Ch. 3 - Principe du maximum

$$\ddot{q}(t) = u(t) \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{array} \quad \left(x(t) = (q(t), \dot{q}(t)) \in \mathbb{R}^2 \right)$$

$$u(t) \in [-1, 1]$$

Supposons $u \in \mathcal{L}^\infty([0,t_f], \mathbb{R})$ est une solution et $x \in W^{1,\infty}([0,t_f], \mathbb{R}^2)$ la trajectoire associée.

Alors, il existe $(p^0, p) \neq (0,0)$ tel que :

- $p^0 \leq 0$
- $p : [0,t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t), u(t))$$

où $H(x,p,u) = p^0 \underbrace{f^0(x,u)}_{1} + (p \mid \underbrace{f(x,u)}_{(x_2,u)})$

$$= p^0 + p_1 x_2 + p_2 u.$$

et le Hamiltonien est maximisé presque partout

$$H(x(t), p(t), u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), p(t), v)$$

On est donc amené à considérer, à x et $p \in \mathbb{R}^2$ fixés, le pb d'opti en dim 1 suivant :

$$H(x,p,u) = p^0 + p_1 x_2 + p_2 u \longrightarrow \max$$

$u \in [-1,1]$

on a tiré u comme fonction de (x,p)

le cas pénible

2 cas :

- si $p_2 = 0$, l'ensemble des solutions est $[-1,1]$
- si $p_2 \neq 0$, l'unique solution est $\boxed{\mathrm{sign}(p_2) = \frac{p_2}{|p_2|} = u}$

Rq : le PMP ne dit rien sur u quand $p_2 = 0$.

De plus, on a :

$$\left.\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x(t), p(t), u(t)) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2}(\text{———}\,''\,\text{———}) = -p_1(t) \end{cases}\right]$$

système adjoint

Rq : en "éliminant" u, on arrive au problème aux deux bouts suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) & x_1(0) = q_0 & x_1(t_f) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = \boxed{\mathrm{sign}(p_2(t))} & x_2(0) = \dot{q}_0 & x_2(t_f) = 0 \\ \dot{p}_1(t) = 0 & p_1(0) = ? & p_1(t_f) = ? \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) & p_2(0) = ? & p_2(t_f) = ? \end{cases}$$

qui a un second membre discontinu en (x,p) (pas loc. Lipschitz en (x,p)...)

(et t_f inconnu, avec $H = 0$...)

Vérifions que $p_2 \equiv 0$ est impossible. Par l'absurde :

si $p_2(t) = 0,\ t \in [0, t_f]$,

$\dot{p}_2(t) = 0 \implies p_1(t) = -\dot{p}_2(t) = 0.$

Or,

$$0 \overset{\text{cf. tf libre}}{=} H(x(t), p(t), u(t))$$

$$= p^0 + \underset{0}{\cancel{p_1}}(t) . x_2(t) + \underset{0}{\cancel{p_2}}(t) . u(t)$$

$\implies p^0 = 0$

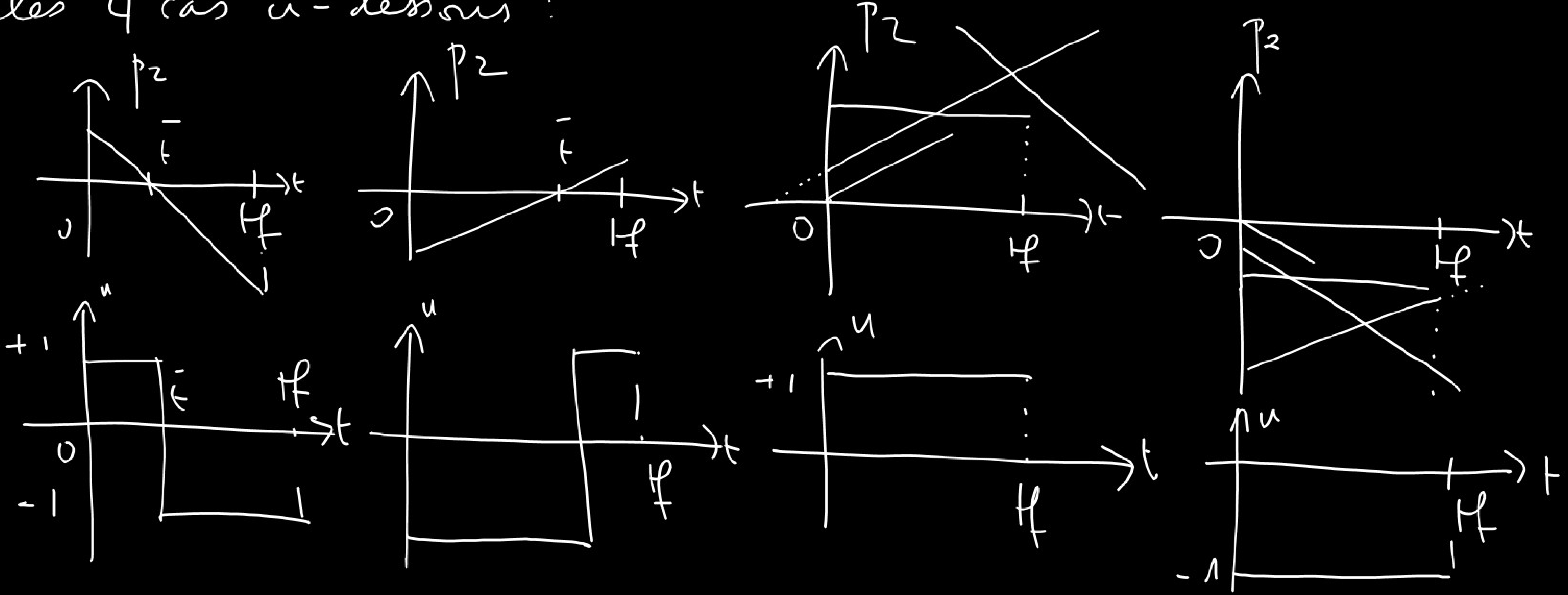
$$\implies (\underset{\underset{(p_1, p_2) : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^2}{\uparrow}}{p^0, p}) = (0, \overset{\text{la fonction nulle de } [0,t_f] \text{ dans } \mathbb{R}^2}{0})$$

Interdit par le PMP

$\implies p_2 \not\equiv 0$ et affine :

p_2 a au plus un zéro

On en déduit que le contrôle est constant par morceaux, avec au plus deux morceaux (deux "arcs"), ie avec au plus commutation de $+1$ vers -1 (ou le contraire) ; on a donc les 4 cas ci-dessous :



On peut donc intégrer le système en commençant soit par $u=+1$, soit par $u=-1$. Clairement (on a admis l'existence de solution), si q_0 et $\dot q_0 > 0$ on doit commencer par $u=-1$: plaçons nous dans ce cas.

$\boxed{u=-1}$, $t \in [0, \overset{\swarrow \text{temps de commutation}}{\bar t}]$ ($\bar t > t_f \iff$ pas de commutation) :

$$\dot x_2(t) = \ddot q(t) = u(t) = -1$$

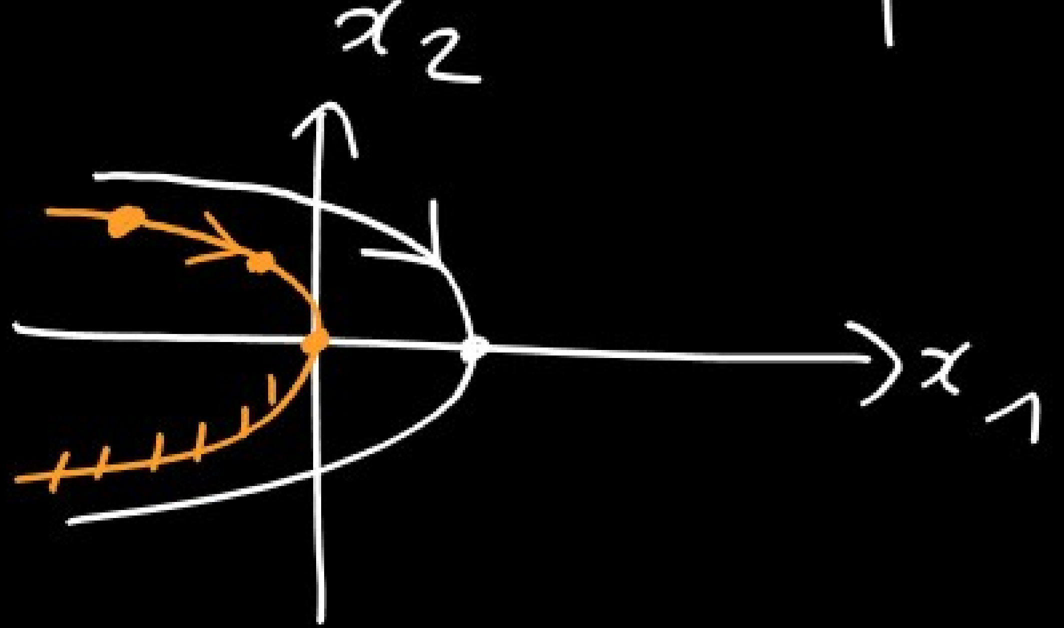
$$\implies x_2(t) = -t + \underset{\nwarrow x_2(0)}{\dot q_0} \searrow$$

$$\dot x_1(t) = x_2(t) = -t + \dot q_0 \qquad \swarrow x_1(0)$$

$$\implies x_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \dot q_0 t + q_0$$

$$= -\frac{1}{2}(\underbrace{-t+\dot q_0}_{x_2(t)})^2 + \frac{1}{2}\dot q_0^2 + q_0$$

$\Longrightarrow$ la courbe paramétrée $[0,\bar{t}\,] \ni t \longmapsto (x_1(t), x_2(t))$ parcourt un arc de parabole d'équation $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0}_{cte}$,



ie $\frac{1}{2}x_2^2 + x_1 = \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0 = cte$,
$t \in [0,\bar{t}\,]$

Quand $t \in [\bar{t}, t_f]$, $u(t) = +1$ et on a

$\dot{x}_2(t) = u(t) = +1$

$\Rightarrow \underset{0}{\cancel{x_2(t_f)}} - x_2(t) = t_f - t$

$\Rightarrow x_2(t) = t - t_f \nearrow$

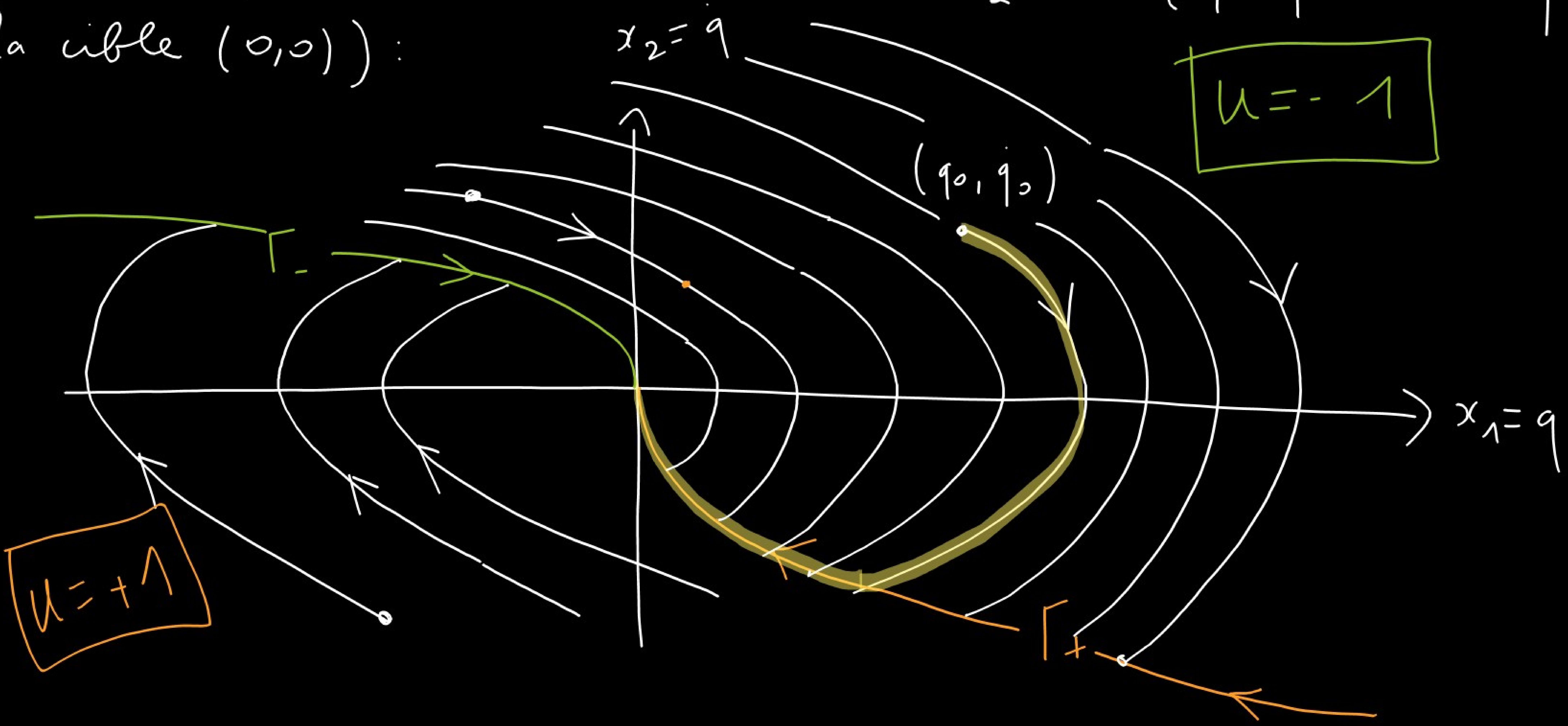
$\dot{x}_1(t) = t - t_f$

$\Rightarrow \underset{0}{\cancel{x_1(t_f)}} - x_1(t) = \left.\frac{1}{2}t^2 - t_f \cdot t\right]_t^{t_f}$

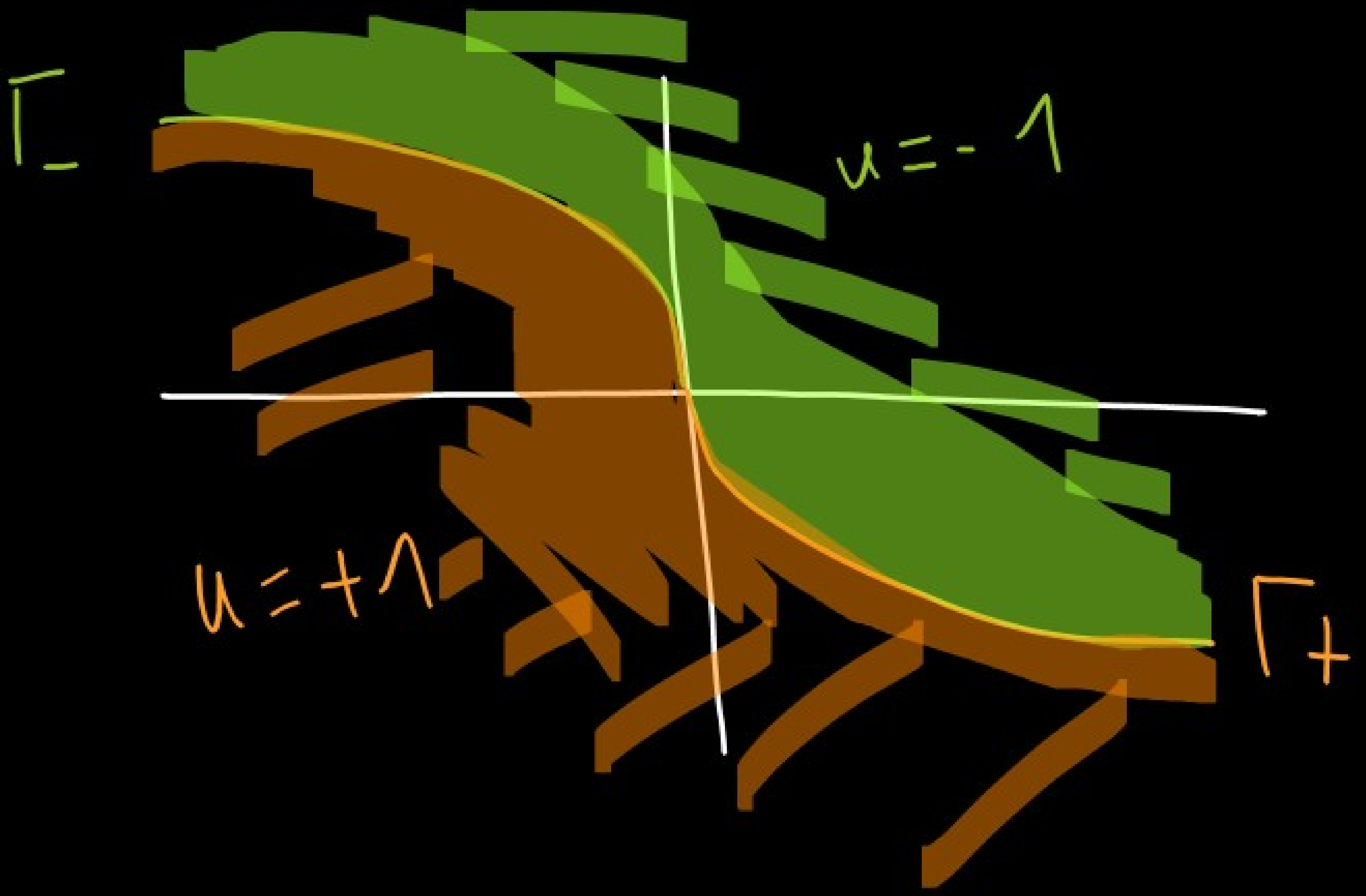
$= -\frac{1}{2}t_f^2 - \frac{1}{2}t^2 + t_f \cdot t$

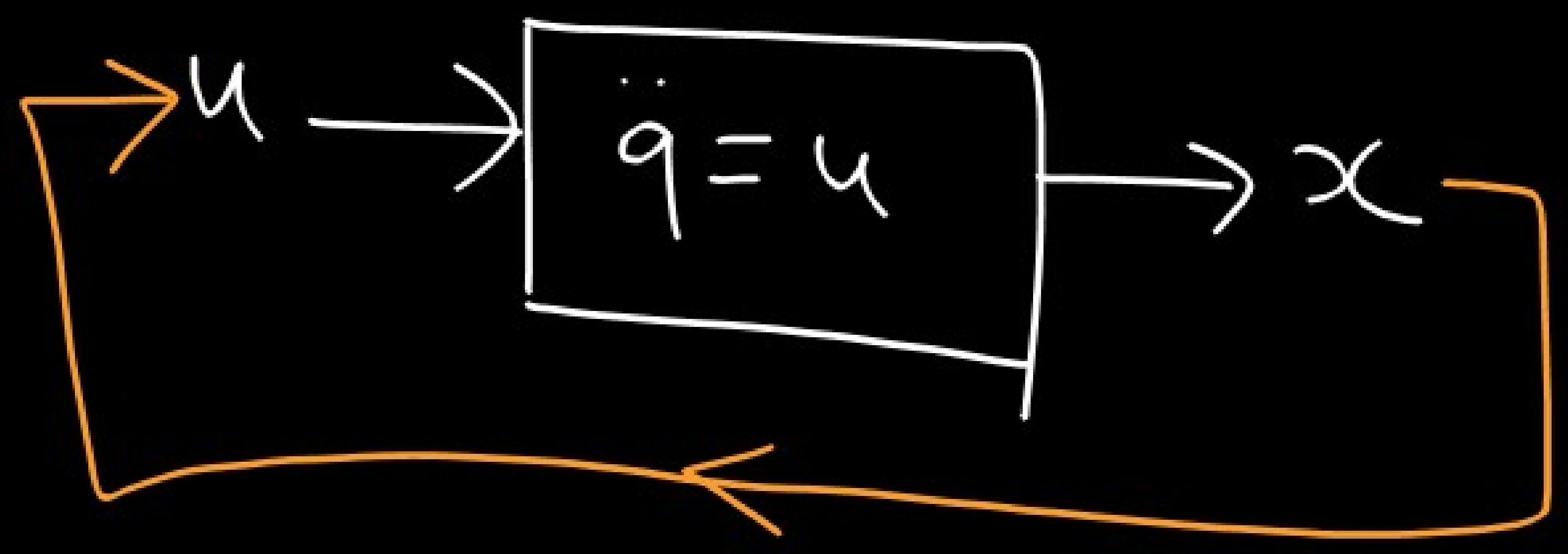
$\Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{2}(t - t_f)^2 = \frac{1}{2}x_2^2$

La courbe paramétrée $[\bar{t}, t_f] \ni t \longmapsto (x_1(t), x_2(t))$ décrit donc un arc de parabole d'équation $x_1 = \frac{1}{2} x_2^2$ (qui passe bien par la cible $(0,0)$) :



On a un feuilletage du plan en courbes temps minimales : par tout pt du plan passe une concaténation de deux arcs (au plus) conduisant à la cible $(0,0)$. On a résolu le problème en déterminant la "synthèse" (feedback / contrôle en "boucle fermée"); $u = u(x)$ (connaissant l'état $x(t)=(q(t),\dot q(t))$ on sait quel est le contrôle optimal à appliquer) :





<u>Exo</u> : calculer $t_f(q_0,\dot q_0)$ (le temps min)

Rq : quand on fait $u = +1$ puis -1 on a bien la forme annoncée, à savoir :

$$\dot{x}_2(t) = +1 \Rightarrow x_2(t) = t + \dot{q}_0$$

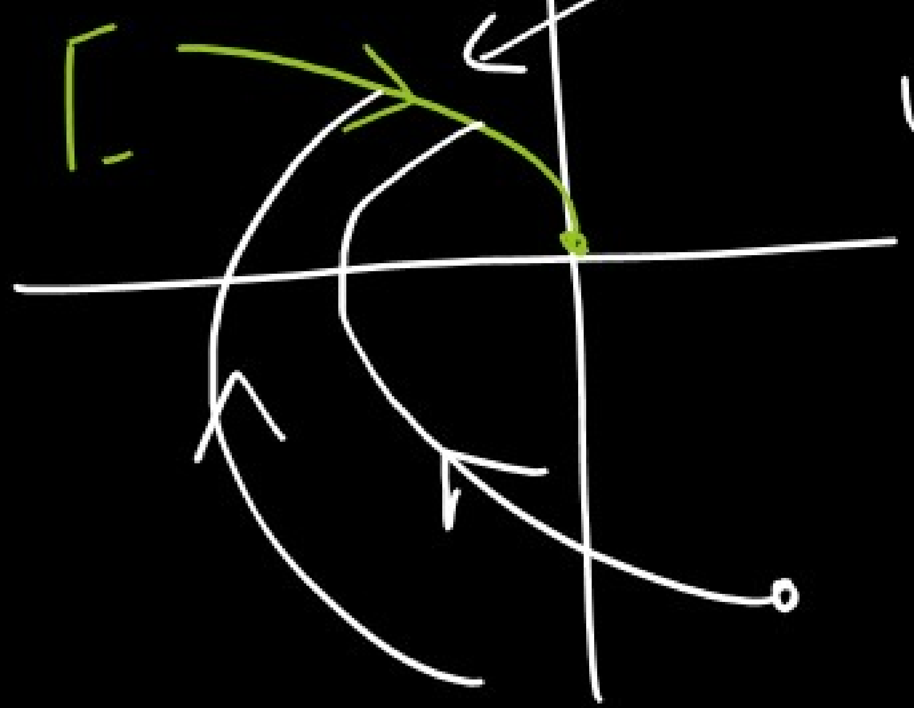
$$\Rightarrow \dot{x}_1(t) = t + \dot{q}_0 \Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{2} t^2 + \dot{q}_0 \cdot t + q_0$$

$$= \frac{1}{2}(\underbrace{t + \dot{q}_0}_{x_2(t)})^2 - \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0$$

$\Rightarrow$ on parcourt l'arc de parabole $x_1 = +\frac{1}{2} x_2^2 \underbrace{- \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0}_{cte}$

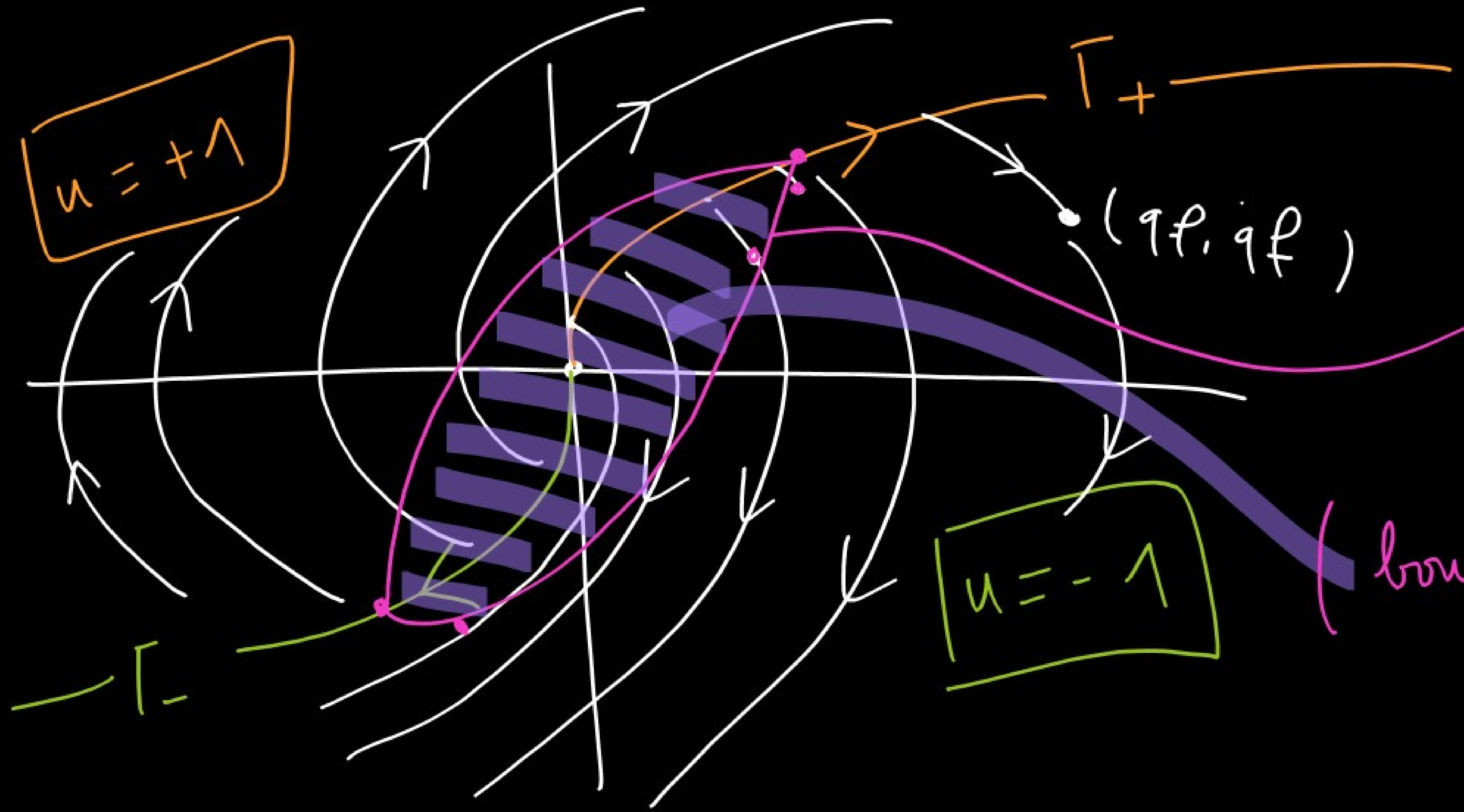
ie : $\frac{1}{2} x_2^2 - x_1 = \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 - q_0$

$= cte$



et on doit terminer par $u = -1$ sur Γ_-.

Dans le cas symétrique où on souhaite partir de (0,0) et atteindre $(q_f, \dot{q}_f) \in \mathbb{R}^2$ arbitraire, on obtient la synthèse suivante (PMP idem, seule les conditions aux deux bouts et donc l'intégration changent) :



temps min
↓

$$\{(q_f, \dot{q}_f) \in \mathbb{R}^2 \mid t_f(q_f, \dot{q}_f) = r\}$$

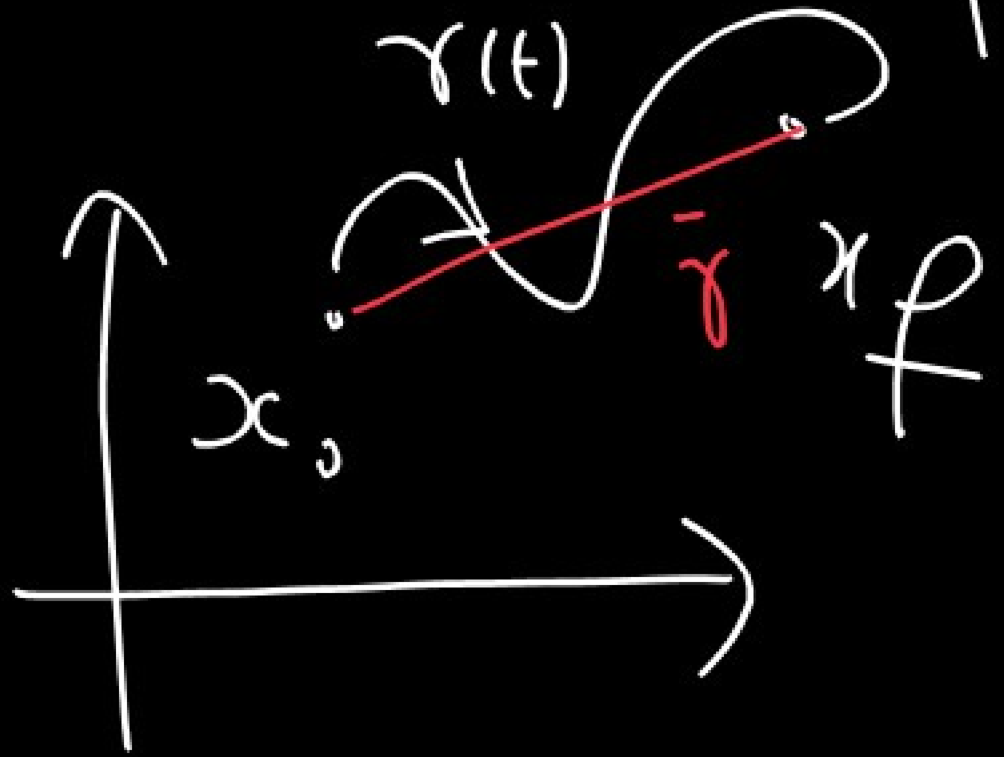
"isochrone", sphère de centre (0,0) de rayon r

(boule...)

Exo : mq $S((0,0), r)$ donnée par arcs de paraboles

Rq : cette sphère généralisée a des singularités ("cusps") si petit soit le rayon r : situation très différente de la géométrie riemannienne.

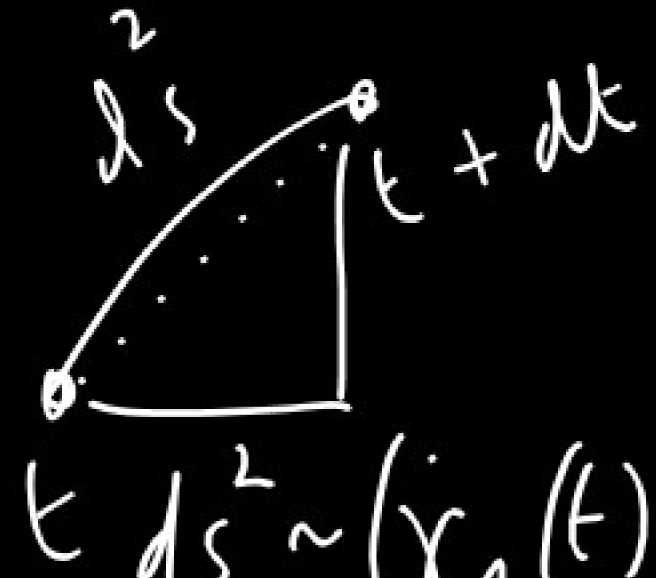
Exo. Redémontrons que le segment est le plus court chemin (Lipschitz) entre deux pts du plan pour la métrique usuelle :



$$\int_0^{tf} \sqrt{\dot{\gamma}_1^2(t)+\dot{\gamma}_2^2(t)}\; dt =: \ell(\gamma) \longrightarrow \min$$

γ Lipschitz

$\gamma(0)=x_0,\ \gamma(tf)=xf$



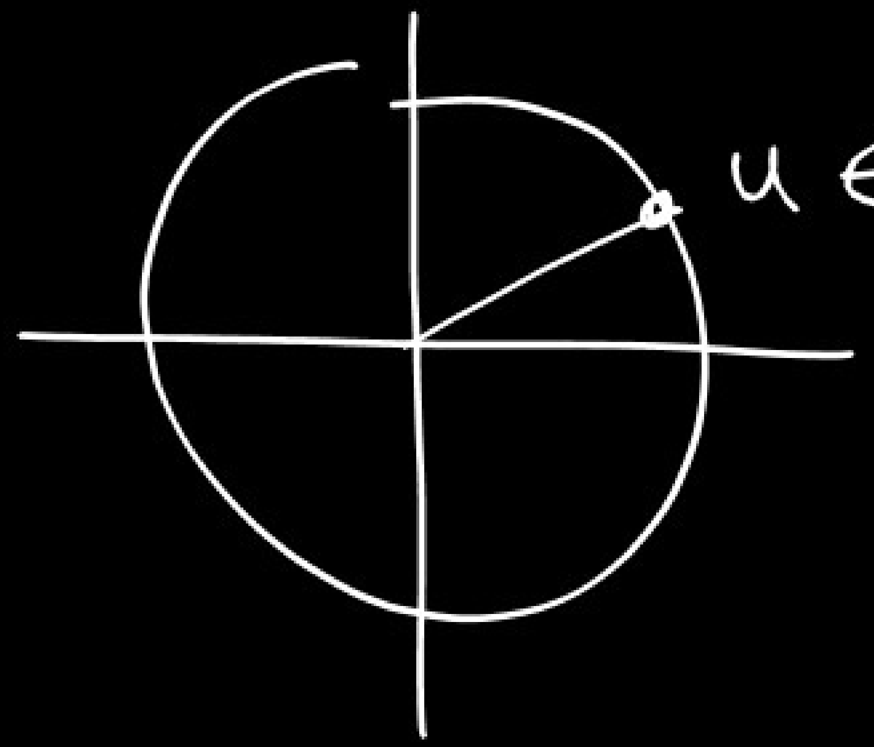
$$ds^2 \simeq (\dot{\gamma}_1(t)\,dt)^2 + (\dot{\gamma}_2(t)\,dt)^2$$

Quitte à paramétriser par la longueur d'arc $(dt = ds)$ (ie à supposer $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$, $t \in [0, t_f]$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^{t_f} \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{1}\, dt = t_f \longrightarrow \min \\
\dot{\gamma}(t) = u(t), \quad u_1^2(t) + u_2^2(t) \overset{\leq}{\cancel{=}} 1 \\
(\, x(t) = \gamma(t) : \text{état} \in \mathbb{R}^2 \,) \\
\gamma(0) = \underset{(0,0)}{\cancel{x_0}}, \; \gamma(t_f) = x_f
\end{array}\right.$$

on convexifie

$\Rightarrow$ existence de sol. (admis)



$u \in \underset{B_f(0,1)}{\cancel{S}^1} = U$