TD5 : Ondes

Exo1 : Étudier la stabilité au sens de Von-Neumann du θ-schéma, $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$ implicite

$$- (1-\theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$- \theta \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = 0$$

On injecte le mode de Fourier ξ, $u_j^n = a^n(\xi) e^{2i\pi\xi \underbrace{j\Delta x}_{x}}$

mode

$$\Rightarrow \frac{a^2(\xi) - 2a(\xi) + 1}{\Delta t^2} - \theta a^2(\xi) \frac{\overbrace{(2\cos(2\pi\xi\Delta x) - 2)}^{-4\sin^2(\pi\xi\Delta x)}}{\Delta x^2}$$

en simplifiant par $a^{n-1}(\xi) e^{2i\pi\xi j\Delta x}$ (avec $a(\xi) \neq 0$)

$$- (1-2\theta) \frac{a(\xi)(-4\sin^2(\pi\xi\Delta x))}{\Delta x^2}$$

$$- \theta \frac{(-4\sin^2(\pi\xi\Delta x))}{\Delta x^2} = 0$$

on pose $\sigma = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$

$$a^2(\xi)\left[1 + 4\theta\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x)\right] + a(\xi)\left[-2 + 4(1-2\theta)\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x)\right]$$

$$+ 1 + 4\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x) = 0$$

Posons : $\gamma = \sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x) \in [0, \sigma]$

$$\Leftrightarrow a^2(\xi)\left[1+4\theta\gamma\right] + 2a(\xi)\left[-1+2(1-2\theta)\gamma\right] + 1+4\sigma\gamma = 0$$

$$\Delta = 4\left(-1+2(1-2\theta)\gamma\right)^2 - 4\left(1+4\theta\gamma\right)^2 \leftarrow \text{de la forme } a^2-b^2$$

$$= 4(-8\theta\gamma + 2\gamma - 2)(2\gamma)$$

$$= 16\gamma(-4\theta\gamma + \gamma - 1)$$

$$= \underbrace{-16\gamma}_{<0}\left[1 + \underbrace{(4\theta-1)}_{\geq 0}\gamma\right]$$

car $\theta \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \exists\, 2$ racines complexes conjuguées dont le module (commun) au carré vaut :

$$|a_{1,2}(\xi)|^2 = a_1(\xi)\, a_2(\xi)$$

$$= \text{“}\frac{c}{a}\text{”}$$

$$= \frac{1+4\theta\gamma}{1+4\theta\gamma}$$

$$= 1 \Rightarrow \text{stabilité inconditionnelle.}$$

$\forall \gamma \in [0, \sigma]$
(ie $\forall \sigma$)

Si $\theta \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$: $\Delta < 0$

$$\Leftrightarrow 1 + (4\theta - 1)\gamma > 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma < \frac{-1}{4\theta - 1}$$

$$\Leftrightarrow \sigma \sin^2(\pi \xi \Delta x) < \frac{1}{1-4\theta}, \forall \xi$$

$$\Leftrightarrow \sigma < \frac{1}{1-4\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{\sqrt{1-4\theta}} \quad \left(\frac{}{\infty}\right) \text{ qd } \theta \xrightarrow[<]{} \frac{1}{4}$$

CFL

Soit $\Delta \geqslant 0$, ce qui équivaut à :

$1 + (4\theta - 1)\gamma \leqslant 0$

ie $(4\theta - 1)\gamma \geqslant 1$

ie $\gamma \geqslant \frac{1}{1-4\theta}$ auquel cas on a encore $\underbrace{a_1(\xi)a_2(\xi)}= 1$

$(\neq |a_{1,2}(\xi)|^2 !)$

$\Rightarrow$ Si $\Delta > 0$, le prod $= 1$ donc l'une des deux racines est de valeur absolue > 1 : instable ;
Si $\Delta = 0$, racine double (± 1) : instable (cf. terme linéaire en n dans la sol. de la récurrence double...)

Or si $\sigma \geqslant \frac{1}{1-4\theta}$, $\exists \xi$ tq $\gamma = \sigma \sin^2(\pi \xi \Delta x) \geqslant \frac{1}{1-4\theta}$

et on a instabilité

Crank-Nicolson

Conclusion : i) $\theta \in [1/4 ; 1/2]$: stabilité inconditionelle

ii) $\theta \in [0 ; 1/4[$: stabilité conditionelle.

explicite

avec CFL $\frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{\sqrt{1-4\theta}}$

Exo 2: En posant $v := u_t$, $w := u_x$ et $U := \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on réécrit l'EDP des ondes sous la forme d'une équation d'advection

$$U_t + AU_x = 0, \text{ avec } A = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Étudier la stabilité au sens de Von Neumann du schéma de Lax-Friedrichs :

$$\frac{2U_j^{n+1} - (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)}{2} + A\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{2\Delta x} = 0 \quad : (*)$$

Rappel: schéma semi-discret

$$\frac{2U^{n+1}(x) - (U^n(x+\Delta x) + U^n(x-\Delta x))}{2\Delta t} + A\frac{U^n(x+\Delta x) - U^n(x-\Delta x)}{2\Delta x} = 0$$

$U^n(x) = U_j^n$ quand $x \in [j\Delta x;$

$$\overset{TF}{\Longrightarrow} \frac{2\hat{U}^{n+1}(\xi) - (\hat{U}^n(\xi)e^{2i\pi\xi\Delta x} + \hat{U}^n(\xi)e^{-2i\pi\xi\Delta x})}{2\Delta t} + A\frac{\hat{U}^n(\xi)e^{2i\pi\xi\Delta x} - \hat{U}^n(\xi)e^{-2i\pi\xi\Delta x}}{2\Delta x} = 0$$

$$\Longrightarrow \hat{U}^{n+1}(\xi) = \underbrace{a(\xi)}_{2\times 2}\hat{U}^n(\xi)$$

Sachant que (*) se réécrit $\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$\hat{U}^{n+1}(\xi) = \cos(2\pi\xi\Delta x)\hat{U}^n(\xi) - A\, i \sin(2\pi\xi\Delta x)\sigma . \hat{U}^n(\xi)$$

de sorte que l'on ait :

$$\underbrace{a(\xi)}_{2\times 2} := \underbrace{\cos(2\pi\xi\Delta x)}_{=:c} . I + i\sigma \underbrace{\sin(2\pi\xi\Delta x)}_{=:s} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{-A}$$

$(c^2 + s^2 = 1)$

$$= \begin{pmatrix} c & i\sigma s \\ i\sigma s & c \end{pmatrix}$$

Rq pratique : Le calcul revient à injecter le mode de Fourier

$$\underbrace{a(\xi)}_{\text{matrice } 2\times 2 \text{ inversible}} e^{2i\pi\xi j\Delta x}$$

Par récurrence immédiate, $\hat{U}^n(\xi) = a^n(\xi)\hat{U}^0(\xi)$

En supposant $a(\xi)$ diagonalisable on a donc $\hat{U}^n(\xi)$ bornés ssi

$$|\lambda_1(\xi)| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |\lambda_2(\xi)| \leqslant 1$$

avec $\lambda_1(\xi)$ et $\lambda_2(\xi)$ des valeurs propres de $a(\xi)$.

Ici $Sp(a(\xi))$ s'obtient selon : $\chi_{a(\xi)}(\lambda) = 0$

ie $\begin{vmatrix} \lambda - c & -i\sigma s \\ -i\sigma s & \lambda - c \end{vmatrix} = (\lambda - c)^2 + \sigma^2 s^2 \in \mathbb{R}[\lambda]$ polynôme à coef. réels.

$\Rightarrow \lambda = c \pm i\sigma s$ (2 racines complexes conju et $|\lambda_\pm|^2 = c^2 + \sigma^2 s^2$

$$= \underbrace{c^2 + s^2}_{1} + (\sigma^2 - 1)s^2 \leq 1, \forall \xi \iff \sigma^2 \leq 1$$

$s = \sin(2\pi\xi\Delta x)$

ie CFL : $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

Exo 3: Stabilité de Von-Neumann du θ-schéma de Lax-Wendroff.

$$\frac{\text{[redacted]}\,U_j^{n+1} - U_j^n}{\text{[redacted]}\,\Delta t} + A\,\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} - A^2 \Delta t\,\frac{U_j^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2\Delta x^2} = 0$$

terme correctif provenant de l'équat° équivalente de Lax-Friedrichs (cf. TP1)

Ici $A = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

En injectant un mode de Fourier,

$a(\xi)\, e^{2i\pi\xi j\Delta x}$

puis par simplificat° par $a^n(\xi) e^{2i\pi j\xi\Delta x}$:

$$a(\xi) = \underbrace{\text{[redacted]}\, I - i\sigma\, \underbrace{\sin(2\pi\xi\Delta x)}_{=:s}.\, A}_{\text{cf exo2}}$$

$$+ \sigma^2 \underbrace{A^2}_{=I} . \frac{2\cos(2\pi\xi\Delta x) - 2}{2} = -2\sin^2(\pi\xi\Delta x) = c - 1$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\sigma^2(c-1) & i\sigma s \\ i\sigma s & 1+\sigma^2(c-1)\end{pmatrix}$$

[redacted]

$$\Rightarrow \chi_{a(\xi)}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-(1+\sigma^2(c-1)) & -i\sigma s \\ -i\sigma s & \lambda-(1+\sigma^2(c-1))\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - (\underline{\quad}))^2 + \sigma^2 s^2$$

$$\Rightarrow \lambda_\pm = 1+\sigma^2(c-1) \pm i\sigma s$$

$$|\lambda_\pm|^2 = (1+\sigma^2(c-1))^2 + \sigma^2 s^2$$

$$= 1+2\sigma^2(c-1)+\sigma^4(c-1)^2+\sigma^2(\overbrace{1-c^2}^{s^2})$$

$$= 1+\sigma^2(\underbrace{2(c-1)+(1-c^2)}_{-1+2c-c^2 = -(1-c)^2})$$

$$= 1-(1-c)^2\sigma^2(1-\sigma^2) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (\underbrace{1-c^2}_{\geq 0})\,\sigma^2(1-\sigma^2) \geq 0, \ \forall \xi .$$

$$\Leftrightarrow 1-\sigma^2 \geq 0 \text{ ou } \sigma^2 \leq 1$$

$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$: CFL, stabilité cond.