06/10/2025

# TD3 : Stabilité

## Exercice 1 :

Étudier la stabilité au sens de Von Neumann du θ-schéma :

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - (1-\theta)\nu\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \theta.\nu\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad : (*)$$

On injecte un mode de Fourier : $u_j^n = a^n(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x}$, $x = j\Delta x$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x} - a^n(\xi)e^{2i\pi j\Delta x\xi}}{\Delta t} - (1-\theta)\nu.\frac{a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j+1)\Delta x} - 2a^n(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x} + a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}}{\Delta x^2}$$

on divise par ce terme $(a(\xi)\neq 0)$

$$-\theta\nu.\frac{a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi(j+1)\Delta x} - 2a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x} + a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}}{\Delta x^2} = 0$$

On pose : $\sigma = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}$

En supposant $a(\xi)\neq 0$, $\forall \xi\in\mathbb{R}$, on a :

$$a(\xi) - 1 - (1-\theta)\sigma\underbrace{\left(e^{2i\pi\xi\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi\xi\Delta x}\right)} - \theta\sigma a(\xi)\left(e^{2i\pi\xi x} - 2 + e^{-2i\pi\xi x}\right) = 0$$

$2\cos(2\pi\xi x) - 2$
$= 2(-2\sin^2(\pi\xi x))$
$= -4\sin^2(\pi\xi x) \leq 0$

d'où :

$$a(\xi)\left(1 - 4\theta\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x)\right) = 1 - 4(1-\theta)\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x)$$

$$a(\xi) = \frac{1-4(1-\theta)\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x)}{1-4\theta\sin^2(\pi\xi\Delta x)} \in \mathbb{R} \qquad |a(\xi)|\leq 1, \forall\xi$$

Posons : $\alpha (= \alpha(\xi)) := 4\sigma\sin^2(\pi\xi x) \in [0, 4\sigma]$

de sorte à ce que : $a(\xi) = \frac{1-(1-\theta)\alpha}{1+\theta\alpha}$

et on veut $|a(\xi)| \leq 1$, $\forall \xi\in\mathbb{R}$

ie $\forall \alpha\in[0,4\sigma]$

Comme $a(\xi)\in\mathbb{R}$, la condition est : $-1 \leq a(\xi) \leq 1$ ⟵ Vrai ✓

De plus : $\begin{cases} 1-(1-\theta)\alpha \leq 1 \\ 1+\theta\alpha \geq 1\end{cases} \Rightarrow \frac{1-(1-\theta)\alpha}{1-\theta\alpha} \leq 1$

$-1 \leq a(\xi)$

$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-(1-\theta)\alpha}{1+\theta\alpha}$

$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-\alpha+\theta\alpha}{1+\theta\alpha}$

$\Leftrightarrow -1 \leq 1 - \frac{\alpha}{1+\theta\alpha}$

$\Leftrightarrow 2 \geq \frac{\alpha}{1+\theta\alpha}$

$\Rightarrow (2\theta-1)\alpha \geq -2$

Si $\theta\in[\frac{1}{2}, 1]$, $(2\theta-1)\geq 0 \geq -2$.

Stabilité inconditionnelle

Si $\theta\in[0,\frac{1}{2}[$, $(2\theta-1)\alpha \geq -2$

$\Leftrightarrow (1-2\theta)\alpha \leq 2$

$\Leftrightarrow 4\sigma\sin^2(\pi\xi x) = \alpha \leq \frac{2}{1-2\theta}$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \sigma \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ CFL si $\theta\in[0,\frac{1}{2}]$

$\longrightarrow +\infty$

$\theta^- \longrightarrow \frac{1}{2}$

EXERCICE 2 : Stabilité du schéma de Crank-Nicolson pour l'équation d'advection ($V \neq 0$, $\nu = 0$) :

vitesse d'advection

$\varnothing$ diffusion

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

On injecte un mode Fourier $(\xi)$, $u_j^n = a^n(\xi)\underbrace{e^{2i\pi\xi j\Delta x}}_{\neq 0}$ et on pose : $\sigma = \frac{V\Delta t}{\Delta x}$, ainsi :

$$\frac{a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x} - a^n(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x}}{\Delta t} + \frac{1}{2}V\cdot\frac{a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j+1)\Delta x} - a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} + \frac{1}{2}V\frac{a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi(j+1)\Delta x} - a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0$$

on divise par : $\frac{1}{\Delta t}a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}$, avec $|a(\xi)| \neq 0$.

d'où :

$$a(\xi) - 1 + \frac{1}{2}\sigma i\sin(2\pi\xi\Delta x) + a(\xi)\frac{1}{2}\sigma i\sin(2\pi\xi\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow a(\xi)\left(1 - \frac{i}{2}\sigma\sin(2\pi\xi\Delta x)\right) = 1 - \frac{i}{2}\sigma\sin(2\pi\xi x)$$

$$a(\xi) = \frac{1 - \frac{i}{2}\sigma\sin(2\pi\xi x)}{1 + \frac{i}{2}\sigma\sin(2\pi\xi x)} = 1 \longleftarrow \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

$\Rightarrow |a(\xi)| = 1$, $\xi \in \mathbb{R}$ On a donc stabilité inconditionnelle.

# EXERCICE 3 :

1) Schéma Leapfrog (chaleur, $\nu > 0$) :

explicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

DF (différences finies) centré en temps (consistance améliorée)

On injecte un mode de Fourier $(\xi)$, $u_j^n = a^n(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

$$\frac{a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x} - a^n(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x}}{\Delta t} - \nu\frac{a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j+1)\Delta x} - 2a^n(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x} + a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}}{\Delta x^2} = 0$$

Supposons $a(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, ainsi on divise par $a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}$.

On a :

$$\frac{a^2 - 1}{2\Delta t} - \nu a\cdot\frac{e^{2i\pi\xi\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi\xi\Delta x}}{\Delta x^2} = 0 \Rightarrow a^2 - 1 - 2a\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}(2\cos(2\pi\xi x) - 1) = 0$$

après identificat° par $a^{n-1}(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x}$

$$a^2 + 8a\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x) - 1 = 0$$

$\Delta = 8^2\sigma^2\sin^4(\pi\xi\Delta x) + 4 > 0 \Rightarrow \exists\, 2$ solut° $a_1(\xi), a_2(\xi) \neq 0$ tq $|a_i(\xi)| \leq 1$. $\forall\, i \in \{1,2\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1(\xi) + a_2(\xi) = -8\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x) \neq 0 \text{ (en général)} \\ a_1(\xi)a_2(\xi) = \frac{1}{-1} = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underbrace{|a_1(\xi)| = |a_2(\xi)| = 1}_{\text{on n'a pas}}$ ce serait le cas $\pm 1$ racines mais alors la somme serait nulle.

$\Rightarrow$ au moins une des 2 est de $|.| > 1$ : JAMAIS de stabilité.

Rappel : on doit avoir les 2 racines de module $\leqslant 1$. cf relat° de récurrence linéaire sur $\hat{u}^n(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, en appliquant la TF au schéma discret :

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^{n-1}(x)}{} - \nu \frac{u^n(x+\Delta x) - 2u^n(x) + u^n(x+\Delta x)}{\Delta x^2} = 0$$

$$\overset{TF}{\Longrightarrow} \frac{\hat{u}^{n+1}(\xi) - \hat{u}^{n-1}(\xi)}{2\Delta t} - \nu . \frac{\hat{u}^n(\xi)\,(e^{-} - 2 + e^{-})}{} = 0$$

D'où la récurrence linéaire de longueur 2 en $\hat{u}^n(\xi)$

$$\hat{u}^{n+2}(\xi) - \hat{u}^n(\xi) + 8\sigma \sin^2(\pi\xi\Delta x)\hat{u}^{n+1}(\xi) = 0$$

$$\hat{u}^n(\xi) = \alpha a_1^n(\xi) + \beta a_2^n(\xi)$$

où $a_1(\xi)$ et $a_2(\xi)$ sont les 2 racines $\neq$ ($\Delta \neq 0$ ...)

de l'équation caractéristique

$$r^2 + 8\sigma \sin^2(\_).r - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} |a_1(\xi)| \leqslant 1 \\ |a_2(\xi)| \leqslant 1 \end{array} , \forall \xi \in \mathbb{R}.$$