COURS 9

Notion de problème bien posé

Définition On appelle problème aux limites, une équation aux dérivées partielles munie des conditions aux limites sur la totalité de la frontière.

Ex. $\begin{cases} -\Delta u = f, \Omega \\ u = 0, \partial\Omega \end{cases}$ pb aux limites

(1) $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \ldots \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ n'est pas un pb aux limites

Définition On appelle problème de Cauchy une équation aux dérivées partielles, où pour au moins une variable (généralement le temps), les "cond de bord" sont des cond initiales (en $t=0$ et pas en $t=T$).

Ex. (1) pb de Cauchy ; l'éq de la chaleur = pb aux lim + pb de Cauchy.

Quelle) EDP est un "bon modèle"?
(problème aux limites)

Soit le problème aux limites + conditions initiales
(2) $A(u) = f$ (A un opérateur qui englobe tout)

Définition On dit que le problème (2) est bien posé si pour toute donnée f il admet une solution unique et si cette solution u dépend continûment de la donnée f.

Il $\exists$ 3 conditions : $\exists$ de la solution, unicité, dépendance continue des données. (cruciale en vue des approx. numériques) $\rightarrow$ une petite perturbation des données $\rightarrow$ petite perturb de la solution.

Ex. $\begin{cases} -\Delta u = 0 & ,\Omega \\ u(x,0) = u(x,2\pi) = 0 \\ u(0,y) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = e^{-\sqrt{n}} \sin(ny) \end{cases}$

$u(x,y) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n} \sin(ny)$ ...

$Sh(n\pi)$ - sol ... [illegible]

Classification des équations aux dérivées partielles

Déf On appelle ordre d'une EDP l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation.

chaleur — premier ordre en espace 2e ordre en temps

Considérons une EDP d'ordre ≤ 2 générique.

$$(3)\quad a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+f=0$$

Supp que a, b, c, d, e, f constants

Déf On dit que l'éq (3) est elliptique si $b^2-4ac<0$, parabolique si $b^2-4ac=0$, hyperbolique si $b^2-4ac>0$

L'origine de cette classification est la classification des coniques dans le plan, c-à-d que l'équation

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

définit une courbe plane qui est soit une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

Ex: chaleur = parabolique ($b=c=0$), laplacien (= elliptique car $b=0$, $a=c=1$), l'équation des ondes = hyperbolique

D'une manière générale les EDP stationnaires (qui ne dépendent pas du temps) sont elliptiques tandis que les problèmes d'évolution sont soient elliptiques paraboliques soit hyperboliques.

La notion de problème bien posé n'est pas ~~modifié par~~ est à adapter par rapport au caractère de l'équation (pour l'ellip ce sera un problème aux limites, pour l'hyp et parabolique problème de Cauchy en temps + limites en espace)