MAM5 / M2 INUM

Commande optimale

2025-26

Exam cc no. 1

Exercice 1 (8 points)

On considère le problème de minimisation du temps final pour la dynamique

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad |u(t)| \le 1,$$

où $q(t)$ et $u(t)$ sont de dimension un. Les conditions intiales q_0, $\dot{q}_0$ sont fixées.

1.1

Déterminer le contrôle optimal pour la condition finale $q(t_f) = 0$ (et $\dot{q}(t_f)$ libre).

Réponse. On a $p_2(t_f) = 0$, de sorte que p_2 qui est affine s'annule uniquement en t_f. Le cas p_2 identiquement nulle étant exclu (on aurait sinon $p_1 = p_2 = p^0 = 0$), on n'a pas de commutation et u est constant, égal à soit à $+1$, soit à -1 par maximisation du hamiltonien. L'existence de solution étant admise, la seule possibilité pour minimiser le temps final est de faire $u \equiv -\mathrm{sgn}(q_0)$.

1.2

Déterminer la fonction valeur correspondante, $t_f(q_0, \dot{q}_0)$ (temps min en fonction de la condition initiale).

Réponse. Quand $u \equiv +1$, on a $\dot{q}^2/2 + q = \dot{q}_0^2 + q_0$ et $\dot{q}(t_f) = -t_f + \dot{q}_0$. On en déduit (en prenant la plus grande racine, *cf.* graphe de la synthèse dans le plan $(q, \dot{q})$)

$$t_f(q_0, \dot{q}_0) = \dot{q}_0 + \sqrt{\dot{q}_0^2 + 2q_0}.$$

Le même raisonnement quand $u \equiv +1$ donne (noter la symétrie $(q, \dot{q}) \to -(q, \dot{q})$)

$$t_f(q_0, \dot{q}_0) = -\dot{q}_0 + \sqrt{\dot{q}_0^2 - 2q_0}.$$

1.3

Déterminer le contrôle optimal pour la condition finale $\dot{q}(t_f) = 0$ (et $q(t_f)$ libre).

Réponse. On a $p_1(t_f) = 0$, de sorte que p_2 est constante. Le cas p_2 identiquement nulle étant exclu (on aurait sinon $p_1 = p_2 = p^0 = 0$), on n'a pas de commutation et u est constant, égal à soit à $+1$, soit à -1 par maximisation du hamiltonien. L'existence de solution étant admise, la seule possibilité pour minimiser le temps final est de faire $u \equiv -\mathrm{sgn}(\dot{q}_0)$.

1.4

Déterminer la fonction valeur correspondante, $t_f(q_0, \dot{q}_0)$ (temps min en fonction de la condition initiale).

Réponse. On a $0 = \dot{q}(t_f) = ut_f + \dot{q}_0$, d'où

$$t_f(q_0, \dot{q}_0) = |\dot{q}_0|.$$

Exercice 2 (8 points)

On considère le problème de commande optimale général suivant, où $t_f > 0$ est libre :

$$\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\,\mathrm{d}t \to \min$$

avec

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \subset \mathbf{R}^m,$$

et des conditions aux limites sur $x(0)$ et $x(t_f)$ dans $\mathbf{R}^n$. On se ramène à temps final fixé sur $[0, 1]$ par le changement de temps $t = t_f \cdot s$, et on fait de t_f un nouvelle variable d'état en posant ($' = \mathrm{d}/\mathrm{d}s$ représente la dérivée par rapport au nouveau temps s) :

$$t_f'(s) = 0.$$

2.1

On pose $\hat{x}(s) := (x(t_f(s) \cdot s), t_f(s))$ et $\hat{u}(s) := u(t_f(s) \cdot s)$. Montrer que $\hat{x}'(s) = \hat{f}(\hat{x}(s), \hat{u}(s))$ avec

$$\hat{f}(\hat{x}, \hat{u}) = (t_f \cdot f(x, u), 0), \quad \hat{x} = (x, t_f) \in \mathbf{R}^{n+1}, \quad \hat{u} = u \in \mathbf{R}^m.$$

Réponse. On a $\hat{x}'(s) := (x'(t_f(s) \cdot s) \cdot t_f(s), 0$ puisque $t_f(s) = \mathrm{cte}$, d'où le résultat.

2.2

Montrer que le coût de Lagrange s'écrit

$$\int_0^1 \hat{f}^0(\hat{x}(s), \hat{u}(s))\,\mathrm{d}s$$

avec $\hat{f}^0(\hat{x}, \hat{u}) = t_f \cdot f^0(x, u)$.

Réponse. Changer de variable selon $t = t_f(s).\,s$ dans l'intégrale.

2.3

On note désormais $\hat{x} = (x, t_f) \in \mathbf{R}^{n+1}$, $\hat{p} = (p, p_{t_f}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ (et u pour le contrôle, p^0 pour le multiplicateur devant le terme de Lagrange). Écrire le hamiltonien du nouveau problème à temps final fixé.

Réponse.

$$H(\hat{x}, \hat{p}, u) = t_f(p^0 f^0(x, u) + (p|f(x, u))).$$

2.4

Écrire l'équation différentielle vérifiée par p_{t_f}.

Réponse. $p_{t_f}' = -(p^0 f^0(x, u) + (p|f(x, u)))$

2.5

Les valeurs $t_f(0)$ et $t_f(1)$ étant libres, en déduire les conditions de transversalité sur p_{t_f}.

Réponse. $p_{t_f}(0) = p_{t_f}(1) = 0$

2.6

En déduire la valeur de

$$\int_0^1 t_f(s) \left[p^0 f^0(x(s), u(s)) + (p(s)|f(x(s), u(s)))\right] \mathrm{d}s.$$

Réponse.

$$0 = p_{t_f}(1) - p_{t_f}(0) = \int_0^1 t_f(s) \left[p^0 f^0(x(s), u(s)) + (p(s)|f(x(s), u(s)))\right] \mathrm{d}s$$

2.7

En déduire que le hamiltonien du problème de départ à temps final libre est nul.

Réponse. On a

$$0 = \int_0^1 t_f(s) \left[p^0 f^0(x(s), u(s)) + (p(s)|f(x(s), u(s)))\right] \mathrm{d}s = \int_0^{t_f} \left[p^0 f^0(x(t), u(t)) + (p(t)|f(x(t), u($$

Or, le hamiltonien du problème de départ est constant le long de l'extrémale, donc nécessairement nul.

Exercice 3 (4 points)

On considère la portion de code suivant, extrait de l'application d'une méthode directe au problème de navigation :

```
1  # Objective
2  @objective(sys, Min, tau[1] + tau[2] + tau[3])
3  
4  # Constraints
5  @constraints(sys, begin
6      x[1, 1] == x0
7      y[1, 1] == y0
8      th[1, 1] == th0
9      x[2, 1] == x[1, P]
10     y[2, 1] == y[1, P]
11     th[2, 1] == th[1, P]
12     x[3, 1] == x[2, P]
13     y[3, 1] == y[2, P]
14     th[3, 1] == th[2, P]
15     x[3, P] == xf
16     y[3, P] == yf
17     th[3, P] == thf
18     end)
19 
20 # Dynamics: Crank–Nicolson scheme
21 for j in 1 : P–1
22     @NLconstraints(sys, begin
23     # x' = w + cos(theta)
24     x[1, j+1] == x[1, j] + 0.5 * tau[1]*Dt *
25         (w + cos(th[1, j]) + w + cos(th[1, j+1]))
26     x[2, j+1] == x[2, j] + 0.5 * tau[2]*Dt *
27         (w + cos(th[2, j]) + w + cos(th[2, j+1]))
28     x[3, j+1] == x[3, j] + 0.5 * tau[3]*Dt *
29         (w + cos(th[3, j]) + w + cos(th[3, j+1]))
30     # y' = sin(theta)
31     y[1, j+1] == y[1, j] + 0.5 * tau[1]*Dt *
32         (sin(th[1, j]) + sin(th[1, j+1]))
33     y[2, j+1] == y[2, j] + 0.5 * tau[2]*Dt *
34         (sin(th[2, j]) + sin(th[2, j+1]))
35     y[3, j+1] == y[3, j] + 0.5 * tau[3]*Dt *
36         (sin(th[3, j]) + sin(th[3, j+1]))
37     # theta' = u
38     th[1, j+1] == th[1, j] + tau[1]*Dt * u[1]
39     th[2, j+1] == th[2, j] + tau[2]*Dt * u[2]
40     th[3, j+1] == th[3, j] + tau[3]*Dt * u[3]
41     end)
42 end
```

3.1

Expliquer l'expression de la fonction coût minimisée.

Réponse. Le temps final est égal à la somme des durées des trois arcs.

3.2

Indiquer la portion de code traduisant les conditions de jonction entre le second et le troisième arc.

Réponse. Lignes 12-14

3.3

Quelle est le lien entre `Dt` et `P` ?

Réponse. `Dt = 1/(P–1)`

3.4

Comment modifier ce code si le courant est désormais un vecteur (w_x, w_y) ?

Réponse.

```
# x' = w_x + cos(theta)
    x[1, j+1] == x[1, j] + 0.5 * tau[1]*Dt *
        (w_x + cos(th[1, j]) + w_x + cos(th[1, j+1]))
    x[2, j+1] == x[2, j] + 0.5 * tau[2]*Dt *
        (w_x + cos(th[2, j]) + w_x + cos(th[2, j+1]))
    x[3, j+1] == x[3, j] + 0.5 * tau[3]*Dt *
        (w_x + cos(th[3, j]) + w_x + cos(th[3, j+1]))
# y' = w_y + sin(theta)
    y[1, j+1] == y[1, j] + 0.5 * tau[1]*Dt *
        (w_y + sin(th[1, j]) + w_y + sin(th[1, j+1]))
    y[2, j+1] == y[2, j] + 0.5 * tau[2]*Dt *
        (w_y + sin(th[2, j]) + w_y + sin(th[2, j+1]))
    y[3, j+1] == y[3, j] + 0.5 * tau[3]*Dt *
        (w_y + sin(th[3, j]) + w_y + sin(th[3, j+1]))
```