Commande optimale

1. Introduction

$x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$

état à l'instant t

contrôle en t, $u(t) \in \mathbb{R}^m$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad : \text{EDO}$$

dynamique du système

état final

→ t_f : temps final (fixé ou non)

t_0 : —"— initial

→ sélection des meilleurs courbes/contrôles

Les questions que l'on se pose :

i) <u>commandabilité (controlabilité)</u> : existe-t-il un contrôle <u>admissible</u> (ie qui relie x_0 à x_f) ?

ii) <u>existence d'un minimiseur</u> : étant donnée une fonction coût (critère...) du type Lagrange

$$\int_0^{t_f} f^0(\underbrace{x(t), u(t)}_{}) \, dt \longrightarrow \min \quad \in \mathbb{R}$$

$$f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

(CS existence : Th. Filippov)

$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$

iii) condition nécessaire (PMP = principe du maximum de Pontryagin) :

si $\bar{u}$ ($\in \mathcal{L}^\infty([0,t_f],\mathbb{R}^m)$ ...) est solution, ALORS (CN) que vérifie $\bar{u}$? ($\simeq$ KKT pour un pb d'opti en $\boxed{\text{dim } \infty}$)

discrétisation

→ §3 PMP, §4 Tir simple

→ résolution directe §2 sous forme d'un pb d'opti en $\boxed{\text{dim} < \infty}$

Rappel : KKT = Karush-Kuhn-Tucker :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \to \min \\ h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in C \subset \mathbb{R}^n$$

si $\bar{x} \in C$ sol., $\exists (\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \neq (0,0,0)$ tq

i) $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}_0, \underset{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}}) = 0$, ii) $\bar{\mu} \geq 0$, iii) $(\bar{\mu} | g(\bar{x})) = 0$

avec $L(x,\lambda_0,\lambda,\mu) := \lambda_0 f(x) + (\lambda \mid h(x)) + (\mu \mid g(x))$

(le lagrangien du pb)

. <u>Formulation du problème de Lagrange</u> : on cherche un contrôle

$u \in L^\infty([0,t_f],\mathbb{R}^m)$ (fonctions essentiellement bornées) tq,

si $x \in W^{1,\infty}([0,t_f],\mathbb{R}^n)$ (fonctions lipschitziennes) est <u>la</u> trajectoire associée qui vérifie

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

, on a x et u qui minimisent

le coût de Lagrange

$$\int_0^{t_f} f^0(x(t),u(t))\,dt \longrightarrow \min$$

presque partout

sous les contraintes

dynamique

conditions aux deux bouts

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)),\quad t\in[0,t_f]\ (\text{p.p.})$$

$$x(0)=x_0,\quad x(t_f)=x_f$$

contraintes sur u

$$\text{et}\quad u(t)\in U\subset\mathbb{R}^m,\quad t\in[0,t_f]\ (\text{p.p.}).$$

ensemble des contraintes

On dit alors que $\bar{u}\in\mathcal{L}^\infty([0,t_f],\mathbb{R}^m)$ est sol. si, quel que soit $u\in\mathcal{L}^\infty([0,t_f],\mathbb{R}^m)$ admissible (ie qui vérifie les contraintes ci-dessus) alors

$$\int_0^{t_f} f^0(\bar{x}(t),\bar{u}(t))\,dt \leq \int_0^{t_f} f^0(x(t),u(t))\,dt$$

où $\bar{x}$ est la trajectoire associée à $\bar{u}$,

x —— " —————————————— u.

$u \in \mathcal{L}^\infty$ $\not\in \mathcal{C}^0 \ldots$

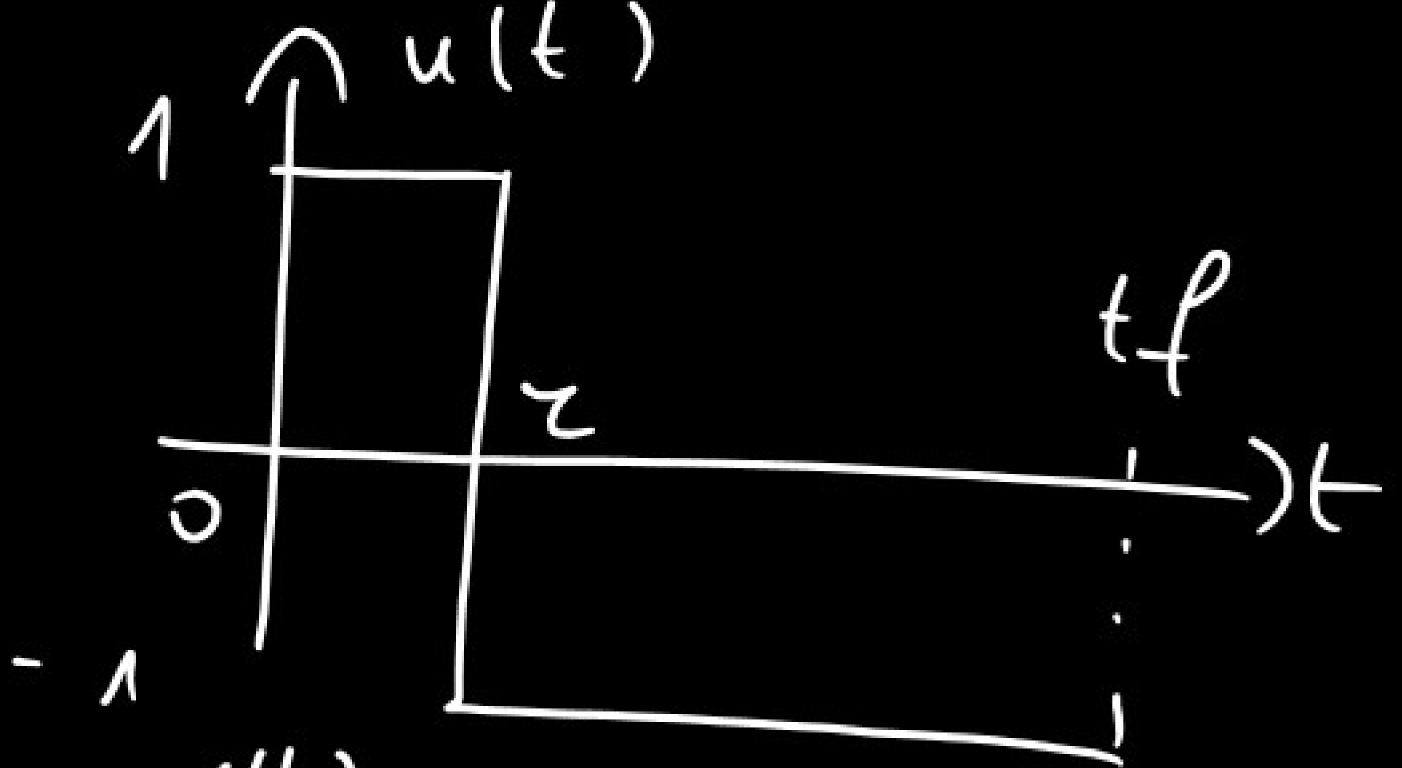
Rq : i) Soit $u \in \mathcal{L}^\infty([0,t_f],\mathbb{R}^m)$, si on note $g(t,x) := f(x,u(t))$

on a existence et unicité d'une solution maximale

de l'EDO $\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = x'(t) = g(t,x(t)), \text{ p.p. } t \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

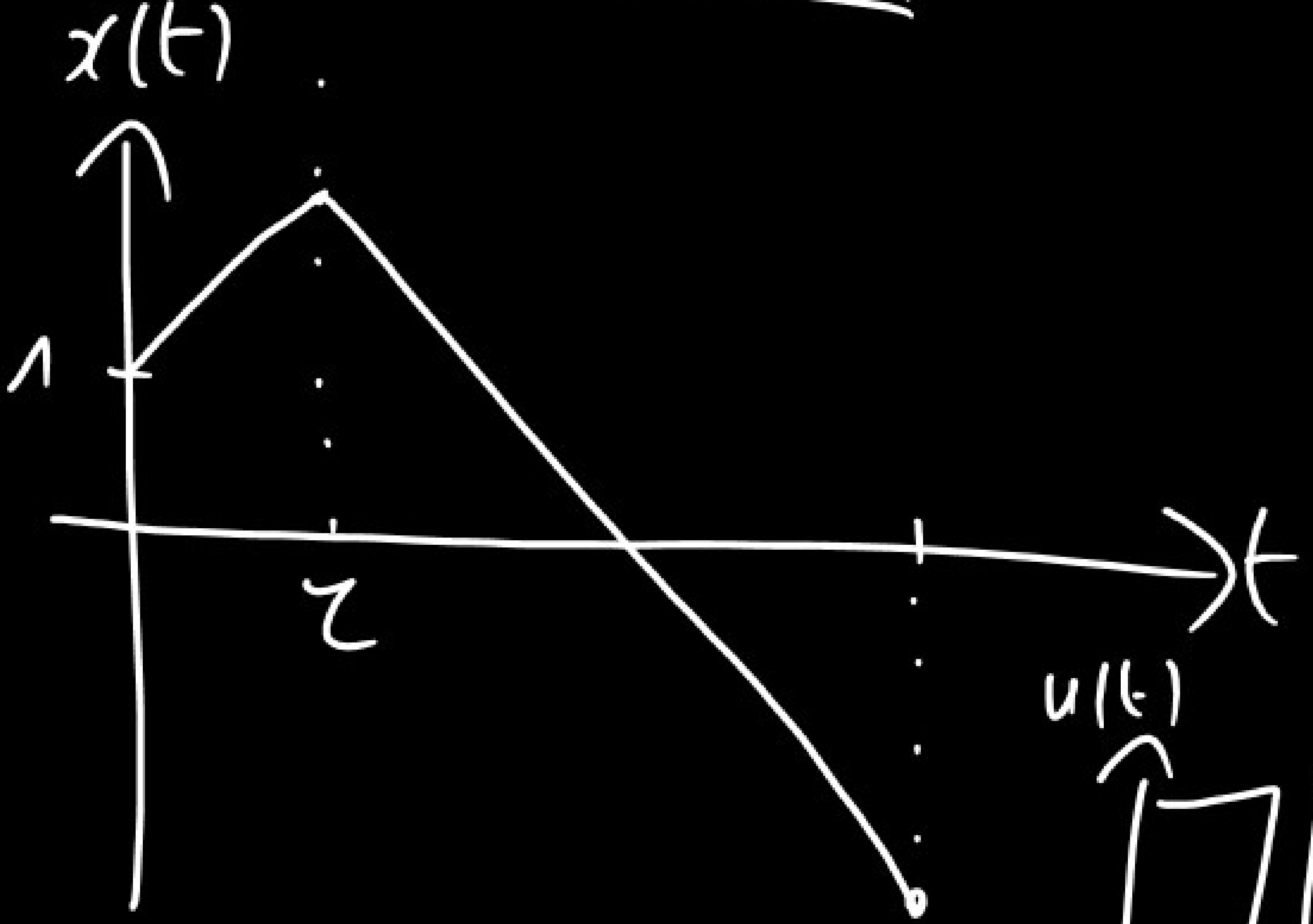
d'après le th. de Carathéodory. (NB. Sol. x Lipschitz, pas $\mathcal{C}^1$!)

ex : $\dot{x}(t) = u(t)$ (ie $f(x,u) := u$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n = m$)



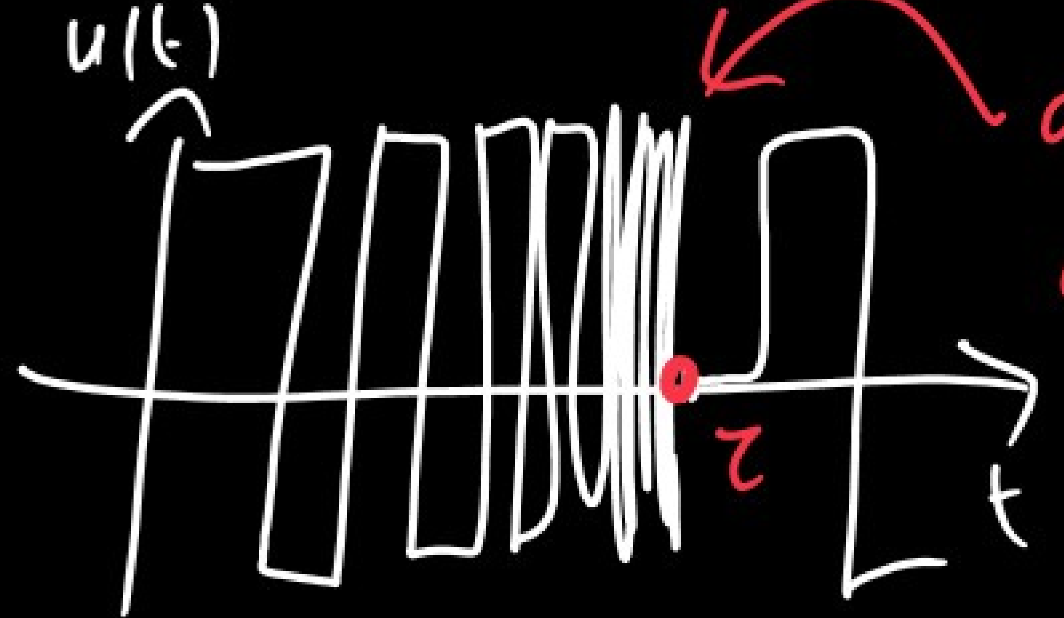
+ c.i. $x(0) = 1$

(et $x(t) = \underbrace{x(0)}_{1} + \int_0^t \overbrace{u(s)}^{\dot{x}(s)}\, ds$, $t \in [0, t_f]$,



avec $x \notin \mathcal{C}^1([0,t_f])$ car pas dérivable en $t = \tau$, mais $x \in \underbrace{W^{1,\infty}}_{\text{Lipschitz}} \subset \underbrace{W^{1,1}}_{\text{absolument continue}}$)

Ou plus compliqué :



ii) il existe d'autres formes (équivalentes) de critères, à savoir :

- les coûts de Mayer : $g(x(t_f)) \longrightarrow \min$

  (ce qui suppose une cible plus large que le singleton $\{x_f\}$: $x(t_f) \in X_f \subset \mathbb{R}^n$)

- les coûts de Bolza : $g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} f^0(x(t),u(t))\,dt$

De fait, toutes ces formes sont équivalentes :

- Lagrange $\to$ Mayer : on augmente l'état en posant

$$\dot{x}^0(t) = f^0(x(t),u(t)), \quad x^0(0) = 0 \Longrightarrow \int_0^{t_f} \underbrace{f^0(x(t),u(t))}_{\dot{x}^0(t)}\,dt = x^0(t_f) - \cancel{x^0(0)}^{\,0}$$

$n \to 1+n$: augmentation de l'état

En notant $\underset{\substack{\nearrow \\ \in \mathbb{R}}}{} \hat{x} := (x^0, \underset{\in \mathbb{R}^n}{x}) \in \mathbb{R}^{1+n}$, $g(\hat{x}) = g(x^0, x) := x^0$, on a

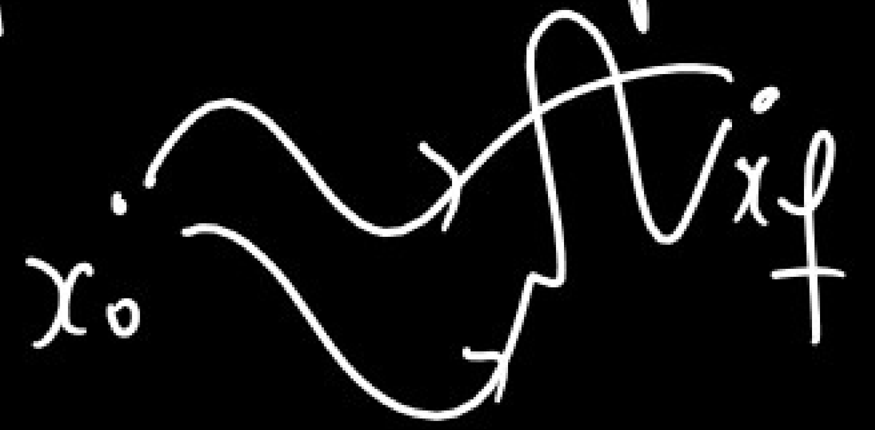
bien $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(\hat{x}(t), u(t))$, $\hat{f}(\hat{x}, u) := (f^0(x,u), f(x,u)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$\hat{x}(0) = (0, x_0)$, $\hat{x}(t_f) \in \hat{X}_f := \{ \underset{(x^0, x)}{\hat{x}} \in \mathbb{R}^n \mid x = x_f \}$

- idem dans l'autre sens, et donc pour Bolza

iii) le temps t_f peut être libre (= inconnu), auquel cas une solution consiste en un couple $\bar{t}_f, \bar{u}$, avec $\bar{t}_f \geq 0$, $\bar{u} \in \mathcal{L}^\infty([0, \bar{t}_f], \mathbb{R}^m)$

ex : pb en temps (final) min : $\displaystyle\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\, dt = t_f \to \min$

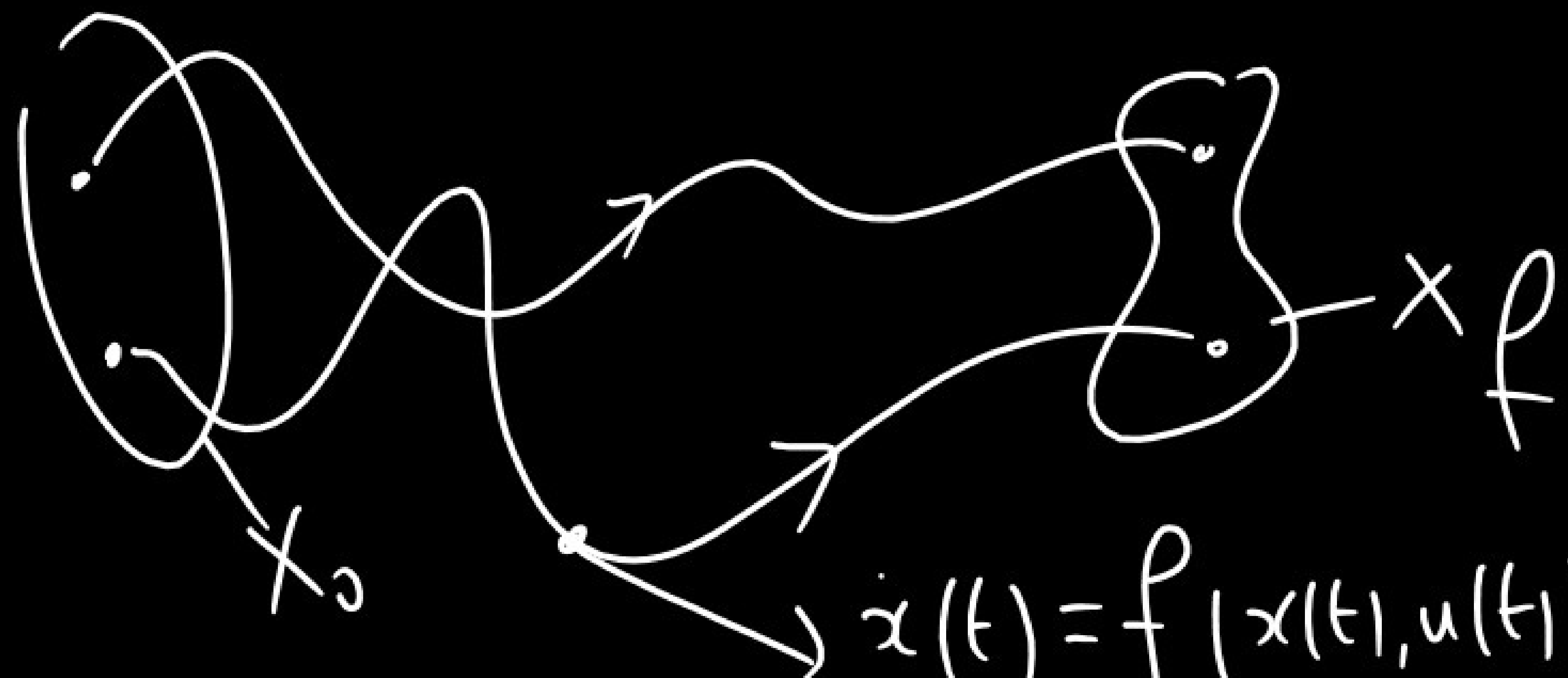


avec $f^0(x,u) := 1$

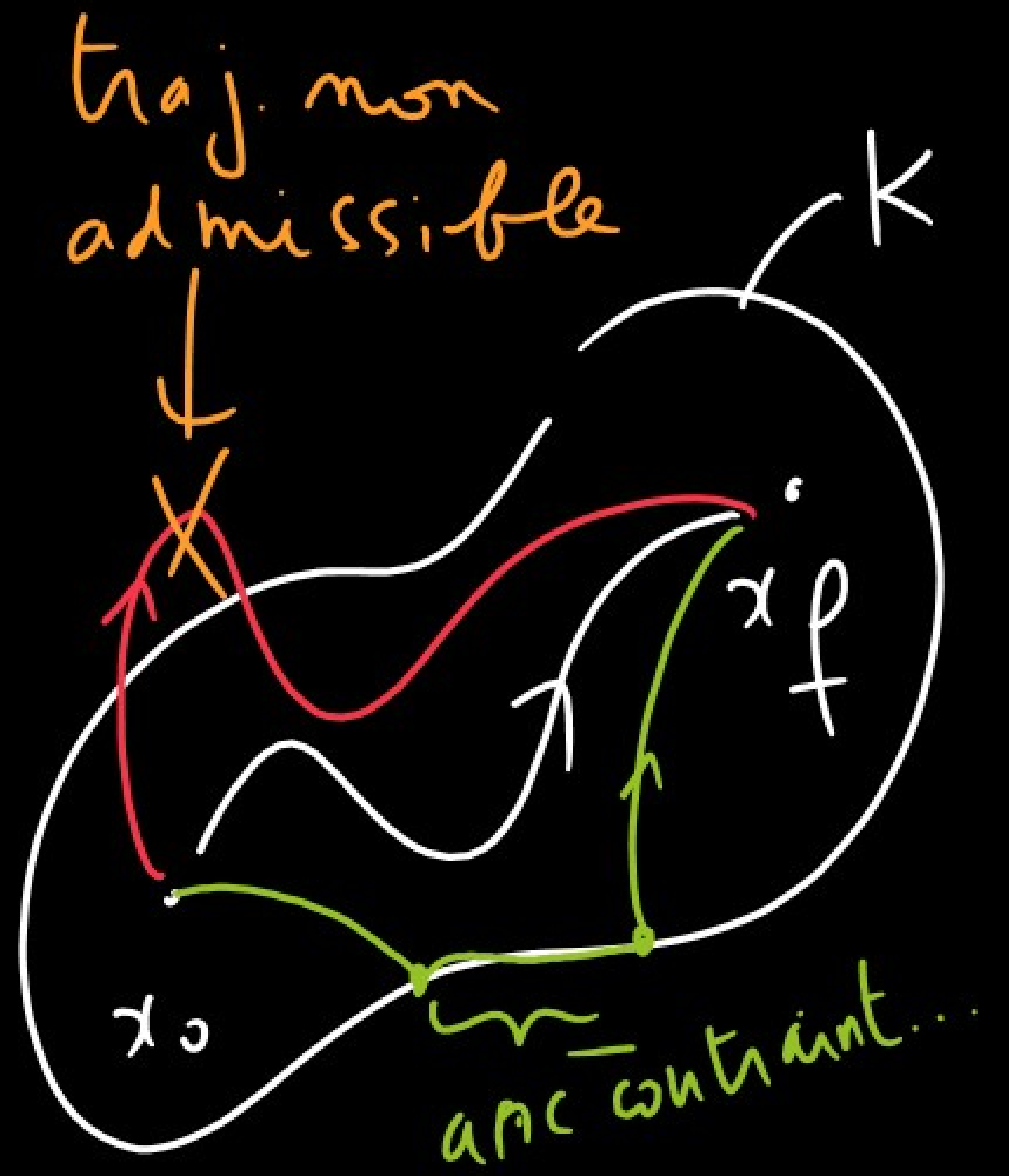
iv) on peut avoir d'autres types de contraintes :

- conditions aux deux bouts plus générales

$$x(0) \in X_0 \subset \mathbb{R}^n, \quad x(tf) \in X_f \subset \mathbb{R}^n$$



$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U$$



- contraintes sur l'état : $x(t) \in K \subset \mathbb{R}^n, \; t \in [0, tf]$

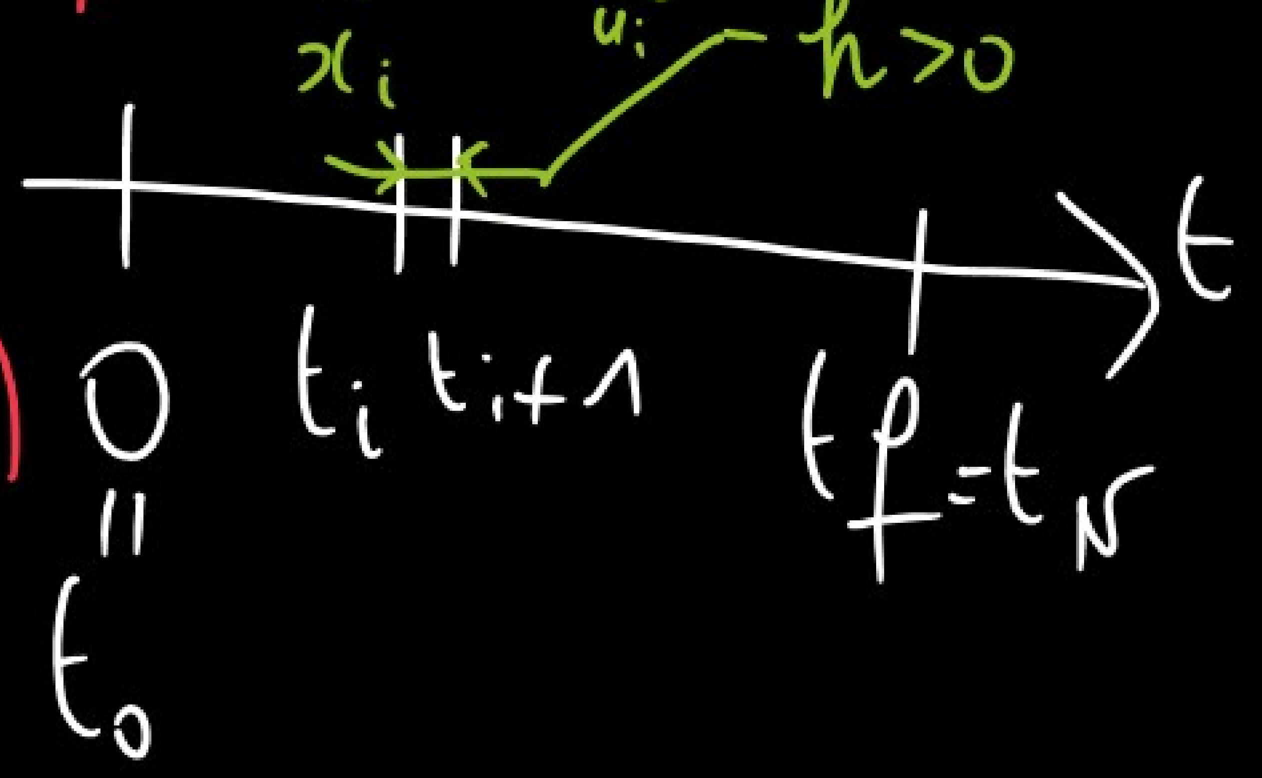
2. Méthodes directes

Soit à résoudre le pb de contrôle suivant :

t_f ← fixé ou non

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{t_f} f^0(x(t),u(t))\,dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)),\ t\in[0,t_f]\ \ (p.p.) \\ x(0)=x_0,\ x(t_f)=x_f \\ u(t)\in U \subset \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Approximation de $x(t), u(t), t\in[0,t_f]$ par $\underbrace{x(t_i)}_{\simeq x_i}, \underbrace{u(t_i)}_{\simeq u_i}, i=0,\dots,N$



Avec, par ex., un schéma d'Euler (ou plus généralement un schéma numérique pour la dynamique et le coût de Lagrange qui soit consistant et stable — cf. Th. de Lax :

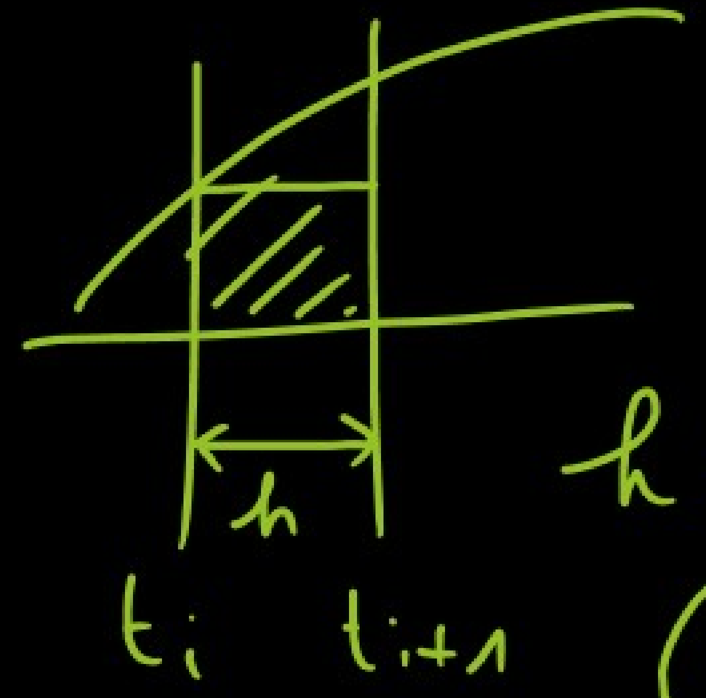
$$\underbrace{\text{consistance}}_{\substack{\text{le schéma}\\ \text{ressemble à}\\ \text{l'EDO}}} + \underbrace{\text{stabilité}}_{\substack{\text{propriété intrinsèque}\\ \text{de dépendance continue}\\ \text{du schéma (= de la récurrence}\\ \text{associée) en la valeur initiale}}} \Longrightarrow \text{CV} \;)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_i \longrightarrow x(t_i) \\ u_i \longrightarrow u(t_i) \\ h \to 0 \end{array}\right\} \text{CV plus ou moins forte (plutôt faible sur } u \ldots)$$

on se ramène à un pb d'optimisation en dim finie (math program / NLP):

nonlinear

$$\int_0^{t_f} f^0(x(t),u(t))\,dt \simeq h \sum_{i=0}^{N-1} f^0(x_i,u_i)$$



h : pas constant (uniforme)

(idem avec $h_i := t_{i+1}-t_i \cdots$)

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t)),\ t\in[0,t_f] \simeq x_{i+1}-x_i = h\cdot f(x_i,u_i)$$

(explicite), $i=0,\dots,N-1$

$$x(0)=x_0,\ x(t_f)=x_f \simeq \underbrace{x_0}_{i=0} \text{ connu},\ x_N=x_f$$

$$u(t)\in U,\ t\in[0,t_f] \simeq u_i\in U,\ i=0,\dots,N-1$$

Rq : $u\in U \iff g(u)\leq 0,\ g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$

$\to g(u_i)\leq 0,\ i=0,\dots,N-1$ (ie $g_j(u_i)\leq 0,\ j=1,\dots,p$)

On a donc discrétisé le pb de commande optimale sous la forme d'un pb d'optimisation en dim finie :

$$\begin{cases} F(X,U) \longrightarrow \min \\ H(X,U) = 0 \\ G(X,U) \leq 0 \end{cases}$$

avec $X := (x_0, x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^n)^{N+1}$

$U := (u_0, \dots, u_{N-1}) \in (\mathbb{R}^m)^N$

$$F(X,U) := h \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f^0(\underset{\substack{\uparrow \\ (i+1)^{\text{ème}} \text{ bloc de } X}}{x_i}, u_i)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ - \\ x_1 \\ - \\ \vdots \\ - \\ x_N \end{bmatrix} \simeq \begin{array}{c} \scriptstyle N+1 \\ \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_N \\ | & | & & | \end{bmatrix} \end{array} \updownarrow n$$

$$U \simeq \begin{array}{c} \begin{bmatrix} | & & | \\ u_0 & \cdots & u_{N-1} \\ | & & | \end{bmatrix} \\ \scriptstyle N \end{array} \updownarrow m$$

et $$H(X,U) = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 - h \cdot f(x_0,u_0) \\ x_2 - x_1 - h \cdot f(x_1,u_1) \\ \vdots \\ x_N - x_{N-1} - h \cdot f(x_{N-1},u_{N-1}) \\ x_0 - \tilde{x}_0 \\ x_N - x_f \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\, n \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

schéma d'Euler de la dynamique

$$\in \mathbb{R}^{N\cdot n + 2n} = \mathbb{R}^{(N+2)\cdot n}$$

renommage de la C.i. $x(0) = \tilde{x}_0$

$$G(X,U) = \begin{bmatrix} g(u_0) \\ g(u_1) \\ \vdots \\ g(u_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\, p \\ \vdots \\ \\ \\ \end{array} \quad N\cdot p$$

<u>Rappel</u> : $\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \in \mathbb{R}^n$

$\iff \dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t))$, $i = 1,\dots,n$

ii) la jacobienne de H est très creuse (sparse) :

$$H'(X,u) = \begin{bmatrix} *_n & I_n & & & 0 & \\ 0 & *_n & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & & \ddots & \\ I_n & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial}{\partial u_i}$ également creux (et idem pour G'...)

iii) parallélisme SIMD (= Single Instruction Multiple Data) $\rightsquigarrow$ GPU

f et g ...

On est finalement en dimension :

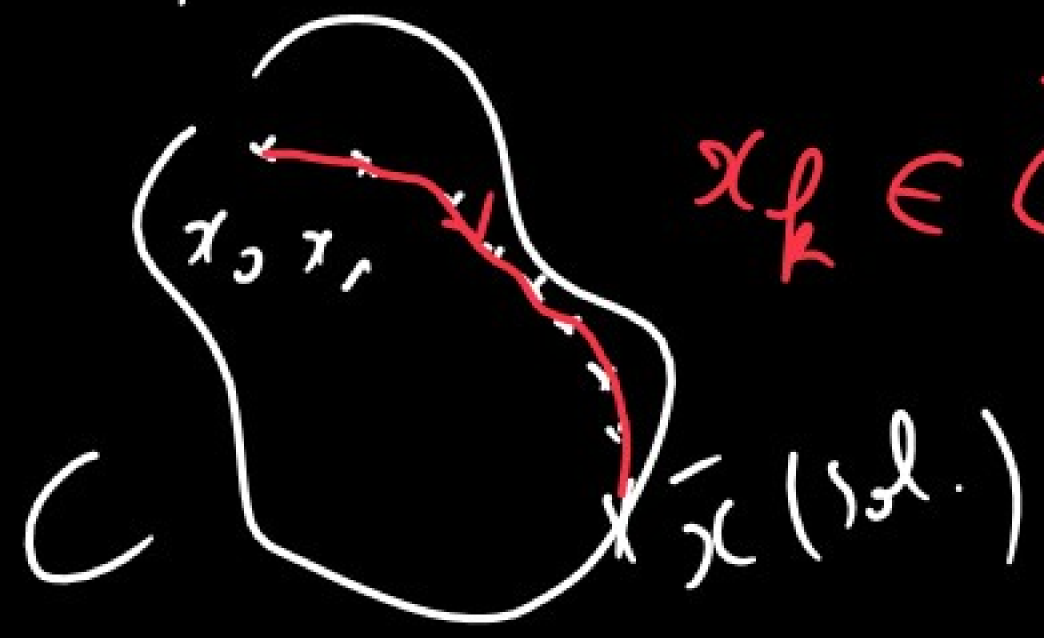
- $(N+1).n + N.m$ pour les inconnues
- $\underbrace{(N+2).n}_{\text{égalités}} + \underbrace{N.p}_{\text{inégalités}}$ pour les contraintes

$\Bigg]$ $\dim = O(N(2n+m+p))$

On résout à l'aide d'un solveur d'optimisation nonlinéaire (par ex. Ipopt / MadNLP, pour des méthodes de pt intérieur)

Rq : i) pt intérieur :

$$\begin{cases} f(x) \longrightarrow \min \\ x \in C \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$



$x_k \in \mathring{C}$: chemin d'itérés de l'algo d'opti $\in \mathring{C}$ (pénalisation intérieure)

$f(x) + p(x)$

$p(x) \xrightarrow[x \to \partial C]{} \infty$

ii) structure creuse :

$$H'(X,U) = \begin{bmatrix} *_n & I_n & & & \\ 0 & *_n & \ddots & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & \vdots & 0 & & \cdots \\ I_n & & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Jacobienne creuse (sparse)

creux aussi pour $\frac{\partial H}{\partial u_i}$

$\rightarrow$ Algèbre linéaire efficace

iii) parallélisme SIMD (= Single Instruction Multiple Data)

f, g

$\underbrace{\text{Multiple}}_{x_i,\, u_i}$