MAM4

EDP1

2024-25

Exam CC no. 1

Durée 2H00. Documents non autorisés. Tous les exercices sont indépendants.
Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice.

Exercice 1 (6 points)

On considère l'équation de la chaleur sur le domaine $\Omega =]0,1[$ avec conditions de Dirichlet :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\
&u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t > 0, \\
&u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega.
\end{aligned}
$$

1.1

On définit l'énergie

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t,x) \, \mathrm{d}x.$$

En supposant u solution aussi régulière que nécessaire, montrer que

$$E'(t) = -\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right)^2 \mathrm{d}x.$$

1.2

En déduire que E est décroissante et qu'on a unicité de solution pour l'EDP considérée.

Exercice 2 (5 points)

Montrer que le schéma implicite centré ci-dessous

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

est consistant pour l'équation d'advection avec $V > 0$ (on précisera les ordres en t en x, par exemple en faisant un développement en $(t,x) = (t_{n+1}, x_j)$) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + V \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0.$$

Exercice 3 (4 points)

Montrer que le schéma décentré aval ci-dessous, avec $V < 0$ tel que $\sigma := |V| \Delta t / \Delta x \leq 1$,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$$

vérifie le principe du maximum discret : si $u_j^0 \in [m, M]$ pour tout j, alors $u_j^n \in [m, M]$ pour tout j et tout $n > 0$.

Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 (5 points)

Étudier la stabilité au sens L^2 du schéma implicite suivant ($\nu > 0$) :

$$\frac{2u_j^{n+1} - 3u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0.$$