Équations aux dérivées partielles (EDP1) – contrôle 06-11-2024 (corrigé)

1) équation de la chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ avec coefficient de diffusion $\nu = 1$

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot u \, dx - \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot u \, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t} dx - \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot u\right]_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = 0$$
$$\implies \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx = -\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \leq 0$$

pour les conditions aux limites $u(t,0) = u(t,1) = 0$ qui annulent le terme intgr

par linéarité de l'équation, la différence de deux solutions u_1 et u_2 vérifie le même problème avec donnée initiale nulle, et la décroissance de l'énergie implique que $E(t) \leq E(0) = 0, \forall t$: comme l'nergie est positive, elle est ncessairement nulle pour tout temps, d'où l'unicité.

2) erreur de troncature du schéma implicite (en temps) centré (en espace) pour l'équation d'advection

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_j^n &= \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} + V\,\frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) - u(x_{j-1}, t_{n+1})}{2\,\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+1}) - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + V\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_{n+1}) + V\,\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ &= -V^2\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) + V\,\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^4)\end{aligned}$$

en utilisant l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial t} + V\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ et ses conséquences $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

le schéma est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace, et il est stable pour tout $V \in \mathbb{R}$ (propriétés de diffusion et dispersion numérique)

3) le schéma explicite (en temps) décentré aval (en espace) pour l'équation d'advection avec vitesse $V < 0$ se réécrit comme une combinaison linéaire convexe

$$u_j^{n+1} = \big(1 - \sigma\big)u_j^n + \sigma u_{j+1}^n \quad \text{avec} \quad \sigma = |V|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

sous la condition de stabilité (CFL), de sorte qu'on reste dans le convexe $[m, M]$. Le principe du maximum discret est donc vérifié sous la condition CFL pour la norme uniforme

4) on injecte un mode de Fourier $u_j^n = A(k)^n \exp\big((2i\pi)jk\Delta x\big)$ dans le schéma (en simplifiant les facteurs communs)

$$\frac{2A(k)^2 - 3A(k) + 1}{\Delta t} - \nu\frac{A(k)^2 \exp((2i\pi)k\Delta x) - 2A(k)^2 + A(k)^2 \exp(-(2i\pi)k\Delta x)}{\Delta x^2} = 0$$
$$\begin{aligned}\implies \quad & 2A(k)^2 - 3A(k) + 1 - \nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}A(k)^2\big(2\cos\big((2\pi)k\Delta x\big) - 2\big) \\ = \; & 2A(k)^2\left(1 + 2\,\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\big(\pi k\Delta x\big)\right) - 3A(k) + 1 = 0\end{aligned}$$

en utilisant les formules trigonométriques

$$\cos\big((2\pi)k\Delta x\big) = \cos^2\big(\pi k\Delta x\big) - \sin^2\big(\pi k\Delta x\big) \quad \text{et} \quad \cos^2\big(\pi k\Delta x\big) + \sin^2\big(\pi k\Delta x\big) = 1$$

étude des racines de l'équation algébrique du second degré ci-dessus

$$A_{1,2}(k) = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8\,(1+2\gamma)}}{4\,(1+2\gamma)} = \frac{3 \pm \sqrt{1-16\gamma}}{4\,(1+2\gamma)} \quad \text{avec} \quad \gamma = \nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\big(\pi k\Delta x\big)$$

(i) pour $1 - 16\,\nu\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\big(\pi k\Delta x\big) < 0$ les racines sont complexes conjuguées et $\big|A_{1,2}(k)\big| \leq 1$ puisque leur produit, qui est égal leur module au carré, est inférieur à 1
(ii) pour $1-16\,\nu\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\big(\pi k\Delta x\big) \geq 0$ les racines sont réelles et on voit que $0 \leq A_1(k) \leq A_2(k) \leq 1$ dans la mesure où $2 \leq 3 \pm \sqrt{1-16\gamma} \leq 4$