Equation d'advection

Domaine $\Omega = (0,1)$ $V > 0$,

CL périodicité

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(0,t) = u(1,t), & \text{CL périodique} \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \text{ CI} \end{cases}$$

On discrétise avec un pas d'espace $\Delta x = \dfrac{1}{N}$ $(N > 0)$, Δt pas du temps

$$u_j^n \sim u(x_j, t^n), \quad x_j = j \Delta x, \quad t^n = n \Delta t$$

CL périodicité : $u_0^n = u_N^n$ ou d'une manière générale $u_j^n = u_{N+j}^n$

Quelques schémas :

1 Explicite centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \Delta x} = 0$$

(consistant mais instable !)

Consistance : Erreur de troncature

$$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j,t^{n+1}) - u(x_j,t^n)}{\Delta t} + V\,\frac{u(x_{j+1},t^n) - u(x_{j-1},t^n)}{2\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n) + O(\Delta t) + V\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t^n) + O(\Delta x^2)\right)$$

$$= O(\Delta t) + O(\Delta x^2) \quad \text{car} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace

Stabilité L_2

$$u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi k j \Delta x}$$

On remplace dans le schéma et après simplification on a

$$\frac{A(k) - 1}{\Delta t} + V \cdot \frac{e^{2i\pi k \Delta x} - e^{-2i\pi k \Delta x}}{2\Delta x} = 0$$

$$A(k) = 1 + i\,\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k \Delta x)$$

$$\Rightarrow |A(k)|^2 = 1 + \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(2\pi k \Delta x) > 1$$

$\Rightarrow$ schéma inconditionnellement instable

inutilisable d pdv pratique

2. Implicite centré

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + V\,\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

Consistance $\rightarrow$ facile (mêmes conclusions que pour le schéma explicite)

Stabilité L_2 : on calcule le facteur d'amplification $\rightsquigarrow$

$$\frac{A(k)-1}{\Delta t} + V\,\frac{A(k)}{2\Delta x}\,2i\sin(2\pi k\Delta x) = 0$$

$$A(k) = \frac{1}{1+i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)}$$

$$|A(k)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2(2\pi k\Delta x)} \leq 1$$

$\Rightarrow$ schéma inconditionnellement stable

<u>Q</u>: y-a-t-il des schéma explicites stables même sous une condition ?

Oui mais ce sont des schémas décentrés

Décentré amont :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \cdot \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{si } V > 0$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{si } V < 0$$

Ces schémas sont consistants et précis à l'ordre 1 en espace et en temps et stables sous la condition $\frac{|V|\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

Stabilité L_2 (supp $V > 0$)

$$\frac{A(k) - 1}{\Delta t} + V \cdot \frac{1 - e^{-2i\pi k \Delta x}}{\Delta x} = 0$$

$s_k = \sin(k\pi\Delta x)$

$$A(k) = 1 - \overbrace{\frac{V\Delta t}{\Delta x}}^{\alpha}\Big(\underbrace{1 - \cos(2\pi k \Delta x)}_{2 s_k^2} + i\underbrace{\sin(2\pi k \Delta x)}_{2 s_k c_k}\Big)$$

$$|A(k)|^2 = (1 - 2\alpha s_k^2)^2 + 4 s_k^2 c_k^2 \alpha^2 \overset{?}{\leq} 1$$

$$-4\alpha s_k^2 + 4\alpha^2 s_k^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \leq 1 \qquad \boxed{\frac{V\Delta t}{\Delta x} \leq 1}$$

Diffusion et dispersion des schémas.

Equation equivalente

Définition (éq équivalente)

L'éq obtenue en ajoutant au modèle étudié la partie principale. (c.a.d. le terme d'ordre dominant) de l'erreur de troncature du schéma.

À l'aide de l'éq équivalente on peut rendre le schéma plus précis.

Exemple (schéma décentré amont)

$$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j,t^{n+1}) - u(x_j,t^n)}{\Delta t} + V\,\frac{u(x_j,t^n) - u(x_{j-1},t^n)}{\Delta x}$$

$$u(x_j,t^{n+1}) = u(x_j,t^n) + \Delta t\,\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n) + \frac{\Delta t^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^n) + O(\Delta t^3)$$

$$\Rightarrow \frac{u(x_j,t^{n+1}) - u(x_j,t^n)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n) + \frac{\Delta t}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2)$$

$$u(x_{j-1},t^n) = u(x_j,t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t^n) + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^n) + O(\Delta x^3)$$

$$\frac{u(x_j,t^n) - u(x_{j-1},t^n)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t^n) - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2)$$

Aussi $\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (u solution)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-V\frac{\partial u}{\partial x}\right) = V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_j^n = \underbrace{\left(\frac{V^2\Delta t}{2} - \frac{V\Delta x}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{partie principale de l'erreur de troncature}} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

$\Rightarrow$ l'equation équivalente est

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{V}{2}(\Delta x - V\Delta t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

Si $V<0$ on remplace V par $|V|$.

- La discrétisation de l'éq équivalente donne un nouveau schéma plus précis pour l'éq initiale.

- La partie "dominante" de l'erreur de troncature ⇝ diffusivité du schéma

- Le terme $\tilde{\nu} = \frac{V}{2}(\Delta x - V\Delta t)$ s'appelle diffusion numérique du schéma.

⇝ un schéma trop diffusif n'est pas un bon schéma.

- En discrétisant l'éq équivalente on obtient un schéma sans diffusion numérique

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \left(\frac{V\Delta x}{2} - \frac{V^2 \Delta t}{2}\right) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

Tous les schémas d'ordre 1 sont diffusifs