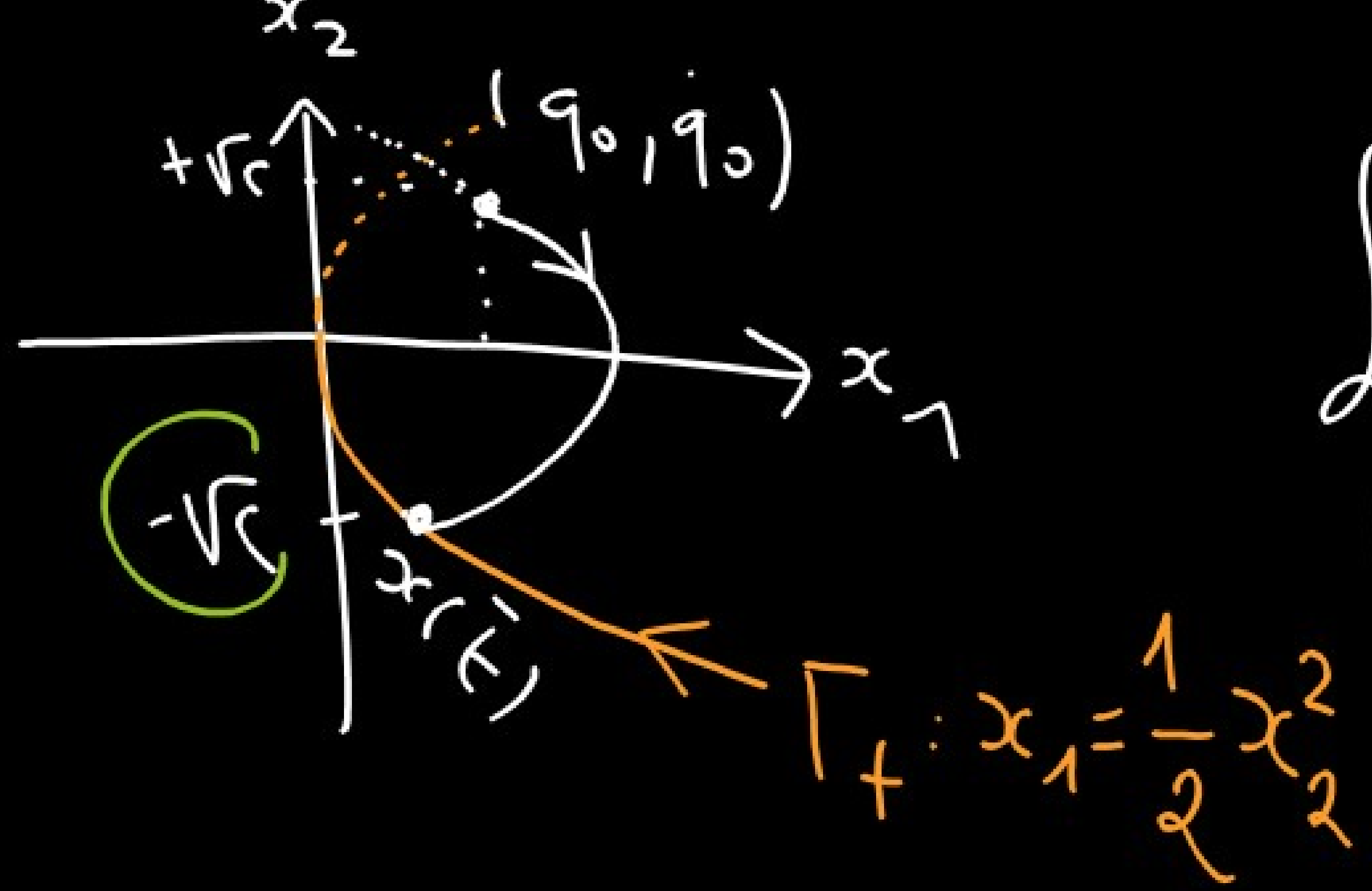
Ch. 3 - Principe du maximum

Fin exo rame de métro : calcul temps min en fonction des conditions initiales $(q_0, \dot{q}_0)$: $u(t) \in \partial U = \{-1, 1\}$

$t_f(q_0, \dot{q}_0) = ?$ Dans le cas $u = -1, +1$ $(-+)$ (bang-, bang+), on a (en notant $\bar{t}$ le temps de commutation — s'il existe) :



$$\begin{cases} x_1(\bar{t}) = -\frac{1}{2} x_2^2(\bar{t}) + C \quad \left(\text{où } C = q_0 + \frac{1}{2} \dot{q}_0^2\right) \qquad (\Rightarrow C \geq 0) \\ x_1(\bar{t}) = \frac{1}{2} x_2^2(\bar{t}) \Rightarrow x_1(\bar{t}) = C/2 \Rightarrow x_2(\bar{t}) = \pm\sqrt{C} \end{cases}$$

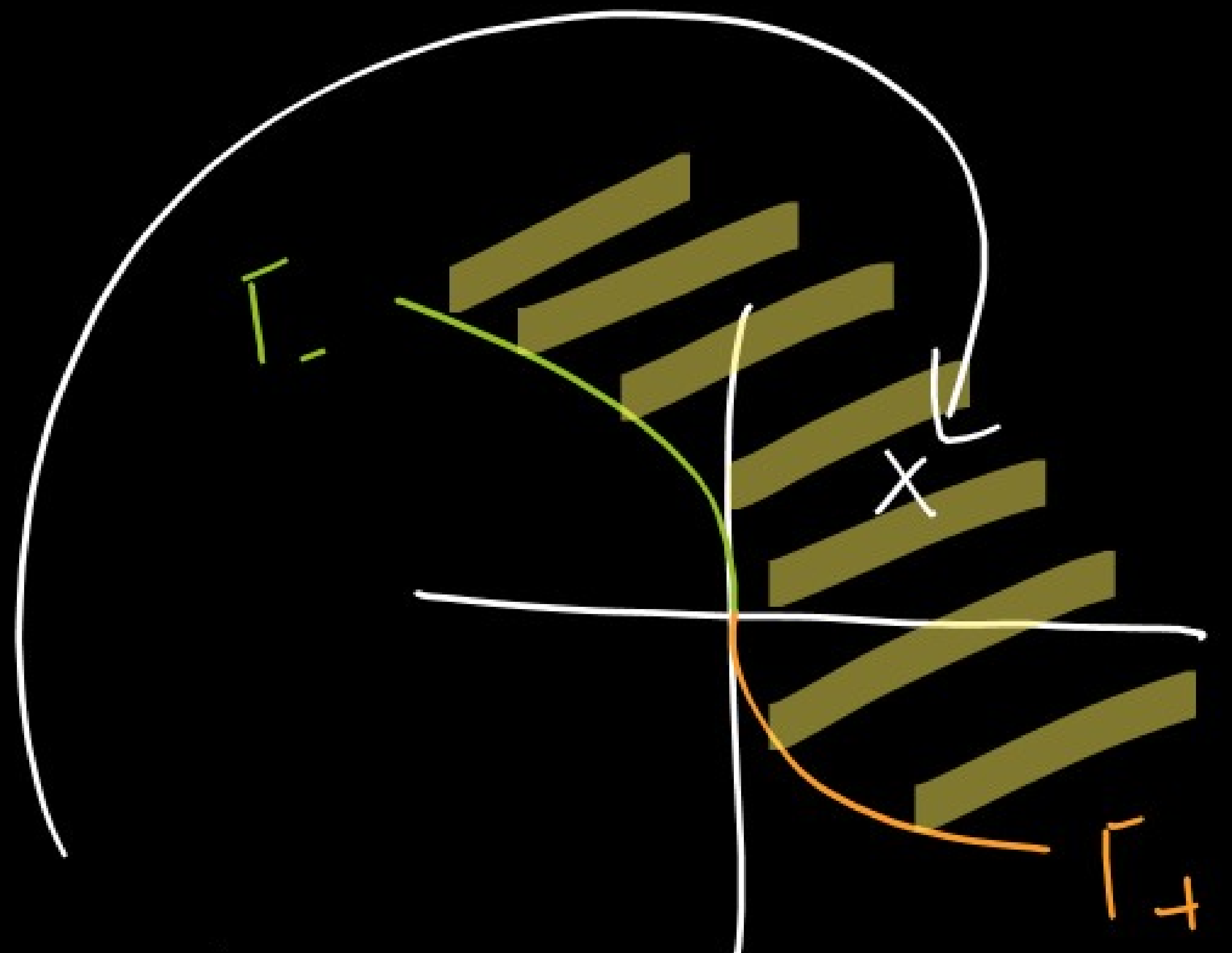
Or, entre $t=0$ et $t=\bar{t}$, $x_2(t) = -t + \dot{q}_0$

$\Rightarrow x_2(\bar{t}) = \underbrace{-\sqrt{C}}_{\leq 0} = -\bar{t} + \dot{q}_0 \Rightarrow \bar{t} = \dot{q}_0 + \sqrt{C} = \dot{q}_0 + \sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}$

$\left(\overset{\bar{t} \geq 0}{\Rightarrow} \dot{q}_0 + \sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2} \geq 0 \ldots \right)$ De plus, entre $t=\bar{t}$ et $t=t_f$,

$\cancel{x_2(t_f)}_{0} - x_2(\bar{t}) = t_f - \bar{t}$ (cf. $\dot{x}_2 = +1$)

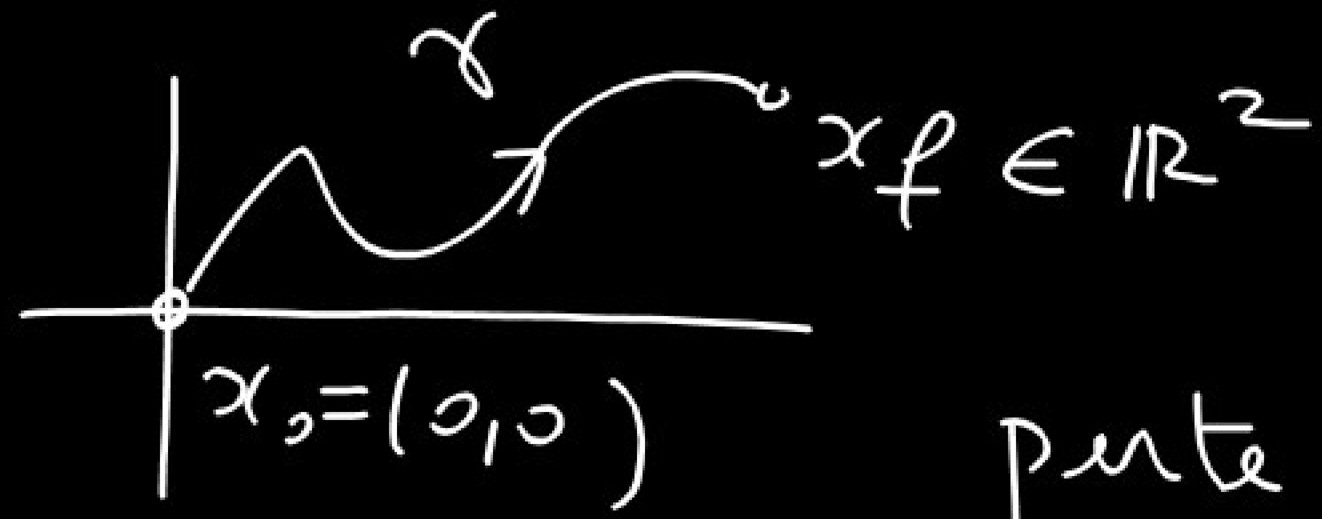
$\Rightarrow \boxed{t_f = \bar{t} - x_2(\bar{t})}$
$= \dot{q}_0 + \sqrt{C} - (-\sqrt{C})$
$= \dot{q}_0 + 2\sqrt{C}$
$= \boxed{\dot{q}_0 + 2\sqrt{q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2}}$: expression valable pour $(q_0, \dot{q}_0)$ dans la zone où $u: -+$



Par symétrie, il suffit de faire $(q,\dot q) \longrightarrow -(q,\dot q)$ pour obtenir le calcul dans la zone des conditions initiales qui correspondent à u : $+-$. On obtient : $t_f(q_0,\dot q_0) = -\dot q_0 + 2\sqrt{-q_0 + \frac{1}{2}\dot q_0^2}$.

<u>Rq</u> : cette fonction $(q_0,\dot q_0) \longmapsto t_f(q_0,\dot q_0)$, appelée fonction valeur du problème de contrôle optimal, est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$, mais pas dérivable sur $\mathbb{R}^2$ (cf. perte de régularité sur $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ ...). Elle vérifie pour autant une EDP appelée HJB (Hamilton-Jacobi-Bellmann) en un "sens faible" (solution de "viscosité").

Exo (fin du cas euclidien)



On cherche $\gamma : [0,t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de longueur min pour relier x_0 (qu'on peut translater en $(0,0)$ sans perte de généralité) à x_f, le tout pour la longueur usuelle (euclidienne) : $\displaystyle\int_0^{t_f} \|\dot\gamma(t)\|\,dt$.

En paramétrisant par la longueur d'arc, on ramène le problème à :

$$\begin{cases} \dot x(t) = u(t) \in \mathbb{R}^2 \\ |u(t)| = \sqrt{u_1^2(t)+u_2^2(t)} \overset{\le}{\cancel{=}} 1 \\ x(0)=(0,0),\ x(t_f)=x_f \end{cases}$$

et $\displaystyle\int_0^{t_f} \|\dot x(t)\|\,dt = t_f \longrightarrow \min$

$\rightarrow$ on relaxe $|u(t)|=1$ en $|u(t)|\le 1$, ie $U=S(0,1)$ (cercle unité) en $U=B_f(0,1)$ (boule unité) pour avoir un ensemble U à la fois compact et convexe de façon à assurer l'existence de solution (admis).

Lemme : soit $\bar{x}$ sol. de $\underset{x \in C_2}{f(x) \longrightarrow \min}$; si $\bar{x} \in C_1 \subset C_2$, alors $\bar{x}$ est aussi sol. de $\underset{x \in C_1}{f(x) \longrightarrow \min}$.

Appliquons le PMP au problème relaxé :

(1) Hamiltonien : $H(x,p,u) = p^0 \cdot 1 + (p \mid \overset{u}{\overbrace{f(x,u)}})$

$= p^0 + p_1 u_1 + p_2 u_2$

② **Système adjoint** : $\dot{p}(t) = -D_x H(x(t), p(t), u(t))$, ie $\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x(t), p(t), u(t))$

$\dot{p}_1(t) = \dot{p}_2(t) = 0 \Longrightarrow p(t) = d \in \mathbb{R}^n$, constant

③ **Maximisation du hamiltonien** : à x et p fixés, on doit résoudre

$$\begin{cases} H(x, p, u) = p^0 + (p|u) \longrightarrow \max \\ |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq 1 \end{cases}$$

$(p|u) \leq |p| . |u| \leq |p|$ f. $|u| \leq 1$

c.s. ($|.| = |.|_2$)

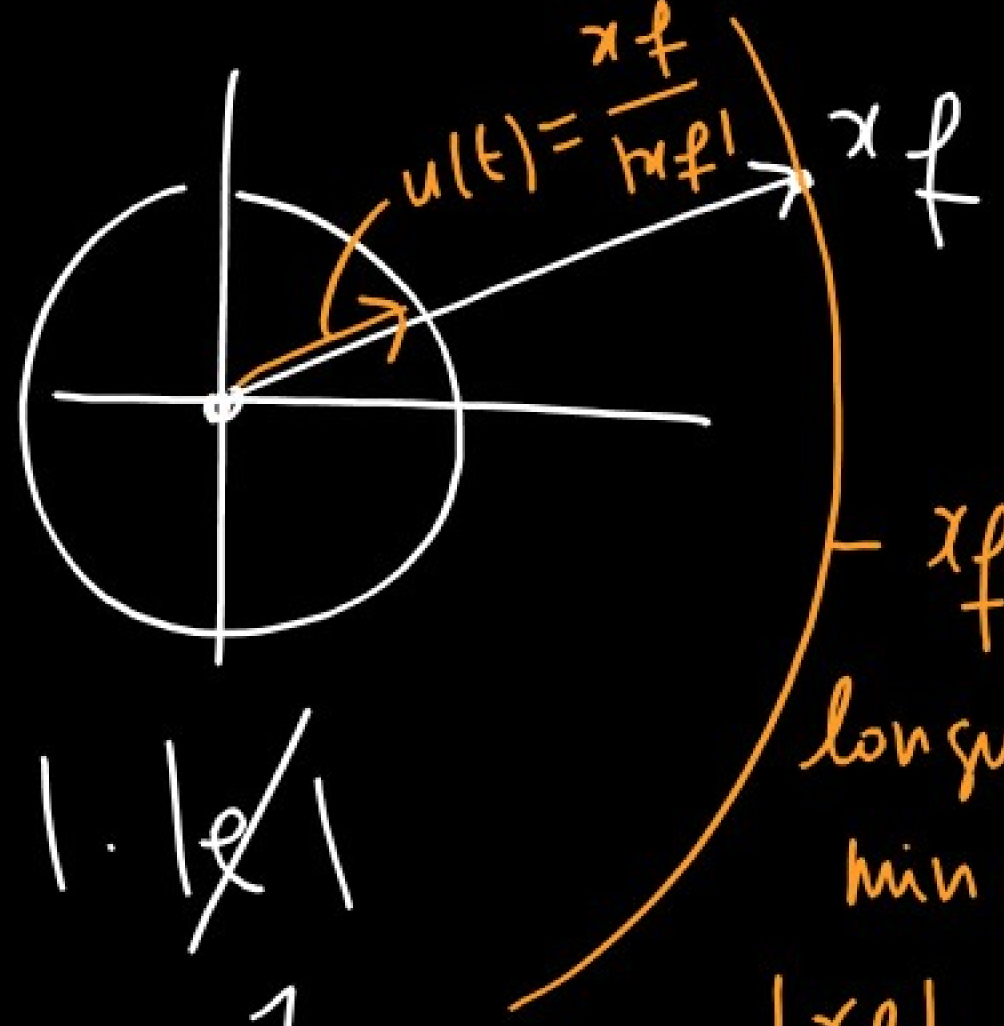
⇒ u admissible aussi pour le pb non relaxé

- soit $p = (0,0)$ et tout $u \in Bf(0,1)$ est sol.
- soit $p \neq (0,0)$ et l'unique sol. est $u = \frac{p}{|p|} \in S(0,1) \subset Bf(0,1)$

On, si $p(t) = d = (0,0)$, on a $\underbrace{H(x(t), p(t), u(t))}_{=0,\ \text{cf. } t_f \text{ libre}} = p^0 + (\overset{0}{\cancel{p(t)}} \,|\, u(t))$

$\Rightarrow (p^0, p) = (0,0)$: impossible.

Donc $p(t) = d \neq (0,0)$ et $u(t) = \dfrac{d}{|d|} \in S(0,1)$ $\Rightarrow$ contrôle constant : la trajectoire est un segment de droite. On a :



$$\dot{x}(t) = \frac{d}{|d|} =: e \in S(0,1)$$

$$x(t) = \underset{(0,0)}{\cancel{x_0}} + t.e, \text{ et } x(t_f) = x_f = t_f . e \Rightarrow |x_f| = |\overbrace{t_f}^{t_f}| . |\underset{1}{\cancel{e}}|$$

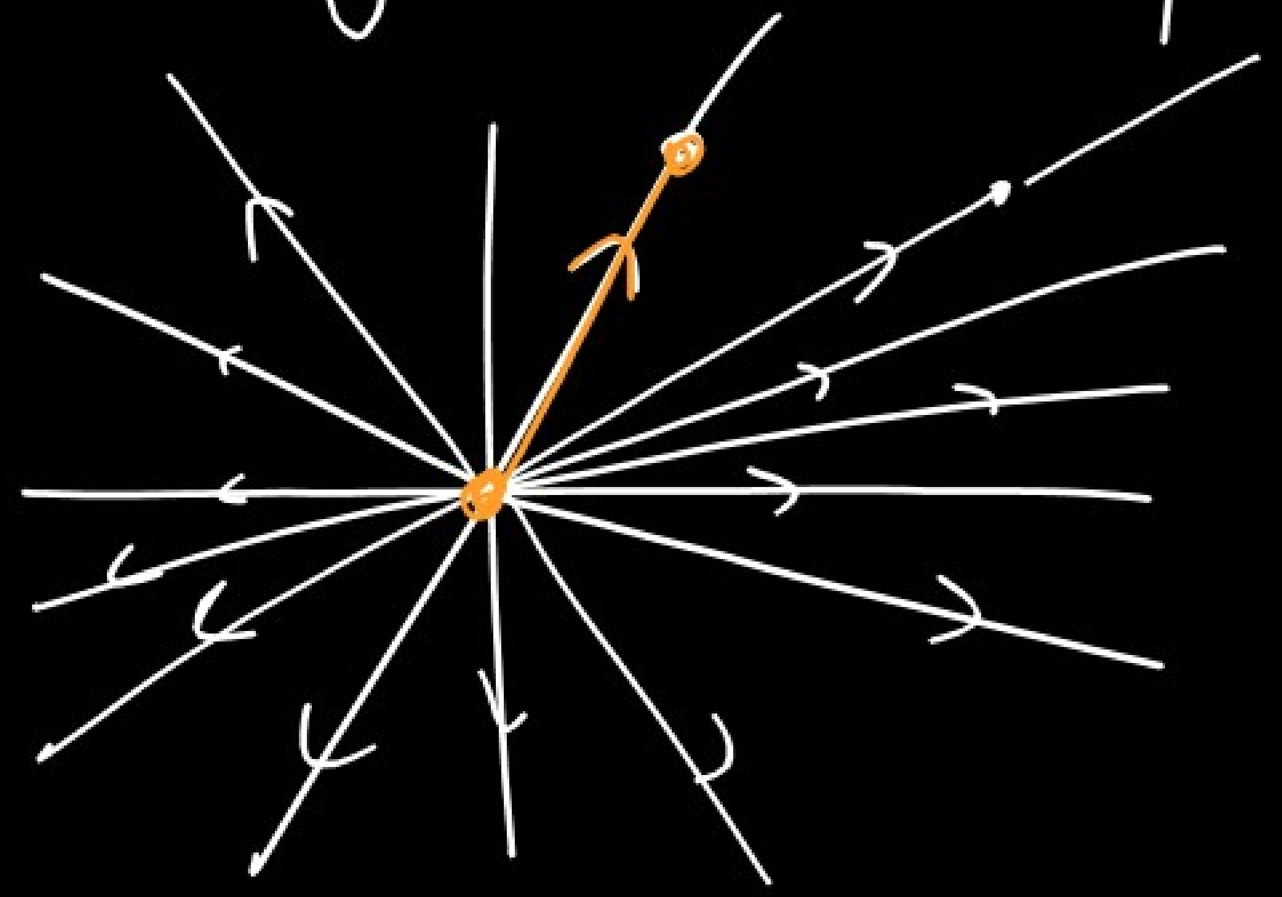
$$\Rightarrow t_f = |x_f|$$

$$\Rightarrow u(t) = e = \frac{x_f}{|x_f|} \quad (\text{qd } x_f \neq (0,0) \text{ sinon } t_f = 0 \ldots)$$

x_f tq longueur min $= |x_f|$

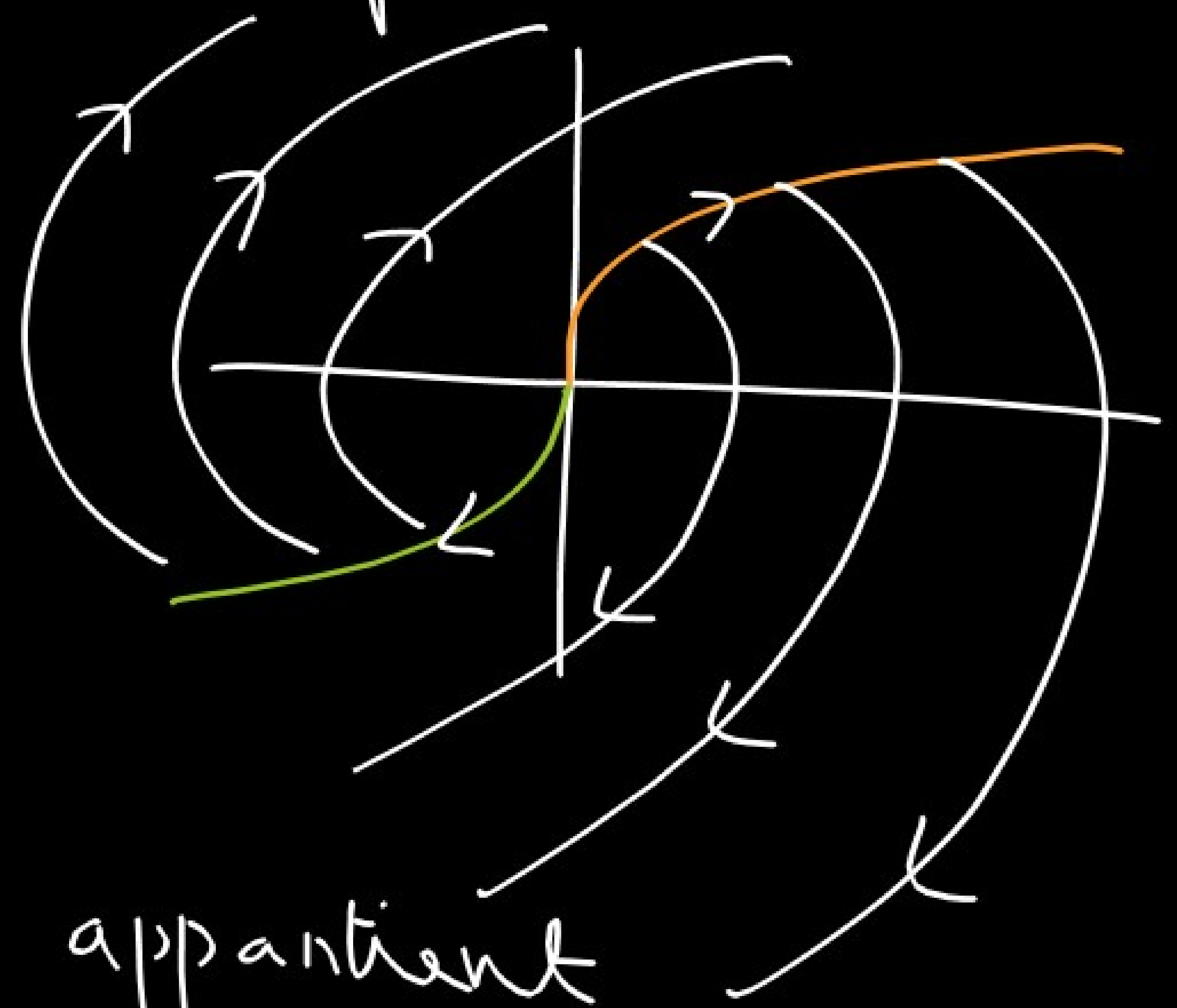
$= S((0,0), |x_f|)$

Et on a feuilleté le plan en traj. de longueur (= temps) min. :



$t_f(x_f) = |x_f|$

(à comparer à



)

$\longrightarrow$ la sol. du pb relaxé qui appartient à $S(0,1)$ est donc bien sol. du pb de départ.

Conditions de transversalité :

ex. rame métro : $\ddot{q}(t) = u(t)$, $|u(t)| \leq 1$, $t_f \to \min$

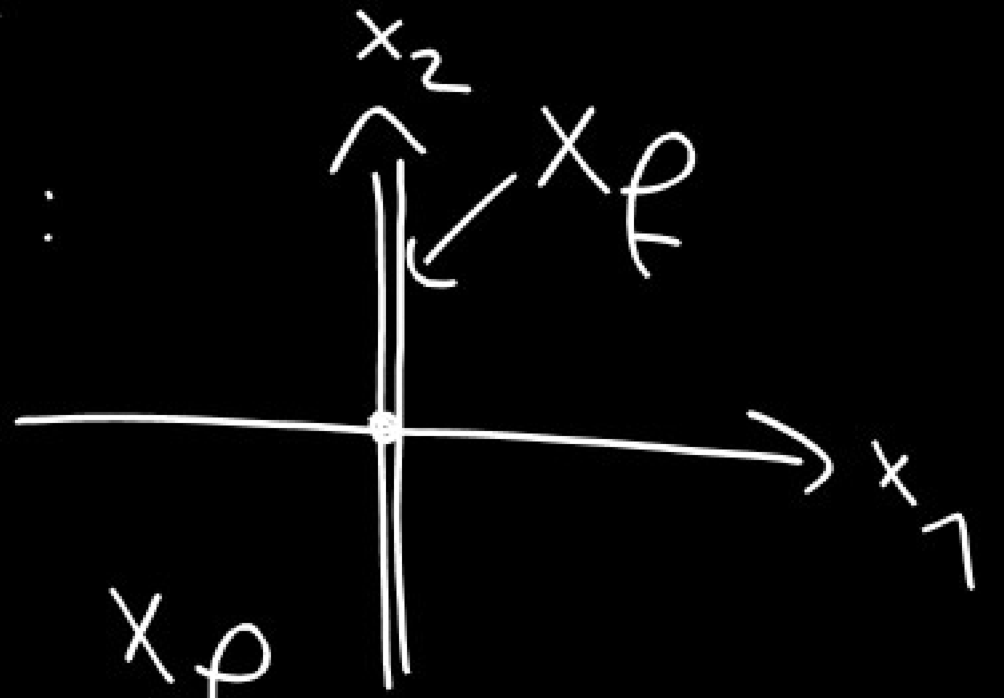
course jusqu'à $q=0$

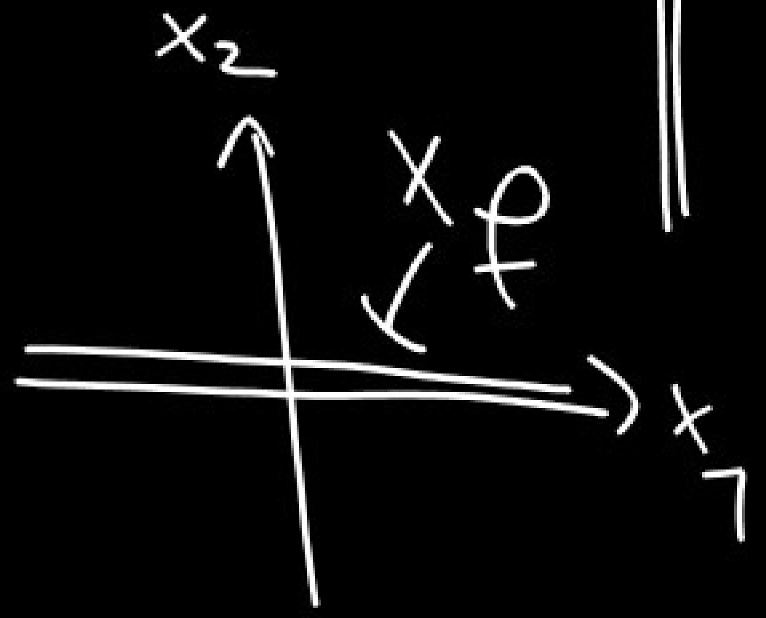
$q_0, \dot{q}_0$ fixés, et $\begin{cases} q(t_f) = 0, & \dot{q}(t_f) \text{ libre} \\ q(t_f) \text{ libre}, & \dot{q}(t_f) = 0 \end{cases}$ ou

arrêt en temps min

Dans ces deux cas,
la cible n'est plus un singleton
mais une sous-variété $X_f \subset \mathbb{R}^2$:

- soit $X_f = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$
- soit $X_f = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$





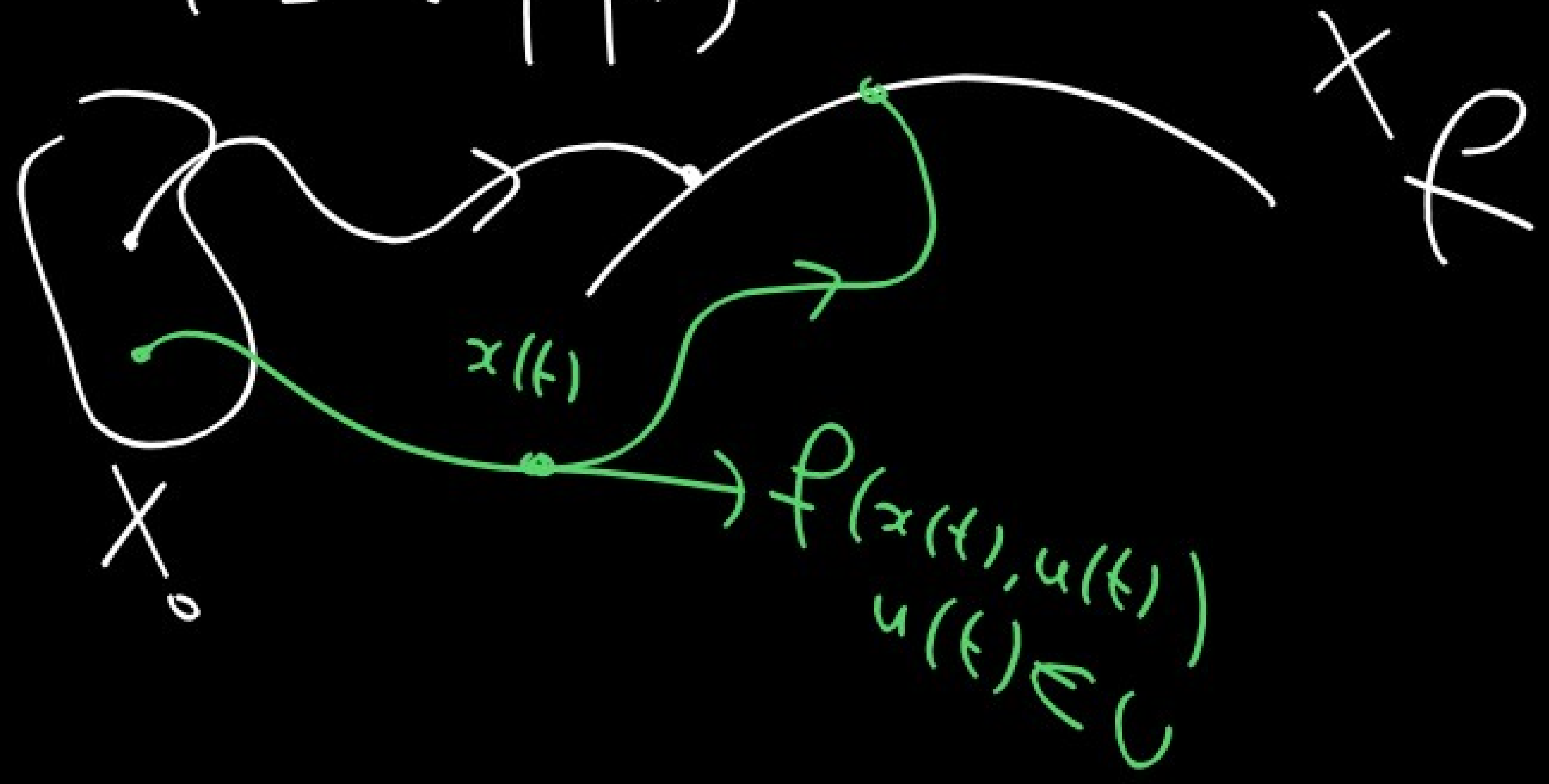
Th. (PMP avec conditions de transversalité) : soit $u \in \mathcal{L}^\infty([0,t_f],\mathbb{R}^m)$ solution du pb

libre ou non

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{t_f} f^0(x(t),u(t))\,dt \longrightarrow \min \\ x(0) \in X_0,\ x(t_f) \in X_f \\ \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)),\ t \in [0,t_f] \ (\text{p.p.}) \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \end{array}\right.$$

sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

et soit $x : [0,t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la trajectoire lipschitzienne associée.



alors :

$\exists (p^0, p) \neq (0,0)$ avec $p^0 \leq 0$, $p : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitzienne tq

i) $\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t), u(t))$, $t \in [0, t_f]$ (p.p.)

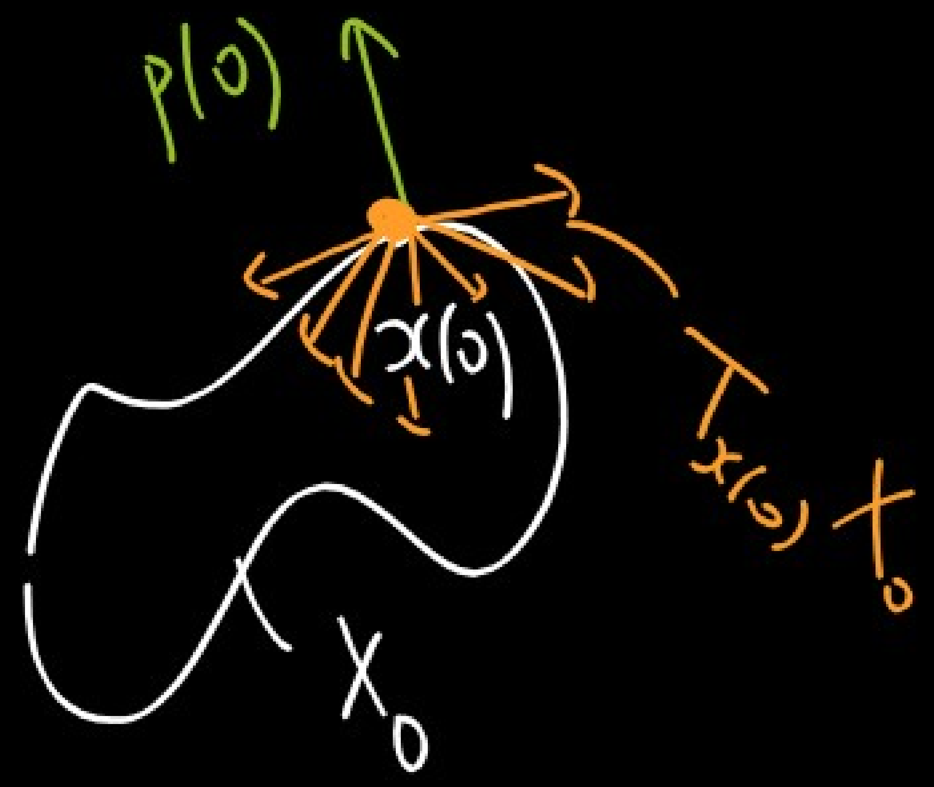
avec $H(x, p, u) := p^0 f^0(x, u) + (p \mid f(x, u))$

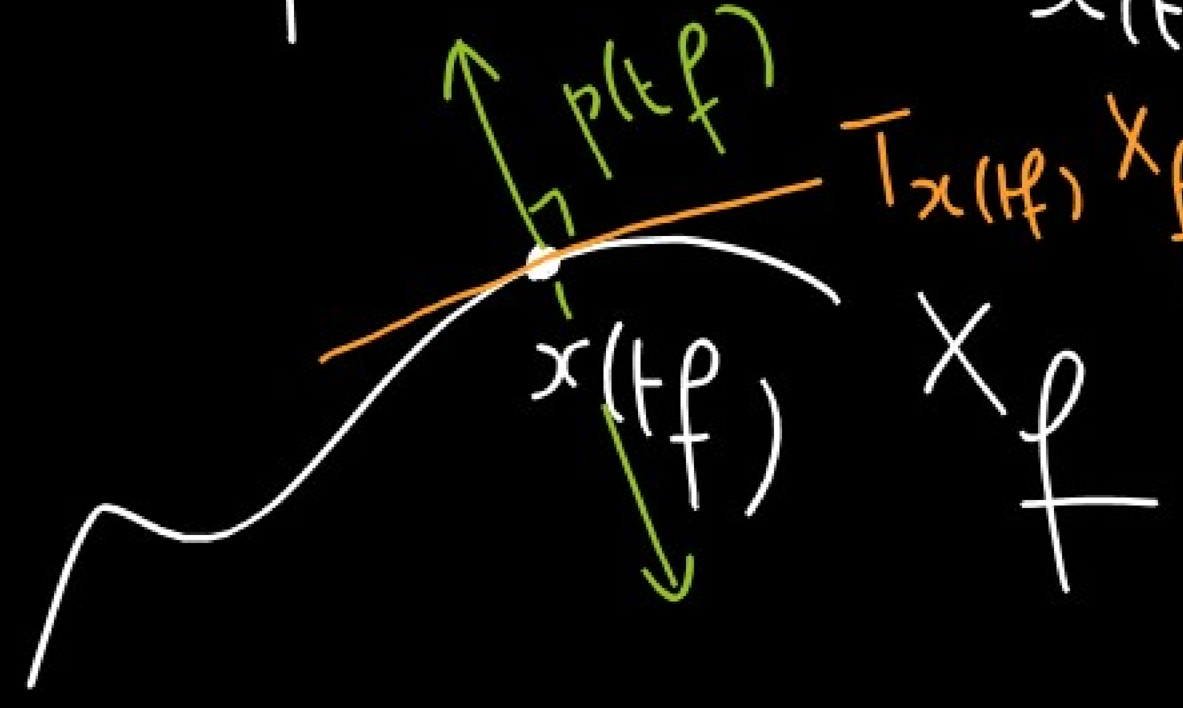
ii) $H(x(t), p(t), u(t)) = \max\limits_{v \in U} H(x(t), p(t), v)$, $t \in [0, t_f]$ (p.p.)

iii) $p(0) \perp T_{x(0)} X_0$ et $p(t_f) \perp T_{x(t_f)} X_f$

cond. de transversalité : donne exactement $2n - k$ cond. si

$\left\{ \begin{array}{l} x(0) \in X_0 \\ x(t_f) \in X_f \end{array} \right. \iff k$ cond.





Déf : espace tangent à une sous-variété définie par une submersion :

soit $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ $(p \leq n)$ une fonction $\mathcal{C}^1$, et soit

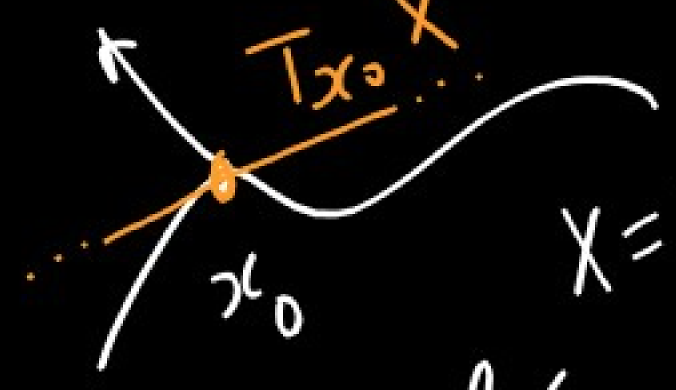
$$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{h(x)=0}_{p \text{ conditions}}\} \quad (= h^{-1}(\{0\}))$$

($\rightsquigarrow$ $n-p$ de degrés de liberté)

Soit $x_0 \in X (\neq \emptyset)$; on dit que h est une submersion en x_0 si $h'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = M(p,n,\mathbb{R})$ est de rg max (égal à $p \leq n$), ie si $h'(x_0)$ est surjective. Dans ce cas :

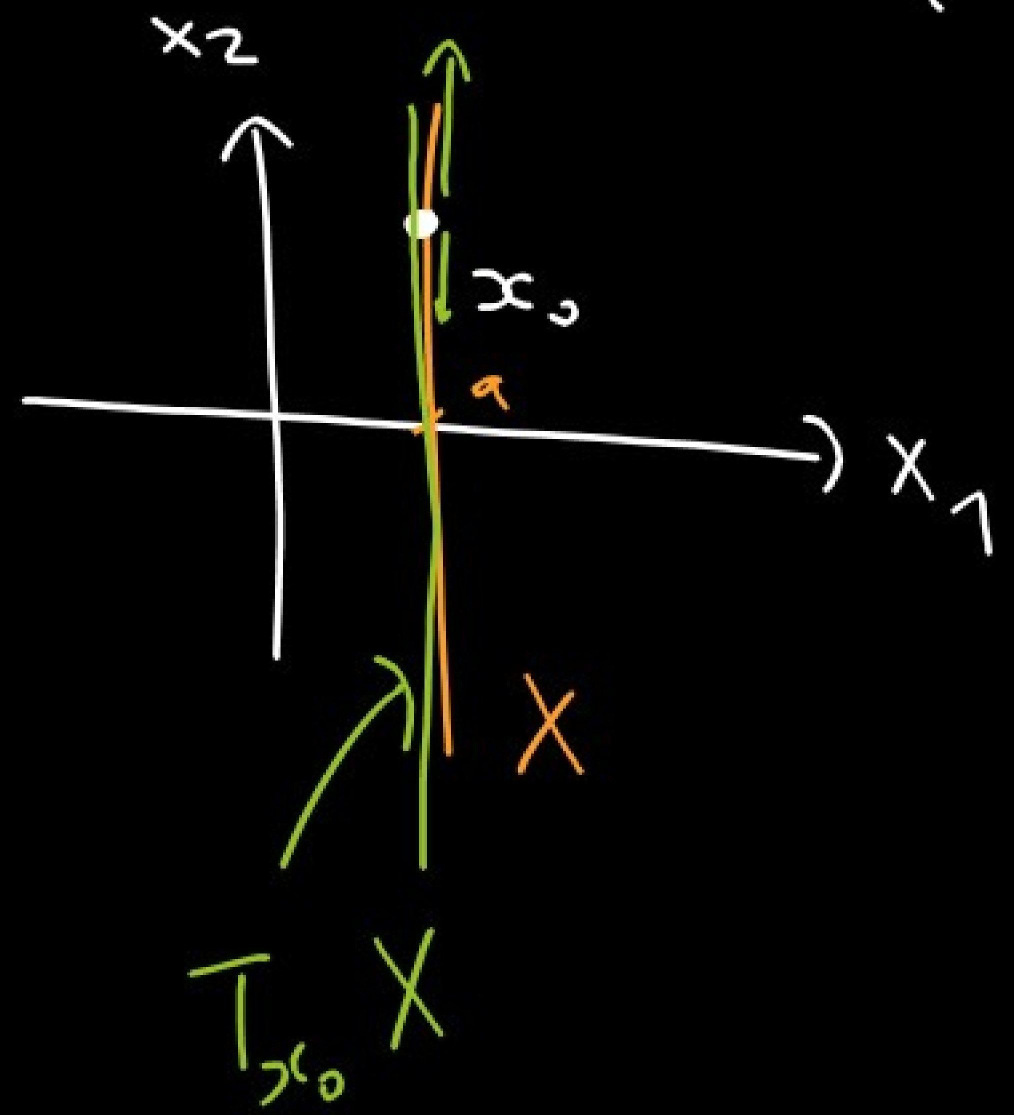
$$\boxed{T_{x_0}X := \operatorname{Ker} h'(x_0)}$$

(= directions qui, partant de x_0, font rester dans X à l'ordre 1)



$X = \{h = 0\}$

$$h(x_0+\delta x) = \overset{0}{\cancel{h(x_0)}} + \overbrace{h'(x_0)\cdot\delta x}^{0} + o(\delta x)$$



Ex : $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = a\} = h^{-1}(\{0\})$ avec, par ex.,

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x_1 - a \qquad h'(x) = [1 \quad 0] : \text{rg } 1 \ (\Rightarrow \text{rg max } \forall x)$$

Soit $x_0 \in X$ (ie $x_0 = (a, \underbrace{\dots}_{\text{libre}})$). $T_{x_0}X = \operatorname{Ker} h'(x_0)$

$$= \left\{ d \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \overbrace{[1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}}^{d_1} = 0 \right\}$$

Rq : $h(x) = (x_1 - a)^2$, $h'(x) = [2(x_1 - a) \quad 0]$

$$h'(x_0) = \underbrace{[0 \quad 0]}_{\text{pas submersion !}} \text{ cf. } x_0 \in X$$