06/10/2025

TD3 : Stabilité

Exercice 1 :

Étudier la stabilité au sens de Von Neumann du θ-schéma :

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - (1-\theta)\nu\,\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \theta.\nu\,\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad : (*)$$

On injecte un mode de Fourier : $u_j^n = \hat{a}(\xi)\, e^{2i\pi\xi j\Delta x}$, $x = j\Delta x$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x} - a^n(\xi)e^{2i\pi j\Delta x\xi}}{\Delta t} - (1-\theta)\nu\,.\,\frac{a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j+1)\Delta x} - 2a^n(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x} + a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}}{\Delta x^2}$$

$$- \theta\nu\,.\,\frac{a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi(j+1)\Delta x} - 2a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x} + a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}}{\Delta x^2} = 0$$

on divise par ce terme ($a(\xi) \neq 0$)

On pose : $\sigma = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}$

En supposant $a(\xi) \neq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$a(\xi) - 1 - (1-\theta)\sigma\underbrace{\left(e^{2i\pi\xi\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi\xi\Delta x}\right)}_{\substack{2\cos(2\pi\xi x)-2 \\ = 2(-2\sin^2(\pi\xi x)) \\ = -4\sin^2(\pi\xi x) \ \leq 0}} - \theta\sigma a(\xi)\left(e^{2i\pi\xi x} - 2 + e^{-2i\pi\xi x}\right) = 0$$

d'où :

$$a(\xi)\left(1 - 4\theta\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x)\right) = 1 - 4(1-\theta)\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x)$$

$$a(\xi) = \frac{1-4(1-\theta)\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x)}{1-4\theta\sin^2(\pi\xi\Delta x)} \in \mathbb{R} \qquad |a(\xi)| \leq 1, \forall \xi$$

Posons : $\alpha\ (= \alpha(\xi)) := 4\sigma\sin^2(\pi\xi x) \in [0, 4\sigma]$

de sorte à ce que : $a(\xi) = \frac{1-(1-\theta)\alpha}{1+\theta\alpha}$

et on veut $|a(\xi)| \leq 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$

ie $\forall \alpha \in [0, 4\sigma]$

Comme $a(\xi) \in \mathbb{R}$, la condition est : $-1 \leq a(\xi) \leq 1$ ⟵ Vrai ✓

De plus : $\begin{cases} 1-(1-\theta)\alpha \leq 1 \\ 1+\theta\alpha \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-(1-\theta)\alpha}{1-\theta\alpha} \leq 1$

$-1 \leq a(\xi)$

$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-(1-\theta)\alpha}{1+\theta\alpha}$

$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-\alpha+\theta\alpha}{1+\theta\alpha}$

$\Leftrightarrow -1 \leq 1 - \frac{\alpha}{1+\theta\alpha}$

$\Leftrightarrow 2 \geq \frac{\alpha}{1+\theta\alpha}$

$\Rightarrow (2\theta-1)\alpha \geq -2$

Si $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, $(2\theta-1) \geq 0 \geq -2$.

<u>Stabilité inconditionnelle</u>

Si $\theta \in [0, \frac{1}{2}[$, $(2\theta-1)\alpha \geq -2$

$\Leftrightarrow (1-2\theta)\alpha \leq 2$

$\Leftrightarrow 4\sigma\sin^2(\pi\xi x) = \alpha \leq \frac{2}{1-2\theta}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \sigma \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ CFL si $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$

$\longrightarrow +\infty$

$\theta^- \longrightarrow \frac{1}{2}$

EXERCICE 2 : Stabilité du schéma de Crank-Nicolson pour l'équation d'advection ($V \neq 0$, $\nu = 0$) :

vitesse d'advection

$\emptyset$ diffusion

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

On injecte un mode Fourier (ξ), $u_j^n = a^n(\xi)\underbrace{e^{2i\pi\xi j\Delta x}}_{\neq 0}$ et on pose : $\sigma = \frac{V\Delta t}{\Delta x}$, ainsi :

$$\frac{a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x} - a^n(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x}}{\Delta t} + \frac{1}{2}V \cdot \frac{a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j+1)\Delta x} - a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} + \frac{1}{2}V \frac{a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi(j+1)\Delta x} - a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0$$

on divise par : $\frac{1}{\Delta t} a^n(\xi) e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}$, avec $|a(\xi)| \neq 0$.

d'où :

$$a(\xi) - 1 + \frac{1}{2}\sigma i \sin(2\pi\xi\Delta x) + a(\xi)\frac{1}{2}\sigma i\sin(2\pi\xi\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow a(\xi)\left(1 - \frac{i}{2}\sigma\sin(2\pi\xi\Delta x)\right) = 1 - \frac{i}{2}\sigma\sin(2\pi\xi x)$$

$$a(\xi) = \frac{1 - \frac{i}{2}\sigma\sin(2\pi\xi x)}{1 + \frac{i}{2}\sigma\sin(2\pi\xi x)} = 1 \longleftarrow \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

$\Rightarrow |a(\xi)| = 1$, $\xi \in \mathbb{R}$ On a donc stabilité inconditionnelle.

EXERCICE 3 :

1) Schéma Leapfrog (chaleur, $\nu > 0$) :

explicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

DF (différences finies) centré en temps (consistance améliorée)

On injecte un mode de Fourier (ξ), $u_j^n = a^n(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

$$\frac{a^{n+1}(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x} - a^n(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x}}{\Delta t} - \nu \frac{a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j+1)\Delta x} - 2a^n(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x} + a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}}{\Delta x^2} = 0$$

Supposons $a(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, ainsi on divise par $a^n(\xi)e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}$.

On a :

$$\frac{a^2 - 1}{2\Delta t} - \nu a \cdot \frac{e^{2i\pi\xi\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi\xi\Delta x}}{\Delta x^2} = 0 \Rightarrow a^2 - 1 - 2a\frac{V\Delta t}{\Delta x^2}\left(2\cos(2\pi\xi x) - 1\right) = 0$$

après identificat° par $a^{n-1}(\xi)e^{2i\pi\xi j\Delta x}$

$$a^2 + 8a\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x) - 1 = 0$$

$\Delta = 8^2\sigma^2\sin^4(\pi\xi\Delta x) + 4 > 0 \Rightarrow \exists$ 2 solut° $a_1(\xi), a_2(\xi) \neq 0$ tq $|a_i(\xi)| \leq 1$. $\forall i \in \{1,2\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1(\xi) + a_2(\xi) = -8\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x) \neq 0 \text{ (en général)} \\ a_1(\xi)a_2(\xi) = \frac{1}{-1} = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underbrace{|a_1(\xi)| = |a_2(\xi)| = 1}_{\text{on n'a pas}}$ ce serait le cas ± 1 racines mais alors la somme serait nulle.

$\Rightarrow$ au moins une des 2 est de $|.| > 1$: JAMAIS de stabilité.

Rappel : on doit avoir les 2 racines de module $\leqslant 1$. cf relat° de récurrence linéaire sur $\hat{u}^n(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, en appliquant la TF au schéma discret :

$$\frac{u^{n+1}(x)-u^{n-1}(x)}{} - \nu \frac{u^n(x+\Delta x)-2u^n(x)+u^n(x+\Delta x)}{\Delta x^2} = 0$$

$$\overset{TF}{\Longrightarrow} \frac{\hat{u}^{n+1}(\xi)-\hat{u}^{n-1}(\xi)}{2\Delta t} - \nu . \frac{\hat{u}^n(\xi)\,(e^{-} - 2 + e^{-})}{} = 0$$

D'où la récurrence linéaire de longueur 2 en $\hat{u}^n(\xi)$

$$\hat{u}^{n+2}(\xi) - \hat{u}^n(\xi) + 8\sigma \sin^2(\pi\xi\Delta x)\hat{u}^{n+1}(\xi) = 0$$

$$\hat{u}^n(\xi) = \alpha\, a_1^n(\xi) + \beta\, a_2^n(\xi)$$

où $a_1(\xi)$ et $a_2(\xi)$ sont les 2 racines $\neq$ ($\Delta \neq 0$ ...)

de l'équation caractéristique

$$r^2 + 8\sigma \sin^2(\_).r - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} |a_1(\xi)| \leqslant 1 \\ |a_2(\xi)| \leqslant 1 \end{array}, \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

3. 2) Leapfrog (instable) $\longrightarrow$ Du Fort - Frankel :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

on implicite pour stabiliser

$$u_j^n \to \frac{u_j^{n+1}+u_j^{n-1}}{2}$$

implicite

Soit :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{} - \nu \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

implicite

$n+1$, n et $n-1$: "stencil" (support) de longueur 2 $\Rightarrow$ réc. linéaire de longueur 2 en $\hat{u}^n(\xi)$

$$\Rightarrow (1+\sigma)u_j^{n+1} - (1-\sigma)u_j^{n-1} = \sigma(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad , \sigma = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x}$$

On injecte un mode de Fourier (ξ),

$u_j^n = a^n(\xi).e^{2i\pi\xi j\Delta x}$ (et on cherche la relat° vérifiée par $a(\xi)$ - facteur d'applicat°)

En simplifiant par $\underbrace{a^{n-1}(\xi)}_{\neq 0} e^{2i\pi\xi j\Delta x}$, on a :

$$(1+\sigma)a^2(\xi) - 2\sigma a(\xi)\cos(2\pi\xi\Delta x) - (1-\sigma) = 0 \quad : (*)$$

On a une équation de degré 2 dont les (au plus 2) racines doivent être de module $\leqslant 1$ pour avoir la stabilité au sens de Von Neumann cf. 3.1 : on a une réc. linéaire de longueur 2 sur $\hat{u}^n(\xi)$,

$$\hat{u}^{n+2}(\xi) = \alpha\hat{u}^{n+1}(\xi) + \beta\hat{u}^n(\xi) ;$$

Si $a_1(\xi)$ et $a_2(\xi)$ sont les 2 racines $\in \mathbb{C}$, de l'éq. caractéristique $a^2 - \alpha a - \beta = 0$: $(*)$

On a : $\hat{u}^n(\xi) = \gamma a_1^n(\xi) + \delta a_2^n(\xi)$ $\Rightarrow |a_1(\xi)|$ et $|a_2(\xi)| \leqslant 1$

(et $\Delta \neq 0 \dots$)

Si $a_1(\xi) \neq a_2(\xi)$, et

$$\hat{u}^n(\xi) = \gamma a_1^n(\xi) + \sigma n a_2^n(\xi)$$

si $a_1(\xi) = a_2(\xi)$ (racine double)

Ici $\Delta = 4\sigma^2 \cos^2(2\pi\xi\Delta x) + 4(1-\sigma^2)$

$= 4(1 - \sigma^2 \sin^2(2\pi\xi\Delta x))$

• $\underline{\Delta \geqslant 0}$: $a_\pm = \dfrac{\cancel{2}\sigma\cos(-) \pm \cancel{2}\sqrt{1-\sigma^2\sin^2(\dots)}}{\cancel{2}(1-\sigma)} = \dfrac{\sigma\cos(\dots) \pm \sqrt{1-\sigma^2\sin^2(\dots)}}{1+\sigma}$

$\Rightarrow \underbrace{|a_\pm(\xi)|}_{\in\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{\sigma\overbrace{|\cos(-)|}^{\leqslant 1} + 1}{1+\sigma} \leqslant 1$

• $\underline{\Delta \leqslant 0}$: deux racines conjuguées

$a_2(\xi) = \bar{a}_1(\xi)$ et (cf. prod. racines $= \frac{c}{a}$ pour $ax^2+bx+c=0$)

$0 \leqslant |a_1(\xi) a_2(\xi)| = \dfrac{\sigma-1}{\sigma+1} \leqslant 1$

$\|$

$|a_1(\xi)|^2 = |a_2(\xi)|^2$ $\Rightarrow$ stabilité inconditionnelle.