

MAM5 / M2 INUM

Commande optimale

2025-26

Exam cc no. 1

Exercice 1 (8 points)

On considère le problème de minimisation du temps final pour la dynamique

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1,$$

où $q(t)$ et $u(t)$ sont de dimension un. Les conditions initiales q_0, \dot{q}_0 sont fixées.

1.1

Déterminer le contrôle optimal pour la condition finale $q(t_f) = 0$ (et $\dot{q}(t_f)$ libre).

1.2

Déterminer la fonction valeur correspondante, $t_f(q_0, \dot{q}_0)$ (temps min en fonction de la condition initiale).

1.3

Déterminer le contrôle optimal pour la condition finale $\dot{q}(t_f) = 0$ (et $q(t_f)$ libre).

1.4

Déterminer la fonction valeur correspondante, $t_f(q_0, \dot{q}_0)$ (temps min en fonction de la condition initiale).

Exercice 2 (8 points)

On considère le problème de commande optimale général suivant, où $t_f > 0$ est libre :

$$\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min$$

avec

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \subset \mathbf{R}^m,$$

et des conditions aux limites sur $x(0)$ et $x(t_f)$ dans \mathbf{R}^n . On se ramène à temps final fixé sur $[0, 1]$ par le changement de temps $t = t_f \cdot s$, et on fait de t_f un nouvelle variable d'état en posant ($' = d/ds$ représente la dérivée par rapport au nouveau temps s) :

$$t'_f(s) = 0.$$

2.1

On pose $\hat{x}(s) := (x(t_f(s) \cdot s), t_f(s))$ et $\hat{u}(s) := u(t_f(s) \cdot s)$. Montrer que $\hat{x}'(s) = \hat{f}(\hat{x}(s), \hat{u}(s))$ avec

$$\hat{f}(\hat{x}, \hat{u}) = (t_f \cdot f(x, u), 0), \quad \hat{x} = (x, t_f) \in \mathbf{R}^{n+1}, \quad \hat{u} = u \in \mathbf{R}^m.$$

2.2

Montrer que le coût de Lagrange s'écrit

$$\int_0^1 \hat{f}^0(\hat{x}(s), \hat{u}(s)) \, ds$$

avec $\hat{f}^0(\hat{x}, \hat{u}) = t_f \cdot f^0(x, u)$.

2.3

On note désormais $\hat{x} = (x, t_f) \in \mathbf{R}^{n+1}$, $\hat{p} = (p, p_{t_f}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ (et u pour le contrôle, p^0 pour le multiplicateur devant le terme de Lagrange). Écrire le hamiltonien du nouveau problème à temps final fixé.

2.4

Écrire l'équation différentielle vérifiée par p_{t_f} .

2.5

Les valeurs $t_f(0)$ et $t_f(1)$ étant libres, en déduire les conditions de transversalité sur p_{t_f} .

2.6

En déduire la valeur de

$$\int_0^1 t_f(s) [p^0 f^0(x(s), u(s)) + (p(s)|f(x(s), u(s)))] \, ds.$$

2.7

En déduire que le hamiltonien du problème de départ à temps final libre est nul.

Exercice 3 (4 points)

On considère la portion de code suivant, extrait de l'application d'une méthode directe au problème de navigation :

```

# Objective
@objective(sys, Min, tau[1] + tau[2] + tau[3])

# Constraints
@constraints(sys, begin
    x[1, 1] == x0
    y[1, 1] == y0
    th[1, 1] == th0
    x[2, 1] == x[1, P]
    y[2, 1] == y[1, P]
    th[2, 1] == th[1, P]
    x[3, 1] == x[2, P]
    y[3, 1] == y[2, P]
    th[3, 1] == th[2, P]
    x[3, P] == xf
    y[3, P] == yf
    th[3, P] == thf
    end)

# Dynamics: Crank–Nicolson scheme
for j in 1 : P-1
    @NLconstraints(sys, begin
        #  $x' = w + \cos(\theta)$ 
        x[1, j+1] == x[1, j] + 0.5 * tau[1]*Dt *
            (w + cos(th[1, j]) + w + cos(th[1, j+1]))
        x[2, j+1] == x[2, j] + 0.5 * tau[2]*Dt *
            (w + cos(th[2, j]) + w + cos(th[2, j+1]))
        x[3, j+1] == x[3, j] + 0.5 * tau[3]*Dt *
            (w + cos(th[3, j]) + w + cos(th[3, j+1]))
        #  $y' = \sin(\theta)$ 
        y[1, j+1] == y[1, j] + 0.5 * tau[1]*Dt *
            (sin(th[1, j]) + sin(th[1, j+1]))
        y[2, j+1] == y[2, j] + 0.5 * tau[2]*Dt *
            (sin(th[2, j]) + sin(th[2, j+1]))
        y[3, j+1] == y[3, j] + 0.5 * tau[3]*Dt *
            (sin(th[3, j]) + sin(th[3, j+1]))
        #  $\theta' = u$ 
        th[1, j+1] == th[1, j] + tau[1]*Dt * u[1]
        th[2, j+1] == th[2, j] + tau[2]*Dt * u[2]
        th[3, j+1] == th[3, j] + tau[3]*Dt * u[3]
        end)
    end

```

3.1

Expliquer l'expression de la fonction coût minimisée.

3.2

Indiquer la portion de code traduisant les conditions de jonction entre le second et le troisième arc.

3.3

Quelle est le lien entre `Dt` et `P` ?

3.4

Comment modifier ce code si le courant est désormais un vecteur (w_x, w_y) ?