}n - \Sigma f_{-i}}{f_i}\right)p}$$

D_i = ~~kuartil~~ desil kei ($i = 1, 2, 3, \ldots, 9$)

Tb_i = tepi bawah kelas desil ke-i

n = jumlah semua prekuensi

Σf_{-i} = jumlah prekuensi sblm kelas ~~kuartil~~ desil ke-i

f_i = prekuensi desil ke-i

p = panjang kelas

contoh:

nilai	prekuensi	Σf
31-36	6	6
37-42	4	10
43-48	9	19
49-54	14	33
55-60	10	43
61-66	2	45
67-72	5	50

Desil ketiga:

- $\frac{3}{10}n = \frac{3}{10}(50) = 15$
- $Tb_3 = 43 - 0{,}5 = 42{,}5$
- $\Sigma f_{-3} = 10$
- $f_3 = 9$
- $p = 6$

$D_3 = 42{,}5 + \left(\frac{15-10}{9}\right)6$

$= 42{,}5 + \left(\frac{5}{9}\right)6$

$= 42{,}5 + \frac{30}{9}$

$= 42{,}5 + 3{,}3$

$= 45{,}8$

Garis Linear

> kemiringan

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

> Persamaan garis

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

> bentuk kemiringan titik

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Contoh : tentukan pers. garis $\overset{x_1, y_1}{(-1, 2)}$ & $\overset{x_2, y_2}{(3, 1)}$

$\Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{1}{4}$

bentuk kemiringan titik :

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - (-1))$

$y - 2 = -\frac{1}{4}(x + 1)$

$y - 2 = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

$y - 2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0$ $\quad \times 4$

$x + 4y - 8 + 1 = 0$

$x + 4y - 7 = 0$

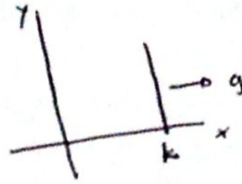
> bentuk kemiringan intersep

↳ dipakai kalau memotong sumbu y di (0, b)

$$\boxed{y = mx + b}$$

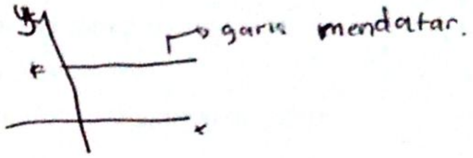
> garis tegak

↳ ketika $x = k$, k = konstanta



> garis mendatar

↳ ketika $y = k$, k = konstanta



> pers. Linear umum

$$\boxed{Ax + By + c = 0}$$

bedanya dgn biasa :

$$\boxed{y = ax + c}$$

contoh : buat pers. dgn intersept y = 3 dan m = 2.

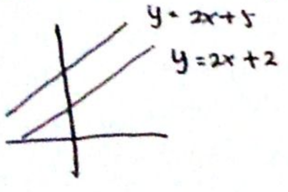
$y = 2x + 3$ → intersept y.

2 ↓ kemiringan (m)

dpt ditulis : $-2x + y - 3 = 0$

Garis sejajar

↳ jika 2 garis punya kemiringan yg sama



contoh : carilah persamaan garis yg melalui (6, 8) yg sejajar dgn garis yg mempunyai pers.

$3x - 5y = 11$

→ $3x - 5y = 11$

$-5y = 11 - 3x$

$y = -\frac{11}{5} + \frac{3}{5}x$

$y = \frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$

$m = \frac{3}{5}$ sehingga →

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

$(y - 8) = \frac{3}{5}(x - 6)$

$y - 8 = \frac{3}{5}x - \frac{18}{5}$

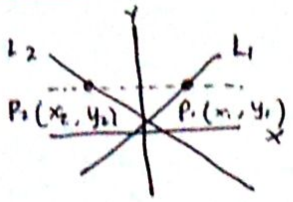
$y - 8 - \frac{3}{5}x + \frac{18}{5} = 0$ $\quad \times 5$

$-3x + 5y - 40 + 18 = 0$

$-3x + 5y - 22 = 0$.

Garis tegak lurus

↳ 2 garis ~~tegak~~ tak tegak akan saling tegak lurus jika dan hanya jika kemiringan keduanya saling berkebalikan negatif



Contoh : Cari persamaan garis yg melalui titik potong garis dgn persamaan $3x+4y=8$ dan $6x-10y=7$ yg tegak lurus dgn garis pertama.

→ • cari 2 titik potongnya dgn eliminasi

$$\begin{array}{l|l|l} 3x+4y=8 & \times 2 & 6x+8y=16 \\ 6x-10y=7 & \times 1 & 6x-10y=7 \\ \hline & & 18y = 9 \\ & & y = \frac{1}{2} \end{array}$$

• substitusi nilai y

$3x + 4y = 8$

$3x + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 8$

$3x = 8 - 2$

$3x = 6$

$x = 2$

tipot = $(2, 1/2)$

• Cari m garis 1

$3x + 4y = 8$

$4y = -3x + 8$

$y = -\frac{3}{4}x + 2$

$mg_1 = -\frac{3}{4}$

• cari m garis 2

$\boxed{\text{Hasil kali } mg_1 \text{ dan } mg_2 = -1}$

$mg_1 \times mg_2 = -1$

$\left(-\frac{3}{4}\right) \times mg_2 = -1$

$mg_2 = \frac{-1}{(-3/4)}$

$mg_2 = 1 \times \frac{4}{3}$

$= \frac{4}{3}$

• Substitusi x, y dan mg_2

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1/2 = 4/3(x - 2)$

$y - 1/2 = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$

$\cancel{y - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}}$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + \frac{1}{2}$

$y = \frac{8}{6}x - \frac{13}{6}$.

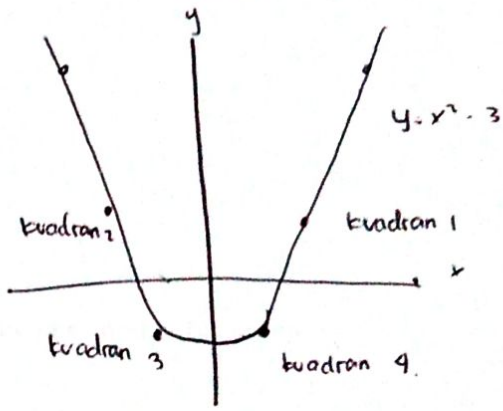
Grafik persamaan

↳ prosedur penggambaran grafik.

1. dapat koordinat" beberapa titik
2. sambung titik" tsb di bidang
3. hubungkan dgn kurva mulus.

Contoh: gambar grafik pers. $y = x^2 - 3$

x	y
-3	6
-2	1
-1	-2
0	-3
1	-2
2	1
3	6



> intersep

↳ titik" tempat grafik suatu persamaan memotong kedua sumbu koordinat memainkan peran penting.

Misal:

$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$= (x+2)(x-1)(x-3)$

$x = -2,\ x = 1,\ x = 3$

Bilangan 2,1,3 disebut intersep -x

Jika $y = 6$ maka 6 disebut intersep-y.

Lanjutan grafik persamaan

> Perpotongan grafik

Contoh :

Carilah titik perpotongan garis $y = -2x + 2$ dan parabola $y = 2x^2 - 4x - 2$ dan sketsakan kedua grafik tsbt pd bidang koordinat yg sm.

$$\Rightarrow -2x + 2 = 2x^2 - 4x - 2$$
$$0 = 2x^2 - 4x + 2x - 2 - 2$$
$$0 = 2x^2 - 2x - 4$$
$$0 = (2x - 4)(x + 1)$$
$$0 = 2(x - 2)(x + 1)$$
$$x = 2, \quad x = -1$$

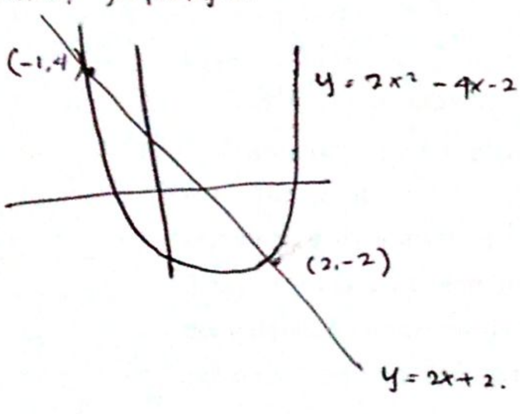
Substitusi $x = 2$ ke $y = -2x + 2$

$$y = -2(2) + 2$$
$$= -4 + 2$$
$= -2$ (sehingga didapat titik $(2, -2)$)

Substitusi $x = -1$ ke $y = 2x^2 - 4x - 2$

$$= 2(-1)^2 - 4(-1) - 2$$
$$= 2 + 4 - 2$$
$= 4$ (sehingga didapat titik $(-1, 4)$)

Maka, grafiknya :



fungsi Logaritma

> konsep dasar

$$\boxed{\begin{array}{l} a^n = b \\ a = \sqrt[n]{b} \\ n = {}^a\log b. \end{array}}$$

> Definisi

$$\boxed{a^b = c \Leftrightarrow {}^a\log c = b}$$

Contoh : $5^2 = 25 \Leftrightarrow {}^5\log 25 = 2$

${}^2\log 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$

${}^3\log 27 = 3.$

> sifat-sifat logaritma.

① $\boxed{{}^a\log a = 1}$

② $\boxed{{}^a\log 1 = 0}$

③ $\boxed{{}^a\log bc = {}^a\log b + {}^a\log c}$

contoh : ${}^2\log 32 = {}^2\log (8.4)$

$= {}^2\log 8 + {}^2\log 4$

$= 3 + 2$

$= 5$

④ $\boxed{{}^a\log \frac{b}{c} = {}^a\log b - {}^a\log c}$

contoh : ${}^3\log 18 - {}^3\log 2 = {}^3\log \left(\frac{18}{2}\right)$

$= {}^3\log 9$

$= 2$

⑤ $\boxed{{}^a\log b^n = n.\ {}^a\log b.}$

contoh : ${}^2\log 32 = {}^2\log 2^5$

$= 5.\ {}^2\log 2$

$= 5.\ 1$

$= 5$

⑥ $\boxed{{}^{a^m}\log b^n = \frac{n}{m}\ {}^a\log b}$

contoh : ${}^8\log 4 = {}^{2^3}\log 2^2$

$= \frac{2}{3}\ {}^2\log 2$

$= \frac{2}{3}$

⑦ $\boxed{{}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}}$

contoh : ${}^8\log 2 = \frac{1}{{}^2\log 8}$

$= \frac{1}{3}$

⑧ $\boxed{{}^a\log b.\ {}^b\log c.\ {}^c\log d = {}^a\log d.}$

contoh: ${}^3\log 2.\ {}^2\log 5.\ {}^5\log 9 = {}^3\log 9$

$= 2$

⑨ $\boxed{a^{{}^a\log b} = b}$

contoh : $2020^{{}^{2020}\log 2019} = 2019$

⑩ $\boxed{\frac{{}^a\log b}{{}^a\log c} = {}^c\log b}$

contoh: Jika ${}^2\log 3 = p$ dan ${}^3\log 5 = q$

Maka ${}^5\log 12 = \ldots$

${}^5\log 12 = \frac{{}^3\log 12}{{}^3\log 5}$

$=$

Himpunan fuzzy

> Himpunan klasik / himpunan tegas (crisp set)

↳ keanggotaan suatu unsur di dalam himpunan dinyatakan secara tegas, apakah objek tersebut anggota himpunan atau bukan. Untuk sembarang himpunan A, sebuah unsur x adalah anggota himpunan apabila x terdapat atau terdefenisi di dalam A.

contoh : $A = \{0, 4, 7, 8, 11\}$ maka $7 \in A$, tetapi $5 \notin A$.

~~himpunan fuzzy~~

↳ pd himpunan klasik / tegas, nilai keanggotaan suatu item x dalam suatu himpunan A ditulis $[\mu_A(x)]$ memiliki 2 kemungkinan :

- Satu (1) artinya x adalah anggota A.
- Nol (0) artinya x bukan anggota A.

contoh : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{3, 4, 5\}$

maka : nilai keanggotaan 2 pd A, $\mu_A[2] = 1$, karena $2 \in A$
nilai keanggotaan 4 pd A, $\mu_A[4] = 0$, karena $4 \notin A$.

> Himpunan fuzzy

↳ keanggotaan suatu unsur yg dinyatakan secara samar, memiliki nilai keanggotaan pada interval 0 sampai 1.

> Kejadian saling bebas

↳ Kejadian A dan B disebut saling bebas jika kejadian A tidak berpengaruh pada kejadian B dan sebaliknya.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Contoh : pada pelemparan sebuah dadu dan sebuah koin secara bersamaan, tentukan peluang muncul mata dadu bilangan prima dan muncul sisi angka pd koin.

⇒ A : kejadian muncul mata dadu bil. prima $\{2,3,5\}$

$n(A) = 3$

$P(A) = \frac{3}{6}$

B = kejadian muncul sisi angka pd koin

$P(B) = \frac{1}{2}$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

> Peluang bersyarat

↳ Kejadian tidak saling bebas namun saling mempengaruhi. ~~Terjadi apabila ke~~ peluang terjadinya kejadian B apabila kejadian A telah terjadi.

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}}$$

Contoh : pada pemilihan ketua organisasi terdapat 14 calon, 8 laki-laki dan 6 perempuan. Di antara 8 laki-laki yg merupakan calon ketua, 5 di antaranya masuk ranking 10 besar di kelas masing-masing dan di antara 6 perempuan, 4 di antaranya masuk ranking 10 besar. Tentukan peluang yg terpilih adalah laki-laki & masuk rangking 10 besar

⇒ A = masuk ranking 10 besar

B = laki-laki

$n(A) = 9$ $\quad n(B) = 5$ $\quad n(B \cap A) = 5$

$P(A) = \frac{9}{14}$ $\quad P(B) = \frac{5}{14}$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{5/14}{9/14}$$

$$= \frac{5}{\cancel{14}} \times \frac{\cancel{14}}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

Lanjutan peluang.

> Komplemen suatu kejadian.

$$\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$$

Contoh: ① peluang seseorang diterima di PTN adalah 0,54. berapakah peluang ia tidak diterima di PTN?

=> $P(A) = 0,54$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$= 1 - 0,54$

$= 0,46$

② Tujuh orang duduk mengelilingi meja bundar, berapakah peluang 3 orang tertentu tidak akan duduk berdampingan?

=> $n(A) = (5-1)! \cdot 3!$ $\quad n(S) = (7-1)!$

$= 4! \cdot 3!$ $\quad = 6!$

$= 24 \cdot 6$ $\quad = 720$

$= 144$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{144}{720} = \dfrac{1}{5}$

$P(A^c) = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$

~~Kejadian majemuk~~

> frekuensi harapan

$$\boxed{F(A) = P(A) \times \text{banyak percobaan}}$$

Contoh:

① pada pelemparan dua dadu sekaligus sebanyak 72 kali, berapakah frekuensi harapan jumlah kedua dadu lebih dari sama dgn 10?

=> $A = \{(4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)\}$

$n(A) = 6$

$n(S) = 6^2 = 36$

$P(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$F(A) = \dfrac{1}{6} \times \cancel{72}^{12} = 12$

② berdasarkan perkiraan cuaca, peluang tidak turun hujan di kota tasikmalaya selama bulan november 2020 adalah $\frac{7}{15}$, berapa hari kah harapan turun hujan di kota tasikmalaya selama bulan november 2020?

=> Misal: A = kejadian tidak turun hujan

$P(A) = \dfrac{7}{15}$

Maka, peluang turun hujan:

$P(A^c) = 1 - \dfrac{7}{15} = \dfrac{8}{15}$

$F(A^c) = \dfrac{8}{15} \times \cancel{30}^{2} = 16.$

> Kejadian Majemuk

- Kejadian saling lepas.

↳ kejadian A dan B disebut saling lepas jika kejadian A dan B tidak dapat terjadi pd saat bersamaan (tidak beririsan).

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

contoh: pada pelemparan dua buah dadu sekaligus, hitunglah peluang muncul dadu berjumlah 6 atau dadu berjumlah 11.

=> : A = kejadian muncul dadu berjumlah 6

B = kejadian muncul dadu berjumlah 11.

$A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$n(A) = 5$

$B = \{(5,6), (6,5)\}$

$n(B) = 2$

$n(S) = 6^2 = 36$

$P(A) = \dfrac{5}{36}$, $P(B) = \dfrac{2}{36}$

$P(A \cup B) = \dfrac{5+2}{36} = \dfrac{7}{36}$

- Kejadian tidak saling lepas.

↳ kejadian A dan kejadian B disebut kejadian tidak saling lepas jika kejadian A dan kejadian B dpt terjadi pd saat bersamaan (beririsan).

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Contoh: Dua dadu berwarna merah dan biru dilempar satu kali bersamaan. Tentukan peluang munculnya dadu lebih dr 4 untuk dadu berwarna merah dan lebih dr 5 utk dadu warna biru

=> A = kejadian muncul mata dadu merah > 4

b m

$n(A) = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)\} = 12$

B = kejadian muncul mata dadu biru > 5

$n(B) = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} = 6$

$n(S) = 36$

yg beririsan $(n(A \cap B)) = 2$

$P(A \cup B) = \dfrac{12}{36} + \dfrac{6}{36} - \dfrac{2}{36} = \dfrac{4}{9}$

- Faktorial

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

contoh : $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$$\boxed{0! = 1}$$

- Permutasi

↳ menyusun percobaan dgn memperhatikan urutan.

> $\boxed{P^n_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}}$ permutasi unsur yg berbeda.

contoh : dlm suatu organisasi akan dipilih seorang ketua, sekre, dan bendahara. brp banyak susunan kepengurusan yg mungkin dr 7 calon yg tersedia?

$\Rightarrow$ $P^7_3 = \dfrac{7!}{(7-3)!}$

$= \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}}$

$= 210$ susunan

> $\boxed{P = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \, n_3! \ldots n_k!}}$ permutasi unsur yg sama.

contoh : Berapa banyak susunan berbeda yg dapat dibuat dr huruf" yg terdapat pd kata "Belibis"?

$\Rightarrow$ $n = 7$ → seluruh huruf

$n_B = 2$
$n_i = 2$ } unsur yg sama

$P = \dfrac{7!}{2! \cdot 2!}$

$= \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 2 \cdot 1}$

$= 1.260$

> $\boxed{P = (n-1)!}$ permutasi siklis (disusun melingkar)

contoh : ① 6 orang pengurus OSIS mengadakan rapat. meja rapat berbentuk bundar. Berapa banyak posisi duduk yg mungkin.

$\Rightarrow$: $n = 6$

$P = (n-1)!$

$= (6-1)!$

$= 5!$

$= 120$.

② seorang ayah, ibu, dan 3 orang anak duduk pd meja bundar. brp banyak posisi duduk yg mungkin jika ayah dan ibu harus berdampingan?

$\Rightarrow$: $P = (4-1)! \, 2!$ → 2 org yg harus berdampingan

(4 → ibu dan ayah dihitung satu unsur)

$= 3! \cdot 2!$

$= 6 \cdot 2$

$= 12$

- Kombinasi

↳ menyusun percobaan tanpa memperhatikan urutan.

$$C^n_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

contoh : Sebuah pertemuan dihadiri oleh 10 org, jika setiap orang saling berjabat tgn satu sama lain, brp banyak jabat tangan yg terjadi?

$\Rightarrow$ $C^{10}_2 = \dfrac{10!}{(10-2)!\,2!}$

$= \dfrac{10!}{8!\,2!}$

$= \dfrac{\cancel{10}^5 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot \cancel{2} \cdot 1}$

$= 45$ jabat tangan

- Probabilitas (peluang)

Defenisi : peluang adalah besarnya kemungkinan terjadinya sebuah kejadian.

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}}$$

$0 \leq P(A) \leq 1$

contoh:

① sebuah dadu dilemparkan satu kali. Brp peluang muncul jumlah mata dadu yg merupakan bilangan prima?

$\Rightarrow$ $n(A) = 3$ (2, 3, 5)

$n(S) = 6$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

② Dari 7 orang pria dan 5 wanita akan dipilih 4 orang secara acak. Brpkh peluang dr 4 orang yg terpilih 3 diantaranya pria dan satu orang wanita

$\Rightarrow$ (menggunakan kombinasi karna tdk memperhatikan urutan)

$n(A) = C^7_3 \cdot C^5_1$

$n(S) = C^{12}_4$

$P(A) = \dfrac{C^7_3 \cdot C^5_1}{C^{12}_4} = \dfrac{\dfrac{7!}{4!\,3!} \cdot \dfrac{5!}{4!\,1!}}{\dfrac{12!}{8!\,4!}}$

$= \dfrac{\dfrac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5^3 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} \cdot \dfrac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 1}}{\dfrac{\cancel{12}^3 \cdot 11 \cdot \cancel{10}^5 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}}$

$= \dfrac{35}{99}$.

Peluang

> Kaidah pencacahan

- aturan penjumlaha

↳ ada sebanyak a benda dan b benda, keduanya tidak beririsan, maka:

$\boxed{a+b}$

contoh: seseorang ingin membeli motor.
ada 5 jenis Honda, 3 jenis Yamaha dan 2 jenis suzuki.
berapa pilihan yg tersedia?

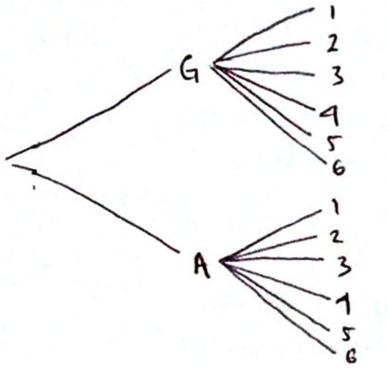
⇒ $5+3+2 = 10$ jenis pilihan.

- aturan perkalian

↳ 1) menyebutkan kejadian satu persatu.

contoh: sebuah dadu dan uang logam dilempar secara bersamaan. berapa hasil berlainan yg dpt terjadi?

⇒ uang dadu Hasil yg mungkin



G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 } total 12 cara.

2) pengisian tempat

contoh: ① Alya mempunyai 5 baju dan 3 celana. berapa cara alya dpt memakai baju dan celana?

⇒ | 5 | 3 | $= 5 \times 3 = 15$ cara.

② Dari angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5 dan 6, berapa banyak bilangan yg terdiri dari 4 angka yg dapat disusun?

a) tanpa pengulangan

b) boleh berulang.

⇒ a) karena akan menyusun $\underbrace{\text{4 angka}}_{\text{angka ribuan}}$, maka membutuhkan 4 kotak

| 6 | 6 | 5 | 4 | ⇒ $6 \times 6 \times 5 \times 4 = 720$ bilangan

karena 0 tidak mungkin berada di awal, maka 6 angka yg memiliki peluang.

setelah satu angka terpakai di awal, maka tersisa 6 angka dr 7. (tidak boleh berulang)

b) boleh berulang

| 6 | 7 | 7 | 7 | ⇒ $6 \times 7 \times 7 \times 7 = 2.058$ bilangan

sama spt di atas

karena boleh berulang maka seluruh angka memiliki peluang.

Jenis-jenis bilangan

- Bilangan kompleks (a + ib) → terdiri dr bil. real & imaginer
  - Bil. imaginer (a + ib)
  - Bilangan Riil (R)
    - Bil. irasional ((√), log, phi)
    - Bil. Rasional (Q)
      - bil. pecahan (%, ($\frac{a}{b}$), desimal)
      - Bil. Bulat (Z)
        - Bil. bulat negatif
        - Bil. cacah
          - Bil. 0 (nol)
          - Bil. bulat positif / bil. asli (N)
            - Bil. komposit
            - 1
            - Bil. prima

Statistik dan statistika

Statistika → Metode ilmiah mengenai cara untuk mengumpulkan, mengelola, menganalisa, menginterpretasikan data

Statistik → Hasil pengolahan data yang disajikan dalam bentuk grafik, tabel, diagram, dll

Statistika Deskriptif

Statistika deskriptif digunakan untuk menganalisis data dgn cara mendeskripsikan atau menggambarkan data dgn cara mendeskripsikan atau menggambarkan data melalui penyajian berbentuk tabel, grafik, dll.

Deskriptif & Inferensial

- Deskriptif ⇒ hanya menggambarkan karakteristik data namun tdk digunakan u/ mengambil kesimpulan u/ populasi.
- Inferensial ⇒ memberikan analisis yg lebih mendalam dan bisa digunakan u/ menarik kesimpulan pada populasi.

Langkah-langkah FTS-markov chain

(1) menentukan himpunan semesta U (apa itu himpunan semesta U? ↳ himpunan yang memuat seluruh anggota U didalamnya)

- menentukan D_1 dan D_2 → (sebarang bilangan positif dengan syarat:
  - $D_{min} - D_1 < D_{min}$
  - $D_{max} + D_2 > D_{max}$ } D_{min} & D_{max} dari data.)
- menentukan D_{min} dan D_{max}

$$\boxed{U = \{D_{min} - D_1 \; ; \; D_{max} + D_2\}}$$

(2) menentukan partisi himpunan U (U_n) (apa itu partisi U? ↳ himpunan yg diatur berdasarkan kelas interval yg ditetapkan dr himpunan U. tujuannya apa? ↳ menentukan kelas-kelas interval himpunan U sehingga tiap data dapat ditentukan keberadaan kelasnya u/ menemukan nilai linguistik nantinya.)

- menentukan banyaknya partisi u (n)

$$\boxed{n = 1 + 3{,}322 \log(N)}$$ → Rumus Sturgess

n: banyaknya partisi; N: banyaknya data

(apa itu sturgess? ↳ aturan yg sering digunakan dlm statistika utk mengajikan data dlm bentuk kelas-kelas interval) → (kelebihannya? ↳ memiliki distribusi frekuensi data yg baik)

- menentukan panjang interval (l)

$$\boxed{l = \frac{(D_{max} - D_2) - (D_{min} - D_1)}{n}}$$

(tujuannya? ↳ memiliki partisi dengan kelas interval yg panjangnya sama, sehingga jumlah banyaknya partisi sesuai dgn n.)

- menentukan partisi U (U_n)

$u_1 = [D_{min} - D_1 \; ; \; D_{min} - D_1 + l]$

$u_2 = [D_{min} - D_1 + l \; ; \; D_{min} - D_1 + 2l]$

⋮

$u_n = [D_{min} - D_1 (n-1)l \; ; \; D_{min} - D_1 + nl]$

($u_1, u_2, \ldots u_n$ juga digunakan ~~sebagai~~ u/ menentukan nilai linguistik dlm penelitian ini. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah nilai linguistiknya.)

- menentukan median dr ~~himpunan~~ U_n (m_n). (berguna dalam mencari hasil peramalan)

$$\boxed{m_n = \frac{d_n + d_{n+1}}{2}}$$

(3) menentukan himpunan fuzzy. (A_j) (sebagai nilai linguistik dari data)

$$\boxed{A_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_j(u_i)}{u_i}}$$

dengan aturan:
- $\mu_j(u_i) = 1 \; ; \; j = i$
- $\mu_j(u_i) = 0{,}5 \; ; \; j$ dan i berselisih 1
- $\mu_j(u_i) = 0 \; ;$ lainnya.

$$A_1 = \frac{1}{u_1} + \frac{0{,}5}{u_2} + \frac{0}{u_3} + \ldots + \frac{0}{u_i}$$

$$A_2 = \frac{0{,}5}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{0{,}5}{u_3} + \ldots + \frac{0}{u_i}$$

$$A_3 = \frac{0}{u_1} + \frac{0{,}5}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \ldots + \frac{0}{u_i}$$

⋮

$$A_j = \frac{0}{u_1} + \frac{0}{u_2} + \frac{0}{u_3} + \ldots + \frac{0{,}5}{u_{i-1}} + \frac{1}{u_i}$$

(contoh: misal $j = 4$,
$A_4 = \frac{0}{u_1} + \frac{0}{u_2} + \frac{0{,}5}{u_3} + \frac{1}{u_4}$)

(4) fuzzifikasi (mengubah nilai numerik ke nilai linguistik → agar menemukan FLR → menemukan FLRG → menemukan matriks transisional probabilitas → menemukan hasil peramalan. simpelnya fuzzifikasi dilakukan untuk menemukan nilai linguistik sehingga bisa melihat hubungan antar data satu dgn data sblmnya).

dilakukan dgn melihat ~~data~~ nilai data ke-n masuk ke interval U_n mana. kemudian melihat U_n yang memiliki nilai keanggotaan 1 ($\mu_j u_i = 1$) di pers. A_j di atas. A_j yg memiliki nilai $\mu_j(u_i) = 1$ akan menjadi nilai linguistik dr data ke-n

(11) pd lemparan dari dua buah dadu sekaligus, hitunglah peluang muncul dadu berjumlah 6 atau 11.

menggunakan kejadian saling lepas : A dan B tdk dpt terjadi pd saat bersamaan
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\Rightarrow$ $n(A) = 5$ $(\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\})$
$n(B) = 2$ $(\{(5,6), (6,5)\})$
$n(S) = 6^2 = 36$
$P(A) = \frac{5}{36}$, $P(B) = \frac{2}{36}$
$P(A \cup B) = \frac{5}{36} + \frac{2}{36} = \frac{7}{36}$

(12) dua buah dadu berwarna merah & biru dilempar satu kali bersamaan. tentukan peluang munculnya dadu lbh dr 4 utk dadu merah dan > 5 utk dadu biru.

menggunakan kejadian tidak saling lepas : A dan B terjadi pd saat bersamaan (beririsan)
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow$ A : kejadian mata dadu > 4 merah
B : kejadian mata dadu > 5 biru

$n(A) = 12$ $(\{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (6,6)\})$
$n(B) = 6$ $(\{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4)\})$
$n((A) \cap (B)) = 2$ $(\{(5,6), (6,6)\})$
$P(A \cup B) = \frac{12}{36} + \frac{6}{36} - \frac{2}{36} = \frac{4}{9}$

(13) pd pelemparan sebuah dadu dan koin bersamaan, tentukan peluang muncul dadu bilangan prima dan muncul sisi angka pd koin.

menggunakan kejadian saling bebas : A dan B tdk saling berpengaruh
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$\Rightarrow$ $n(A) = 3$ (bil. prima)
$n(B) = 1$ (sisi angka
$n(S_A) = \cancel{3}6$
$n(S_B) = 2$
$P(A \cap B) = \frac{3}{\cancel{36}} \times \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(14)

	laki-laki	perempuan
jumlah	8	6
yg masuk 10 besar	5	4

tentukan peluang yg terpilih laki-laki & masuk 10 besar.

menggunakan peluang bersyarat : peluang kejadian B bersyarat apabila kejadian A tlh terjadi.
$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$\Rightarrow$ A : masuk rangking 10 besar (telah terjadi)
B : laki-laki masuk 10 besar
$n(A) = 9$
$n(B) = 5$
$n(B \cap A) = 5$

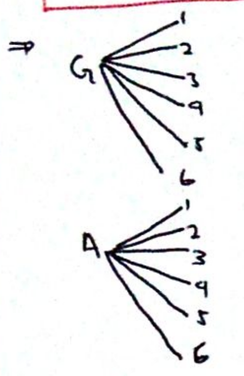
$P(B|A) = \frac{5/14}{9/14}$
$= \frac{5}{\cancel{14}} \times \frac{\cancel{14}}{9}$
$= \frac{5}{9}$

Pelvang

kaidah pencacahan

① sebuah dadu dan uang logam dilempar secara bersamaan, berapa hasil berlainan yg memungkinkan?

menggunakan metode perkalian satu-satu

⇒ 

G1
G2
G3
G4
G5
G6
A1
A2
A3
A4
A5
A6

} totalnya 12.

logam dadu Hasil yg mungkin

② Dari angka 1, 2, 3, 4, 5 akan disusun menjadi bilangan yg terdiri dr 4 angka, brp banyak blngn yg dpt disusun?

menggunakan metode perkalian pengisian tempat

⇒ • Jika tanpa pengulangan

5	4	3	2

$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ bilangan

• dengan pengulangan

5	5	5	5

$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ bilangan

③ dalam suatu organisasi akan dipilih seorang ketua, sekre, dan bendahara. brp banyak susunan kepengurusan yg mungkin dr 7 calon?

menggunakan permutasi : - memperhatikan urutan

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

. Jawab : $n = 7$, $r = 3$

$$P^n_r = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210 \text{ susunan}$$

④ berapa banyak susunan berbeda yg dpt dibuat dr huruf "Belibis"

menggunakan permutasi unsur ygsama : - masih memperhatikan urutan

$$P = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

⇒ $n_1 = n_B = 2$
$n_2 = n_i = 2$
$n = 7$

$$P = \frac{7!}{2!\ 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot \cancel{2} \cdot 1}$$

$= 1.260$ susunan

⑤ 6 orang pengurus osis mengadakan rapat. meja rapat berbentuk bundar. brp banyak posisi duduk yg mungkin?

menggunakan permutasi siklis : - susunan melingkar - memperhatikan urutan

$$P = (n-1)!$$

⇒ $n = 6$
$P = (n-1)!$
$= 5!$
$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ susunan

⑥ seorang ayah, ibu, dan 3 orang anak duduk pd meja bundar. brp banyak posisi duduk yg mungkin jika ayah & ibu berdampingan?

menggunakan permutasi siklis : - susunan melingkar - memperhatikan urutan - yg berdampingan dihitung satu

$$P = (n-1)!$$

$P = (4-1)!\,2!$
$= 3!\,.\,2!$
$= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2$
$= 12.$

⑦ sebuah pertemuan dihadiri oleh 10 orang jika setiap orang saling berjabat tangan satu sama lain. brp banyak jabat tgn yg terjadi?

menggunakan kombinasi : tdk memperhatikan urutan

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

$$\Rightarrow C_2^{10} = \frac{10!}{(10-2)!\,2!} = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 45 \text{ Jabat}$$

Probabilitas.

⑧ sebuah dadu dilempar satu kali. brp peluang muncul jumlah mata dadu berupa blngn prima?

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}}$$

⇒ $n(A) = 3$ (2, 3, 5)
$n(S) = 6$ (1, 2, 3, 4, 5, 6)
$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

⑨ dr 7 org pria dan 5 wanita akan dipilih 4 orang secara acak. brp peluang dr 4 org yg dipilih 3 diantaranya pria dan 1 orang wanita?

menggunakan kombinasi : tdk memperhatikan urutan

⇒ $n(A) = C_3^7 \cdot C_1^5$
$n(S) = C_4^{12}$

$$P(A) = \frac{C_3^7 \cdot C_1^5}{C_4^{12}} = \frac{\frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{3!}} \cdot \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 1!}}{\frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot \cancel{4!}}}$$

$$= \frac{35}{99}$$

⑩ Peluang seseorang diterima di PTN adalah 0,54 . berapakah peluang ia tidak diterima?

menggunakan peluang komplemen : kejadian sebaliknya

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

⇒ $P(A^c) = 1 - 0{,}54$
$= 0{,}46$

Group

① buktikan himpunan bil. bulat $\mathbb{Z}$ thdp operasi penjumlahan adalah group.

⇒ bukti : ① $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$a * b * c = a + b + c \in \mathbb{Z}$ (tertutup)

② $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$(a * b) * c = (a + b) + c$

$= a + b + c$

$= a + (b + c)$ (asosiatif)

③ terdapat e ~~...~~

$\forall a \in \mathbb{Z}$

$a + 0 = a$, $0 + a = a$

$a + 0 = 0 + a = a$ (memiliki el. identitas)

④ terdapat invers

$\forall a \in \mathbb{Z}$ ada $a^{-1} = -a \in \mathbb{Z}$.

$a * a^{-1} = a + (-a) = 0$

$a^{-1} * a = -a + a = 0$

∴ terbukti $\mathbb{Z}$ membentuk group.

② tunjukan $(H, \circ)$ dan $H = 2\mathbb{Z} = \{x \mid x = 2n$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}\}$

⇒ ① $a, b \in H$, $a = 2n_1$, $b = 2n_2$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

$a \circ b = 2n_1 + 2n_2 = 2(n_1 + n_2)$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

$a \circ b \in H$ // (tertutup)

② $a, b, c \in H$, $a = 2n_1$, $b = 2n_2$, $c = 2n_3$, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$.

$(a \circ b) \circ c = (2n_1 + 2n_2) + 2n_3$

$= 2n_1 + 2n_2 + 2n_3$

$= 2(n_1 + n_2 + n_3)$

$a \circ (b \circ c) = 2n_1 + (2n_2 + 2n_3)$

$= 2n_1 + 2n_2 + 2n_3$

$= 2(n_1 + n_2 + n_3)$

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ // (asosiatif)

③ $\forall a \in H$, $0 = 2(0)$, $0 \in \mathbb{Z}$

$a + 0 = 0 + a = a$ // (memiliki el. identitas)

④ $\forall a \in H$, $a = 2n_1$, $n_1 \in \mathbb{Z}$

$a^{-1} = -a = -2n_1$, $n_1 \in \mathbb{Z}$. $a^{-1} \in H$

$a \circ a^{-1} = a + (-a) = 2n_1 + (-2n_1) = 0$ //

(memiliki invers)

∴ $(H, \circ)$ adalah group.

Subgroup

① G = group himpunan bil. bulat , operasi (+)

$H = \{5k, k \in \mathbb{Z}\}$

⇒ ① H bukan himpunan kosong

② H subset G ~~...~~ / $H \subset G = \mathbb{Z}$

③ pembuktian H juga group :

• misal $a = 5k_1$ $b = 5k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

~~...~~

$a + b = 5k_1 + 5k_2 = 5(k_1 + k_2)$

$= 5k_3$, $k_3 \in \mathbb{Z}$

$a + b \in H$ // (tertutup)

~~...~~

• misal $a = 5k_1$, $b = 5k_2$, $c = 5k_3$ $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

$(a \circ b) \circ c = (a + b) + c$

$= (5k_1 + 5k_2) + 5k_3$

$= 5k_1 + 5k_2 + 5k_3$

$= 5(k_1 + k_2 + k_3)$

$a \circ (b \circ c) = a + (b + c)$

$= 5k_1 + (5k_2 + 5k_3)$

$= 5k_1 + 5k_2 + 5k_3$

$= 5(k_1 + k_2 + k_3)$

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ // (asosiatif)

• $e = 0$

$a = 5k$

$a + e = a$

$5k + 0 = 5k$ // (memiliki el. identitas)

• $a^{-1} = -5k$

$a + a^{-1} = 0$

$5k + (-5k) = 0$ // (memiliki invers)

∴ H subgroup G.

Grup siklik

$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

G dgn operasi perkalian modulo 7 buktikan group siklik.

• cari generator a.

misal (3) : $3^1 = 3$, $3^2 = 2$, $3^3 = 6$, $3^4 = 4$, $3^5 = 5$, $3^6 = 1$

kemudian (5) : $5^1 = 5$, $5^2 = 4$, $5^3 = 6$, $5^4 = 2$, $5^5 = 3$, $5^6 = 1$

maka G adalah group siklik dgn ~~...~~ [3] dan [5] merupakan generator G

atau

$G = ([3]) = ([5])$ merupakan grup siklik.

Peubah acak

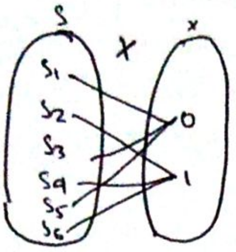
① Dalam percobaan pengundian sebuah dadu berisi enam yg seimbang. Ruang contohnya dpt ditulis:

$S = \{S1, S2, S3, S4, S5, S6\}$

⇒ Salah satu variabel acak yg dpt dibuat:

X : Munculnya sisi dadu bermata genap.

$x = \{0, 1\}$, 0 = tidak muncul genap (ganjil)
, 1 = muncul genap



Peubah acak

② Pelemparan dadu dgn ruang contoh $S = \{S1, S2, S3, S4, S5, S6\}$

$X = \{0, 1\}$, 0 = ganjil , 1 = genap.

tentukan distribusi peluang diskritnya.

⇒ Sebaran peluang dr peubah acak X dpt dijabarkan:

$$P(x=0) = P(S1) + P(S3) + P(S5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

distribusi peluang diskrit

$$P(x=1) = P(S2) + P(S4) + P(S6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

	sisi yg muncul					
kejadian	S1	S2	S3	S4	S5	S6
peluang kejadian	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
x	0	1	0	1	0	1

③

X	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

nilai tengah / nilai harapan

tentukan nilai tengah /nilai harapan

$$\Rightarrow \mu = E(x) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6}$$

$$= \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Markov chain

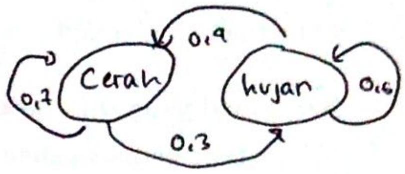
① Hari cerah diikuti hari cerah memiliki probabilitas 0,7 dan hari hujan diikuti hari cerah memiliki probabilitas 0,4. Hari senin hujan, tentukan probabilitas cuaca hari selasa?

⇒ ~~Misal 1 = hujan 2 = cerah~~
~~$P_{22} = 0{,}7$, $P_{21} = 0{,}3$~~

Misal : 1 = cerah
2 = hujan

$P_{11} = 0{,}7$, $P_{12} = 0{,}3$

$P_{21} = 0{,}4$, $P_{22} = 0{,}6$

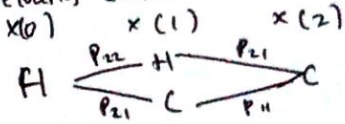


Jika senin hujan, maka peluang selasa cerah = 0,4
selasa hujan = 0,6

② berdasarkan soal 1, tentukan probabilitas hari rabu berpatokan hari senin

⇒ X(0) = senin
X(1) = selasa
X(2) = rabu

Peluang cerah :



$$P_{21} = \{\text{Rabu cerah} \mid \text{Senin hujan}\}$$
$$= \{X(2) = 1 \mid X(0) = 2\}$$
$$= P_{21} P_{11} + P_{22} P_{21}$$
$$= (0{,}4)(0{,}7) + (0{,}6)(0{,}4)$$
$$= 0{,}52.$$

Peluang hujan :

$$P_{22} = 1 - P_{21} = 1 - 0{,}52 = 0{,}48.$$

Peluang rabu cerah = 0,52 / 52%

Peluang rabu hujan = 0,48 / 48%

(PDB)

$\boxed{\text{langsung di integralkan}}$

① $\frac{dy}{dt} = t^2$, $y(0) = 5$

$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} = f(t) \rightarrow y(t) = \int f(t)\,dt}$

$\Rightarrow y(t) = \int t^2\,dt$

$= \frac{1}{3}t^3 + C$ (solusi umum)

$y(0) = 5$

$\frac{1}{3}(0)^3 + C = 5$

$C = 5$

$y(t) = \frac{1}{3}t^3 + 5$ (solusi khusus)

② $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{1+5y}$

$\boxed{\text{Variabel terpisah}}$

$\boxed{f(x)\,dx + g(y)\,dx = 0 \rightarrow \int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = 0}$

$\rightarrow (1+5y)dy - 2x^2dx = 0$

$\int (1+5y)\,dy - \int 2x^2\,dx = 0$

$y + \frac{5}{2}y^2 - \frac{2}{3}x^3 = C$ (solusi umum)

③ $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$ $\quad : (x+1)(x-1)$

$\boxed{\text{Variabel terpisah}}$

$\frac{x^2}{(x-1)}dx + \frac{y^2}{(y+1)}dy = 0$

$\int \frac{x^2}{x-1}\,dx + \int \frac{y^2}{y+1}\,dy = 0$

④ $\frac{dy}{dx} + 3y = 7$

$\boxed{\text{faktor pengintegralan}}$

$\boxed{e^{\int P(x)\,dx} \quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$

$\rightarrow$ faktor pengintegral:

$e^{\int P(x)dx} = e^{\int 3\,dx} = e^{3x}$

PUPD:

$y \cdot e^{3x} = \int 7 \cdot e^{3x}\,dx$

$\boxed{\text{PUPD} \quad y \cdot e^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\,dx}$

$e^{3x} \cdot y = \frac{7}{3}e^{3x} + C$ (solusi umum)

$y(0) = 3$

$3 = \frac{7}{3} + C$, $C = \frac{2}{3}$

$e^{3x} \cdot y = \frac{7}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}$ (solusi khusus)

Jenis-jenis data

> berdasarkan sumbernya

- data primer → diperoleh secara langsung oleh peneliti ke sumber datanya. (melalui observasi, wawancara, diskusi terfokus, kuisioner)
- data sekunder → diperoleh dr berbagai sumber spt BPS, buku, laporan, jurnal, dll. (peneliti sebagai tangan kedua)

> berdasarkan sifatnya

- Data kualitatif → berbentuk kata-kata tidak dlm angka. (melalui wwc, analisis dokumen, ctt lapangan)
- Data kuantitatif → berbentuk angka sehingga dpt diolah

> Berdasarkan proses mendapatkannya

- Data diskrit → berbentuk angka dan diperoleh secara membilang atau dicacah
- Data kontinu → berbentuk angka yg diperoleh di hasil pengukuran

> Berdasarkan skala pengukuran

- Nominal → kategori data tdk menunjukkan urutan antara kategori

  contoh: 1 utk wanita
  2 utk pria. } jenis kelamin

- Ordinal → kategori data menunjukan urutan

  contoh: 1 utk SD
  2 utk SMP
  3 utk SMA } urutan jenis sekolah

- Interval → nilai mutlaknya tdk dpt dibandingkan secara sistematis

  contoh: suhu °C

- Rasio → nilai nol mutlaknya dpt dibandingkan scr sistematis

  contoh: BB, TB

(Pers. Eksponen)

① $3^{x+3} = 27$

$a^{f(x)} = a^p$, $a>0$

$f(x) = p$

$\Rightarrow 3^{x+3} = 3^3$

$x+3=3$

$\boxed{x=0}$

② $2^{x^2+x} = 1$

$a^{f(x)} = 1$, $a>0$

$a^{f(x)} = a^0$

$\Rightarrow 2^{x^2+x} = 2^0$

$x^2+x=0$

$x(x+1)=0$

$\boxed{x=0}$ atau $\boxed{x=-1}$

③ $5^{x^2+6x-42} = 3.125^{12-x}$

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a>0$

$f(x) = g(x)$

$5^{x^2+6x-42} = 5^{5(12-x)}$

$x^2+6x-42 = 5(12-x)$

$x^2+6x-42 = 60-5x$

$x^2+11x-102 = 0$

$(x+17)(x-6)=0$

$\boxed{x=-17}$ $\boxed{x=6}$

④ $5^{x^2+x-42} = 4^{x^2+x-42}$

$a^{f(x)} = b^{f(x)}$, $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$

$f(x) = 0$

$x^2+x-42=0$

$(x+7)(x-6)=0$

$\boxed{x=-7}$ $\boxed{x=6}$

⑤ $(x^2-6x+8)^{2x+1} = (x^2-6x+8)^{x-2}$

$h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$

1) $f(x) = g(x)$
2) $h(x) = 1$
3) $h(x) = 0$, asal $f(x)>0$ dan $g(x)>0$
5) $h(x) = -1$, asal $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya ganjil atau keduanya genap

1) $2x+1 = x-2$

$2x-x = -2-1$

$\boxed{x=-3}$

2) $x^2-6x+8=1$ (pake rumus abc)

$x^2-6x+7=0$

$a=1$ $b=-6$ $c=7$

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$

$= \frac{6\pm\sqrt{36-28}}{2\cdot 1}$

$= \frac{6\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{6\pm2\sqrt{2}}{2} = 3\pm\sqrt{2}$

$\boxed{x = 3+\sqrt{2}}$
$\boxed{x = 3-\sqrt{2}}$

3) $x^2-6x+8=0$

$(x-4)(x-2)=0$

$\boxed{x=4}$, $x=2$

$x=4 \rightarrow f(4) = 2.4+1 = 9$

$g(4) = 4-2 = 2$

$x=2 \rightarrow f(2) = 2.2+1 = 5$

$g(2) = 2-2 = 0$

4) $x^2-6x+8=-1$

$x^2-6x+9=0$

$(x-3)(x-3)=0$

$\boxed{x=3}$

$f(3) = 2.3+1 = 7$ (ganjil)

$g(3) = 3-2 = 1$ (ganjil)

x. yg memenuhi : $x=-3$, $x=3+\sqrt{2}$, $x=3-\sqrt{2}$, $x=4$, $x=3$

⑥ $(3x^2-3x-8)^{12x^2-20x+7} = (2x^2-2x-2)^{12x^2-20x+7}$

$f(x)^{h(x)} = g(x)^{h(x)}$

1) $f(x) = g(x)$
2) $h(x) = 0$, asal $f(x)$ dan $g(x) \neq 0$
3) $f(x) = -g(x)$, asal $h(x) =$ genap

1) $3x^2-3x-8 = 2x^2-2x-2$

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$\boxed{x=3}$ $\boxed{x=-2}$

2) $h(x)=0$

$12x^2-20x+7=0$

$(2x-1)(6x-7)=0$

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$ $\boxed{x=\frac{7}{6}}$

$f(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2}) - 8$

$= -\frac{39}{4} \neq 0$

$g(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) - 2$

$= 2\cdot\frac{1}{4} - 1 - 2 \neq 0$

$f(\frac{7}{6}) = 3(\frac{7}{6})^2 - 3(\frac{7}{6}) - 8$

$\neq 0$

$g(\frac{7}{6}) = 2(\frac{7}{6})^2 - 2(\frac{7}{6}) - 2$

$\neq 0$

3) $3x^2-3x-8 = -(2x^2-2x-2)$

$3x^2-3x-8 = -2x^2+2x+2$

$5x^2-5x-10=0 \quad :5$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2$ $x=-1$

$h(2) = 12(2)^2 - 20\cdot2 + 7$

$= 15$ (ganjil)

$h(-1) = 39$ (ganjil)

x yg memenuhi : $x=3$, $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{7}{6}$

⑦ $(1-\frac{1}{2}x)^{2x^2+5x-3} = 1$

$f(x)^{g(x)} = 1$

1) $g(x)=0$, asal $f(x)\neq 0$
2) $f(x)=1$
3) $f(x)=-1$, asal $g(x)$ genap

1) $g(x) = 0$

$2x^2 + 5x - 3 = 0$

$(2x-1)(x+3) = 0$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$ $\boxed{x = -3}$

$f(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 0$

$f(-3) = 1 - \frac{1}{2}(-3) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \neq 0$

2) $f(x) = 1$

$1 - \frac{1}{2}x = 1$

$0 = \frac{1}{2}x$

$\boxed{x = 0}$

3) $f(x) = -1$

$1 - \frac{1}{2}x = -1$

$2 = \frac{1}{2}x$

$x = 4$

$g(4) = 2(4)^2 + 5 \cdot 4 - 3$

$= 32 + 20 - 3$

$= 49$ (ganjil)

x yg memenuhi : $x = \frac{1}{2}$

$x = -3$

$x = 0$

8) $3^{2x+3} - 84 \cdot 3^x + 9 = 0$

$\Rightarrow 3^{2x} 3^3 - 84 \cdot 3^x + 9 = 0$

$(3^x)^2 \cdot 27 - 84 \cdot 3^x + 9 = 0$

$y = 3^x \rightarrow 27y^2 - 84y + 9 = 0$

$\Rightarrow (27y - 3)(y - 3) = 0$

$y = \frac{3}{27}$ $y = 3$

$y = \frac{1}{9} \rightarrow 3^x = 1/9$

$3^x = 3^{-2}$

$\boxed{x = -2}$

$y = 3 \rightarrow 3^x = 3^1$

$\boxed{x = 1}$ HP $= \{-2, 1\}$

$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C = 0$

dmn $a > 0$, $a \neq 1$

$y = a^{f(x)}$

⑥ $\int \frac{2x+1}{x^2-8x+12}\,dx$ $\boxed{\text{integral fungsi rasional}}$

$\Rightarrow \frac{2x+1}{x^2-8x+12} = \frac{A}{(x-6)} + \frac{B}{(x-2)}$

$\frac{2x+1}{\cancel{x^2-8x+12}} = \frac{A(x-2)+B(x-6)}{\cancel{x^2-8x+12}}$

$2x+1 = Ax - 2A + Bx - 6B$

$2x+1 = (A+B)x - 2A - 6B$ $\boxed{\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + c}$

	kanan	kiri
koef x	2	$A+B$
konstanta	1	$-2A-6B$

- $A+B=2$
  $A=2-B$
  $A=2-5/4$
  $A=\frac{3}{4}$
- $-2A-6B=1$
  $-2(2-B)-6B=1$
  $-4+2B-6B=1$
  $-4B=5$
  $B=-\frac{5}{4}$

$\int \frac{2x+1}{x^2-8x+12}\,dx = \int \frac{3/4}{(x-6)}\,dx + \int \frac{-5/4}{(x-2)}\,dx$

$= \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x-6)} + \left(-\frac{5}{4}\right)\int \frac{dx}{(x-2)}$

$= \frac{3}{4}\ln|x-6| + c - \frac{5}{4}\ln|x-2| + c$

⑦ $\int \frac{1}{(x+3)(x-3)}\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-3)}$

$\frac{1}{(x+3)(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x+3)}{(x+3)(x-3)}$

$1 = Ax - 3A + Bx + 3B$

$1 = (A+B)x - 3A + 3B$

	kanan	kiri
koef x	0	$A+B$
konstanta	1	$-3A+B$

- $A+B=0$
  $A=-B$
- $-3A+B=1$
  $-3(-B)+B=1$
  $3B+B=1$
  $4B=1$
  $B=1/4$

$A=-B$
$A=-1/4$

$\int \frac{1}{(x+3)(x-3)} = \int \frac{-1/4}{(x+3)}\,dx + \int \frac{1/4}{(x-3)}\,dx$

$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+3)}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-3)}\,dx$

$= -\frac{1}{4}\ln|x+3| + c + \frac{1}{4}\ln|x-3| + c$

$= -\frac{1}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x-3| + c$

Turunan

turunan fungsi trigonometri.

$dx(\sin x) = \cos x$

$dx(\cos x) = -\sin x$

$dx(\tan x) = \sec^2 x$

$dx(\sec x) = (\sec x)(\tan x)$

$dx(\csc x) = (-\csc x)(\cot x)$

$dx(\cot x) = -\csc^2 x$

① $y = (2x^2-4x+1)^{20}$ $\boxed{\text{turunan aturan rantai}}$

$\Rightarrow$ misal : $u = 2x^2-4x+1$, $\frac{du}{dx} = 4x-4$

$y = u^{20}$, $\frac{dy}{du} = 20u^{19}$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$

$\frac{dy}{dx} = 20u^{19} \cdot 4x-4$

$= 20(2x^2-4x+1)^{19}\,4x-4$

$= (40x^2-80x+20)^{19}\,(4x-4)$

② $y = \cos 3\,(x^2+1)$ $\boxed{\text{turunan aturan rantai}}$

$\Rightarrow$ misal : $v = x^2+1$, $\frac{dv}{dx} = 2x$

$u = \cos(x^2+1)$

$= \cos v$, $\frac{du}{dv} = -\sin v$

$y = u^3$, $\frac{dy}{du} = 3u^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

$= 3u^2 \cdot (-\sin v) \cdot 2x$

$= 3(\cos v)^2 \cdot (-\sin(x^2+1)) \cdot 2x$

$= 3\cos^2(x^2+1) \cdot (-\sin(x^2+1)) \cdot 2x$

$= 6x\cos^2(x^2+1)\,(-\sin(x^2+1))$

$Dx\ \ln x = \frac{1}{x}$

$Dx\ e^x = e^x$

$Dx\ a^x = a^x \ln a$

$Dx\ \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

Integral fungsi trigonometri

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

$\int \cos x \, dx = \sin x + c$

$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + c$

$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + c$

$\int \sec x \, \cancel{dx} . \tan x \, dx = \sec x + c$

$\int \csc x \, . \cot x \, dx = -\csc x + c$

Integral

1. $\int \cos (2x) \, dx$ ~~Metode substi~~ aturan substitusi

$\Rightarrow$ misal $u = 2x$

$du = 2 \, dx$

$2dx = du$

$dx = \frac{du}{2}$

$$\int \cos (2x) \, dx = \int \cos u \, \frac{du}{2}$$

$$= \int \cos u . \frac{1}{2} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos u \, du$$

$$= \frac{1}{2} . \sin u + c$$

$$= \frac{1}{2} . \sin 2x + c.$$

2. $\int_{-3}^{3} \sqrt{7+2t^2} \, (8t) \, dt$ aturan substitusi integral tentu

$\Rightarrow$ misal $u = 7 + 2t^2$

$du = 4t \, dt$

$dt = \frac{du}{4t} = \frac{1}{4t} du.$

karena di ubah ke u, maka batasnya menjadi:

- batas atas: $7 + 2(3)^2 = 7 + 18 = 25$
- batas bwh: $7 + 2(-3)^2 = 7 + 18 = 25$

$$\int_{25}^{25} \sqrt{u} \, (\cancel{8t})^{2} . \frac{1}{\cancel{4t}} \, du$$

$= 0 \rightarrow$ (sifat $\int_a^a f(x) = 0$

3. $\int_1^7 \frac{1}{\sqrt{2x+2}} \, dx$ aturan substitusi

$\Rightarrow$ misal $u = 2x + 2$

$du = 2 \, dx$

$dx = \frac{1}{2} du$

- batas atas: $2(7) + 2 = 16$
- batas bwh: $2(1) + 2 = 4$

$$\int_4^{16} \frac{1}{\sqrt{u}} . \frac{1}{2} \, du$$

$$= \int_4^{16} u^{-1/2} . \frac{1}{2} du$$

$$= \int_4^{16} \frac{1}{2} u^{-1/2} \, du$$

$$= \frac{1/2}{-1/2+1} u^{-1/2+1} \Big]_4^{16}$$

$$= \frac{1/2}{1/2} u^{1/2} \Big]_4^{16}$$

$$= u^{1/2} \Big]_4^{16}$$

$$= (16)^{1/2} - (4)^{1/2}$$

$$= \sqrt{16} - \sqrt{4}$$

$$= 4 - 2$$

$$= 2.$$

4. $\int (x+3) \sqrt{2x-5} \, dx$ integral parsial

$\Rightarrow \int (x+3) \sqrt{2x-5} \, dx$

misal:

$u = (x+3)$ $\quad dv = (2x-5)^{1/2} \, dx$

$du = dx$ $\quad v = \int (2x-5)^{1/2} \, dx$

$dx = du$

$\hookrightarrow$ misal $w = 2x - 5$

$dw = 2 \, dx$

$dx = \frac{1}{2} dw$

$$\int (w)^{1/2} \frac{1}{2} dw$$

$$\int \frac{1}{2} (w)^{1/2} dw$$

$$= \frac{1/2}{1/2+1} w^{1/2+1} + c$$

$$= \frac{1/2}{3/2} w^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{2}{3} w^{3/2} + c$$

$$= \frac{1}{3} w^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{3} (2x-5)^{3/2} + C$$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$

$$= (x+3) . \frac{1}{3} (2x-5)^{3/2} - \int \frac{1}{3} (2x-5)^{3/2} dx$$

$$= (x+3) . \frac{1}{3} (2x-5)^{3/2} - \frac{1}{15} (z)^{5/2} + C$$

$\hookrightarrow$ misal $z = 2x - 5$

$dz = 2 \, dx$

$dx = \frac{1}{2} dz$

$$\int \frac{1}{3} (z)^{3/2} \frac{1}{2} dz$$

$$= \int \frac{1}{3} . \frac{1}{2} (z)^{3/2} dz$$

$$= \frac{1}{3} . \frac{1}{2} \int z^{3/2} dz$$

$$= \frac{1}{3} . \frac{1}{2} . \frac{1}{3/2+1} z^{3/2+1} +$$

$$= \frac{1}{3} . \frac{1}{2} . \frac{1}{5/2} z^{5/2} + c$$

$$= \frac{1}{3} . \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{5} z^{5/2} + c$$

$$= \frac{1}{15} z^{5/2} + C$$

$(x+3) . \frac{1}{3} (2x-5)^{3/2} = \frac{1}{15} (z)^{5/2} + C$

5. $\int x e^x \, dx$ integral parsial

$\Rightarrow$ misal $u = x$ $\quad dv = e^x$

$du = dx$ $\quad v = \int e^x \, dx = e^x$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

$$= x . e^x - \int e^x \, dx$$

$$= x . e^x - e^x + C$$

Median dan kuartil

x_1 —— x_1 —— x_n

Q_1 | $Me = Q_2$ | Q_3

Q_1 = kuartil bawah
Q_2 = kuartil tengah
Q_3 = kuartil atas.

- **Data tunggal**

Contoh : 10, 15, 15, 20, 30, 45, 55, 60, 57, 80, 15, 25, 30

$\Rightarrow$ 10, 15, $\boxed{15, 15}$, 20, 25, 30, 45, 50, $\boxed{55, 57}$, 60, 80

$Q_1 = \frac{15+15}{2} = 15$ $\qquad$ $Me = Q_2$ $\qquad$ $Q_3 = \frac{55+57}{2} = 56$

$$Me = \begin{cases} \dfrac{x_{n+1}}{2}, & \text{jika } n \text{ ganjil} \\[2ex] \dfrac{\frac{x_n}{2} + \frac{x_n}{2}+1}{2}, & \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

$$Q_i = \frac{i(n+1)}{4}$$ } Quartil terletak pd data ke Q_i.

- **Data kelompok**

$$Q_i = Tb_i + \left(\frac{\frac{i}{4}n - \Sigma f_{-i}}{f_i}\right)p$$

Q_i = kuartil ke i (1, 2, 3)
Tb_i = tepi bawah kelas kuartil ke-i
n = jumlah semua frekuensi
Σf_{-i} = jumlah frekuensi sebelum kelas kuartil ke-i
f_i = frekuensi kelas kuartil ke-i
p = panjang kelas

Contoh :

nilai	frekuensi	Σf
31 – 36	6	6
37 – 42	4	10
43 – 48	9	19
49 – 54	14	33
55 – 60	10	43
61 – 66	2	45
67 – 72	5	50

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ menentukan kelas:

$\frac{1}{4}(n) = \frac{1}{4}(50) = 12,5$

$Tb_1 = 43 - 0,5 = 42,5$

$\Sigma f_{-1} = 10$

$f_1 = 9$

$$Q_1 = 42,5 + \left(\frac{12,5-10}{9}\right)6$$
$= 42,5 + \left(\frac{2,5}{\cancel{9}_3}\right)\cancel{6}^2$
$= 42,5 + \frac{5}{3}$
$= 42,5 + 1,67$
$= 44,17$

Desil

↳ membagi data ke dlm 10 bagian yg sama

D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6 D_7 D_8 D_9 n

- **Data tunggal**

Letak desil ke-i = $\frac{i(n+1)}{10}$

dengan i = 1, 2, 3, ..., 9 dan n = banyak data ($n > 10$)

$\frac{i(n+1)}{10}$ → bilangan asli $x_{\frac{i(n+1)}{10}}$
$\frac{i(n+1)}{10}$ → bukan bil. asli (pecahan) = interpolasi linear

Contoh: 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 85, 85, 80

desil keempat : $\frac{4(14+1)}{10} = \frac{4(15)}{10} = \frac{60}{10} = 6$

$D_4 = x_6 = 55$

desil ketujuh : $\frac{7(14+1)}{10} = \frac{7(15)}{10} = \frac{105}{10} = 10,5$

$10 + 0,5$

interpolasi :

$D_7 = x_{10} + 0,5\,(x_{11} - x_{10})$ sesudahnya

$= 75 + 0,5(80 - 75)$
$= 75 + 0,5(5)$
$= 75 + 2,5$
$= 77,5$

Statistika dasar

> Tabel distribusi frekuensi

data tunggal :

5	6	10	7	2	1
8	9	3	7	1	2
5	6	10	9	8	10

data kelompok :

rentang	frekuensi
1 - 5	8
6 - 10	9

- Bagian - bagian tabel distribusi frekuensi
  - >> kelas interval
  - >> batas kelas
    - batas bawah (Bb)
    - batas atas (Ba)
  - >> Tepi kelas
    - Tepi bawah (Tb) = batas bawah - ketelitian data
    - Tepi atas (Ta) = batas atas + ketelitian data

ket: • jika data bilangan bulat, maka ketelitian data 0,5
• jika decimal maka 0,05

- >> panjang kelas (p)
  - $p = Ta - Tb$
- >> titik tengah kelas (x_i)
  - $x_i = \frac{1}{2}(Ba + Bb)$

- Cara mengelompokan data
  1) tentukan jangkauan (J)
     J = data terbesar - data terkecil
  2) tentukan banyak kelas interval (k)
     $k = 1 + 3,3 \log(n)$
  3) tentukan panjang kelas
     $p = \frac{J}{k}$

> Mean (rata-rata)

- Data tunggal

① $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x}{n}$

② $\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

③ $\bar{x} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + \dots + f_n m_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

- Data kelompok

$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ metode biasa

contoh :

nilai	F	x_i	$f_i x_i$
10-14	4	12	48
15-19	8	17	136
20-24	5	22	110
25-29	6	27	162
30-34	4	32	128
35-39	3	37	111

$\sum f_i = 30$ $\sum f_i x_i = 695$

nilai tengah $= \frac{14 + 10}{2} = 12$

$\bar{x} = \frac{695}{30} = 23,16$

> Modus (nilai yg sering muncul)

- Data tunggal.
  contoh :
  3, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7
  $m_0 = 6$.
- Data kelompok

$$Mo = Tbmo + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) p$$

Tbmo = tepi bawah kelas modus
d_1 = selisih frekuensi kelas modus dgn frekuensi sblmnya
d_2 = selisih frekuensi kelas modus dg frekuensi sesudahnya
p = panjang kelas

~~Data kelompok~~
~~metode biasa~~

contoh :

nilai	frekuensi
31-36	6
37-42	4
43-48	9
49-54	14
55-60	10
61-66	2
67-72	5

Tbmo = tepi bawah kelas dgn frekuensi terbanyak
= 49 - 0,5 = 48,5

$d_1 = 14 - 9 = 5$
$d_2 = 14 - 10 = 4$
$p = 37 - 31 = 6$

$Mo = 48,5 + \left(\frac{5}{5+4}\right) 6$
$= 48,5 + \left(\frac{5}{9}\right) 6$
$= 48,5 + \frac{30}{9}$
$= 48,5 + 3,33$
$= 51,83$