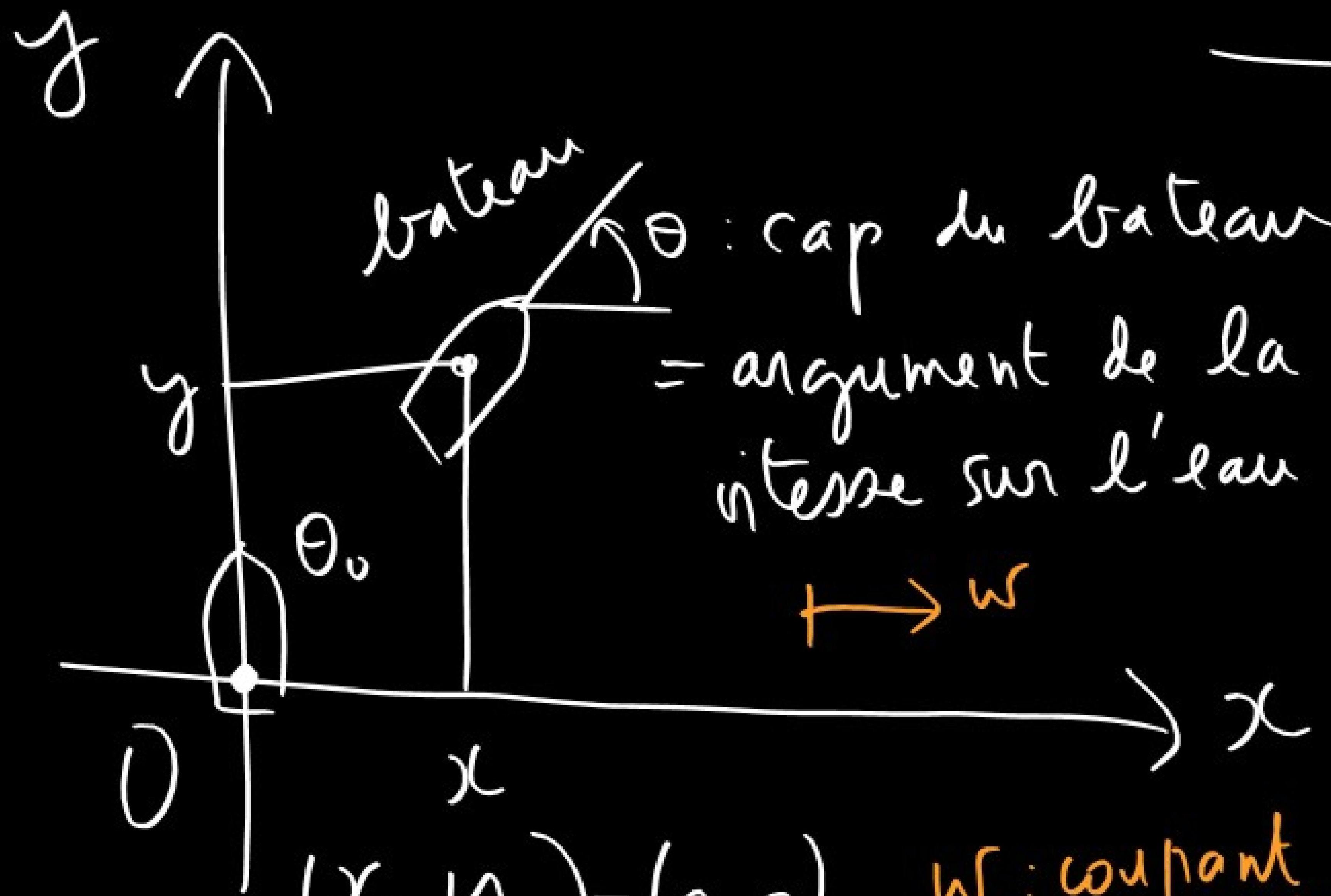
# 2. Méthodes directes

**Exemple** : pb de navigation :

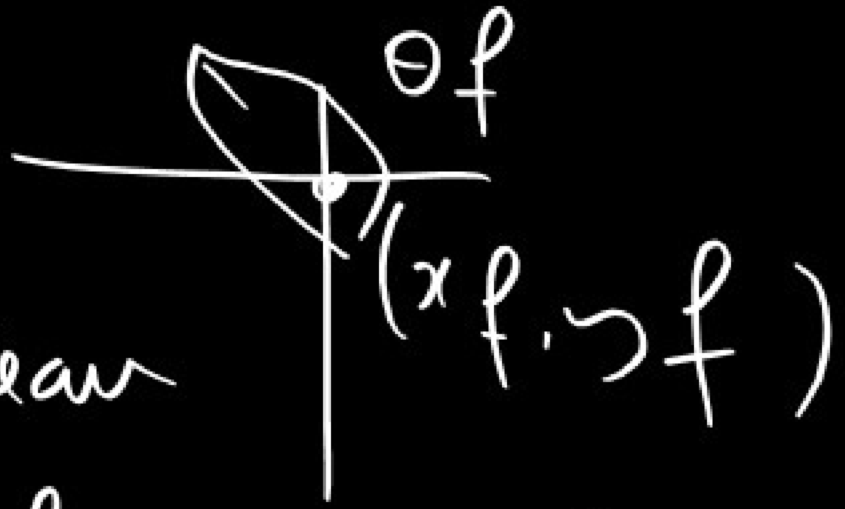



$\theta$ : cap du bateau = argument de la vitesse sur l'eau

$(x_0, y_0) = (0,0)$

$w$ : courant constant $/\!/ (Ox)$

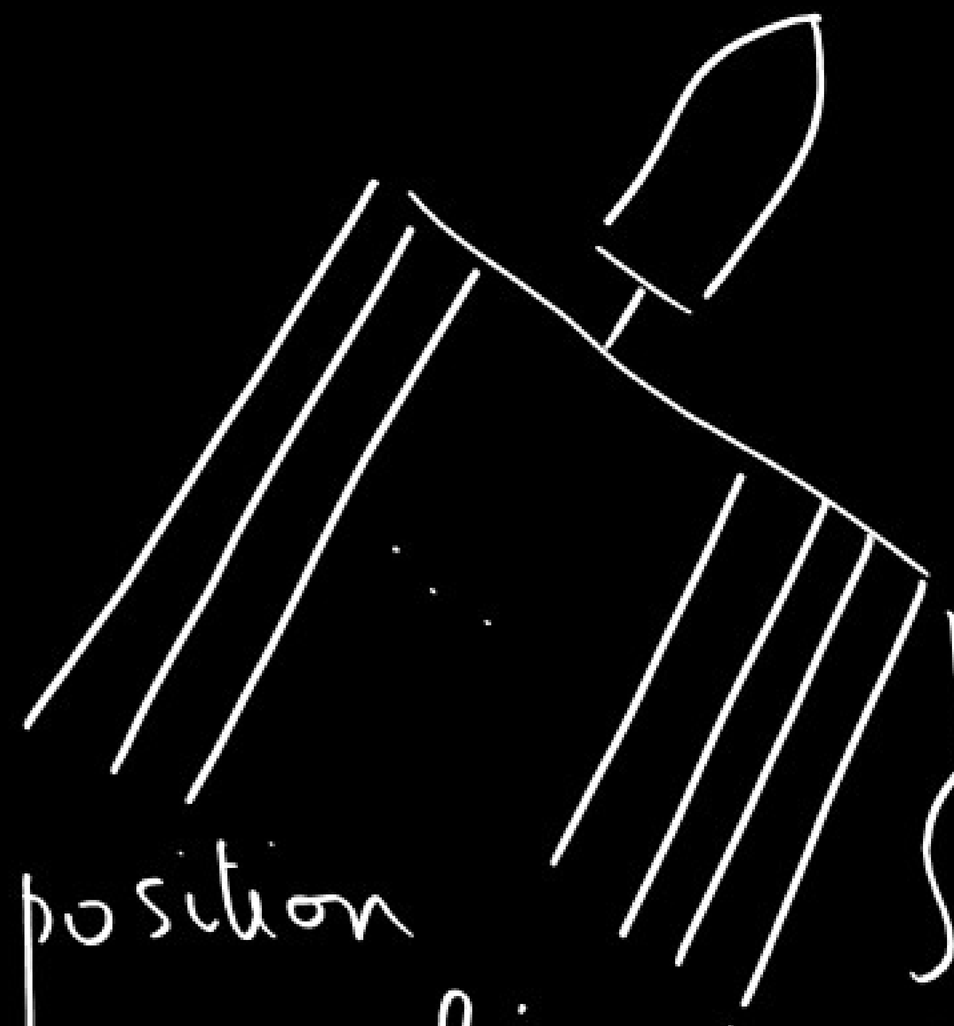
$w(\cancel{t}, \cancel{x}) = w$




$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ : position dans un repère attaché au fond marin (rep. fixe)

$\longrightarrow \neq$ repère mobile (sur l'eau)

$\theta \in \mathbb{R}$ : cap



câbles avec capteurs

($\simeq 100$ m)

Modélisation associée :

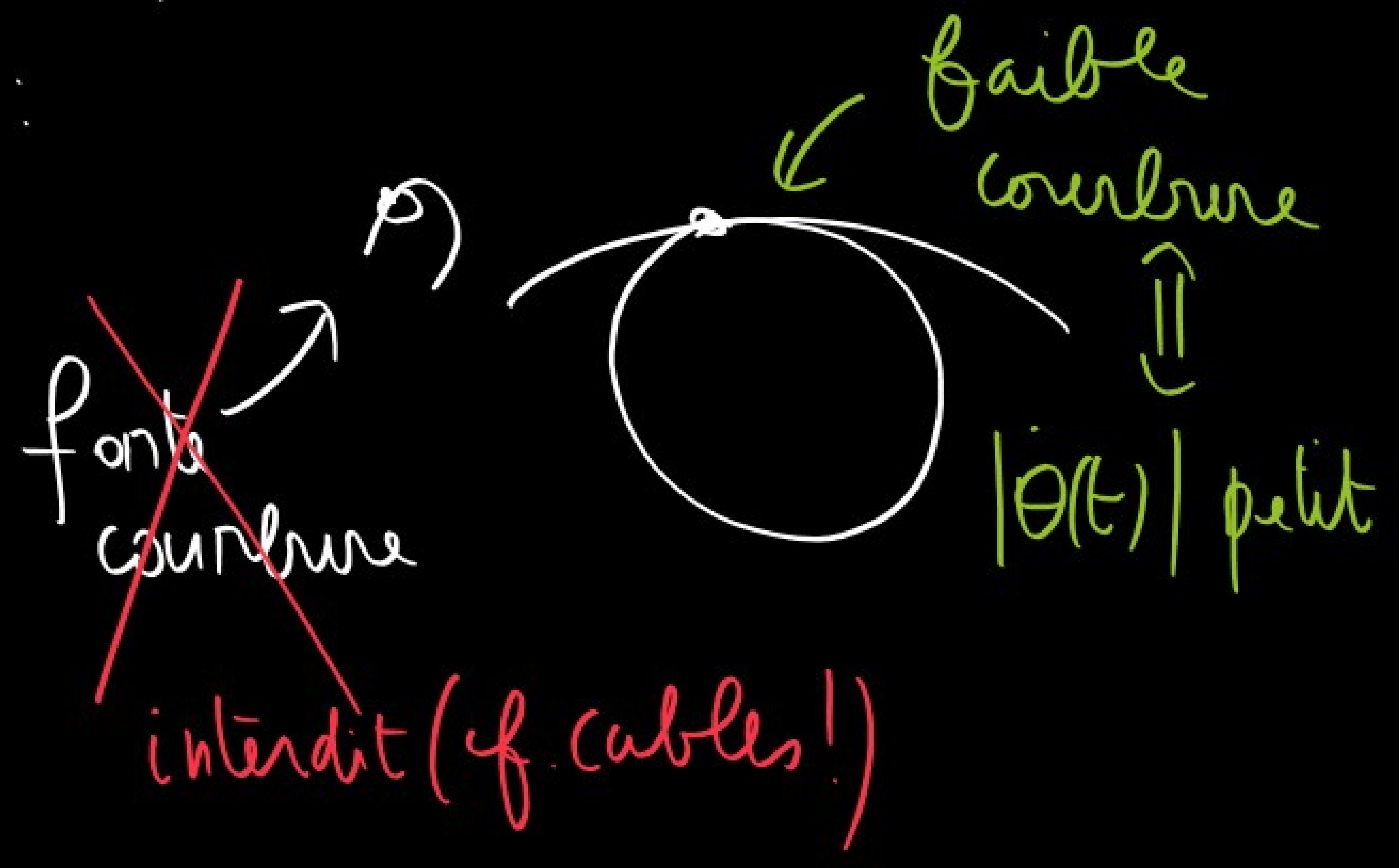
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = w + \boxed{\cancel{V}^{1} \cdot \cos\theta(t)} \\ \dot{y}(t) = \boxed{\cancel{V}_{1} \cdot \sin\theta(t)} \\ \dot{\theta}(t) = u(t) \end{cases}$$

vitesse sur l'eau $V e^{i\theta} \simeq V(\cos\theta, \sin\theta)$ de module constant

$\dot{\theta}(t) = u(t)$ : on contrôle (via le gouvernail) la direction (le cap) du bateau

Quitte à changer les unités (temps, longueur) on peut normaliser $V$ à 1 et la contrainte sur le contrôle à 1 également :

$$\underbrace{|u(t)| \leq 1}_{\text{courbure } (\simeq \text{ vitesse de changement de cap}) \text{ bornée : virages pas trop serrés}} \quad \text{ie} \quad -1 \leq u(t) = \dot{\theta}(t) \leq 1$$



On souhaite réaliser la manoeuvre le plus vite possible :

$t_f \to \min$ (temps minimum)

$\dot{X}(t) = f(X(t), u(t)),\ t \in [0, t_f]$ ← libre

$X(0) = X_0 := (x_0, y_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$, $X(t_f) = (x_f, y_f, \theta_f)$

$S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$u(t) \in U := [-1, 1]$

avec $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(X, u) \longmapsto (w + \cos\theta, \sin\theta, u)$, $X = (x, y, \theta)$

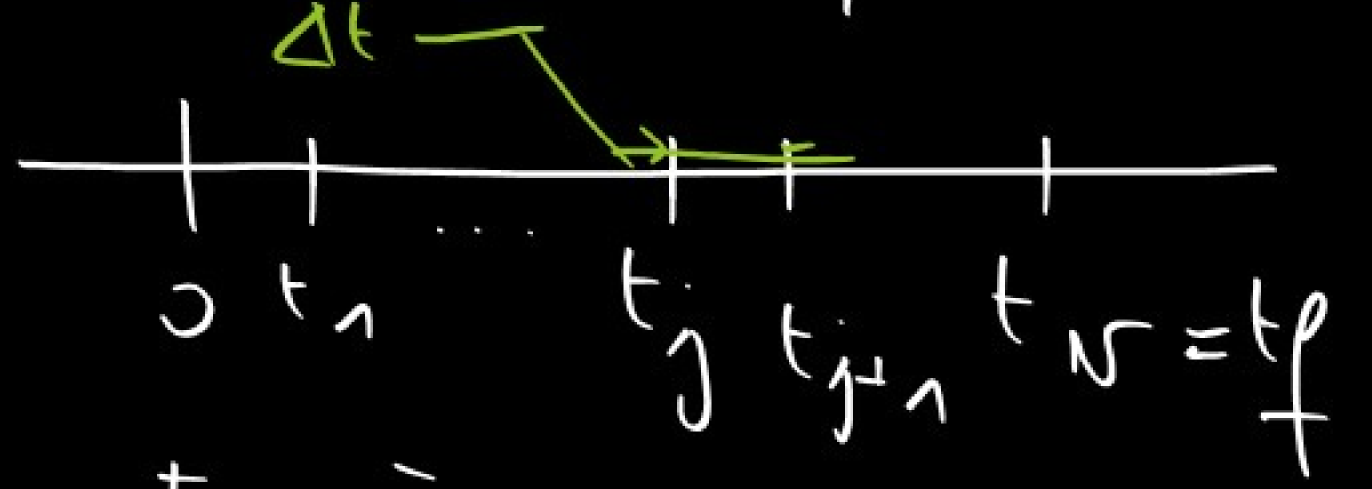
(et $f^0(X, u) = 1$, cf. $\int_0^{t_f} 1 . dt = t_f$ !)

Rq : on vérifie que le système est commandable ssi $0 \leq w < 1$ : c'est clairement nécessaire (cf. $w \geq 1 \Rightarrow \dot{x}(t) = w + \cos\theta(t) \geq 0 \Rightarrow x(t_f) \geq 0$), et on mq c'est aussi suffisant.

Sous cette hypothèse de contrôlabilité, on peut mq on a existence de solution temps min (cf. Th. de Filippov avec $U$ compact convexe).

Discrétisons le pb pour le résoudre numériquement :

- grille uniforme en temps :




$N \geqslant 0$

$\Delta t = \dfrac{t_f}{N}$

- schéma numérique : Euler (explicite, implicite), pt milieu, trapèze…

$$X_{j+1} - X_j - \Delta t \, f(X_j, u_j) = 0, \quad j = 0, \dots, N-1$$

$\simeq u(t),\ t \in [t_j, t_{j+1}[$ (contrôle constant par morceaux)

$\simeq x(t_j)$