Ch. 3 - Principe du maximum

On considère le problème de Lagrange

$x(t) \in \mathbb{R}^n$

$u(t) \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\, dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f] \ (\text{p.p.}) \\ x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \end{cases}$$

t_f fixé ou libre

Supposons que $u \in L^\infty([0,t_f],\mathbb{R}^m)$ est une solution (et que $x \in W^{1,\infty}([0,t_f],\mathbb{R}^n)$ est la trajectoire associée, et t_f – s'il est libre – le temps final correspondant),

alors (CN de solution) : il existe $(p^0,p) \neq (0,0)$ tq : $p^0 \leq 0$, $p : [0,t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonction Lipschitz (ie $p \in W^{1,\infty}([0,t_f],\mathbb{R}^n)$, comme x) avec

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t),p(t),u(t)), \quad t \in [0,t_f] \ (\text{p.p.})$$

où $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est le "hamiltonien" du problème, à savoir :

$$H(x,p,u) := p^0 f^0(x,u) + \overbrace{\big(p \mid f(x,u)\big)}^{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot f_i(x,u)}$$

$$(\Longrightarrow)\ \underbrace{\big(\nabla_x H(x,p,u) \mid \delta x\big)}_{= \frac{\partial H}{\partial x}(x,p,u)\cdot \delta x} = p^0 \cdot \underbrace{\frac{\partial f^0}{\partial x}(x,u)\cdot \delta x}_{\left(\nabla f^0(x,u) \mid \delta x\right)} + \left(p \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\cdot \delta x\right)$$

$${}^t\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\cdot p$$

$$\Longrightarrow \nabla_x H(x,p,u) = p^0 \nabla f^0(x,u) + {}^t\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\cdot p$$

et le hamiltonien est maximisé (presque partout) par rapport au contrôle :

$$H(x(t), p(t), u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), p(t), v), \quad t \in [0, t_f] \ (p.p.)$$

De plus, si t_f est libre, on a $H(x(t), p(t), u(t)) = 0$ (p.p.)

<u>Rq</u> : i) la condition de maximisation implique $\exists c \in \mathbb{R}$ tq

$$H(x(t), p(t), u(t)) = c, \quad t \in [0, t_f] \ (p.p.)$$

Quand t_f est libre, le th. affirme que $c = 0$.

ii) comme $H(x,p,u) = p^0 f^0(x,u) + (p \mid f(x,u))$ on a

$$\nabla_p H(x,p,u) = f(x,u)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) = \nabla_p H(x(t),p(t),u(t)) \\ \dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t),p(t),u(t)) \end{cases}$$

<u>Rappel</u> : soit $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ($\mathcal{C}^\infty$ ...) ; si $x, p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est sol. du "système hamiltonien"

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \nabla_p h(x(t),p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\nabla_x h(x(t),p(t)) \end{cases}$$

ODE de dim $2n$ (paire !)

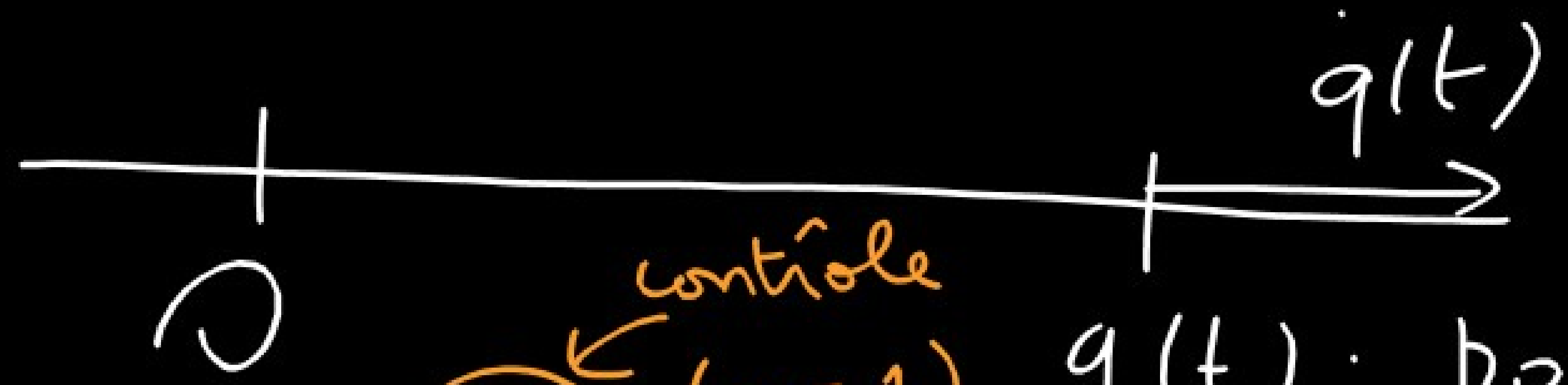
Alors, $t \mapsto h(x(t),p(t))$ est cte :

$$\frac{d}{dt}\big(h(x(t), p(t)) \big) = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t), p(t)) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial p}(\text{—}\,''\,\text{—}) \cdot \dot{p}(t)$$

$$= \big(\nabla_x h(x(t), p(t)) \mid \nabla_p h(x(t), p(t)) \big) + \big(\nabla_p h(\text{—}\,''\,\text{—}) \mid -\nabla_x h(\text{—}\,''\,\text{—}) \big) = 0.$$

Dans le cas du contrôle optimal, cette constance persiste bien que u (qui paramétrise H) ne soit pas dérivable, grâce à la condition de maximisation.

Ex : contrôle de la rame de métro en temps min :



contrôle ($m = 1$)

$q(t)$: position du métro au temps t

$\ddot q(t) = u(t)$: on contrôle l'accélération

$|u(t)| \leq 1$ (ie $u(t) \in U := [-1, 1]$)

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \ \dot q(0) = \dot q_0 \\ q(t_f) = 0, \ \dot q(t_f) = 0 \end{cases} \qquad t_f \longrightarrow \min$$

On pose $x(t) := (q(t), \dot q(t)) \in \mathbb{R}^2$: état en dim 2

On a $\displaystyle\int_0^{t_f} f^0(x(t),u(t))\,dt$ avec $f^0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,u) \longmapsto 1$$

et $\dot{x}(t) = f(x(t),u(t))$ avec $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,u) \longmapsto (x_2, u)$$

$$\uparrow$$

$$(x_1, x_2, u)$$

$\left(\text{cf. } \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{array} \iff \ddot{x}_1 = u \right)$

avec $x(0) = x_0 := (q_0, \dot{q}_0)$

$x(t_f) = x_f := (0,0)$