MAM4

EDP1

2024-25

Exam CC no. 2

Durée 2H00. Documents non autorisés. Tous les exercices sont indépendants.
Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice.

Exercice 1 (5 points)

On considère le schéma de Gear

$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0$$

pour l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Montrer que le schéma est consistant à l'ordre 2 à la fois en temps et en espace.

Réponse. Étant donnés les ordres recherchés en t en x, on fait un DL en (t_{n+1}, x_j) à l'ordre 3 en temps, 4 en espace. En écrivant, notamment, que

$$u(t_{n-1}, x_j) = u + \frac{\partial u}{\partial t}(-2\Delta t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(-2\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(-2\Delta t)^3 + O(\Delta t^4)$$

où le membre de droite est évalué en (t_{n+1}, x_j), on obtient que l'erreur de troncature vérifie

$$E_j^{n+1} = -\frac{1}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Delta t^2 + O(\Delta t^3) - \frac{\nu}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3).$$

Exercice 2 (4 points)

2.1

On considère le schéma de Dufort-Frankel (avec $\nu > 0$) :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

Montrer que, sous une condition CFL que l'on précisera, u_j^{n+1} s'écrit comme combinaison convexe des $(u_j^n)_j$ et des $(u_j^{n-1})_j$.

Réponse. Avec $\sigma := \nu\Delta t/\Delta x$, on a

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{1+2\sigma}((1-2\sigma)u_j^{n-1} + 2\sigma u_{j-1}^n + 2\sigma u_{j+1}^n)$$

qui est bien une combinaison convexe si $(0 <)\ \sigma \leq 1/2$ (CFL).

2.2

En déduire la stabilité L^∞ de ce schéma sous cette même condition.

Réponse. Sous cette condition, si les $(u_j^0)_j$ ainsi que les $(u_j^1)_j$ sont dans le convexe $[m, M]$, on vérifie par une récurrence immédiate que tous les $(u^n)_j$ aussi pour $n \geq 2$, d'où la stabilité L^∞.

Exercice 3 (4 points)

3.1

On considère l'équation des ondes sur un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega.$$

Montrer qu'en posant $v := \partial u/\partial t$, $w := \partial u/\partial x$ et $U := (v, w)$ on peut mettre l'équation sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) - J\frac{\partial U}{\partial x}(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega,$$

où J est une matrice 2×2 que l'on précisera.

Réponse. En supposant u assez régulière et en utilisant le théorème de Schwarz (égalité des dérivées partielles croisées secondes), on a la forme voulue avec

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2

On considère le schéma vectoriel associé ci-dessous :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - J\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0.$$

Montrer que la stabilité L^2 de ce schéma revient à étudier, pour chaque mode $k \in \mathbf{Z}$, les valeurs propres d'une matrice $A(k)$ que l'on précisera. (On ne demande ni de déterminer ces valeurs propres, ni de faire l'étude de stabilité.)

Réponse. En injectant un mode de Fourier (vectoriel) k sous la forme $U_j^n = e^{2i\pi kj\Delta x}A(k)$, on obtient

$$(I - i\sigma \sin\alpha_k\, J)A(k) = I$$

où $\sigma := \Delta t/\Delta x$, et où $\alpha_k := 2\pi k\Delta x$. Le déterminant du facteur de gauche valant $1 + \sigma^2 \sin^2\alpha_k \geq 1 > 0$, on en déduit que

$$A(k) = (I - i\sigma \sin\alpha_k\, J)^{-1}.$$

Exercice 4 (4 points)

On considère la portion de code ci-dessous pour l'équation d'advection :

```
A = spdiagm(−1 => −.5σ^2 ∗ ones(J),
            0 => (1 + σ^2) ∗ ones(J + 1),
            1 => −.5σ^2 ∗ ones(J))
A[1, end] = −.5σ^2
A[end, 1] = −.5σ^2

F = cholesky(A)

w = zeros(J + 1)

for n ∈ 1:N
    w[2:end−1] = u[2:end−1] - .5σ ∗ (u[3:end] − u[1:end−2])
    w[1] = u0(x[1] − V ∗ n ∗ Δt)
    w[end] = w[1]
    u = F \ w
end
```

4.1

Quel est le schéma numérique utilisé ? (On donnera son expression.)

Réponse. Il s'agit du schéma de Lax-Wendroff implicite :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\sigma}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}).$$

4.2

Quel est l'intérêt d'utiliser la fonction `spdiagm` pour construire la matrice `A` ?

Réponse. La matrice construite est creuse (*sparse*) ce qui occasione un stockage réduit et permet une factorisation plus efficace.

4.3

Expliquer pourquoi on calcule `w[1]` *après* `w[2:end−1]` .

Réponse. La valeur mise à jour de `w[1]` serait sinon utilisée (à tort) pour la mise à jour de `w[2:end]` .

4.4

Expliquer le rôle de la ligne `u = F \ w`.

Réponse. On réutilise la factorisation (creuse) de Cholesky, faite une fois pour toute avant la boucle d'itération sur le pas de temps, pour faire une résolution du système linéaire `A * u = w` par simple remontée triangulaire.

Exercice 5 (3 points)

On cherche u dans $\mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ (où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ à bord régulier) telle que

$$-\Delta u(x) + u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

avec conditions aux limites de Dirichlet, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, et f une fonction continue sur
$\overline{\Omega}$. On admet que le sous-espace

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \, \mathrm{sur} \, \partial\Omega\}$$

muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$ est encore un espace de Hilbert.
Montrer que toute solution du problème précédent, dite *solution forte*, est encore solution d'un nouveau problème que l'on précisera.

Réponse. Si u est solution forte, pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega (-\Delta u + u) v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x.$$

En utilisant le théorème de Stockes, on en déduit ($\Gamma := \partial\Omega$)

$$-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, \mathrm{d}\sigma + (u|v)_{H^1} = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x.$$

L'intégrale sur le bord étant nulle grâce à l'appartenance de v à H_0^1, on déduit la formulation faible attendue.