Université de Nice-Sophia Antipolis
MAM4/SI4 - Équations aux Dérivées Partielles

EPU
28 Novembre, 2012

Test Équations aux Dérivées Partielles. Durée : 1H30

NOM & Prénom : .... **Groupe TD :**

Documents autorisés: uniquement les documents cours et TD distribués. Réponses à rédiger sur la feuille d'énoncé (il n'en sera distribué qu'une), après avoir fait vos exercices/essais au brouillon. Justifier vos reponses et commenter les programmes Scilab d'une façon concise et claire. On pourra considérer comme acquis les développements déjà faits ailleurs à condition de bien situer la source (cours, no. série exercices, no. exercice)

En absence de précisions supplémentaires, on discrétise toujours le domaine en utilisant un maillage régulier $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$, $\forall n \geq 0$, $j \in \{0, 1, ..., N+1\}$, $\Delta x = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$.

Problème 1. On considère l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u^0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

et on se propose de la résoudre en utilisant le schéma numérique explicite suivant

a) $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \qquad (j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

ainsi que sa version implicite

b) $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \qquad (j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

1. Calculer l'ordre des schémas (2) et (3). **(3 POINTS)**

On calcule l'erreur de troncature dans les deux cas:

a) $\varepsilon_j^n = \dfrac{u(x_j,t^{n+1}) - u(x_j,t^{n-1})}{2\Delta t} - \nu \dfrac{u(x_{j+1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j-1},t_n)}{\Delta x^2}$

$u(x_j,t_{n\pm1}) = u(x_j,t_n) \pm \Delta t \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \dfrac{\Delta t^2}{2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) \pm \dfrac{\Delta x^3}{6} \dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j,t_n) + O(\Delta t^4)$

$\Rightarrow \dfrac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{2\Delta t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + O(\Delta t^2)$

$\Rightarrow \varepsilon_j^n = \cancel{\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n)} + O(\Delta t^2) - \nu \cancel{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n)} + O(\Delta x^2) = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$

b) De la même façon $\varepsilon_j^n = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + O(\Delta t^2) - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{n+1}) + O(\Delta x^2)$

On ré-développe $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{n+1}) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + O(\Delta t)$

$\Rightarrow \varepsilon_j^n = O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$

On déduit que le premier schéma (explicite) est d'ordre 2 en espace et temps tandis que le schéma implicite est d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

2. Montrer que le schéma explicite est instable, tandis que l'implicite est inconditionnellement stable. (**4 POINTS**)

On injecte un mode de Fourier $G(k)^n e^{2i\pi j k \Delta x}$ dans les 2 schémas afin d'en calculer le facteur d'amplification $G(k)$.

Schéma explicite : après simplification on obtient

$$\frac{G^2(k)-1}{2\Delta t} - \nu G(k)\frac{e^{2i\pi k\Delta x}-2+e^{-2i\pi k\Delta x}}{\Delta x^2} = 0.$$

on utilise le fait que $e^{2i\pi k\Delta x}+e^{-2i\pi k\Delta x} = 2\cos(2\pi k\Delta x) \Rightarrow$

$$G^2(k)-1 - 2\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}G(k)\underbrace{(2\cos(2\pi k\Delta x)-2)}_{-4\sin^2(k\pi\Delta x)} = 0$$

$$G^2(k) + 8\sigma S_k G(k) - 1 = 0 \quad \text{où } \sigma = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \quad S_k = \sin^2(k\pi\Delta x)$$

$\Delta' = 4(64\sigma S_k + 4 > 0$ les racines sont réelles et $G_1(k)G_2(k) = 1$

$\Rightarrow$ forcément une racine est ≥ 1 en module $\Rightarrow$ schéma instable.

Schéma implicite : après simplification on a

$$\frac{G^2(k)-1}{2\Delta t} - \nu G^2(k)\cdot\frac{(2\cos(2\pi k\Delta x)-2)}{\Delta x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow G^2(k)(1+8\sigma S_k) = 1 \quad \text{avec } \sigma = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}, \; S_k = \sin^2(k\pi\Delta x)$$

$$\Leftrightarrow G^2(k) = \frac{1}{1+8\sigma S_k} \leq 1 \quad \forall \sigma, S_k \text{ positif}$$

ceci prouve que le schéma implicite est inconditionnellement stable.

Conclusion : Bien que plus précis, le schéma explicite est inutilisable car instable.

Problème 2. On considère l'équation de la chaleur (1), qu'on se propose de résoudre en utilisant le schéma numérique suivant (où $\theta \geq 0$ est un nombre réel positif) :

$$(1+\theta)\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \theta\frac{u_j^n-u_j^{n-1}}{\Delta t} - \nu\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \qquad (j,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*. \qquad (4)$$

1. Montrer, en calculant ~~avec~~ l'erreur de troncature, que le schéma est en général d'ordre 1 en temps et 2 en espace. Calculer la valeur de $\theta \geq 0$ pour laquelle le schéma soit d'ordre 2 en temps. **(2 POINTS)**

$$\varepsilon_j^n = (1+\theta)\frac{u(x_j,t_{n+1})-u(x_j,t_n)}{\Delta t} - \theta\,\frac{u(x_j,t_n)-u(x_j,t_{n-1})}{\Delta t} - \gamma\,\frac{u(x_{j+1},t_{n+1})-2u(x_j,t_{n+1})+u(x_{j-1},t_{n+1})}{\Delta x^2}$$

$$= (1+\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n)+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n)+O(\Delta t^2)\right)$$

$$-\theta\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n)-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n)+O(\Delta t^2)\right)$$

$$-\gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{n+1})+O(\Delta x^2)\right)$$

$$\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{n+1}) = \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \gamma\Delta t\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2\partial t}(x_j,t_n)+O(\Delta t^2)$$

$$= \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \Delta t\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n)+O(\Delta t^2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_j^n = (-1+2\theta)\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + O(\Delta t^2)+O(\Delta x^2)$$

$\Rightarrow$ le schéma est d'ordre 1 en temps et 2 en espace. Si $\theta = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ ordre 2 en temps.

2. Montrer que le schéma (4) est inconditionnellement stable. **(3 POINTS)**

On injecte le mode de Fourier $G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ dans le schéma.

Après simplification on a :

$$(1+\theta)\frac{G^2(k)-G(k)}{\Delta t} - \theta\,\frac{G(k)-1}{\Delta t} - \gamma\,G^2(k)\cdot\frac{e^{2i\pi k\Delta x}-2+e^{-2i\pi k\Delta x}}{\Delta x^2} = 0.$$

On multiplie par Δt et on utilise $e^{2i\pi k\Delta x}-2+e^{-2i\pi k\Delta x} = -4\sin^2(k\pi\Delta x)$

$$(1+\theta)(G^2(k)-G(k)) - \theta(G(k)-1) + 4\underbrace{\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}}_{\sigma}G^2(k)\underbrace{\sin^2(k\pi\Delta x)}_{S_k} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (1+\theta+4\sigma S_k)G^2(k) - (1+2\theta)G(k) + \theta = 0.$$

$$\Delta = (1+2\theta)^2 - 4\theta(1+\theta+4\sigma S_k) = 1-16\theta\sigma S_k$$

$$G_1(k)G_2(k) = \frac{\theta}{1+\theta+4\sigma S_k}.$$ Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ racines complexes conjuguées

$$|G_1(k)G_2(k)| = |G_1(k)|^2 = |G_2(k)|^2 = \frac{\theta}{1+\theta+4\sigma S_k} < 1 \quad \forall \theta>0, \sigma, S_k$$ incond stable

Si $\Delta' > 0$ on montrera que $G_1(k) = \dfrac{1+2\theta-\sqrt{\Delta}}{2(1+\theta+4\sigma S)} > -1$ et

$G_2(k) = \dfrac{1+2\theta+\sqrt{\Delta}}{2(1+\theta+4\sigma S)} < 1$ $\Rightarrow$ é. s. i. d.

Problème 3 - On considère l'équation d'advection :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) & = & u^0(x) & x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \tag{5}$$

1. Donner le schéma explicite décentré amont dans le cas où $c < 0$ et $c > 0$. (**1 POINT**)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\,\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{si } c > 0$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\,\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{si } c < 0$$

2. En calculant le facteur d'amplification du schéma dans ses deux versions, dire sous quelle condition il est L^2-stable. (**4 POINTS**)

Schéma décentré avec $c > 0$: on injecte $G(k) = e^{2i\pi j k\Delta x}$.

$$\frac{G(k) - 1}{\Delta t} + c \cdot \frac{-e^{-2i\pi k\Delta x} + 1}{\Delta x} = 0$$

$$G(k) = 1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(1 - e^{-2i\pi k\Delta x}) = 1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}(1 - \cos(2\pi k\Delta x) + i\sin(2\pi k\Delta x))$$

$$(\Leftrightarrow)\ |G(k)|^2 = \Big(1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}\underbrace{(1 - \cos(2\pi k\Delta x))}_{2\sin^2(k\pi\Delta x)}\Big)^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(2\pi k\Delta x)$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{2c\Delta t}{\Delta x} \cdot 2\sin^2(k\pi\Delta x) + 4\sin^2(k\pi\Delta x)\cdot\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \cdot 4\sin^2(k\pi\Delta x)\cdot\cos^2(k\pi\Delta x)}_{\leq 0}$$

Donc $|G(k)| \leq 1$ ssi $(\Leftrightarrow)\ -\frac{c\Delta t}{\Delta x} + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ si $c > 0$. (1)

Schéma décentré avec $c < 0$

$$\frac{G(k) - 1}{\Delta t} + c \cdot \frac{e^{2i\pi k\Delta x} - 1}{\Delta x} = 0$$

$$G(k) = 1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}(e^{2i\pi k\Delta x} - 1) = 1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(\cos(2\pi k\Delta x) - 1 + i\sin(2\pi k\Delta x))$$

$$|G(k)|^2 = \left(1 + 2\frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin^2(k\pi\Delta x)\right)^2 + 4\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\pi\Delta x)\cos^2(k\pi\Delta x)$$

$$= 1 + 4\frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin^2(k\pi\Delta x) + 4\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\pi\Delta x)$$

$$|G(k)|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{c\Delta t}{\Delta x} + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \leq 0 \quad \frac{c\Delta t}{\Delta x} \geq -1 \text{ si } c < 0 \ (2)$$

Au bilan la cond de stabilité s'écrit

$$\frac{|c|\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

3. On suppose maintenant que $c > 0$ et que la condition de stabilité ci-dessus est vérifiée. Montrer que dans ce cas, on a aussi:

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^{n+1}| \leq \sup_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^n| \tag{6}$$

Comment interpréter l'inégalité (6) ? (**2 POINTS**)

$u_j^{n+1} = \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^n$ si $c>0$

$u_j^{n+1} = -\frac{c\Delta t}{\Delta x} u_{j+1}^n + \left(1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n$ si $c<0$

On voit que si $\frac{|c|\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ u_j^{n+1} est une combinaison convexe

de u_j^n, u_{j-1}^n $(c>0)$ et u_{j+1}^n, u_j^n $(c<0)$

Dans les 2 cas $|u_j^{n+1}| \leq \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)|u_j^n| + \frac{c\Delta t}{\Delta x}|u_{j-1}^n| \leq \max_j |u_j^n|$ $(c>0)$

$|u_j^{n+1}| \leq -\frac{c\Delta t}{\Delta x}|u_{j+1}^n| + \left(1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)|u_j^n| \leq \max_j |u_j^n|$ $(c<0)$

$\Rightarrow$ le principe du maximum discret est donc vérifié.

Problème 4. On veut implementer numériquement à l'aide du logiciel `Scilab` le schéma de Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2} - \nu \dfrac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} = \dfrac{1}{2}(f_j^n + f_j^{n+1}), 1 \leq j \leq N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0,\ u_j^0 = u_0(x_j),\ f_j^n = f(x_j^n),\ 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

où u_0 est la condition initiale et f est le second membre. On notera le vecteur de inconnues par $U^n = (u_j^n)_{1\leq j\leq n}$, celui qui donnera le second membre par $F^n = (f_j^n)_{1\leq j\leq n}$ et le nombre de CFL par $\sigma = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}$.

1. Montrer que le schéma peut s'écrire sous forme matricielle ou l'on précisera A. (**1 POINT**)

(∗) $(I + \sigma/2A)U^{n+1} = (I - \sigma/2A)U^n + (1/2F^n + 1/2F^{n+1})\Delta t.$

On multiplie par Δt et on sépare la partie "n+1" de la partie "n".

$u_j^{n+1} - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}}_{\sigma}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}}_{\sigma}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2}(f_j^n + f_j^{n+1})$

$\Leftrightarrow$ $\cancel{\nu\Delta t}$ $-\frac{\sigma}{2}u_{j-1}^{n+1} + \left(1 + 2\frac{\sigma}{2}\right)u_j^{n+1} - \frac{\sigma}{2}u_{j+1}^{n+1} = \frac{\sigma}{2}u_{j-1}^n + \left(1 - \frac{2\sigma}{2}\right)u_j^n + \frac{\sigma}{2}u_{j+1}^n$
$+ \frac{\Delta t}{2}(f_j^n + f_j^{n+1})$

$\Rightarrow$ Le schéma peut s'écrire sous la forme (∗)

avec $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Écrire une fonction Scilab qui a l'en-tête `function Un=heat(xspan,tspan,nu,u0,f)` qui calculera la solution de l'équation de la chaleur par le schéma de Crank-Nicolson. Ses paramètres sont: `xspan` (le vecteur des x_j), `tspan` (le vecteur des t_n), `nu` (le coefficient de diffusion ν), la condition initiale `u0` (u_0) et le second membre f. (remarquons que le nombre d'inconnues en espace, N peut s'obtenir comme `length(xspan)-2`). **(3 POINTS)**

```
function Un = heat(xspan,tspan, nu,u0,f)
  Un = u0(1, 2:length(u0)-1)';
  N = length(xspan)-2;
  A = 2*diag(ones(N,1))-diag(ones(N-1,1),1) -diag(ones(N-1,1),-1);
  Id = diag(ones(N,1));
  sigma = nu*tspan(2) /(xspan(2)^2);
  for n=1: length(tspan)-1
     rhs = tspan(2)*(f(xspan(1,2:N+1),tspan(n))+f(xspan(1,2:N+1),tspan(n+1)))
     rhs = rhs + (I-sigma*A/2)*Un;
     Un1 = (I+sigma*A/2)\B;
     Un = Un1
  end.
  Un = [0;Un;0]
endfunction
```

2. Considérons maintenant le cas concret où $(a, b) = (0, \pi)$, $\nu = 1$, $f(x, t) = -\sin(x)\sin(t) + \sin(x)\cos(t)$, condition initiale $u(x, 0) = \sin(x)$. Dans ce cas, la solution exacte est $u(x, t) = \sin(x)\cos(t)$. Écrire un programme qui résout ce problème sur l'intervalle en temps $[0, 1]$ et tracer la solution exacte au temps final sur le même graphique que celle approchée. **(3 POINTS)**

```
deff ("y=f(x,t)", "y=-sin(x)*sin(t) +sin(x) *cos(t)");
deff ("y= ui(x)", "y=sin(x)");
deff ("y=uex(x,t)", "y = sin(x) *cos(t)"),
L = %pi;
N =50;
dx = L/(N-1);
sigma= 0.5;
nu = 1;
dt = sigma*dx^2/ nu;
tmax = 1,
x = linspace(0,L, N);
u0 = ui(x);
u = heat(x,t, nu, u0,f);
uex = uexact (x,1),
plot (x,u, 'rx-',x ,uex, 'bo-');
xtitle (' Comparaison entre
```