MAM4

EDP1

2025-26

Exam CC no. 1

Durée 2H00. Documents non autorisés. Tous les exercices sont indépendants.
Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Rendre sur deux copies séparées les exercices 1 et 2 d'une part, 3 d'autre part.

Exercice 1 (6 points)

On considère l'équation des ondes sur le domaine $\Omega =]0,1[$ avec conditions aux limites périodiques :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega,\\
&u(t,0) = u(t,1), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1), \quad t > 0,\\
&u(0,x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega.
\end{aligned}$$

1.1

On définit l'énergie

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2 \mathrm{d}x.$$

En supposant u solution aussi régulière que nécessaire, montrer que l'énergie est constante.

1.2

En déduire qu'on a unicité de solution pour l'EDP considérée.

Exercice 2 (6 points)

On considère le schéma explicite ci-dessous

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2} = 0$$

pour l'équation d'advection

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0.$$

2.1

En supposant u solution aussi régulière que nécessaire, montrer que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).$$

2.2

En déduire que le schéma proposé est consistant d'ordre 2 en temps et en espace. (On pourra utiliser des développements à l'ordre 4 en temps et en espace.)

Exercice 3 (8 points)

3.1

Montrer que le schéma explicite ci-dessous

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

pour l'équation des ondes (voir Exercice 1) est consistant d'ordre 2 en temps et en espace. (On pourra utiliser des développements à l'ordre 4 en temps et en espace.)

3.2

Montrer que ce schéma est stable au sens de Von Neumann sous une condition que l'on précisera.

3.3

Comment pourrait-on améliorer la stabilité ?