TD6 : Formulations Variationnelles

EXERCICE 1 : On cherche $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ tq :

$\partial\Omega$ est $\mathcal{C}^1$

$$(S) : \begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & , x \in \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 & (\Omega \text{ ouvert} \end{cases}$$

1.1) $H^1(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) \mid \underbrace{D_v}_{} \in L^2(\Omega) \} : (*)$

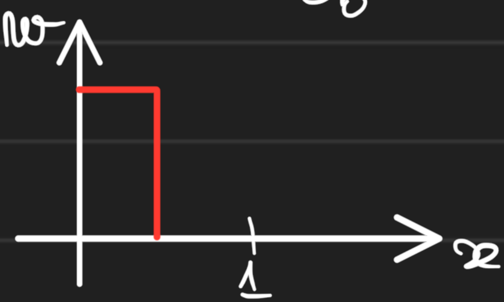
$\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, $i \in [\![1, n]\!]$

↳ dérivée au sens des distributions

$(*)$ avec $n=1$, $v \in H^1(\Omega)$

$\Updownarrow$

$$v(x) = C + \int_0^x w(y)\,dy \quad , w \in L^2(]0,1[)$$



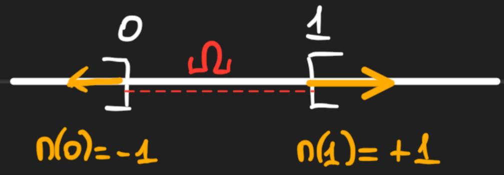
Rq : Th. Stokes est valable pour $f \in H^1(\Omega)$.

$\Omega =]0,1[$

$- n = 1$: $f \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 = \int_0^1 f'(x)\,dx \quad (x = x_1 \text{ , cf } n=1)$$

$= f(1) - f(0)$



$= f(0).n(0) + f(1).n(1)$

$n = (e_1, \dots, e_n) = e_1$

$= f(0).e_1(0) + f(1).e_1(1)$

$= \underbrace{(\delta_0 + \delta_1)}_{d\sigma}(f.e_1)$

$$= \int_{\partial\Omega = \{0,1\}} f.e_1 \, d\sigma$$

$- n \geq 1$: $$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \underbrace{dx}_{dx_1 \dots dx_n} = \int_{\partial\Omega} f.e_i \, d\sigma$$

$v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, tr : $\mathcal{C}^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$

applicat° trace $\qquad v \longmapsto v_{|\partial\Omega}$

cf $v_{|\partial\Omega}$ ctn sur $\Gamma = \partial\Omega$ compact donc $v \in L^2(\Gamma)$

Cette applicat° linéaire ctn se prolonge à tout

$H^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}^{\|.\|_{H^1}}$ où $\|.\|_{H^1}$ est associée au prod. scal sur $H^1(\Omega)$.

$$(u|v)_{H^1} := (u|v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \middle| \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2}$$

$$= \int_{\Omega} uv\,dx + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}}_{\int (\nabla u | \nabla v)}$$

$\Rightarrow \left(H^1(\Omega), (\cdot|\cdot)_{H^1}\right)$
espace d'Hilbert

On définit :

$$H^1_0(\Omega) := \{ v \in H^1(\Omega) \mid \underbrace{tr(v)}_{v|_{\partial\Omega}} = 0 \}$$

$$= \ker(tr)$$

Comme $tr : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est <u>linéaire</u> et <u>ctn</u>, ce noyau est un sev fermé. Donc $H^1_0(\Omega)$ est hilbertien ($\subset H^1(\Omega)$). Il hérite du prod. scal de $H^1(\Omega)$ et de la norme associée.

$$\|u\| = \sqrt{(u|u)_{H^1}} = \sqrt{(u|u)_{L^2} + (\nabla u|\nabla u)_{L^2}}$$

$\uparrow$

$u \in H^1_0 \subset H^1$

$$= \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \right)^{1/2}$$

1.2) Si u sol. forte, soit $v \in H_0^1(\Omega)$

(A) $$\int_{\Omega} (-\Delta u + \alpha u) . v \, dx = \int_{\Omega} f . v \, dx$$

on veut faire remonter le degré (donc faire une IPP, donc appliquer le th. Stokes)

Toutes solutions fortes est solution faible

Or on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u . v \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \, dx$$

Stokes + $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ pour $i = 1, \dots, n$.

$$\underset{\text{IPP}}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v . e_i \, d\sigma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} . \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \right)}_{\text{dérivées d'ordre 1 sur } u \, (<2)}$$

dérivées d'ordre 1 sur u (<2).

$$= \int_{\partial\Omega=\Gamma} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} e_i\right)} v \, d\sigma - \int_{\Omega} (\nabla u | \nabla v) \, dx \quad \text{(Green)}$$

$$(\nabla u(x) | n(x)) = \frac{\partial u}{\partial x}(x) = u'(x).n(x)$$

On a donc pour $v \in H^1_0(\Omega)$,

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} . \underbrace{\cancel{v}}_{=0} \, d\sigma + \boxed{\int_{\Omega} (\nabla u | \nabla v) \, dx + \alpha \int_{\Omega} u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx}$$

cf $v \in H^1_0(\Omega)$

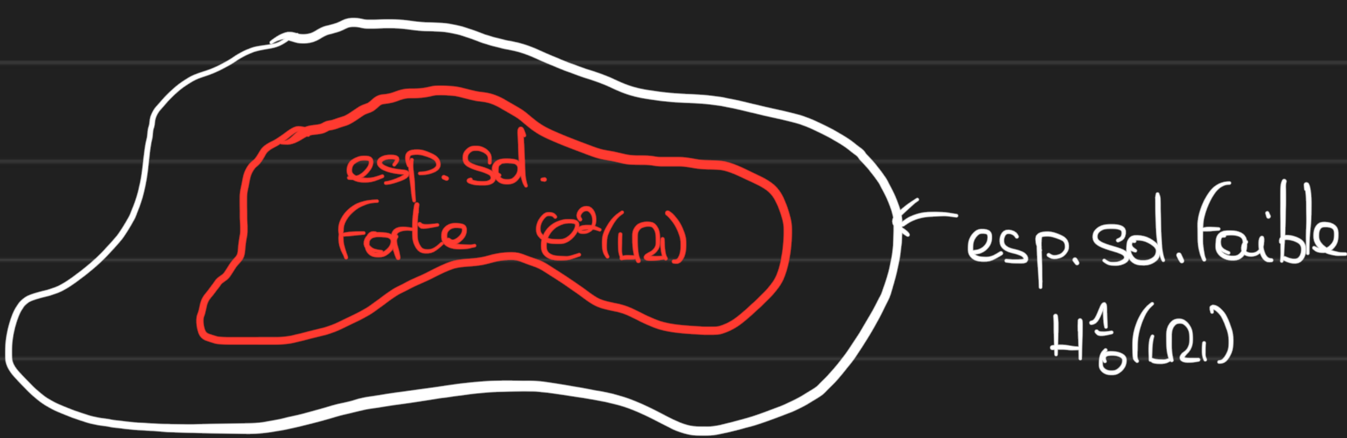
$\Rightarrow v_{|\partial\Omega} = v_{|\Gamma}$

$= tr\, v = 0_{L^2(\Omega)}$

Formulat° faible

Formulat° faible : trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ tq

$$(\forall v \in H^1_0(\Omega)) : \int_{\Omega} (\nabla u | \nabla v) \, dx + \alpha \int_{\Omega} u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$



1.3) B Existence et unicité de sol. faible.

$$(*) \Longleftrightarrow (\forall v \in \underbrace{H_0^1(\Omega)}_{\text{e.h : esp. hilbert}}) : a(u,v) = \varphi . v$$

où a est une forme bilinéaire

$$a(u,v) := \int_{\Omega} \left[(\nabla u | \nabla v) + \alpha u v \right] dx$$

et φ une forme linéaire :

$$\varphi(v) := \int_{\Omega} f v \, dx .$$

<u>Th. Lax-Milgram:</u> si a est <u>ctn</u> et <u>coercive</u> et si f est <u>ctn</u>, alors $\exists !\, u \in H_0^1$ qui vérifie $(*)$.

i) ctn de φ : φ étant linéaire ie il faut et il suffit de mq $\exists C > 0$ tq :

$$(\forall v \in H_0^1(\Omega)) : |\varphi(v)| \leq C \|v\|$$

Soit $v \in H_0^1(]\Omega[)$:

$$|\varphi(v)| = \left| \int_{]\Omega[} f v \, dx \right|$$

$$= \left| (f | v)_{L^2} \right|$$

$$\leqslant \|f\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2}$$

$$\leqslant \|f\|_{L^2} \underbrace{\sqrt{\|v\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2}}_{\|v\|_{H^1}}$$

Cauchy-Schwarz

ii) Continuité de a : a étant bilinéaire, il suffit de mq $\exists C \geqslant 0$ tq :

$$\forall v \in H_0^1(]\Omega[) : |a(u,v)| \leqslant C \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$$

Soit $v \in H_0^1(]\Omega[)$,

$$|a(u,v)| = \left| \alpha \int u v \, dx + \int \underbrace{(\nabla u | \nabla v)}_{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}} dx \right|$$

$$\leq \alpha \|u\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} + \underbrace{\|\nabla u\|_{L^2}}_{\left(\int \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2}} \cdot \|\nabla v\|_{L^2}$$

$\uparrow$ C.S

$$\leq \alpha \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$$

car $\|.\|_{L^2} \leq \|.\|_{H^1}$

$$\leq (1+\alpha) \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$$

iii) Coercivité : Mq $\exists c > 0$ tq

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : a(u,v) \geq c\|v\|^2$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u,v) = \alpha \int_\Omega v^2 dx + \int_\Omega \overbrace{\|\nabla v\|^2}^{\sum \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2} dx$$

> 0 si $\alpha = 0$

$$\geq \min(\alpha, 1) \cdot \underbrace{\left(\int_\Omega v^2 dx + \int_\Omega \|\nabla v\|^2 dx\right)}_{\|v\|^2_{H_1}}$$

Donc $c = \min(\alpha, 1)$

On a donc existence et unicité de $u \in H^1_0(\Omega_1)$ tq $(\forall v \in H^1_0(\Omega_1))$:

$$a(u,v) = \varphi . v$$
$$= \langle \varphi, v \rangle_{(H^1_0)', H^1_0}$$

Rq : $(H^1_0)'$ = forme linéaire ctn sur H^1_0
$= \mathcal{L}(H^1_0(\Omega_1), \mathbb{R})$
= dual topologique de $H^1_0(\Omega_1)$

Mq u est l'unique sol du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \longrightarrow \\ v \in H^1_0(\Omega_1) \end{cases}$$

En effet, soit $v \in H^1_0(\Omega_1)$

$$\frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle$$

$$= \frac{1}{2} a(u+(v-u), u+(v-u)) - \langle \varphi, u+(v-u) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} a(u,u) + \frac{1}{2} \underbrace{a(u,(v-u))}_{= \text{ par symétrie}}$$

$$+ \frac{1}{2} a(v-u,u) + \frac{1}{2} a(v-u,v-u)$$

$$+ \langle \varphi, u \rangle + \langle \varphi, v-u \rangle$$

$$= \frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle + \overbrace{\boxed{a(u,v-u) - \langle \varphi, v-u \rangle}}^{= 0 \text{ car } u \text{ sol. faible}} + \underbrace{\frac{1}{2} a(v-u, v-u)}_{\geq 0}$$

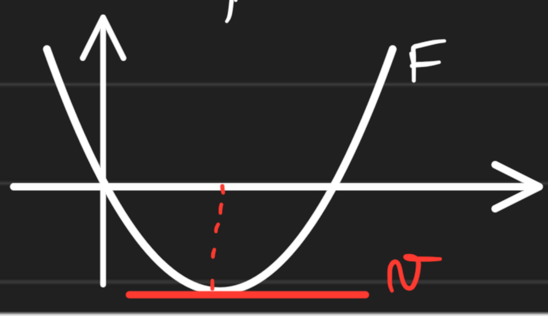
$$\geq \frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle$$

iv) De plus, si v minimise $\underbrace{\frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle}_{F(v)}$

On a nécessairement :

$$\nabla F(v) = 0 ;$$

or, $\underbrace{(\nabla F(v) \mid d)}_{F'(v).d} = a(v,d) - \langle \varphi, d \rangle = 0 \quad \forall d \in H^1_0$



$\Longrightarrow v = u$, la sol. faible unicité
Lax-Milgram.

(C.) Régularité : on admet que si $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ et que le bord $\Gamma := \partial\Omega$ est assez régulier, la sol. faible $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$.

(D.) Toute sol. faible assez régulière est sol. forte.

Si u sol. faible $\in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, on a :

$$(\forall v \in H^1_0(\Omega)) : \int_\Omega (\nabla u \mid \nabla v)\,dx + \alpha \int_\Omega u v\,dx = \int_\Omega f v\,dx$$

Green

$v \in H^1_0(\Omega)$

$$\Longrightarrow \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \cancel{v}\,d\sigma - \int_\Omega \Delta u \cdot v\,dx + \alpha \int_\Omega u v\,dx = \int_\Omega f v\,dx$$

ok car $\nabla u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$
(et $v \in H^1_0(\Omega) \subset H^1(\Omega)$)

$$\Rightarrow \int_\Omega (-\Delta u + \alpha u - f) \cdot v\,dx = 0 \quad :$$

comme $\overline{H^1_0(\Omega)}^{\|.\|_2} = L^2(\Omega)$ (ie toute classe de fonctions L^2 est limite en $\|.\|_2$ de fonctions $\in H^1_0$), on doit avoir

$-\Delta u + \alpha u - f = 0$ p.p. sur Ω.
Comme $u \in \mathcal{C}^2(\bar{I})$, Δu et $f \in \mathcal{C}^0(\bar{I})$ et l'égalité a lieu partout (au sens usuel). Enfin, u sol. faible $\Rightarrow$ $u \in H^1_0$ et $u_{|\Gamma} = 0$, d'où la CL et le fait que u est sol. forte.

Exo 2. Cf. CM du 24/11/2025.

NB. Concernant spécifiquement la coercivité : on a le Lemme de Poincaré (cf. aussi TD1 pour le cas de la dim 1) qui indique que : $(\exists C \geq 0)(\forall v \in H^1(\Omega))$:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|Dv\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Gamma)}\right)$$

trace de v sur Γ

On en déduit notamment que la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est équivalente (*) à une nouvelle norme sur H^1 égale à

$$\left(\|v\|^2_{L^2(\Gamma)} + \|Dv\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

remplace le terme $\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$

ie qu'il existe des ctes $c_1, c_2 > 0$ tq $(\forall v \in H^1(\Omega))$:

$$c_1 \|v\|_{H^1} \leq \left(\|v\|^2_{L^2(\Gamma)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \leq c_2 \|v\|_{H^1}$$

En particulier, pour $u \in H^1(\Omega)$,

$$a(u,u) = \int_\Omega (\nabla u | \nabla u)\, dx + \int_\Gamma u^2\, dx$$

$$= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

$$\geq \underbrace{c_1^2}_{>0} \|u\|^2_{H^1}, \text{ d'où la coercivité.}$$

(*) <u>Rappel</u> : sur un evn E, deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont dites équivalentes s'il existe $c_1, c_2 > 0$ tq

$$(\forall x \in E) : \quad c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 .$$

Cette équivalence est — bien sûr — une relation d'équivalence, et on a notamment réflexivité : si $\|\cdot\|_1$ est équivalente à $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_2$ est équivalente à $\|\cdot\|_1$ puisque

$$\frac{1}{c_2} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{c_1} \|x\|_2 .$$