Équations aux dérivées partielles – TD 5
SOLUTIONS

Problème 1

1. L'erreur de troncature du schéma de Lax-Wendroff s'écrit

$$\mathcal{E}_j^n = \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} + V\frac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{2\Delta x} - \frac{V^2\Delta t}{2}\frac{u(x_{j+1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j-1},t_n)}{\Delta x^2}.$$

A l'aide des développements de Taylor et en utilisant l'équation vérifée par la solution on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_j^n &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3) + V\frac{\partial u}{\partial x} + V\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x^3) - \frac{V^2\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2\Delta t)\\
&= \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + V\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta x^2\Delta t)\\
&= \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + V\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta x^2\Delta t)\\
&= \frac{V\Delta x^2}{6}\left(1 - V^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta x^2\Delta t).
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'équation équivalente associée est bien

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{V\Delta x^2}{6}\left(1 - V^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

En discrétisant maintenant celle-ci, on obtiendra une erreur de troncature en $\mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta x^2\Delta t)$, d'où on voit que la précision sera ameliorée seulement si on prend Δx du même ordre que Δt. Dans ce cas, le schéma résultant sera d'ordre 3.

2. L'erreur de troncature du schéma de Crank-Nicolson s'écrit:

$$\mathcal{E}_j^n = \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} + V\frac{u(x_{j+1},t_{n+1}) - u(x_{j-1},t_{n+1})}{4\Delta x} + V\frac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{4\Delta x}.$$

En faisant les développements de Taylor et en utilisant léquation vérifée par la solution on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_j^n &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3)\\
&+ V\frac{\partial u}{\partial x} + V\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{V\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} + \frac{V\Delta t^2}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x} + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta x^2\Delta t)\\
&= \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + V\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)\\
&+ \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{V\Delta t^2}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x} + V\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta x^2\Delta t)\\
&= \frac{V}{12}\left(2\Delta x^2 + V^2\Delta t^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta x^2\Delta t).
\end{aligned}$$

Le schéma est donc d'ordre 2 en temps et espace. Ceci pourrait être amélioré en discrétisant l'équation équivalente associée

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{V}{12}\left(2\Delta x^2 + V^2\Delta t^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

à condition de prendre Δx du même ordre que Δt.

Pour l'étude de la stabilité, on injectera un mode de Fourier $G(k)^n e^{2i\pi kj\Delta x}$ dans le schéma afin de calculer le facteur d'amplification. On obtiendra ainsi après simplification:

$$\frac{G(k)-1}{\Delta t} + VG(k)\frac{e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x}}{4\Delta x} + V\frac{e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x}}{4\Delta x} = 0$$

ce qui conduit après calcul, à la stabilité du schéma.

$$G(k)\left(2 + i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right) = \left(2 - i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right) \Rightarrow |G(k)| = 1.$$

Problème 2. L'erreur de troncature du schéma décentré

$$\mathcal{E}_j^n = \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} + V\frac{u(x_j,t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{\Delta x} - \nu\frac{u(x_{j+1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j-1},t_n)}{\Delta x^2}.$$

A l'aide des développements de Taylor et en utilisant l'équation vérifée par la solution on a

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_j^n &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + V\frac{\partial u}{\partial x} - V\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)\\ &= \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2).\end{aligned}$$

On voit bien que le schéma est au moins d'ordre 1 en temps et en espace. Par contre les termes d'ordre dominant ne peuvent pas être remplacés d'une manière simple. En effet, en utilisant l'équation à l'interieur on a que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\nu V\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \nu^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

ce qui fait que l'erreur de troncature s'écrit comme

$$\mathcal{E}_j^n = \frac{V^2\Delta t - V\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu V\Delta t V\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\nu^2\Delta t}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

La discrétisation de l'equation équivalente, obtenue en ajoutant le terme d'ordre 2 n'aiderait pas à l'augmentation de l'ordre en temps du schéma, car il restent des termes d'ordre Δt dans l'erreur de troncature, mais seulement de la précision en espace.