TD4 : Stabilité

Exercice 1 :

1.1) Euler explicite : $\sigma := \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}$

$$u_j^{n+1} = \sigma u_{j-1}^n + (1-2\sigma) u_j^n + \sigma u_{j+1}^n \qquad \text{si } 1-2\sigma \geqslant 0 \text{ ie si } \sigma = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \frac{1}{2} \text{ (CFL)}$$

On a par convexité que : $u_j^0 \in [m, M], j \in \mathbb{Z} \Rightarrow u_j^n \in [m, M], j \in \mathbb{Z}$

1.3) Vérifions que la condition $\sigma \leqslant \frac{1}{2}$ et non-seulement suffisante, mais aussi nécessaire par la stabilité de L^∞.

Supposons donc $\sigma \leqslant \frac{1}{2}$ et considérons : $u_j^0 = (-1)^j$, alors :

$$u_j^1 = \sigma u_{j-1}^0 + (1-2\sigma) u_j^0 - \sigma u_{j+1}^0$$
$$= -(-1) 2\sigma + (1-2\sigma)(-1)^j$$
$$= (-1)^j (1-4\sigma)$$
$$\sigma > \frac{1}{2} \Rightarrow 1-4\sigma < -1$$

récurrence immédiate : $|u_j^n| = |1-4\sigma|^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ par stab. de L^∞.

Exercice 2 :

2.1) Euler implicite :

$$\begin{cases} u_j^{n+1} - u_j^{n-1} - \underbrace{\frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}}_{=\sigma} \left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} \right) = 0 & , j \in [\![1, J-1]\!] \\ & (+ u_j^0 = u_0(x_j) \; j \in [\![1, J]\!]) \\ u_0^{n+1} = u_J^{n+1} \text{ (Dirichlet)} & \end{cases}$$

$\Leftrightarrow U^n = AU^{n+1}$, avec $(u_0^n, \dots, u_J^n) \in \mathbb{R}^{J+1}$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ & \sigma & (1+2\sigma) & -\sigma & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

dim $= (J+1) \times (J+1)$

matrice à diagonale strictement dominante ie :

$\forall i \in [\![0, J]\!], \; |a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

$\Rightarrow A \in GL_{J+1}(\mathbb{R})$ inversible

$\Rightarrow$ schéma bien défini !

2.2) Mq ce schéma est stable au sens L^∞

ie que si $m \leq u_j^0 \leq M$, $j \in [\![0,J]\!]$, alors

$m \leq u_j^n \leq M$, $j \in [\![0,J]\!]$, $n \geq 0$

Soit $n \geq 0$, $\exists k \in [\![0,J]\!]$ tq $u_k^{n+1} = \max_{j \in [\![0,J]\!]} |u_j^{n+1}|$. Or

$$-\sigma u_{k-1}^{n+1} + (1+2\sigma) u_k^{n+1} - \sigma u_{k+1}^{n+1} = u_k$$

(si $k \in [\![1, J-1]\!]$, sinon on a $k=0$ ou J et $u_k^{n+1} = 0 \in [m,M]$ puisque $m \leq u_{0/J}^0 = 0 \leq M \Rightarrow 0 \in [m,M]$!)

$$\Rightarrow (1+2\sigma) u_k^{n+1} = u_k^n + \sigma \underbrace{u_{k-1}^{n+1}}_{\leq u_k^{n+1}} + \sigma \underbrace{u_{k+1}^{n+1}}_{u_k^{n+1}}$$

$$\leq u_k^n + \cancel{2\sigma} . u_k^{n+1}$$

$$\Rightarrow u_k^{n+1} \leq u_k^n \leq M$$

(cf par récurrence on suppose que : $m \leq u_k^n \leq M$

$\Rightarrow u_j^{n+1} \leq M$, $j \in [\![0,J]\!]$

Idem pour mq $u_j^n \geq m$.

Exercice 3 : Schéma décentré amont pour l'équat° d'advect°

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V.\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ avec } V > 0 \text{ (} \emptyset \text{ diffusion : } \nu = 0)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V.\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \ j \in \mathbb{Z}, n \geq 0$$

3.1) Mq sous une condition CFL à préciser les u_j^{n+1} sont combinaisons convexe des u_j^n.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \underset{\uparrow \ \frac{V}{\Delta t \Delta x}}{\sigma}(u_j^n - u_{j-1}^n) = u_j^n (1-\sigma) + \sigma u_{j-1}^n$$

$(1-\sigma) + \sigma = 1$

$\sigma \geq 0$ (cf. $V > 0$)

$1 - \sigma \geq 0 \Leftrightarrow \sigma \leq 1$ ie $\frac{V\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ CFL

3.2) Sous la condit° CFL $\sigma = \frac{V\Delta t}{\Delta x} \leq 1$, $m \leq u_j^0 \leq M \Rightarrow m \leq u_j^n \leq M$, $j \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$

3.3) Cette condit° est suffisante d'après ce qui précède est aussi nécessaire : supposons $\sigma < 1$.

et considérons $u_j^0 = (-1)^j$; on a :

$$u_j^1 = (1-\sigma)(-1)^j + \sigma(-1)^{j-1}$$
$$= (-1)^j (1-2\sigma)$$

$$\Rightarrow |u_j^n| = \underbrace{|1-2\sigma|^n}_{>1} \underset{n \to \infty}{\Longrightarrow} \infty \text{ par } L^\infty\text{-stable.}$$