MAM4

EDP1

2025-26

TD 4 - Stabilité (2/2)

Exercice 1

1.1

Montrer que sous une condition CFL que l'on précisera, le schéma d'Euler explicite pour la chaleur (avec coefficient de diffusion $\nu > 0$) ci-dessous est tel que u_j^{n+1} s'écrit comme combinaison convexe de u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

1.2

En déduire que, sous cette condition, ce schéma est stable au sens L^∞, c'est-à-dire que, si $u_j^0 \in [m, M]$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$, on a aussi

$$u_j^n \in [m, M], \quad j \in \mathbf{Z}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

1.3

Supposons que la condition CFL précédente n'est pas vérifiée ; montrer que, pour $u_j^0 = (-1)^j$, $j \in \mathbf{Z}$, les u_j^n ne sont pas bornés.

Exercice 2

Montrer que le schéma d'Euler implicite pour la chaleur (avec coefficient de diffusion $\nu > 0$)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0, \quad j = 1, \ldots, J-1, \quad n \in \mathbf{N},$$

et $u_0^{n+1} = u_J^{n+1} = 0$ (Dirichlet), se met sous la forme $U^{n+1} = AU^n$, avec $U_n := (u_j^n)_{j=0,\ldots,J}$ et A une matrice inversible que l'on précisera.

2.2

En déduire que ce schéma est (inconditionnellement) stable au sens L^∞, c'est-à-dire que, si $u_j^0 \in [m, M]$ pour tout $j = 0, \ldots, J$, on a aussi

$$u_j^n \in [m, M], \quad j = 0, \ldots, J, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Exercice 3

3.1

Montrer que sous une condition CFL que l'on précisera, le schéma décentré amont pour l'équation d'advection avec $V > 0$ ci-dessous est tel que u_j^{n+1} s'écrit comme combinaison convexe de u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

3.2

En déduire que, sous cette condition, ce schéma est stable au sens L^∞, c'est-à-dire que, si $u_j^0 \in [m, M]$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$, on a aussi

$$u_j^n \in [m, M], \quad j \in \mathbf{Z}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

3.2

Supposons que la condition CFL précédente n'est pas vérifiée ; montrer que, pour $u_j^0 = (-1)^j$, $j \in \mathbf{Z}$, les u_j^n ne sont pas bornés.