MAM4

EDP1

2025-26

TD 2 - Étude de consistance

Considérons l'équation de la chaleur en une dimension d'espace dans le domaine borné $\Omega = (0,1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0,1) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1). \end{cases}$$

Les conditions aux limites sont des conditions de Dirichlet homogène :

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t > 0.$$

On discrétise le domaine en utilisant un maillage régulier

$$(t_n, x_j) := (n\Delta t, j\Delta x), \quad n \geq 0, \quad j = 0, \ldots, N,$$

avec $\Delta t > 0$ et $\Delta x := 1/N$.

Exercice 1

Étudier la consistance du θ-schéma, $\theta \in [0,1]$:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}-\theta\nu\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}-(1-\theta)\nu\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}=0.$$

En déduire la consistance des schémas d'Euler explicite, Euler implicite, et Crank-Nicolson.

Exercice 2

Étudier la consistance du schéma de Gear :

$$\frac{3u_j^{n+1}-4u_j^n+u_j^{n-1}}{2\Delta t}-\nu\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}=0.$$

Exercice 3

Étudier la consistance du schéma de Du Fort-Frankel :

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}-\nu\frac{u_{j+1}^n-u_j^{n+1}-u_j^{n-1}+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}=0.$$