EDP 1

Introduction aux formulations variationnelles

$$-\Delta u + \alpha u = f, \quad x \in \Omega$$

avec $\alpha > 0$

Ex. : comportement stationnaire chaleur

$$\underset{0}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}} \underbrace{-\Delta u + \dots}_{\text{EDP elliptique}} = f, \quad x \in \Omega$$

↳ EDP elliptique f. ($\dim \Omega = 2$)

$$a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{xy} + c \cdot u_{yy} + \dots = 0$$

ici $-\Delta u = -(u_{xx} + u_{yy})$

$\Rightarrow b^2 - 4ac \underset{\uparrow}{=} -4 < 0$: ellipticité

$a = c = 1$

→ Démarche variationnelle en 4 étapes

4. Toute solution forte est sol. faible

Soit $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ sol. "forte" ie tq :

$$(1) \begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f, & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Déf. : $H^1(\Omega) := \{ v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega) \}$

∇ (dérivées) pris au sens des distributions

ex. : $n = 1$: $v \in H^1(\underbrace{]0,1[}_{\Omega})$ ssi

$\exists\, w \in L^2(]0,1[)$ tq

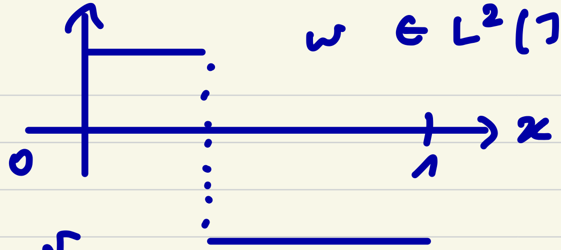
$$v(x) = C + \int_0^x w(y)\,dy$$

ie $H^1(]0,1[)$ = "primitives" de fonctions L^2

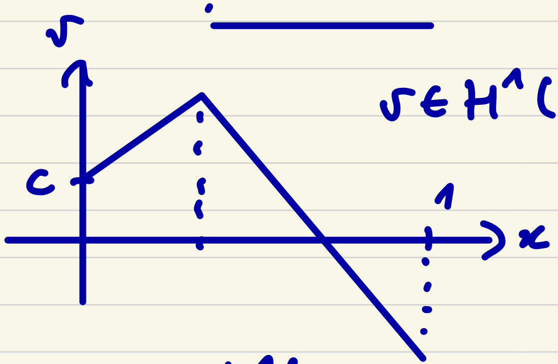
En particulier, la dist régulière T_v ($\varphi \mapsto \int \varphi \cdot v\,dx$) associée à v vérifie :

$$T_v' = T_w$$

Par ex.:



$w \in L^2(]0,1[)$



$v \in H^1(]0,1[)$

En dim n, si $v \in H^1(\Omega)$, $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ et on peut "intégrer par parties" avec Stokes

---

Soit $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (-\Delta u + \alpha u).v \, dx = \int_\Omega f.v \, dx$$

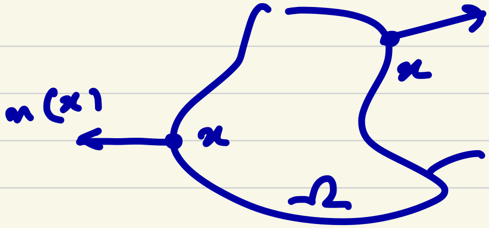
↳ dérivées d'ordre 2

→ on va écrire une nouvelle formulation qui n'utilise que des dérivées d'ordre 1 de u

Formule de Stokes : va jouer le rôle en dim n de la formule de primitivation :

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} f\, e_i \, d\sigma$$

← mesure sur $\partial\Omega$



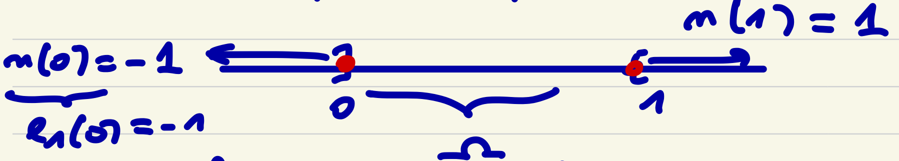
$n(x) = (e_1(x), \dots, e_n(x))$
normale extérieure au bord en x

$\Gamma = \partial\Omega$

En dim 1 : $\displaystyle\int_{]0,1[} \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx$ ← f'

$$= \int_{\partial]0,1[= \{0,1\}} f\, e_1 \, d\sigma$$

$e_1(1) = 1$



$$= f(0).e_1(0) + f(1).e_1(1)$$

cf. mesure de Dirac en 0 et 1 par $d\sigma$ ($= \delta_0 + \delta_1$)

$$= -f(0) + f(1)$$

Ici, dans la mesure où cette formule est valide pour des fonctions H^1, on a notamment :

$$\int_\Omega -\Delta u . v = -\sum_{i=1}^{n} \int \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} . v \, dx$$

NB. $\displaystyle\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} . v\right)}_{\text{on applique Stokes}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} . v + \frac{\partial u}{\partial x_i} . \frac{\partial v}{\partial x_i}$ ($\simeq$ i.p.p.)

$$\Rightarrow \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v \, e_i \, d\sigma$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot v \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v \, e_i \, d\sigma$$

$\simeq$ i.p.p. en dim 1

$$\left\{ - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right.$$

On en déduit :

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v \, dx = - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v \, e_i \, d\sigma$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

$$= \int_\Omega (\nabla u \mid \nabla v) \, dx - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot e_i \right)}_{(\nabla u \mid n) =: \frac{\partial u}{\partial n}} v \, d\sigma$$

$$= \int_\Omega (\nabla u \mid \nabla v) \, dx$$

$$- \int_{\partial\Omega} \cancel{\frac{\partial u}{\partial n}} \cdot v \, d\sigma \longleftarrow \text{formule de Green}$$

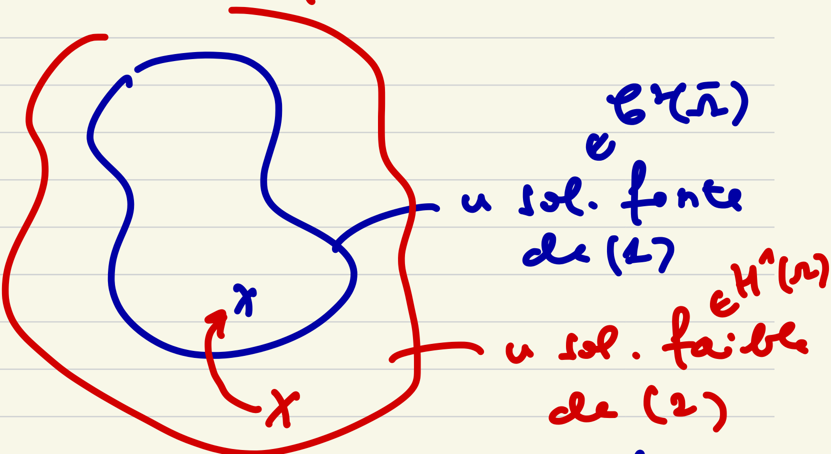
0, f. CL de Neuman

$\Longrightarrow$ u vérifie la nouvelle EDP d'ordre 1 (et non 2) :

$$\boxed{\int_\Omega \left((\nabla u \mid \nabla v) + \alpha u v \right) dx = \int_\Omega f . v \, dx,}$$

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad (2)$$

↳ Cette nouvelle équation qui ne suppose que $u \in H^1(\Omega)$ (et plus nécessairement dans $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$) s'appelle la formulation faible.



B. Existence et unicité de sol. faible

(2) $\Longleftrightarrow$ u vérifie

$$(\forall v \in H^1(\Omega)) : a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle$$

où $a : H^1 \times H^1 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(u, v) \longmapsto \int_\Omega (\nabla u \mid \nabla v) + \alpha u v \, dx$$

$$\varphi : H^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto \int_\Omega f v \, dx$$

Clairement, a est une forme bilinéaire, et φ une forme linéaire.

<u>Th.</u> (Lax - Milgram) : si $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est bilinéaire, continue et coercive, si $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et continue, alors $\exists! \, \bar{u} \in H$ tq

$$(\forall v \in H) : a(\bar{u}, v) = \langle \varphi, v \rangle.$$