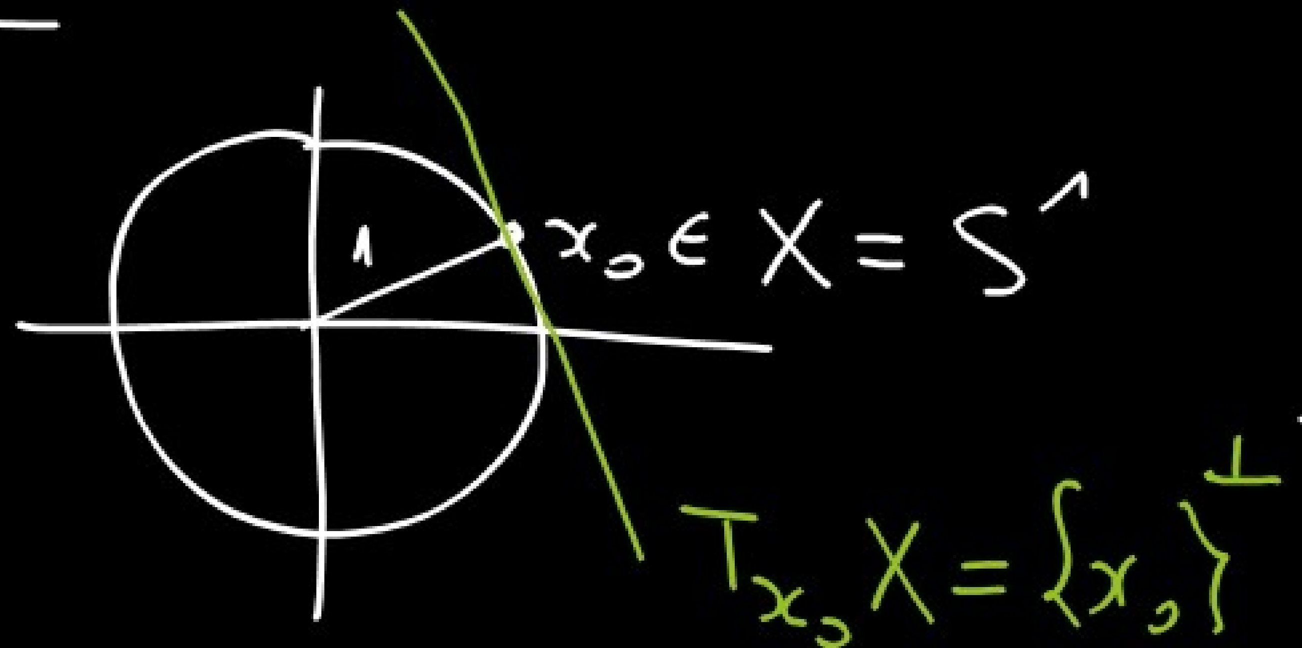
Ch. 3 - PMP (fin)

Ex. (suite) : soit $X = S^1 = h^{-1}(\{0\})$ avec $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



et $h(x) = \|x\|^2 - 1$; h dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et

$h'(x) = 2[x_1 \ \ x_2]$; si $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1 \neq 0$

$\Rightarrow h'(x_0) = 2\,{}^t x_0 \neq [0 \ \ 0]$: $h'(x_0)$ rang 1 (max)

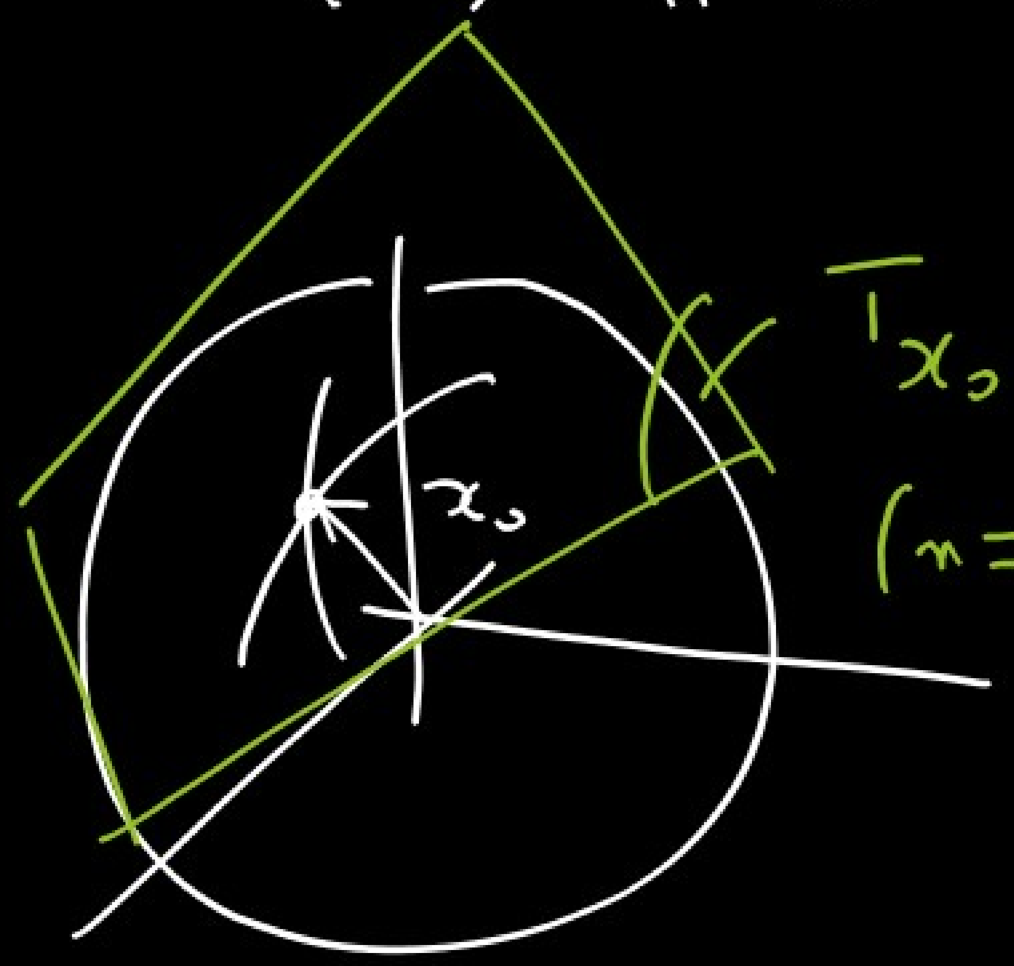
On a donc toujours une submersion et

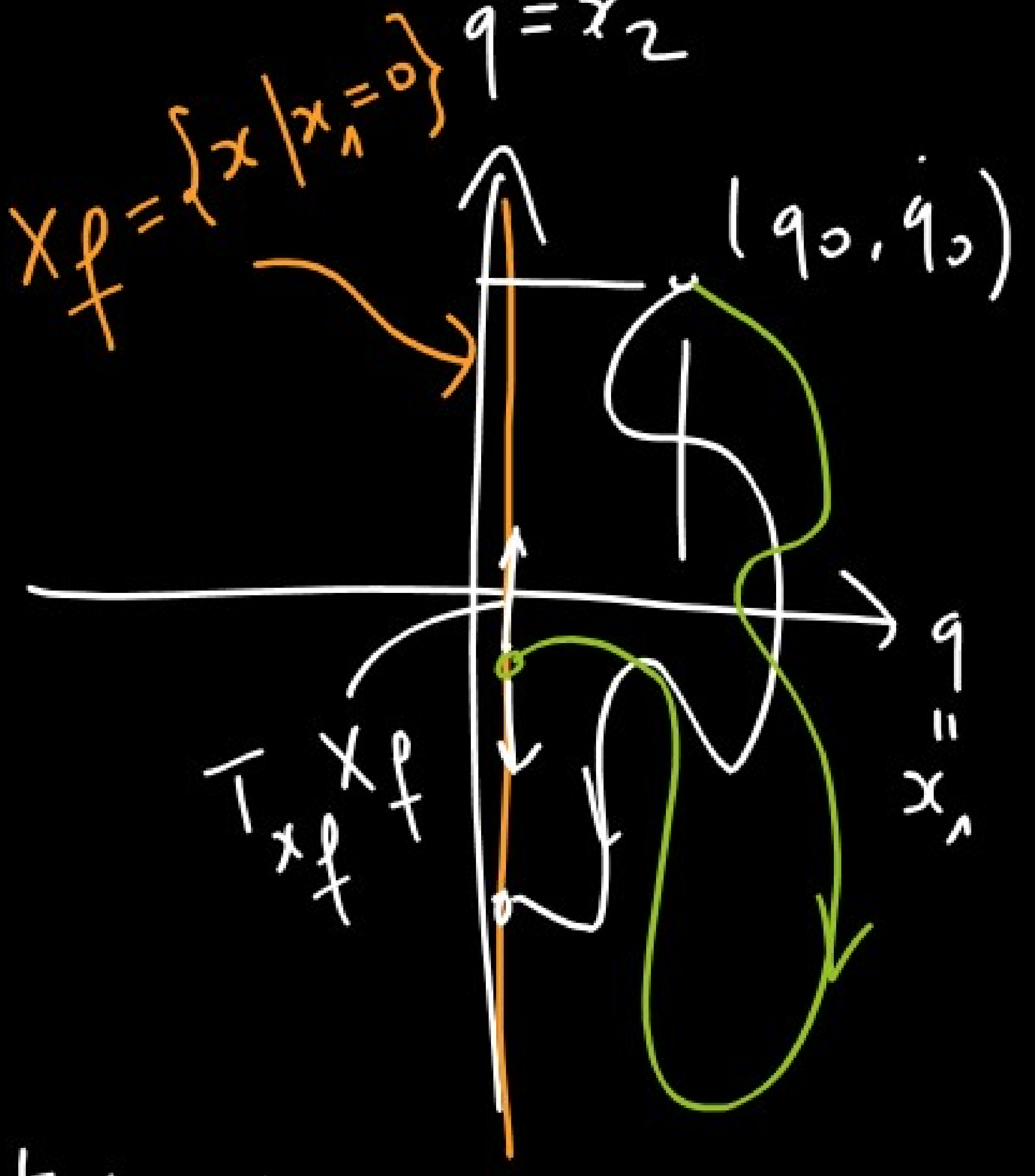
$$\begin{aligned} T_{x_0}X &= \ker h'(x_0) \\ &= \{ d \in \mathbb{R}^2 \mid h'(x_0).d = (\nabla h(x_0) | d) \\ &\qquad = 2(x_0|d) = 0 \} \\ &= \{x_0\}^\perp \end{aligned}$$

Rq : idem en dim supérieure : $X = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$

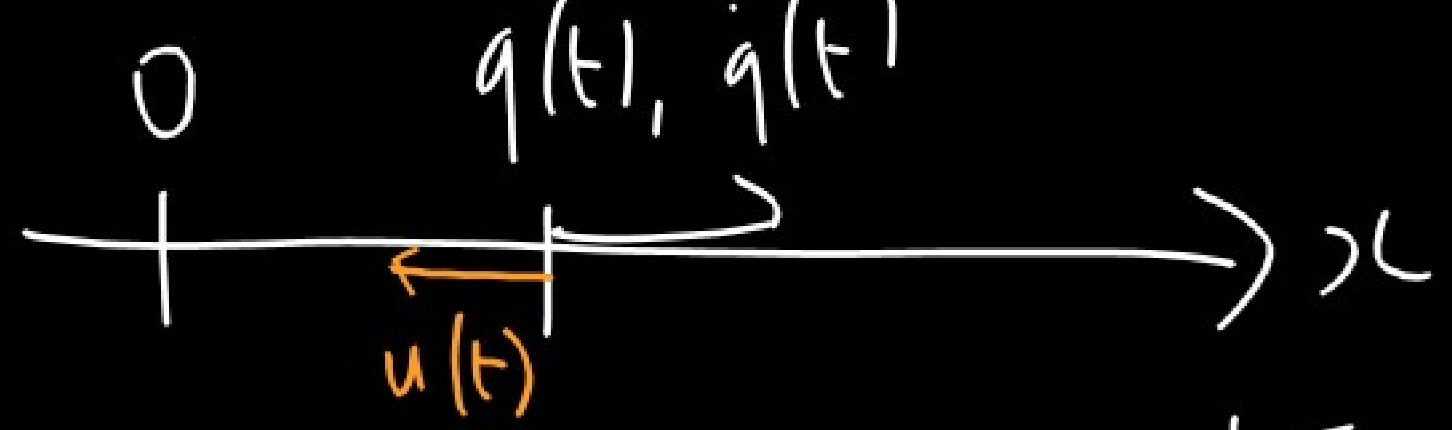
$= h^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^n}\})$

avec $h(x) = \|x\|^2 - 1$ (inchangée) ; $T_{x_0} S^{n-1} = \{x_0\}^\perp$





Exo (panne de métro, le retour 1/2) :



$$\begin{cases} q(0) = q_0, \ \dot q(0) = \dot q_0 \\ q(t_f) = 0, \ \dot q(t_f) \text{ libre} \end{cases} \rightsquigarrow X_f = ?$$

$\ddot q(t) = u(t), \ |u(t)| \leq 1$ | En temps min !

Le hamiltonien, le système adjoint et la condition de maximisation sont inchangées : seules les conditions de transversalité sont nouvelles et modifient les conditions aux deux bouts :

1. <u>Hamiltonien</u> : $x(t) = (q(t), \dot{q}(t)) \in \mathbb{R}^2$ $\left(\text{et } \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{array} \right)$

$$H(x, p, u) = p^0 \cdot 1 + p_1 x_2 + p_2 u$$

2. <u>Système adjoint</u> :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 \end{cases} \Rightarrow p_2 : \text{fonction affine de } t$$

3. Maximisation du hamiltonien : à x et p fixés dans $\mathbb{R}^2$, le problème

$$\begin{cases} H(x,p,u) = p^0 \cdot 1 + p_1 x_2 + p_2 u \\ u \in [-1,1] = U \end{cases}$$

admet pour maximiseurs

- si $p_2 \neq 0$, $u = \operatorname{sgn}(p_2)$ unique solution
- si $p_2 = 0$, tout $u \in [-1,1]$ est solution

4. Condition de transversalité : $X_f = (Ox_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$

$$= h^{-1}(\{0\})$$

avec $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

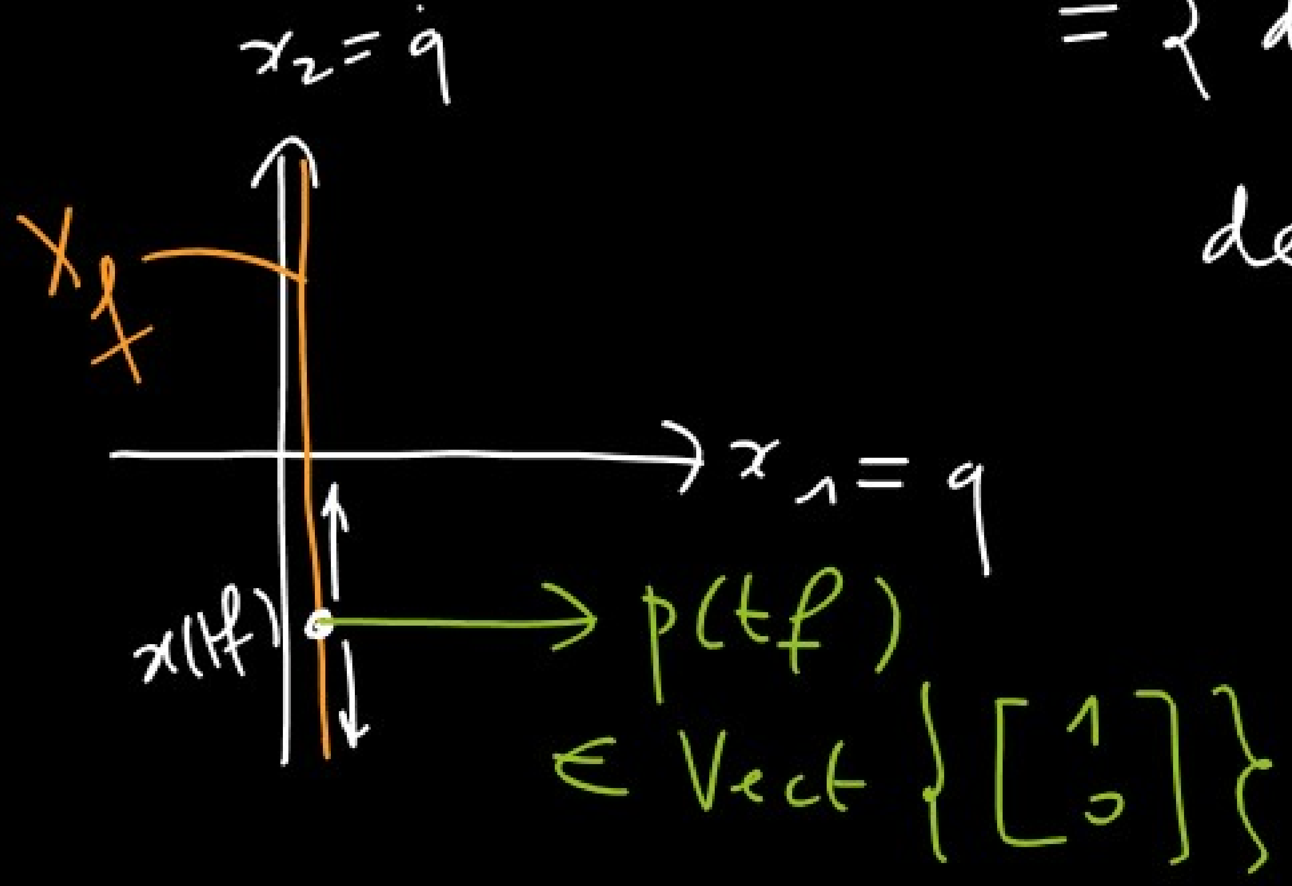
$$x = (x_1, x_2) \longmapsto x_1$$

On a $h'(x) = [1 \quad 0]$

$\neq [0 \quad 0]$: submersion (en tout pt de $\mathbb{R}^2$, donc de X_f)

Donc, $T_{x(tf)} X_f = \operatorname{Ker} h'(x(tf))$

$$= \{ d \in \mathbb{R}^2 \mid [1 \;\; 0] \cdot d = d_1 = 0 \} \quad (= X_f \,!)$$



de sorte que $p(tf) \perp T_{x(tf)} X_f$

$$\iff (p(tf) \mid d) = 0, \quad \underbrace{d \in T_{x(tf)} X_f}_{\text{ie } d = (0, d_2),\ d_2 \in \mathbb{R}}$$

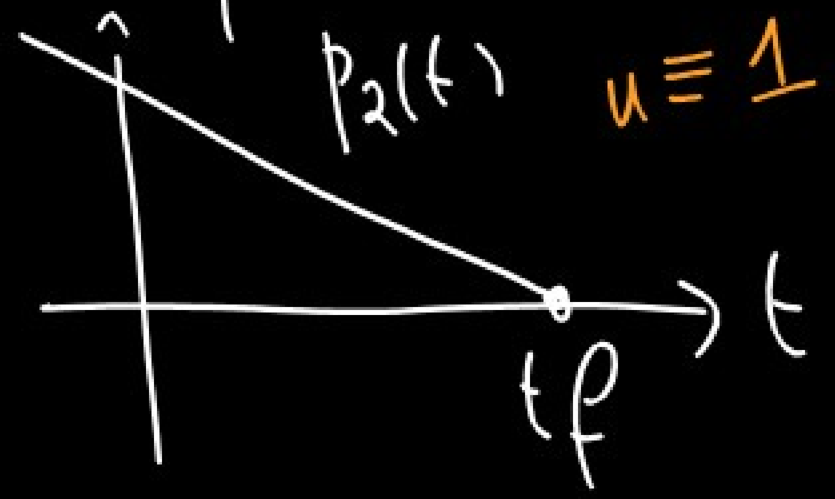
$$\iff (\forall d_2 \in \mathbb{R}) : p_2(tf) \cdot d_2 = 0$$

$$\iff \boxed{p_2(tf) = 0}$$

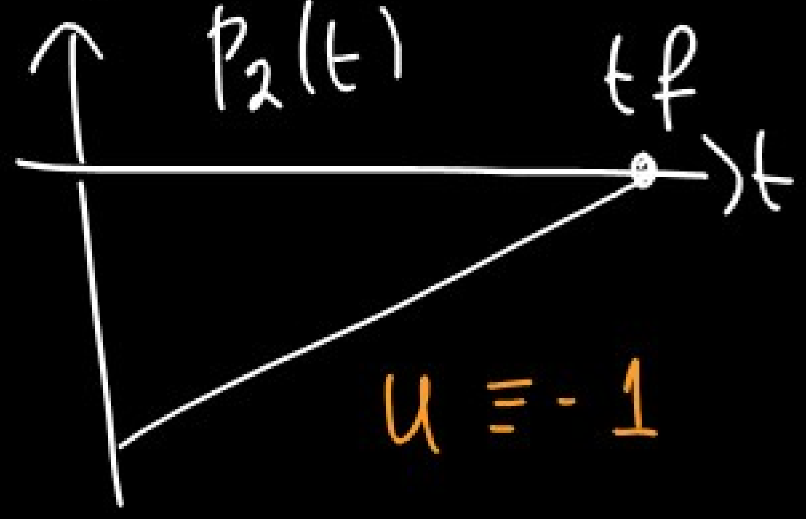
D'où : p_2 affine et $p_2(tf) = 0$

si bien qu'on a

soit



, soit



ie pas de commutation puisque le cas $p_2 \equiv 0$ est interdit.

En effet, $p_2 \equiv 0$, on a aussi $p_1 = -\dot{p}_2 \equiv 0 \Rightarrow p \equiv (0,0)$; comme

t_f libre $\Rightarrow$ $0 = H(x(t), p(t), u(t))$ (p.p. $t \in [0, t_f]$)

$$= p^0 \cdot 1 + \cancel{p_1(t)}\cdot x_2(t) + \cancel{p_2}(t)\cdot u(t)$$

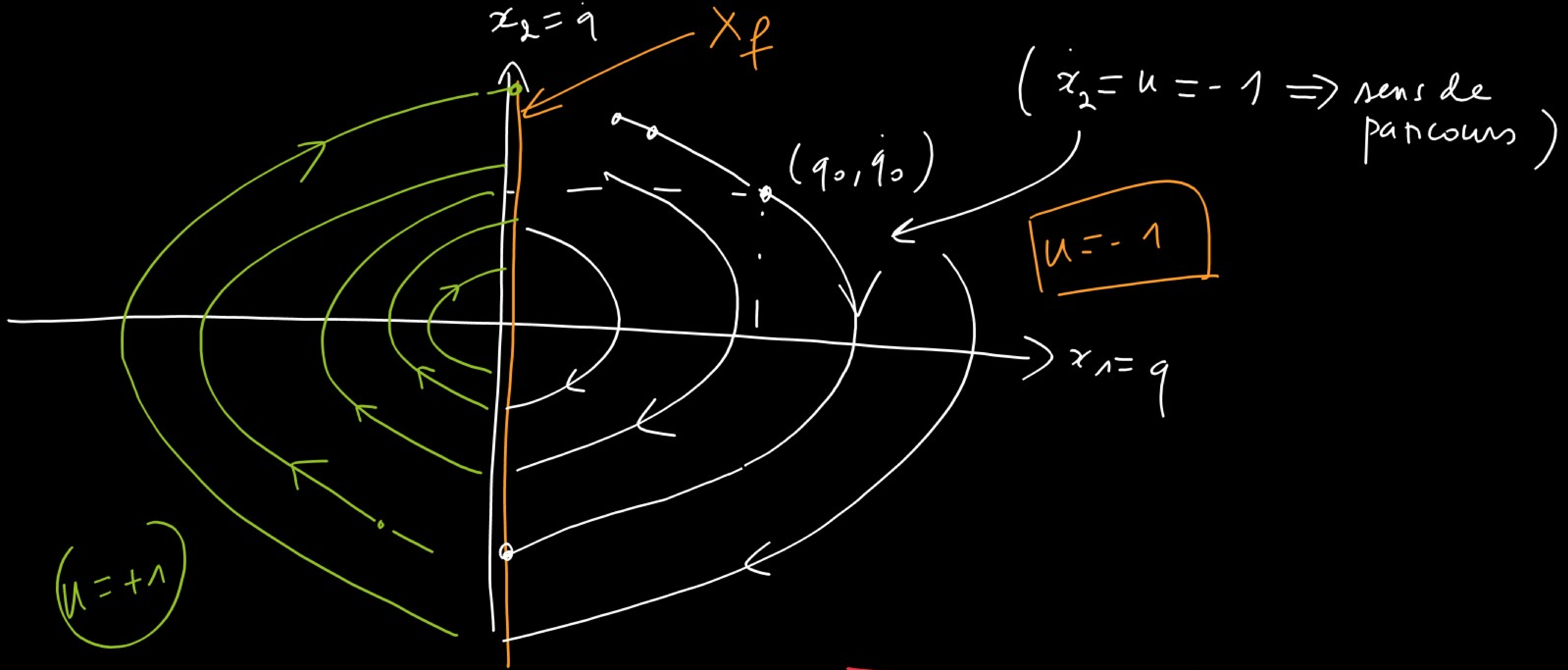
$\Rightarrow p^0 = 0$

$\Rightarrow (p^0, p) = (0, 0)$: interdit

fonction identiquement nulle

D'où la synthèse (puisque, clairement, $q_0 > 0 \Rightarrow u \equiv -1$, $q_0 < 0 \Rightarrow u \equiv +1$) : on a des arcs de parabole et il existe un et un seul arc passant par $(q_0, \dot{q}_0)$ et le connectant à $X_f = \{q = 0\}$:

($\underline{\text{NB}}$: $u = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + \text{cte}$, $u = +1 \Rightarrow x_1 = +\frac{1}{2} x_2^2 + \text{cte}$)



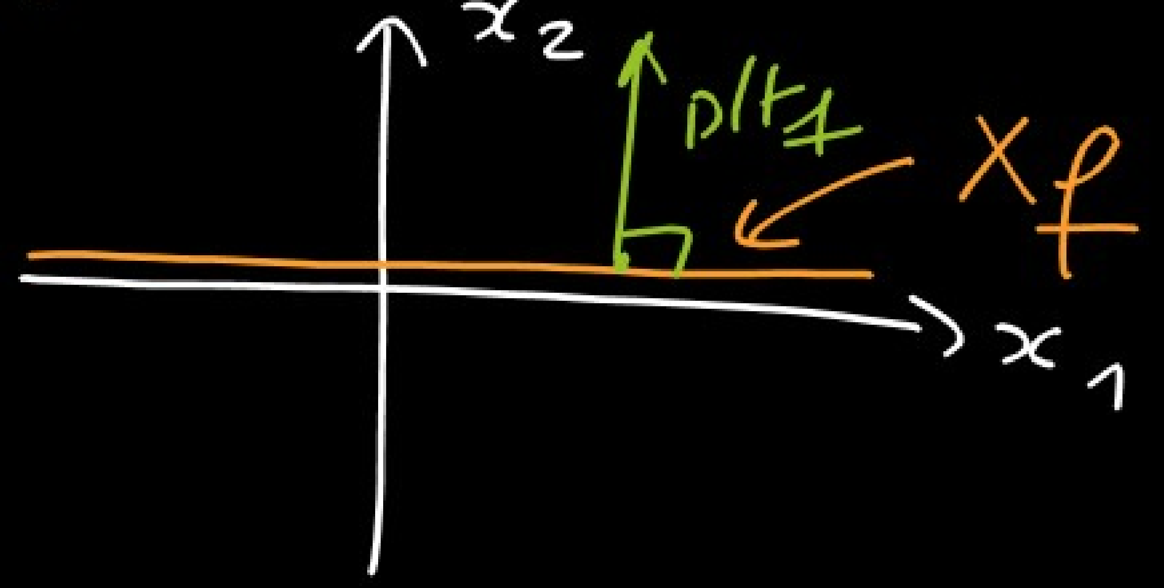
Et on a la loi de synthèse (feedback) : $\boxed{u(x) = -\mathrm{sgn}(x_1)}$.

Rq : calculer $t_f(q_0, \dot q_0)$ dans ce cas.

Exo (retour de la rame de métro (2/2)) : arrêt en temps min

ie $\dot q(t_f)=0$ (arrêt en t_f), $q(t_f)$ libre. On a

$$X_f = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$$



Etapes 1 à 3 inchangées

4. Conditions de transversalité :

$X_f = h^{-1}(\{0\})$ $\quad h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad x \mapsto x_2$

$$h'(x) = (0 \;\; 1) \neq (0 \;\; 0)$$

$$T_{x(t_f)}X_f = \{d \in \mathbb{R}^2 / (0 \;\; 1)\, d = d_2 = 0\} = X_f$$

$p(t_f) \perp T_{x(t_f)} X_f \iff (p(t_f) \mid d) = 0, \quad d \in T_{x(t_f)} X_f$

$\iff p_1(t_f)\, d_1 = 0, \ \forall d_1 \in \mathbb{R}$

$\iff p_1(t_f) = 0.$

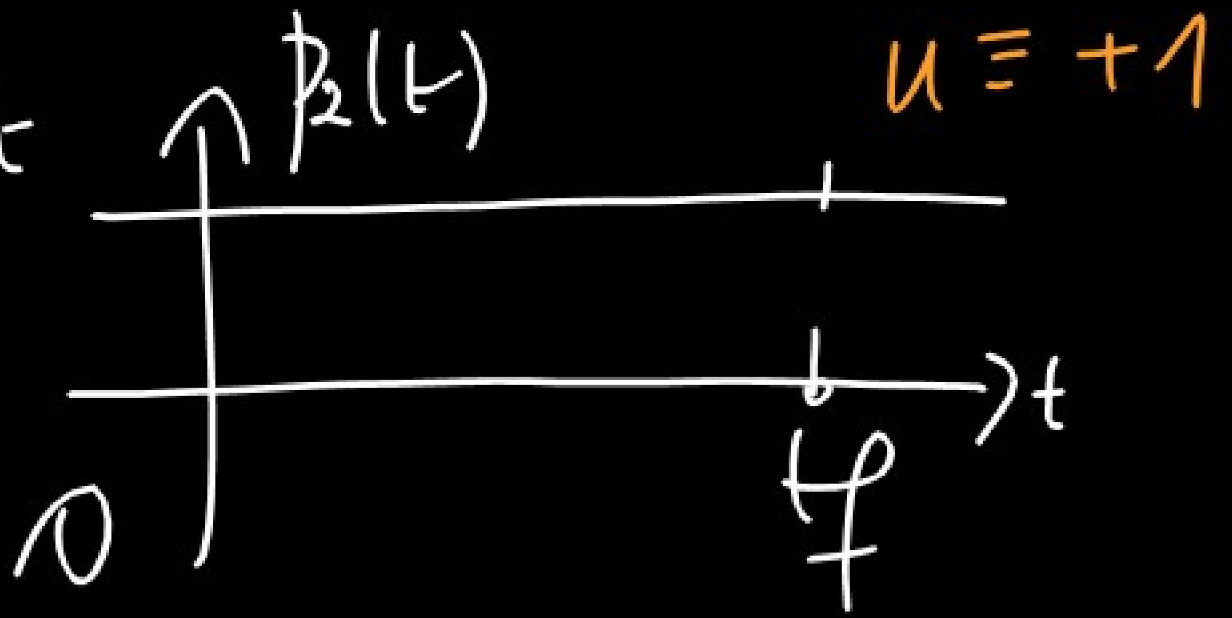
$\forall t, \ \dot{p}_1(t) = 0 \Rightarrow \forall t, \ p_1(t) \equiv 0 = -\dot{p}_2(t).$

p_2 est constante.

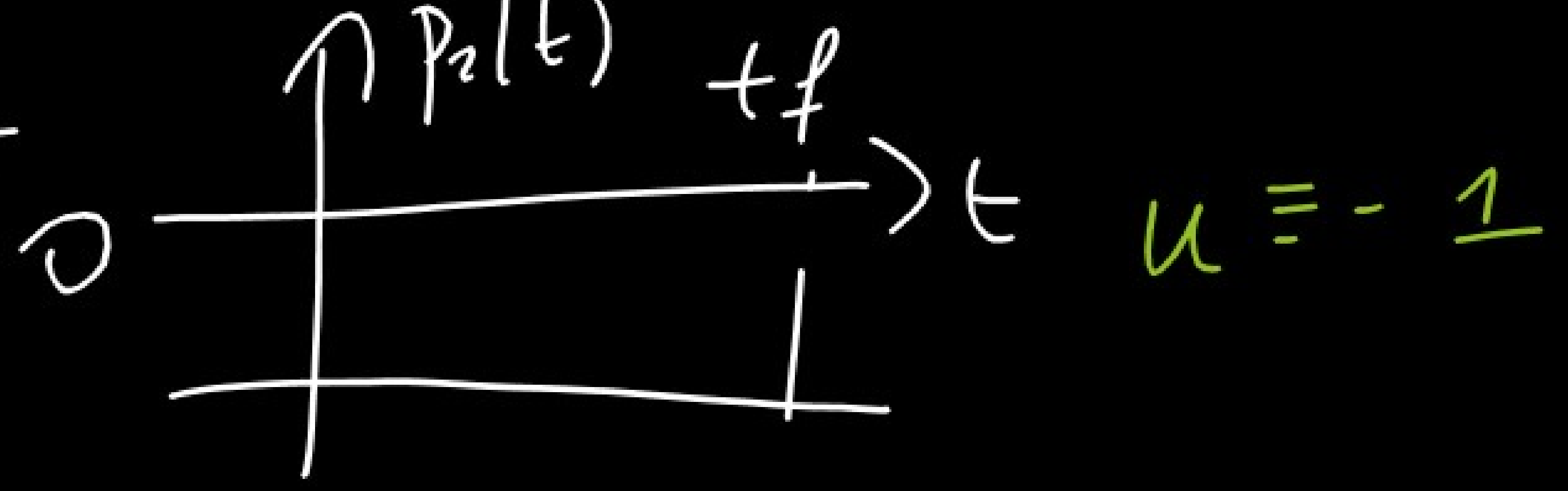
Comme précédemment, le cas $p_2 \equiv 0$ est interdit. $\Rightarrow$ Pas de commutation

$u = \mathrm{sgn}(p_2)$ est constant (soit $u = 1$, soit $u = -1$)

Soit



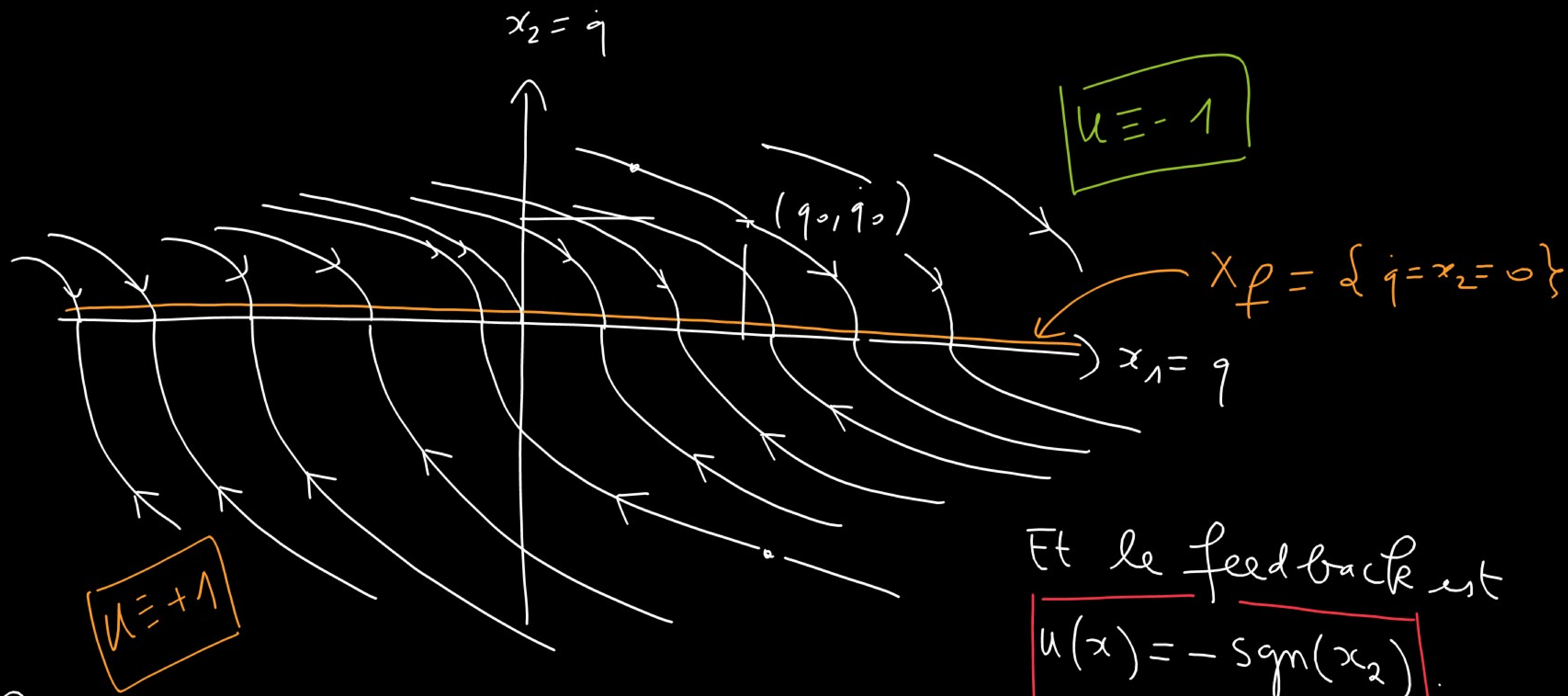
, soit



On a donc, pour la trajectoire, à nouveau un seul arc de parabole du type $x_1 = \pm \frac{1}{2} x_2^2 + cte$; géométriquement, il existe, pour toute

$$\begin{cases} + \text{ si } u \equiv +1 \\ - \text{ si } u \equiv -1 \end{cases}$$

condition initiale $(q_0, \dot{q}_0) \in \mathbb{R}^2$ un arc et un seul qui relie cette condition à la nouvelle cible $X_f = \{x_2 = 0\}$:



Et le feedback est

$$\boxed{u(x) = -\operatorname{sgn}(x_2)}.$$

Rq : calculer $t_f(q_0, \dot q_0)$.

Exo :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 u^2(t)\,dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(t) \text{ et } u(t) \in \mathbb{R} \quad (n = m = 1) \\ x(0) = -1, \; x(1) = 0 \end{cases}$$

1. Hamiltonien :

$$H(x, p, u) = p^0 \cdot u^2 + p \cdot (-x + u) \quad \left(\text{cf. } f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, u) \longmapsto -x + u \end{array} \right)$$

2. Système adjoint :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = +p$$

3. <u>Maximisation du hamiltonien</u> : à x et p fixés, on doit résoudre

$$\begin{cases} H(x,p,u) = p^0 u^2 + p(-x+u) \longrightarrow \max \\ u \in U = \mathbb{R} \text{ (pas de contrainte sur } u\text{ !)} \end{cases}$$

Supposons $p^0 \neq 0$ (cf. ci-après) : on a $p^0 < 0$ et, par homogénéité, on peut fixer $p^0 = -1$ (<0) ; dans ce cas, le pb ci-avant a un unique maximiseur (fonction strictement concave quadratique) qui vérifie $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$; donc : $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\underset{\uparrow\, p^0=-1}{-}u^2 + p(-x+u)\right) = 0$

$\Rightarrow -2u + p = 0$

$\Rightarrow u = p/2$ (<u>NB.</u> on a bien ainsi $\left\{\begin{array}{l}\text{tiré}\\ \text{éliminé}\end{array}\right.$ u en fonction de x et p.)

De plus, vérifions que le cas anormal, $p^0 = 0$, est interdit :

par l'absurde, si $p^0 = 0$, $H(x,p,u) = p(-x+u)$; le pb

$$\begin{cases} p(-x+u) \longrightarrow \max \\ u \in \mathbb{R} \end{cases}$$ n'a de sol. que si $p = 0$ (auquel cas tout $u \in \mathbb{R}$ est sol. !) Or, le PMP affirme que

si $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est sol., p.p. $t \in [0,1]$

$$u(t) \in \underset{v \in \mathbb{R}}{\arg\max}\ H(x(t), p(t), v)$$

Nécessairement, on doit avoir $p(t) = 0$ (p.p., donc pour tout t, cf. p Lipschitz)

$\Longrightarrow (p^0, p) = (0, 0)$: interdit.

$p \equiv 0$

On est donc ramené à résoudre le pb aux deux bouts suivant :

$$(*)\quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) = -x(t) + \dfrac{p(t)}{2} \\ \dot{p}(t) = p(t) \end{cases}$$

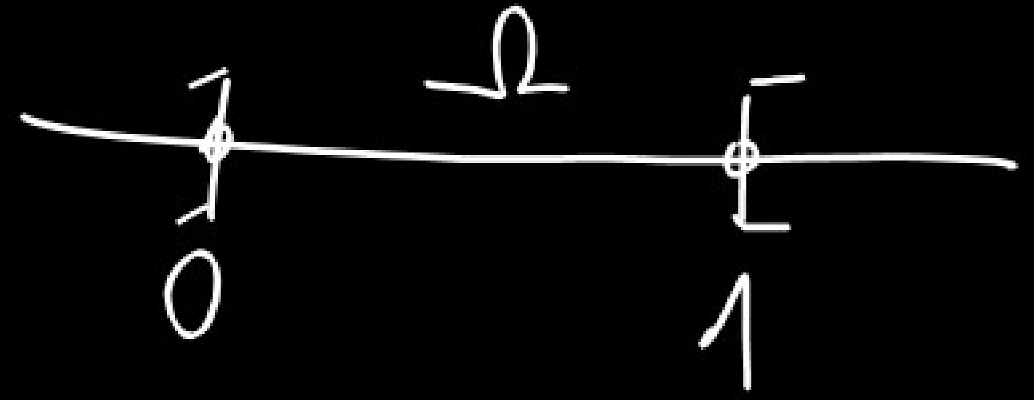
avec $x(0) = -1$, $x(1) = 0$ (2 conditions pour un système en dim 2)

$p(0) = ?$, $p(1) = ?$

Rq : plus dur qu'un pb à valeur initiale (dit "pb de Cauchy"), analogue à un pb du type :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, \ x \in \Omega =]0,1[\\ u_{|\partial\Omega} = 0 \text{ (Dirichlet homogène)} \end{cases}$$

$-\Delta u = -u''$, $\partial\Omega = \{0, 1\}$



qui est équivalent à (on pose $\underset{(x)}{U} := (u(x), u'(x))$) :

$$U'(x) = \begin{bmatrix} u'(x) \\ u''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2(x) \\ U_1(x) - f(x) \end{bmatrix} \longleftarrow -u'' + u = f \iff u'' = U_2' = u - f = U_1 - f$$

ie $\begin{cases} U_1'(x) = U_2(x) \\ U_2'(x) = U_1(x) - f(x) \end{cases}$ avec $U_1(0) = 0$, $U_1(1) = 0$

$U_2(0) = ?$, $U_2(1) = ?$

Ici, le plb aux deux bouts (*) est équivalent au plb de "tir" consistant à déterminer la valeur manquante $p(0)$ pour atteindre la cible $x(1) = 0$; en effet, par Cauchy-Lipschitz, si on fixe $p(0) = p_0$ on a une unique sol. de l'EDO avec cette condition initiale notée

inconnue de la fonction de tir

$x(t,p_0)$, $p(t,p_0)$ ← valeur de la sol. de C.I. $x(0)=-1$, $p(0)=p_0$ au temps t)

cette sol. dépend de p_0

On est ainsi ramené à résoudre une équation ("de tir", cf. Ch. 4) :

Trouver $p_0 \in \mathbb{R}$ tq $\boxed{x(\underset{\substack{\uparrow \\ t=t_f=1 \\ \text{(temps final)}}}{1}, p_0) = 0}$ ← pour chaque p_0, évaluer cette fonction revient à résoudre un pb de Cauchy (ie intégrer une EDO)

↓

numériquement : Newton + Solver ODE

Ici, l'EDO est suffisamment simple pour être intégrée analytiquement :

Soit $p_0 \in \mathbb{R}$, on doit résoudre $\begin{cases} \dot{x} = -x + p/2 \\ \dot{p} = p \end{cases}$, $x(0) = -1$, $p(0) = p_0$

On a $p(t) = e^{t} \cdot p_0$

$\Rightarrow \dot{x} = -x + \frac{1}{2} e^{t} \cdot p_0$

<u>Eq. homogène</u> : $\dot{x} = -x \Rightarrow x(t) = e^{-t} \cdot \lambda$

<u>Avec second membre</u> : on fait "varier la cte" en cherchant une solution de $\dot{x} = -x + \frac{1}{2} e^{t} \cdot p_0$ sous la forme $x(t) = e^{-t} \cdot \lambda(t)$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -e^{-t} \cdot \cancel{\lambda(t)} + e^{-t} \cdot \dot{\lambda}(t) = -\cancel{e^{-t} \cdot \lambda(t)} + \frac{1}{2} e^{t} \cdot p_0$

$\Rightarrow \dot{\lambda}(t) = \frac{1}{2} e^{2t} \cdot p_0$

$\Rightarrow \lambda(t) = \frac{1}{4} e^{2t} \cdot p_0 + c$

ie : sol. générale

$x(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{4} e^{2t} \cdot p_0 + c \right) = e^{t} \cdot \frac{p_0}{4} + c \cdot e^{-t}$

$x(0) = -1 \Rightarrow$

$-1 = p_0/4 + c$

$\Rightarrow c = -1 - p_0/4$

$$\Rightarrow x(t) = e^{t} \cdot p_0/4 - (1 + p_0/4) \cdot e^{-t}$$

$$= \frac{p_0}{2} \operatorname{sh} t - e^{-t} =: x(t, p_0)$$

On résout finalement $x(1, p_0) = 0$

$t=1$

$$\Rightarrow \frac{p_0}{2} \cdot \operatorname{sh} 1 - e^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{2}{e(\operatorname{sh} 1)} = \frac{2}{e\left(\frac{e - 1/e}{2}\right)} = \frac{4}{e^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{p(t)}{2} = e^{t} \cdot \frac{2}{e^2 - 1}}$$