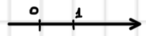
15/10/2025

TD1 : EDP1

Exercice 1 :

$\partial\Omega = \{0,1\}$ $\quad u(t,0) = u(t,1) = 0 \longleftarrow$ CL Dirichlet homogène



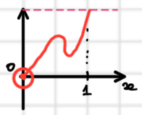
On considère le problème de la chaleur en une dimension d'espace posé dans le domaine $\Omega = (0,1)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0, \quad x \in (0,1), : (*) \\ u(t,x) = 0, & t > 0, \quad x \in \{0,1\}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

1.1) Soit $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ tq $v(0) = 0$, mq v vérifie l'inégalité de Poincaré

$$\int_0^1 v^2(x)\,dx \leqslant \int_0^1 v'^2(x)\,dx$$

$$(\Leftrightarrow \|v\|_2 \leqslant \|v'\|_2)$$



On a pour $x \in [0,1]$:

$$v(x) = \underbrace{\cancel{v(0)}}_{=0} + \int_0^x v'(y)\,dy$$

$$\Rightarrow |v(x)| \leqslant \int_0^x |v'|\,dy$$

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|v.1|\,dy \leqslant \left(\int_0^x |v'|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_0^x |1|^2 dy\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(\int_0^x |v'|^2 dy\right)^{1/2} \underbrace{\sqrt{x}}_{\in[0,1]} \leqslant 1$$

$$\leqslant \sqrt{\int_0^1 |v'|^2 dy}$$

$$\leqslant \int_0^1 |v'|^2 dy$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |v(x)|^2 dx \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |v(y)|^2 dy \right) dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_0^1 |v(x)|^2 dx \leqslant \int_0^1 |v'(y)|^2 dy}$$

Rq : $|v(x)| \leqslant \int_0^1 |v'|\,dy \leqslant 1 \cdot \|v'\|_2$ CS sur $L^2([0,1])$

$\Rightarrow \|v\|_\infty \leqslant \|v\|_2$

ET (cf MI1), $\mu_L([0,1]) < \infty \Rightarrow C\|v\|_\infty \leqslant C\|v'\|_2$

et $C = 1$ cf. $\int_0^1 |v|^2 dx \leqslant \|v\|_\infty^2 \int_0^1 1\,dx$

1.2) Soit $E(t) := \int_0^1 |u(t,x)|^2 dx$, avec u solut° de $(*)$

Mq E dérivable et que :

$$\frac{1}{2} E'(t) = -\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2 dx$$

Rq : $\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(|u(t,x)|^2\right)\right| \leqslant v(x)$, $v \in L^1([0,1])$ (cf. MI1)

$$\Rightarrow E'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^1 |u|^2 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(u(t,x))^2 dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \times u(t,x)\,dx$$

$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, cf solut° de la chaleur : $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$$= 2\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \times u(t,x)\,dx$$

Rq : $u(t,0) = 0, t > 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = 0, t > 0$

De m̂, $\frac{\partial u}{\partial t}(t,1) = 0$

$$= 2\left(\Big[\underbrace{\cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}}}_{}\Big]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \right)$$

$= 0$, car condit° de Dirichlet

$r = u \quad | \quad r' = \frac{\partial u}{\partial x}$

$q' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad | \quad q = \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} E'(t) = -\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx}$$

1.3) En déduire que: $E(t) \leqslant E(0)\, e^{-2t}$

On a : $E(t) = \int_0^1 |u(t,x)|^2\, dx$

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt} \int |u|^2\, dx$$

$$E'(t) = \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \leqslant \int_0^1 w(x)\, dx$$

On a : $E'(t) = -2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$

$$\leqslant -2 \int_0^1 u^2\, dx \quad \text{(cf. MI1)}$$

Supposons que $E(t) > 0$, on a :

$$\frac{E'(t)}{E(t)} \leqslant -2 \Rightarrow \int_0^t \frac{E'(s)}{E(s)}\, ds \leqslant -2t, \quad t>0.$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right) \leqslant -2t, \text{ car } E>0$$

$$E(t) \leqslant e^{-2t} E(0) : (**)$$

→ démo. complète (sans hypothèse $E(t) > 0$) :

on a

$$E'(t) \leqslant -2\, E(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(E'(t) + 2E(t)).e^{2t}}_{(E(t).e^{2t})'} \leqslant 0$$

$\Rightarrow E\, e^{2t}$ est ↘, donc que

$E(t).e^{2t} \leqslant E(0)$, d'où la conclusion.

Rq. : pour ce type de comparaison, plus généralement voir le Lemme de Gronwall pour les EDO.

Exercice 2 :

On se propose de caractériser la solution régulière du problème des ondes en une dimension d'espace dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t>0, \quad x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & t>0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

où u_0 et u_1 sont des fonctions régulières et U_1 une primitive de u_1.

2.1) Mq $E(t) = \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx$

$= \text{cste}$

Il faut donc montrer que $\frac{dE}{dt}(t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

et mq $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx = 0$

On a :
$$E'(t) = 2\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \text{(cf. sol)}} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dx$$

or
$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx = \underbrace{\cancel{\left[\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^1}}_{=0} - \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\, dx$$

$\frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,1) = 0$ Neumann

cf CL $u(t,0) = 0$, $t>0$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = 0$, $t>0$

de m̂ en $x=1$

$\Rightarrow E'(t) = 0$

2.2) En déduire l'unicité de solut° pour cette EDP.

Supposons que u et v soient 2 solut° de (*) ; par linéarité $w := u - v$ vérifie cette nouvelle EDP :

$$(**) : \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & t>0, x \in \Omega \\ w(t,0) = w(t,1) = 0, & t>0 \\ w(0,x) = u_0(x) - u_0(x) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}(0,x) = u_1(x) - u_1(x) = 0 \end{cases}$$

Or l'énergie associée à w (sol. de (**)) est également cste (cf. 2.2)

$$E(t) = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] dx = E(0)$$

et $\frac{\partial w}{\partial t}(0,x)$, ainsi que $w(0,x) = 0$, $x \in \Omega$

$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(0,x) = 0$

$\Rightarrow E(t) = 0$, $t>0$

$\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}$, $w(t,x) = C$

$\Rightarrow w(t,x) = 0$, car $w(0,x) = 0$ (CL. Dirichlet)

2.3) Soit U_1 une primitive de u_1.

Mq
$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(U_1(x+t) - U_1(x-t)\right)$$

est une solut° si $\Omega = \mathbb{R}$, ie solut° de :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t>0, x \in \Omega = \mathbb{R}. \\ u(0,x) = u_0(x) & (\partial\Omega = \emptyset) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) & (U_1' = u_1) \end{cases}$$

- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(u_0'(x+t) - u_0'(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(u_1(x+t) + u_1(x-t)\right)$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left(u_0''(x+t) + u_0''(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(u_1'(x+t) - u_1'(x-t)\right)$
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(u_0'(x+t) + u_0'(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(u_1(x+t) - u_1(x-t)\right)$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(u_0''(x+t) + u_0''(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(u_1'(x+t) - u_1'(x-t)\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

+ CI évident