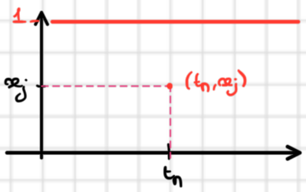
TD2 : Étude de la consistance :

Considérons l'équat° de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - V\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ t>0, \ x \in \Omega :=]0,1[\\ CL \\ CI \end{cases}$$



$x_j = j\Delta x$, $\forall j \in$

$t_n = n\Delta t$

θ- schéma , $\theta \in [0,1]$:

$\theta = \frac{1}{2}$: Krank-Nicolson

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - (1-\theta)V.\underbrace{\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}}_{\text{explicite}} - \theta.V.\underbrace{\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}}_{\text{implicite}} = 0$$

Combinaison Convexe

Rq : $\theta > 0 \Rightarrow$ schéma implicite
$\theta = 0$: Euler (explicite)
$\theta = 1$: Euler implicite

On se place en $(t, x) = (t_n, x_j)$ et on applique Taylor pour u solut° :

DL à l'ordre 2 en temps :

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$\Rightarrow \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta t + O(\Delta t^3)$$

- à l'ordre 4 en espace :

$$u(t_n, x_{j+1}) = u(t_n, x_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_n, x_j)\Delta x^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_n, x_j)\Delta x^4 + O(\Delta x^5)$$

$$\Rightarrow \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1})}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta x^3)$$

idem pour t_{n+1} (pour le schéma implicite)

pour t_{n+1}

$$= \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+1}, x_j)}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}.\Delta t} + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta x^3)$$

Or $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{V}\frac{\partial u}{\partial t}$ car u solut°

$$\Rightarrow (*) = \frac{1}{V}\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1}, x_j) + \frac{1}{12}.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

$$= \frac{1}{V}\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + \frac{1}{V}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\Delta t + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_n, x_j)\Delta x^2 + \frac{1}{12}\frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}.\Delta x^2.\Delta t + O(\Delta x^3)$$

$\Rightarrow$ On remplace par u solut° dans le schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - (1-\theta)V.\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \theta.V.\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\boxed{\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

$$- (1-\theta).V\left(\frac{1}{V}\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.\boxed{\Delta x^2} + O(\Delta x^3)\right)$$

$$- \theta V\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{V}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta t + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Delta x^2 + \dots\right)$$

$$= 0 + \underbrace{E_j^n}_{= \square + \square + \pentagon + \diamond}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n, x_j)\Delta t - \frac{V}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots$$

$\Rightarrow \theta \neq \frac{1}{2}$ ordre 1 ent
ordre 2 sinon

Exercice 2 : Schéma de Gear pour la chaleur

$u_t - \nu u_{xx} = f$, $t>0$, $u \in \Omega =]0,1[$

$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

→ schéma avec n+1 et n-1 : stencil de 2 "support"

Rq : majorité de terme en t_{n+1}

d'où

DL en (t_{n+1}, x_j)

- ordre 3 en temps
- ordre 4 en espace

DL en t :

$$u(t_n, x_j) = u(t_{n+1}, x_j) + u_t \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt} \Delta t^2 + \frac{1}{6} u_{ttt} \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$u(t_{n-1}, x_j) = u(t_{n+1}, x_j) - 2u(t_{n+1}, x_j) - 2u_t \Delta t + 2u_{tt}\Delta t^2 - \frac{4}{3} u_{ttt} \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\rightarrow \frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{3u(t_{n+1}, x_j) - 4u(t_n, x_j) + u(t_{n-1}, x_j)}{2\Delta t} = \boxed{u_t - \frac{1}{3} u_{ttt} \Delta t^2 + O(\Delta t^3)}$$

DL en x :

$$u(t_{n+1}, x_{j+1}) = u(t_{n+1}, x_j) + u_x \Delta x + \frac{1}{2} u_{xx} \Delta x^2 + \frac{1}{6} u_{xxx} \Delta x^3 + \frac{1}{24} u_{xxxx} \Delta x^4 + O(\Delta x^5)$$

$$u(t_{n+1}, x_{j-1}) = u(t_{n+1}, x_j) - u_x \Delta x + \frac{1}{2} u_{xx} \Delta x^2 - \frac{1}{6} u_{xxx} \Delta x^3 + \frac{1}{24} u_{xxxx} \Delta x^4 + O(\Delta x^5)$$

$$\rightarrow \frac{u(t_{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t_{n+1}, x_j) + u(t_{n+1}, x_{j-1})}{\Delta x^2} = \boxed{u_{xx} + \frac{1}{12} u_{xxxx} \Delta x^2 + O(\Delta x^3)}$$

♡ ce qu'on voulait

CCL : L'erreur de consistance est

$$E_j^{n+1} = \underbrace{\cancel{(u_t - \nu u_{xx})}}_{0} - \frac{1}{3} \underbrace{u_{ttt}}_{\neq 0} \boxed{\Delta t^2} + O(\Delta t^3) - \frac{\nu}{12} \underbrace{u_{xxxx}}_{\neq 0} \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

ordre 2

$u_t = \nu u_{xx}$

$u_{xx} = \frac{1}{\nu} u_t$

$u_{xxxx} = \frac{1}{\nu^2} u_t^2$

Exercice 3 : Schéma de Du Fort-Frankel

$$\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta t} - \nu . \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_j^n}{\Delta x^2} = 0$$

$(\neq -2u_j^n)$

DL en (t_n, x_j) ordre 3 en t, 4 en x, en réécrivant le schéma comme suit :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_j^{n+1} + u_j^{n-1} - 2u_j^n}{\Delta x^2} = 0$$

Rq : La motivat° pour impliciter le schéma en prenant :

$$u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n$$

au lieu de $-2u_j^n$ (explicite)

est de rendre le schéma stable (cf TD3)

- DL ordre 3 en t au pt (t_n, x_j) :

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) + u_t \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt} \Delta t^2 + \frac{1}{6} u_{ttt} \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$u(t_{n-1}, x_j) = u(t_n, x_j) - u_t \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt} \Delta t^2 - \frac{1}{6} u_{ttt} \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

On se place en (t_n, x_j) :

- $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t}\left(2 u_t \Delta t + \frac{1}{3} u_{ttt} \Delta t^3 + O(\Delta t^4)\right) = u_t + \frac{1}{6} u_{ttt} \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

- $$u_j^{n+1} + u_j^{n-1} - 2u_j^n = u_{tt} \Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

DL ordre 4 en x au pt (t_n, x_j) :

$$u(t_n, x_{j\pm 1}) = u(t_n, x_j) \pm u_x \Delta x + \frac{1}{2} u_{xx} \Delta x^2 \pm \frac{1}{6} u_{xxx} \Delta x^3 + \frac{1}{24} u_{xxxx} \Delta x^4 + O(\Delta x^5)$$

$$\Rightarrow \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = u_{xx} + \frac{1}{12} u_{xxxx} \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

D'où :

$$E_j^n = (u_t - \nu u_{xx}) + \frac{1}{6} u_{ttt} \Delta t^2 + O(\Delta t^3) + u_{tt} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + O\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right) - \frac{\nu}{12} u_{xxxx} \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

ordre 2 en t et en x + consistance conditionnelle

on a ordre 2 en t
et ordre 2 en x
$\frac{\Delta t}{\Delta x}$ petit $(\to 0)$

Rq : Le gain en stabilité fait au prix d'une dégradat° de la consistance

Parenthèse : θ- schéma

$$u_j^{n+1} - u_j^n - (1-\theta)\nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \theta\nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0$$

$\theta \in [0,1]$, $\theta > 0 \Rightarrow$ implicite

- DL ordre 2 en t en (t_n, x_j) :

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) + u_t \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt} \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$\frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} = u_t + \frac{1}{2} u_{tt} \Delta t + O(\Delta t^2)$$

DL d'ordre 4 en x :

$$\frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1})}{\Delta x^2} = u_{xx}(t_n, x_j) + \frac{1}{12} u_{xxxx} \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

De m̂ en (t_{n+1}, x_j) :

$$\frac{u(t_{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t_{n+1}, x_j) + u(t_{n+1}, x_{j-1})}{\Delta x^2} = u_{xx}(t_{n+1}, x_j) + \frac{1}{12} u_{xxxx} \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

$$= u_{xx}(t_n, x_j) + u_{txx} \Delta t + O(\Delta t) + \frac{1}{12} u_{xxxx} \Delta x^2 + \frac{1}{12} u_{txxxx} \Delta t \Delta x^2 + O(\Delta t \Delta x$$

on voit qu'on a
E_j^n le terme suivant
en Δt :

$$\Delta t\left(\frac{1}{2}u_{tt} - \theta\nu\, u_{txxx}\right)$$

$$= \Delta t\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \theta\right)}_{=0 \text{ en } \theta=\frac{1}{2}} u_{tt}$$

Cet $u_t = \nu u_{xxxx} \Rightarrow u_{txxx} = \frac{\partial}{\partial t}(u_{xxxx})$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\nu}u_t\right)$$

$$= \frac{1}{\nu}u_{tt}$$