

Projet MAM4 –

Méthodes numériques pour les Equations aux dérivées partielles

COSTE Manuel
PEYRACCHIA Antonin

Dolean Victorita
Haroune Houamed
Année 2020-2021

Table des matières

I.	Introduction et objectifs	3
II.	Partie 1 : Simulation statique	3
	a. Géométrie spatiale des chambres	3
	b. Température ambiante en été	5
	c. Température ambiante en hiver	6
	d. Résultats et conclusion avec chauffage	6
III.	Partie 2 : Simulation instationnaire	8
	a. Méthodes d'Euler explicite	8
	b. Méthodes d'Euler implicite	9
	c. Visualisation	10
	d. Analyse et différences entre les schémas	11
	1. Etude de la stabilité	11
	2. Etude du temps d'exécution	12
IV.	Conclusion	13

I. Introduction et objectifs

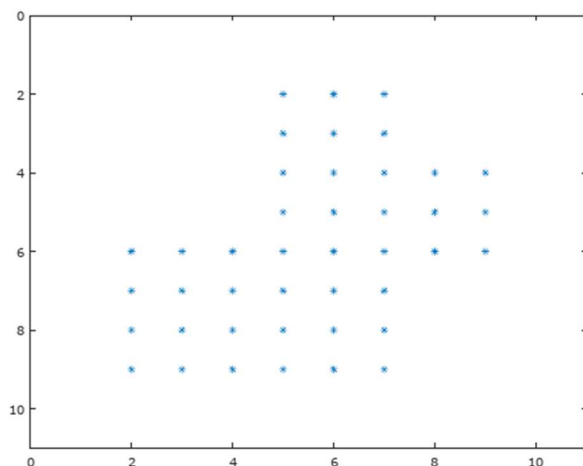
Nous avons pour projet de travailler sur la simulation numérique de la température dans une chambre. Afin de mieux comprendre la méthode des différences finies appliquée à un cas assez réaliste. Notre objectif était d'implémenter l'algorithme donné par les tuteurs afin de le tester sur des chambres que nous aurons modélisé par avance. Nous allons dans un premier temps travailler sur une simulation statique de la chaleur, ensuite nous ferons une simulation instationnaire en utilisant la discrétisation de l'équation de la chaleur par la méthode d'Euler explicite et implicite. Nous comparerons ensuite les temps d'exécution et la stabilité de ces différents schémas.

II. Partie 1 : Simulation statique

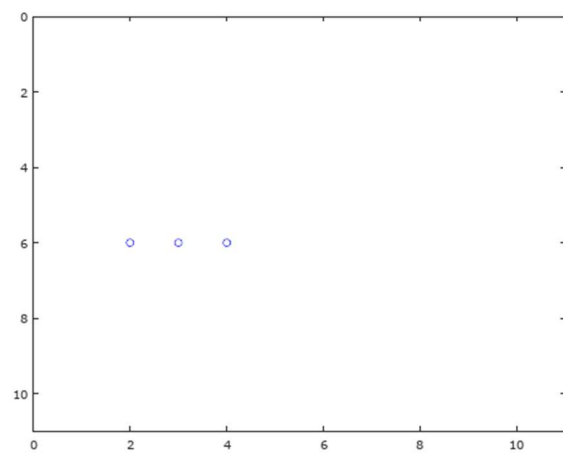
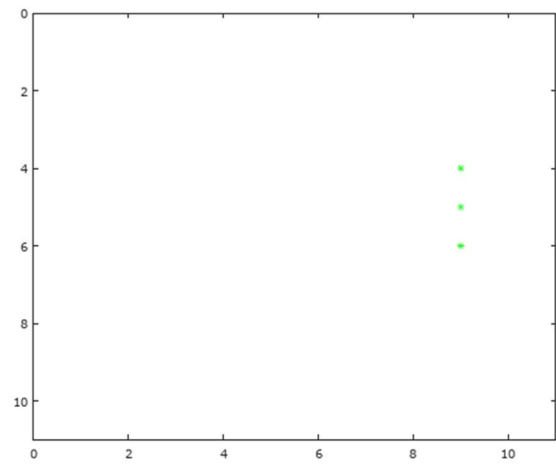
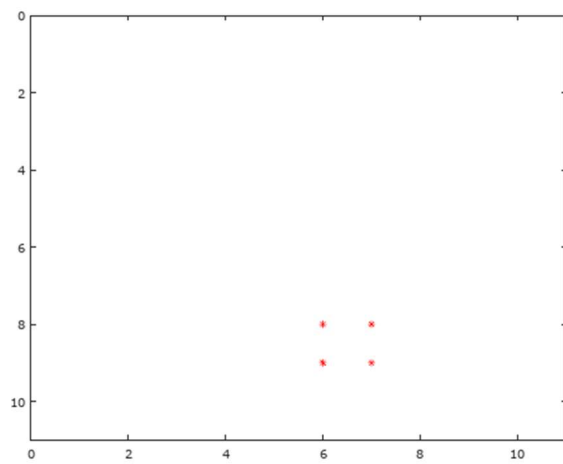
a. Géométrie spatiale des chambres

Pour la géométrie spatiale des chambres nous avons décidé de choisir des chambres à la géométrie légèrement plus complexe que celle fournie dans le code initial.

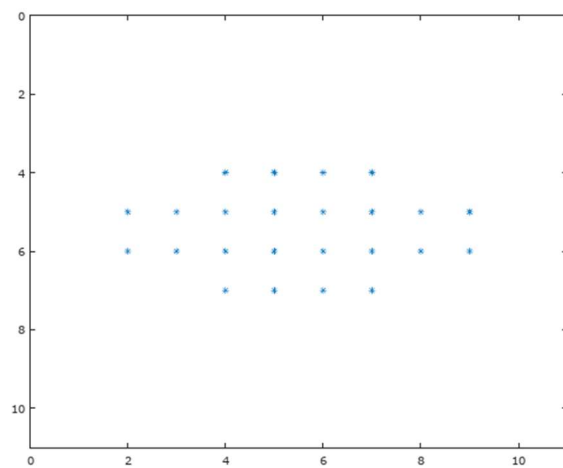
Chambre 1 :



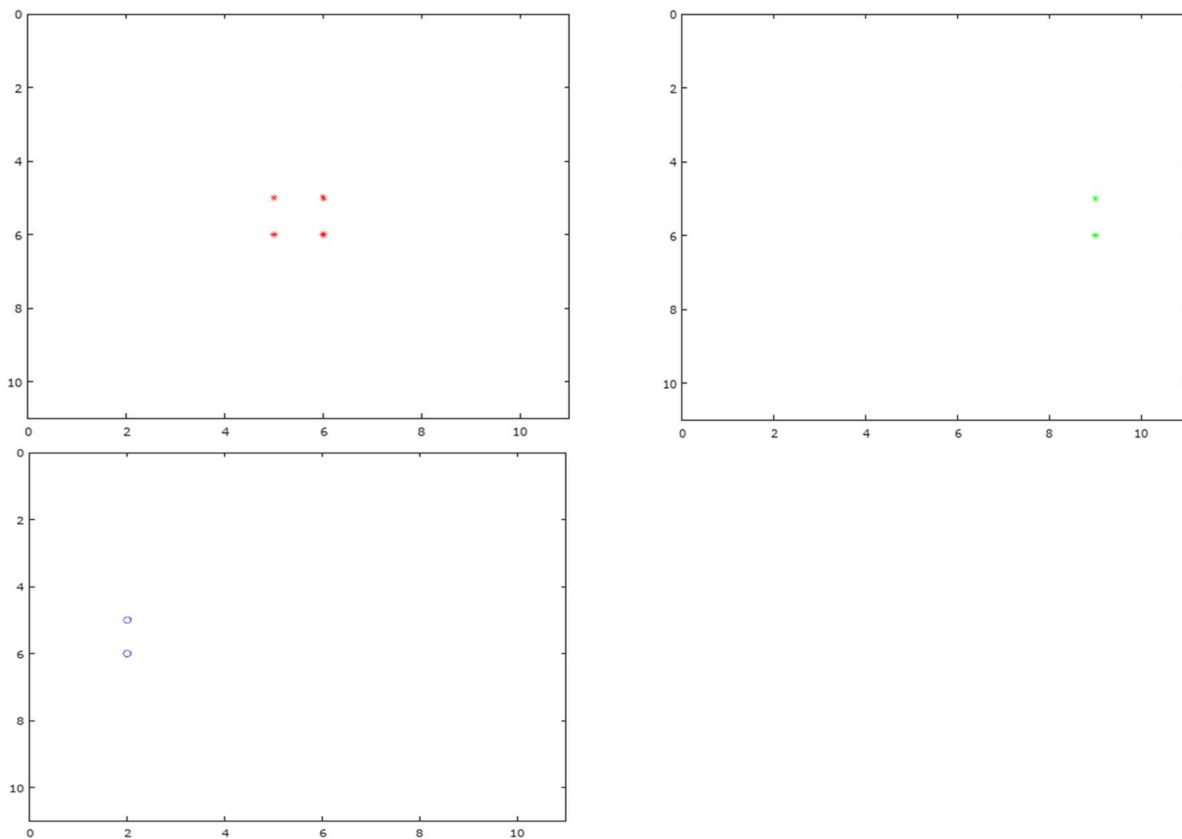
Nous avons ici le chauffage en rouge, la fenêtre en verte et la porte en bleue :



Chambre 2 :



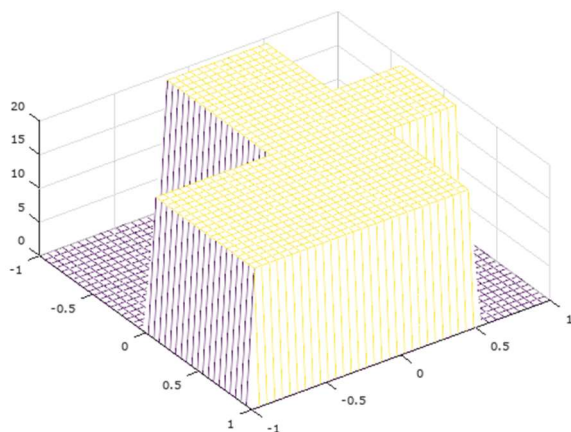
Nous avons ici le chauffage en rouge, la fenêtre en verte et la porte en bleue :



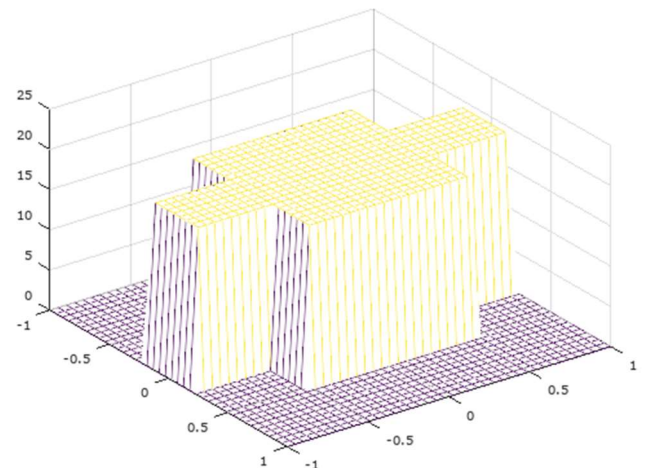
b. Température ambiante en été

Après avoir implémenté la position de la fenêtre et de la porte dans notre code. En ayant fait attention d'appliquer les conditions de Neumann et de Dirichlet au bon endroit. On considère dans les paramètres initiaux de notre fonction que la porte et la fenêtre sont à 20 C. On a alors les résultats suivants :

Pour la chambre 1 :



Pour la chambre 2 :



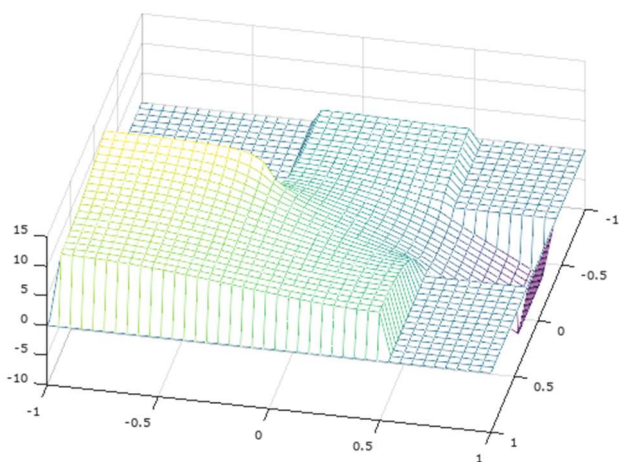
Pour $n=40$, $ot=20$, $dt=20$, $ht=0$

Pour les deux chambres on observe que la température est uniforme dans toute la pièce et est égale à 20 C.

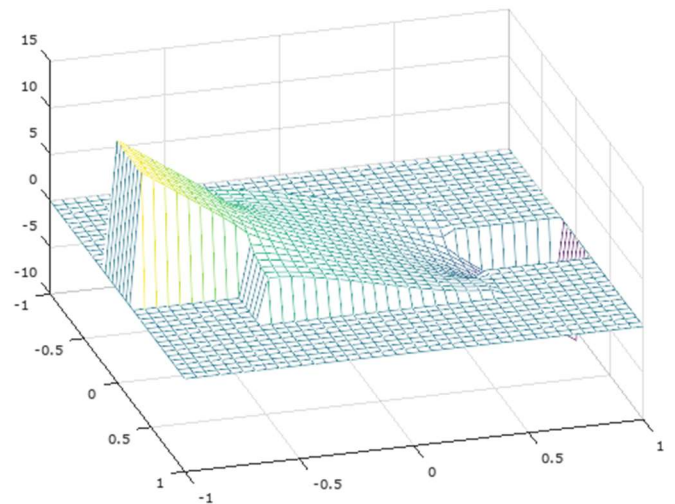
c. Température ambiante en hiver

Maintenant on considère dans les paramètres initiaux de notre fonction que la porte est à 15 C et la température extérieure à -10 C. On a alors le résultat suivant :

Pour la chambre 1 :



Pour la chambre 2 :



Pour $n=40$, $ot=-10$, $dt=15$, $ht=0$

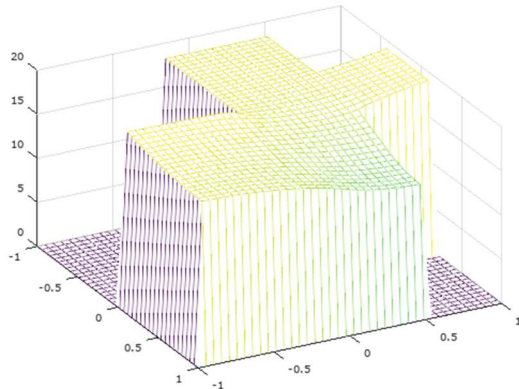
Pour les deux chambres on observe que la température est plus élevée au niveau de la porte et est faible au niveau de la fenêtre. En utilisant la fonction mean (voir la fin du code de la partie 1) on trouve que la température moyenne est de 3.93 C dans la chambre 1 et de 2.50 C dans la chambre 2.

d. Résultats et conclusion avec chauffage

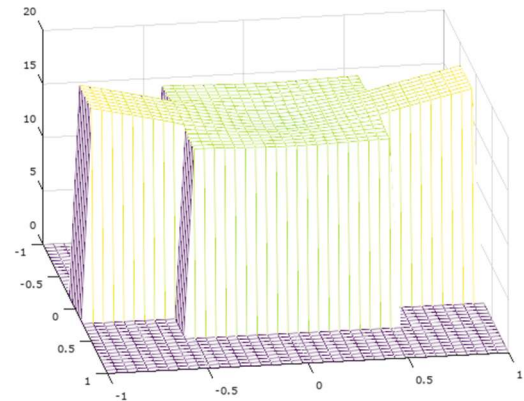
Nous ajoutons ensuite à notre code le chauffage pour faire en sorte que la température de la chambre soit confortable. On décide de définir la température confortable dans une chambre vers les 18 C. On obtient alors les résultats suivants sur les deux cas précédents :

Pour la pièce à la température ambiante en été :

Pour la chambre 1 :



Pour la chambre 2 :

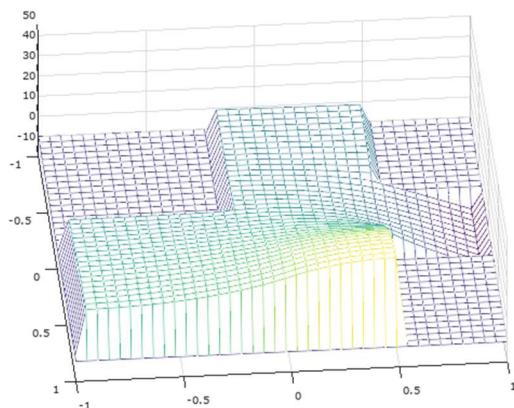


Pour $n=20$, $ot=-10$, $dt=20$.

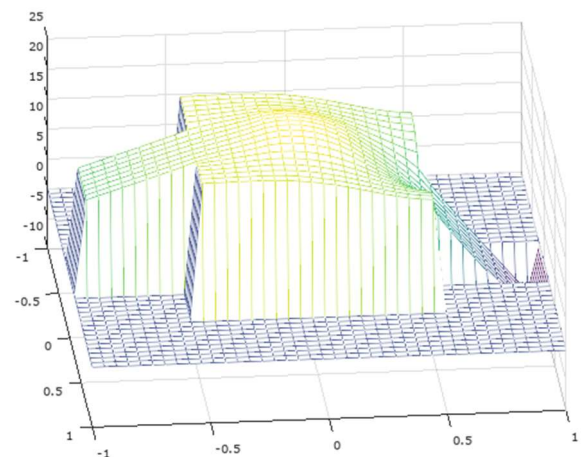
Comme nous avons fixé la température idéale dans une chambre à 18 C on va faire fonctionner le chauffage comme une climatisation c'est-à-dire qu'on veut qu'il refroidisse la pièce c'est pour cela que l'on a fixé un ht négatif. Avec une puissance de chauffage $ht=-22$ dans la chambre 1 et $ht=-17$ dans la chambre 2 on obtient une température moyenne dans la chambre 18 C environ dans chacune des chambres.

Pour la pièce à la température ambiante en hiver :

Pour la chambre 1 :



Pour la chambre 2 :



Pour $n=40$, $ot=-10$, $dt=15$

Avec une puissance de chauffage $ht=138$ dans la chambre 1 et $ht=137$ dans la chambre 2 on arrive à obtenir une température moyenne dans la chambre 18 C environ dans chacune des chambres.

Dans la chambre 1 les écarts de température de la pièce sont importants. On observe même une température de 40°C au niveau du chauffage.

Notre chauffage semble mieux placé dans la chambre 2 et grâce à la géométrie de la pièce la température est plus homogène.

Pour la température ambiante en été notre condition sur le chauffage pour la chambre 2 semble convenir pour rafraîchir la pièce de façon homogène.

On en déduit donc l'importance de la localisation du chauffage dans la pièce pour réchauffer celle-ci.

III. Partie 2 : Simulation instationnaire

On introduit ici la notion temporelle du problème. On utilise donc l'équation de la chaleur instationnaire. Nous résolvons cette équation en utilisant 2 schémas : le schéma d'Euler explicite et le schéma d'Euler implicite.

a. Méthodes d'Euler explicite

En partant de l'équation instationnaire de la chaleur en 2 dimensions :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vartheta \Delta u + f \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) + f(x, y, t)$$

avec ϑ le coefficient de diffusion

En utilisant les développements en série de Taylor, la discrétisation de la dérivée seconde par rapport à x et celle par rapport à y et la dérivée temporelle on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, y_l, t_n) &\rightarrow \frac{u_{j+1,l}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j-1,l}^n}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_j, y_l, t_n) &\rightarrow \frac{u_{j,l+1}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j,l-1}^n}{\Delta y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, y_l, t_n) &\rightarrow \frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^n}{\Delta t} \end{aligned}$$

On obtient donc le schéma d'Euler explicite :

$$\frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^n}{\Delta t} - \vartheta \frac{u_{j+1,l}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j-1,l}^n}{\Delta x^2} - \vartheta \frac{u_{j,l+1}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j,l-1}^n}{\Delta y^2} = f_{j,l}$$

On exprime finalement le schéma sous forme matricielle :

$$U^{n+1} = (I + \vartheta \Delta t A) U^n + \Delta t F$$

Avec :

$$U^n = \begin{pmatrix} u_{1,1}^n \\ \vdots \\ u_{n,n}^n \end{pmatrix} \text{ et } A \text{ la matrice Laplacienne}$$

En introduisant les conditions aux limites de Dirichlet et en utilisant le fait que la discrétisation en espace est égale sur x et y ($\Delta x = \Delta y$) on a :

$$\begin{cases} u_{0,l}^n = u_{Nx+1,l}^n = a \\ u_{j,0}^n = u_{j,Ny+1}^n = b \end{cases} \quad \text{et} \quad F = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \\ b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$$

b. Méthodes d'Euler implicite

De la même manière, on a le schéma d'Euler implicite :

$$\frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^n}{\Delta t} - \vartheta \frac{u_{j+1,l}^{n+1} - 2u_{j,l}^{n+1} + u_{j-1,l}^{n+1}}{\Delta x^2} - \vartheta \frac{u_{j,l+1}^{n+1} - 2u_{j,l}^{n+1} + u_{j,l-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = f_{j,l}$$

Qui sous forme matricielle s'écrit : $(I - \vartheta \Delta t A) U^{n+1} = U^n + \Delta t F$

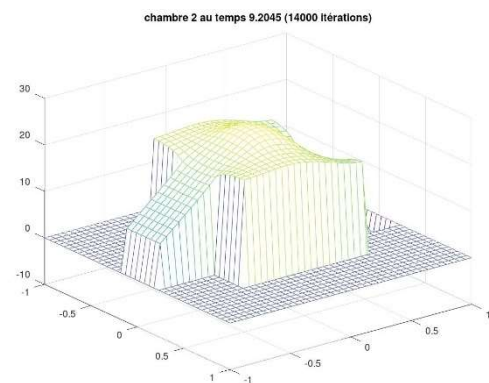
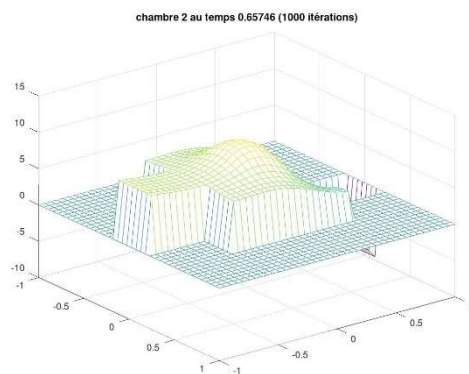
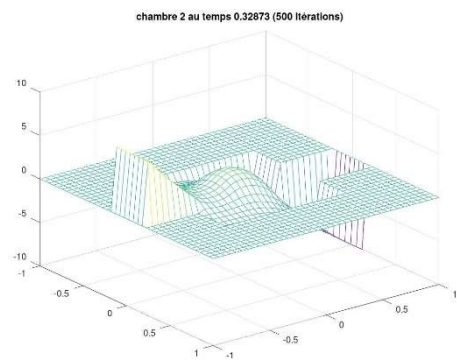
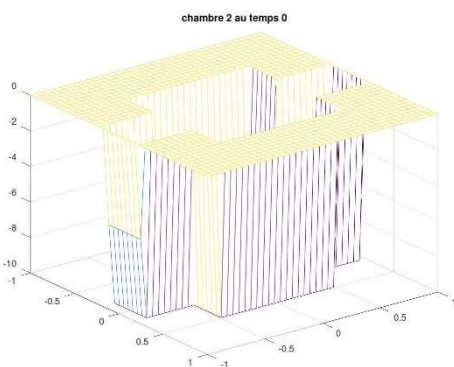
c. Visualisation

On posera, dans un premier temps, $\alpha = 2\vartheta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.5$ et $\vartheta = 1$.

Nous initialisation la température de la pièce à la température extérieure (ot).

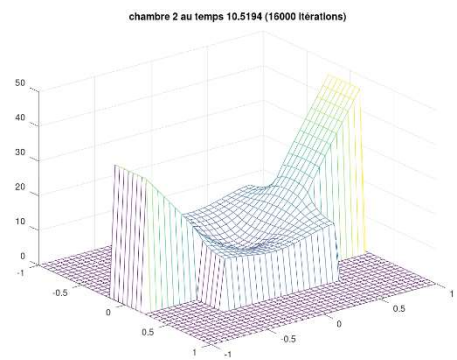
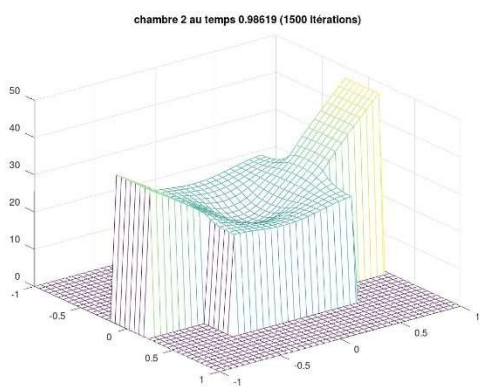
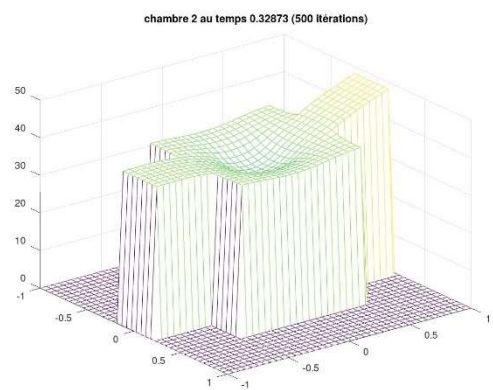
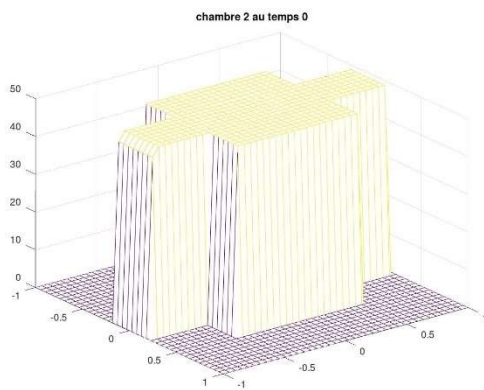
Dans le premier test, notre chambre est initialement froide car nous sommes partis en vacances au ski, bien que les remontées mécaniques soient fermées.

On utilise ici la chambre 2, avec comme conditions : -10°C sur la température extérieure, 8°C pour la température de la porte, une puissance de 170 pour le chauffage et $n=40$.



Le temps final est ici de $14000 \cdot \Delta t$, c'est-à-dire quasiment un temps $t=10$ qui correspond au temps que met le schéma pour converger avec une précision d'ordre 10^{-3} . La puissance du chauffage a été choisie pour que la température converge autour de 18°C .

Dans le second test, on se place en plein été, la température extérieure est très élevée et on met le radiateur en mode "clim". On définit la température extérieure à 50°C et la température de la porte à 40°C et la puissance du chauffage à -300 .



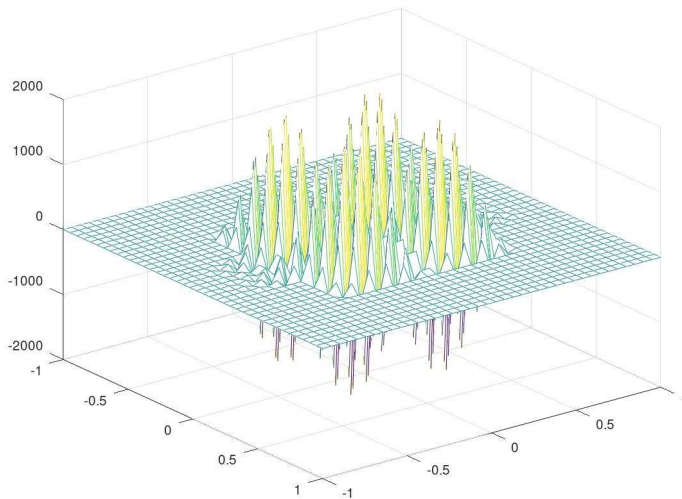
Le temps final est ici de $16000 \cdot \Delta t$, c'est-à-dire un peu plus grand que 10. La puissance du chauffage a également été choisie pour que la température converge autour de 18°C .

d. Analyse et différences entre les schémas

1. Etude de la stabilité

On remarque que le schéma d'Euler explicite est stable si la condition $\text{CFL} \leq 0.5$ sinon les température divergent à l'infini (voir schéma ci-dessous).

C'est pour cela que nous avons décidé d'implémenter Euler implicite. Cette méthode, contrairement à la précédente, est stable pour tout α .



Méthode d'Euler explicite pour $\alpha = 0.52$

Le schéma diverge vers l'infini.

2. Etude du temps d'exécution

Comparons maintenant le temps d'exécution des 2 méthodes en fonction du pas de discrétisation tout en gardant un temps total de 10 (en adaptant le nombre d'itération en fonction du Δt).

On garde ici les mêmes conditions que pour le test 1 (hiver).

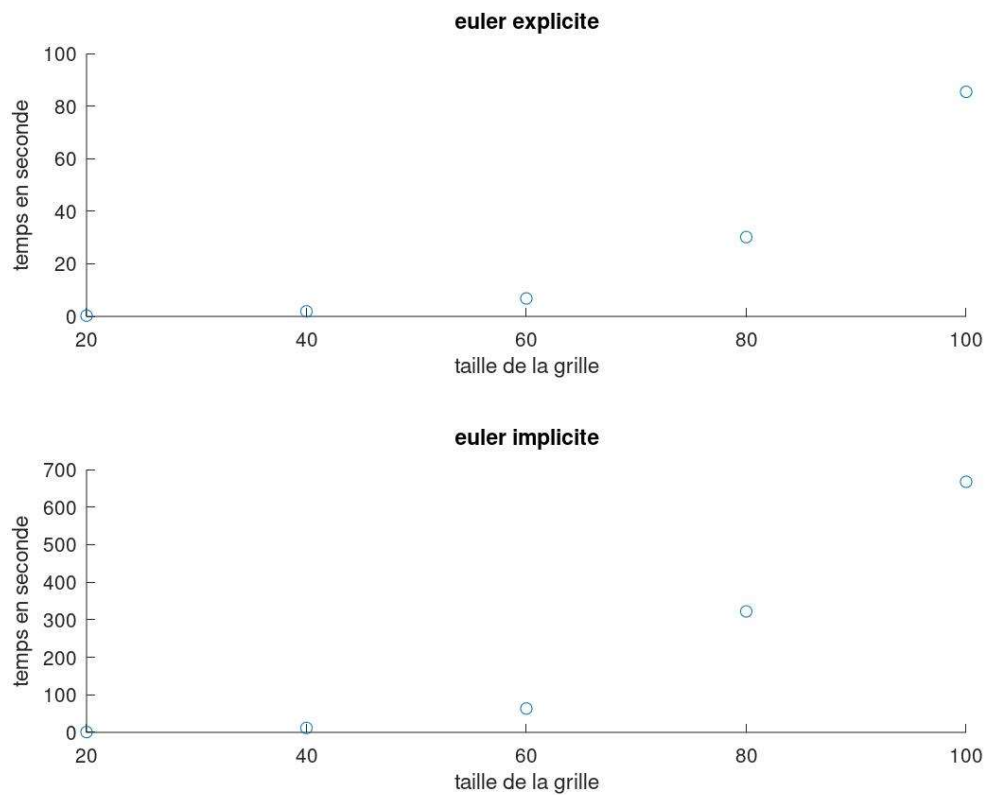
On remarque que le temps d'exécution d'Euler implicite est beaucoup plus important que pour la méthode d'Euler explicite.

Remarque : On constate que le temps d'exécution de la méthode d'Euler implicite est bien plus important que pour d'Euler explicite. Néanmoins la convergence est la même car une même température est atteinte par le même nombre d'itérations (donc le même temps) pour chacune des 2 méthodes.

C'est le calcul d'Euler implicite qui est plus coûteux à chaque itération.

La diminution du pas de discrétisation de l'espace (augmentation de n) induit un temps d'exécution plus long pour 2 raisons. D'abord car les calculs sont plus coûteux (les matrices sont plus 'grandes') mais aussi parce que le nombre d'itérations est plus important (le delta t est plus petit donc plus d'itération pour arriver au temps final t).

Graphe du temps d'exécution des méthodes explicite et implicite d'Euler en fonction de la longueur du maillage :



IV. Conclusion

Compte tenu des résultats précédents, on en déduit qu'il est préférable d'utiliser la méthode d'Euler implicite pour ce type de problème notamment lorsque le pas de discrétisation du temps est grand et le pas de discrétisation d'espace petit (lorsque $\alpha > 0.5$). Néanmoins, si le pas de discrétisation du temps est petit et le pas de discrétisation d'espace suffisamment grand ($\alpha < 0.5$) la méthode d'Euler explicite est plus adaptée car plus rapide à l'exécution.

Dans l'idéal, nous pourrions utiliser une méthode de décomposition afin de rendre les calculs matriciels de la méthode d'Euler implicite plus simples. Par exemple, en utilisant la méthode de décomposition LU. On allierait alors une rapidité d'exécution meilleure et une stabilité pour tout pas de discrétisation d'espace et du temps.