

TD6: Formulations Variationnelles

EXERCICE 1: On cherche $u \in C^2(\bar{\Omega}_1)$ tq :



$$(S): \begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f, & \forall x \in \Omega_1 \\ u|_{\partial\Omega_1} = 0 & (\Omega_1 \text{ ouvert}) \end{cases}$$

1.1) $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid D_v \in L^2(\Omega)\} : (*)$

$\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i \in [1, n]$
ou

(*) avec $n=1, v \in H^1(\Omega_1)$

↳ dérivée au sens des distributions



$$v(x) = C + \int_0^x w(y) dy, w \in L^2([0, 1])$$

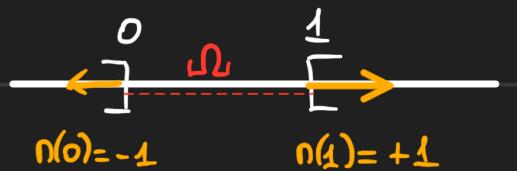


Rq: Th. Stohes est valable pour $f \in H^1(\Omega_1)$.

- $n=1 : f \in H^1(\Omega_1), \Omega_1 = [0, 1]$

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 = \int_0^1 f'(x) dx \quad (x = x_1, \text{ cf } n=1)$$

$$= f(1) - f(0)$$



$$= f(0) \cdot n(0) + f(1) \cdot n(1)$$

$$n = (e_1, \dots, e_n) = e_1$$

$$= f(0) \cdot e_1(0) + f(1) \cdot e_1(1)$$

$$= (\delta_0 + \delta_1) (f \cdot e_1)$$

$\delta_0 + \delta_1$

$$= \int_{\partial \Omega} f \cdot e_1 \, d\sigma$$

$$- n > 1 : \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} f \cdot e_i \, dx$$

d $x_1 \dots d\sigma_n$
d $x_1 \dots d\sigma_n$

$$\omega \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), \operatorname{tr} : \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

applicat° trace
↑
ω ↦ ω|_{\partial \Omega}

cf $\omega|_{\partial \Omega}$ ctn sur $\Gamma = \partial \Omega$ compact donc $\omega \in L^2(\Gamma)$

Cette applicat° linéaire fn se prolonge à tout

$$H^1(\Omega) = \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \quad \text{où } \|\cdot\|_{H^1} \text{ est associée au}$$

$\|\cdot\|_{H^1}$

prod. scal sur $H^1(\Omega)$.

$$(u|v)_{H^1} := (u|v)_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \Big| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

$$= \int_{\Omega} u v \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow (H^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H^1})$$

espace d'Hilbert

$$\int (\nabla u | \nabla v)$$

On définit :

$$H_0^1(\Omega) := \{ v \in H^1(\Omega) \mid \underbrace{\text{tr}(v)}_{v|_{\partial\Omega}} = 0 \}$$

$$= \ker(\text{tr})$$

Comme $\text{tr}: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ est linéaire et cln, ce noyau est un sous espace fermé. Donc $H_0^1(\Omega)$ est hilbertien ($\subset H^1(\Omega)$). Il hérite du prod. scal de $H^1(\Omega)$ et de la norme associée.

$$\|u\| = \sqrt{(u|u)_{H^1}} = \sqrt{(u|u)_{L^2} + (\nabla u | \nabla u)_{L^2}}$$

↑

$$u \in H_0^1 \subset H^1$$

$$= \left(\int_{\Omega} |u|^2 \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

1.2) Si u sol. forte, soit $\nu \in H_0^1(\Omega)$

A

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + \alpha u) \cdot \nu \, d\omega = \int_{\Omega} f \cdot \nu \, d\omega$$

Toutes solutions fortes est solution faible

on veut faire remonter

le degré (donc faire une IPP, donc appliquer le th. Stokes)

Or on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot \nu \, d\omega = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial \omega_i^2} \nu \, d\omega$$

$$\text{Stokes} + \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left(\frac{\partial u}{\partial \omega_i} \right) \text{ pour } i=1, \dots, n.$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\left(\int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \omega_i} \nu \cdot (\hat{e}_i) \, d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \omega_i} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \omega_i} \, d\omega \right) \right)$$

dérivées d'ordre 1 sur $u (< 2)$.

$$= \int \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_i} e_i \right) v d\xi - \int_{\Omega_1} (\nabla u | \nabla v) d\xi \quad (\text{Green})$$

$\partial \Omega_1 = \Gamma$

$$(\nabla u(\xi) | n(\xi)) = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi) = u'(\xi) \cdot n(\xi)$$

On a donc pour $v \in H_0^1(\Omega_1)$,

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot n d\xi + \boxed{\int_{\Omega_1} (\nabla u | \nabla v) d\xi + \alpha \int_{\Omega_1} u v d\xi = \int_{\Omega_1} f v d\xi}$$

$\Leftrightarrow v \in H_0^1(\Omega_1)$

$$\Rightarrow v|_{\partial \Omega_1} = v|_{\Gamma}$$

$$= \operatorname{tr} v = 0_{L^2(\Gamma)}$$

↑ Formulation faible

Formulation faible : trouver $u \in H_0^1(\Omega_1)$ tq

$$(\forall v \in H_0^1(\Omega_1)) : \int_{\Omega_1} (\nabla u | \nabla v) d\xi + \alpha \int_{\Omega_1} u v d\xi = \int_{\Omega_1} f v d\xi$$



esp. sd. faible
 $H_0^1(\Omega_1)$

1.3) B) Existence et unicité de sol. faible.

$$(*) \Leftrightarrow (\forall v \in H_0^1(\Omega)) : a(u, v) = \varphi(v)$$

e.h : esp. hilbert

où a est une forme bilinéaire

$$a(u, v) := \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v + \alpha u v] \, dx$$

et φ une forme linéaire :

$$\varphi(v) := \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Th. Lax-Milgram: si a est ctn et coercive et
si f est ctn, alors $\exists! u \in H_0^1$ qui vérifie $(*)$.

i) ctn de φ : φ étant linéaire i.e il faut et il suffit
de mq $\exists C > 0$ tq :

$$(\forall v \in H_0^1(\Omega)) : |\varphi(v)| \leq C \|v\|$$

Seit $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$|\varphi(v)| = \left| \int_{\Omega} g v \, dx \right|$$

$$= \left| (g | v)_{L^2} \right|$$

$$\leq \|g\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2}$$

$$\leq (\|g\|_{L^2}) \sqrt{\|v\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2}$$

Cauchy-Schwarz

$$\|v\|_{H^1}$$

ii) Continuité de a : a étant bilinéaire, il suffit de mq $\exists C > 0$ tq:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): |a(u, v)| \leq C \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$$

Seit $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$|a(u, v)| = \left| a \int u v \, dx + \underbrace{\int (\nabla u \cdot \nabla v) \, dx}_{\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}} \right|$$

$$\underbrace{\langle \alpha \|u\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2}}_{c.s.} \\ \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\langle \alpha \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$$

car $\|.\|_{L^2} < \|.\|_{H^1}$

$$\langle (1+\alpha) \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$$

iii) Coercivité: $\forall q \exists c > 0 \text{ tq}$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): a(u, v) \geq c \|v\|^2$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u, v) = \alpha \int_{\Omega} v^2 dx + \int_{\Omega} \underbrace{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2}_{\|\nabla v\|^2} dx$$

> 0 si $\alpha = 0$

$$> \min(\alpha, 1) \cdot \left(\int_{\Omega} v^2 dx + \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx \right)$$

$\|v\|_{H^1}^2$

Donc $c = \min(\alpha, 1)$

On a donc existence et unicité de $u \in H_0^1(\Omega)$
 tq $(\forall v \in H_0^1(\Omega))$:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \varphi \cdot v \\ &= \langle \varphi, v \rangle_{(H_0^1)', H_0^1} \end{aligned}$$

Rq: $(H_0^1)' =$ forme linéaire ctn sur H_0^1
 $= \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$
 $=$ dual topologique de $H_0^1(\Omega)$

Mq u est l'unique sol du problème variationnel suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle \\ v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \longrightarrow$$

En effet, soit $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle$$

$$= \frac{1}{2}a(u + (v - u), u + (v - u)) - \langle \varphi, u + (v - u) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \alpha(u, u) + \frac{1}{2} \alpha(u, (v-u)) \leq \text{par symétrie}$$

$$+ \frac{1}{2} \alpha(v-u, u) + \frac{1}{2} \alpha(v-u, v-u)$$

$$+ \cancel{\langle u, u \rangle} + \langle u, v-u \rangle$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \alpha(u, u) - \langle u, u \rangle} + \boxed{\alpha(u, v-u) - \langle u, v-u \rangle} + \frac{1}{2} \alpha(v-u, v-u) \geq 0$$

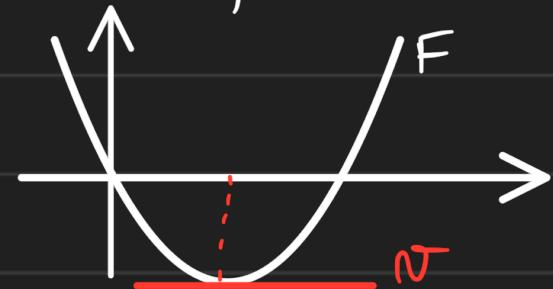
$$\geq \frac{1}{2} \alpha(u, u) - \langle u, u \rangle$$

iv) De plus, si v minimise $\frac{1}{2} \alpha(v, v) - \langle u, v \rangle$

On a nécessairement:

$$\nabla F(v) = 0;$$

$$\text{or, } \underbrace{(\nabla F(v)|d)}_{F'(v).d} = \alpha(v, d) - \langle u, d \rangle = 0 \quad \forall d \in H_0^1$$



$\Rightarrow \Omega = \mathcal{U}$, la sol. faible unique
Lax-Nilgram.

C.) Régularité : on admet que si
 $f \in C^0(\bar{\Omega})$ et que le bord $\Gamma := \partial\Omega$
est assez régulier, la sol. faible
 $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

D.) Toute sol. faible avec régularité
est sol. forte.

Si u sol. faible $\in C^2(\bar{\Omega})$, m.s. :

$$(\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)) : \int_{\Omega} (Du \cdot \nabla \varphi) dx + \alpha \int_{\Omega} u \varphi dx$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\varphi \in H_0^1(\Omega)}{=} \int_{\Omega} f \varphi dx \\ \text{Green} \quad & \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \varphi d\Gamma - \int_{\Omega} \Delta u \cdot \varphi dx + \alpha \int_{\Omega} u \varphi dx \\ \text{OK car } Du \in \mathcal{B}'(\Gamma) \quad & = \int_{\Omega} f \varphi dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (-\Delta u + \alpha u - f) \cdot \varphi dx = 0 : \quad$$

$\overline{H_0^1(\Omega)}^{H_1(\Omega)}$

comme $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (la toute
classe de fonctions L^2 sur l'ensemble $H_1(\Omega)$
de fonctions $\in H_0^1$), on dit aussi

$\Delta u + f \neq u - f = 0$ p.p. sur Ω .
Comme $u \in C^2(\bar{\Omega})$, u et $f \in C^0(\bar{\Omega})$
et l'égalité a lieu partout (au sens
usuel). Enfin, u sol. faible \Rightarrow
 $u \in H_0^1$ et $u|_{\Gamma} = 0$, d'où la CL
et le fait que u est sol. forte.

Exo 2. Cf. cm du 24/11/2025.