MAM4

EDP1

2025-26

TD 6 - Formulations variationnelles

Exercice 1

On cherche u dans $\mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ (où Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ à bord régulier - de classe $\mathscr{C}^1$) telle que

$$-\Delta u(x) + \alpha u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

avec $\alpha > 0$ et conditions aux limites de Dirichlet, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, et f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$.

1.1

On admet que l'application trace $v \mapsto v_{|\partial\Omega}$ de $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ dans $L^2(\Omega)$ se prolonge continûment à $H^1(\Omega)$. En déduire que le sous-espace

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \mid v_{|\partial\Omega} = 0\}$$

muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$ est encore un espace de Hilbert.

1.2

Montrer que toute solution du problème précédent, dite *solution forte*, est encore solution (dite *solution faible*) d'un nouveau problème que l'on précisera.

1.3

Montrer qu'on a existence et unicité de solution faible. Interpréter de façon variationnelle.

1.4

Montrer que toute solution faible dans $\mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ est solution forte.

Exercice 2

On cherche u dans $\mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ (où Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ à bord régulier - de classe $\mathscr{C}^1$)
telle que (problème de Poisson)

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

avec conditions aux limites de Robin

$$u + \frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad x \in \partial\Omega,$$

et f, g des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et $\partial\Omega$, respectivement.

2.1

Montrer que toute solution solution forte est encore solution d'un nouveau problème que l'on précisera.

2.2

À l'aide de l'inégalité de Poincaré ci-dessous,

$$\|v\|_2 \leq C(\|v_{|\partial\Omega}\|_2 + \|\nabla v\|_2), \quad v \in H^1(\Omega),$$

montrer qu'on a existence et unicité de solution faible. Interpréter de façon variationnelle.

2.3

Montrer que toute solution faible dans $\mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ est solution forte.