Probl. 15-16:

Idea: Fer un programa on anotem la parametrizació $\phi(u,v)$ d'una superfície i a partir de $\underset{\phi(u_0,v_0)}{\underset{\shortparallel}{P}} \in S$, $w \in T_pS$ ($w = (\alpha, \beta)$ en base $\phi_u(u_0,v_0), \phi_v(u_0,v_0)$) ens retorni la geodèsica $\gamma \subset S$ amb $\gamma(0) = P$, $\dot\gamma(0) = w$

Usarem l'equació de les geodèsiques:

$$\cancel{\ddot u = \Gamma^1_{11}(\dot u)^2 + 2\Gamma^1_{12}}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{\cdot\cdot} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{aplicació de 2 var.}}}{F}(\dot u, \dot v)$$

$$\frac{d}{dt^2}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{\cdot\cdot} = F(\dot u, \dot v) \quad (*)$$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sist. de 2 components, ordre 2

Conversió en sistema d'ordre 1:
Introduïm les derivades intermitges com a noves variables:

$up := \dot u \Rightarrow \dot{up} = \ddot u$

$vp := \dot v \Rightarrow \dot{vp} = \ddot v$

El sistema (*) queda:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ up \\ vp \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} up \\ vp \\ F(\dot u, \dot v) \end{pmatrix} = \tilde F(t, u, v, up, vp)$$

sist. de 4 components, ordre 1

F té 2 components.

Valor inicial $\Big\{ u(0)$

Valor inicial

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ up(0) \\ vp(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

$$P = \phi(u_0, v_0)$$

$$w \in T_p S$$
$$\shortparallel$$
$$\alpha \phi_u(P) + \beta \cdot \phi_v(P)$$