

où $A(k)$ est désormais une **matrice** d'amplification (et non plus un facteur scalaire). On appelle **condition de stabilité de Von Neumann** la condition

$$\rho(A(k)) \leq 1 \text{ pour tout mode } k \in \mathbb{Z}, \quad (2.27)$$

où $\rho(A(k))$ est le rayon spectral de la matrice $A(k)$. Comme pour une matrice quelconque B on a

$$\|B\| \geq \rho(B) \text{ et } \|B^n\| \geq \rho(B)^n,$$

il est clair que la condition de stabilité de Von Neumann est une **condition nécessaire** de stabilité L^2 du schéma (donc de convergence). Lorsque la matrice $A(k)$ est normale, elle vérifie $\|A(k)\|_2 = \rho(A(k))$ et $\|A(k)^n\|_2 = \|A(k)\|_2^n$ (voir le Lemme 13.1.6), donc la condition de Von Neumann (2.27) est nécessaire et suffisante (nous avons eu la "chance" lors de la démonstration du Lemme 2.2.23 de tomber dans ce cas favorable). Cependant, si $A(k)$ n'est pas normale, alors en général la condition de stabilité de Von Neumann n'est **pas suffisante** et il faut faire une analyse beaucoup plus délicate de $A(k)$ (et notamment de sa diagonalisation ou non). •

Remarque 2.2.25 Le Théorème de Lax 2.2.20 se généralise sans difficulté aux schémas multiniveaux si on choisit la norme L^2 . La méthode de démonstration est inchangée : elle utilise l'analyse de Fourier et la notation vectorielle (2.24). •

Remarque 2.2.26 Tout ce que nous venons de dire sur la stabilité et la convergence des schémas multiniveaux se généralise immédiatement aux schémas pour des systèmes d'équations. Dans ce dernier cas, on a aussi affaire à une écriture vectorielle de la relation de récurrence (2.25) et à une matrice d'amplification (au lieu d'un facteur scalaire). •

Exercice 2.2.6 Montrer que le schéma de Gear (2.8) est inconditionnellement stable et donc convergent en norme L^2 .

Exercice 2.2.7 Montrer que le schéma de DuFort-Frankel (2.7) est inconditionnellement stable en norme L^2 . Montrer que, si on fait tendre Δt et Δx vers 0 de telle manière que le rapport $\Delta t/(\Delta x)^2$ reste borné, alors le schéma de DuFort-Frankel est convergent. (On dit qu'il est "conditionnellement" convergent.)

2.2.6 Le cas multidimensionnel

La méthode des différences finies s'étend sans difficulté aux problèmes en plusieurs dimensions d'espace. Considérons par exemple l'équation de la chaleur en deux dimensions d'espace (le cas de trois ou plus dimensions d'espace n'est pas plus compliqué, du moins en théorie) dans le domaine rectangulaire $\Omega = (0, 1) \times (0, L)$ avec des conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ pour } (x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0, x, y) = u_0(x, y) \text{ pour } (x, y) \in \Omega \\ u(t, x, y) = 0 \text{ pour } t \in \mathbb{R}_*^+, (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.28)$$

Pour discrétiser le domaine Ω , on introduit deux pas d'espace $\Delta x = 1/(N_x + 1) > 0$ et $\Delta y = L/(N_y + 1) > 0$ (avec N_x et N_y deux entiers positifs). Avec le pas de temps $\Delta t > 0$, on définit ainsi les noeuds d'un maillage régulier (voir la Figure 2.1)

$$(t_n, x_j, y_k) = (n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \text{ pour } n \geq 0, 0 \leq j \leq N_x + 1, 0 \leq k \leq N_y + 1.$$

On note $u_{j,k}^n$ la valeur d'une solution discrète approchée au point (t_n, x_j, y_k) , et $u(t, x, y)$ la solution exacte de (2.28).

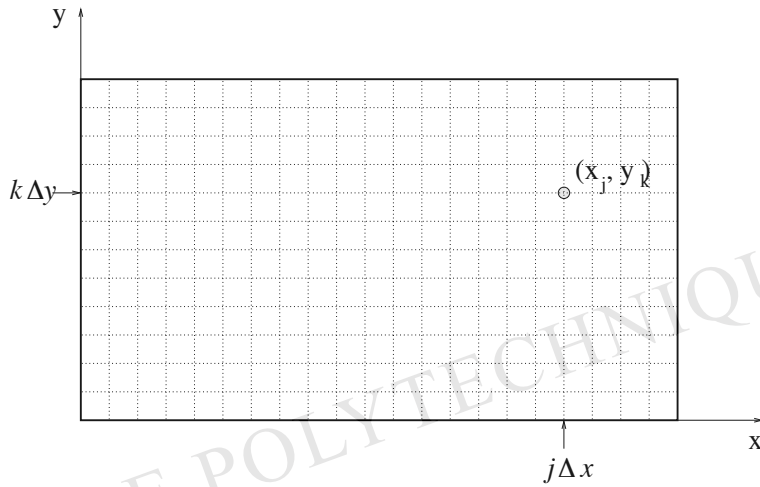


FIG. 2.1 – Maillage d'un rectangle en différences finies.

Les conditions aux limites de Dirichlet se traduisent, pour $n > 0$, en

$$u_{0,k}^n = u_{N_x+1,k}^n = 0, \forall k, \text{ et } u_{j,0}^n = u_{j,N_y+1}^n = 0, \forall j.$$

La donnée initiale est discrétisée par

$$u_{j,k}^0 = u_0(x_j, y_k) \forall j, k.$$

La généralisation au cas bidimensionnel du **schéma explicite** est évidente

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j+1,k}^n}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j,k+1}^n}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (2.29)$$

pour $n \geq 0$, $j \in \{1, \dots, N_x\}$ et $k \in \{1, \dots, N_y\}$. La seule différence notable avec le cas unidimensionnel est le caractère deux fois plus sévère de la condition CFL.

Exercice 2.2.8 Montrer que le schéma explicite (2.29) est stable en norme L^∞ (et même qu'il vérifie le principe du maximum) sous la condition CFL

$$\frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Nous illustrons le schéma explicite (2.29) (auquel nous ajoutons un terme de convection) par la Figure 2.2 qui représente la convection-diffusion d’une “bosse” (le coefficient de diffusion vaut 0.01 et la vitesse (1., 0.)).

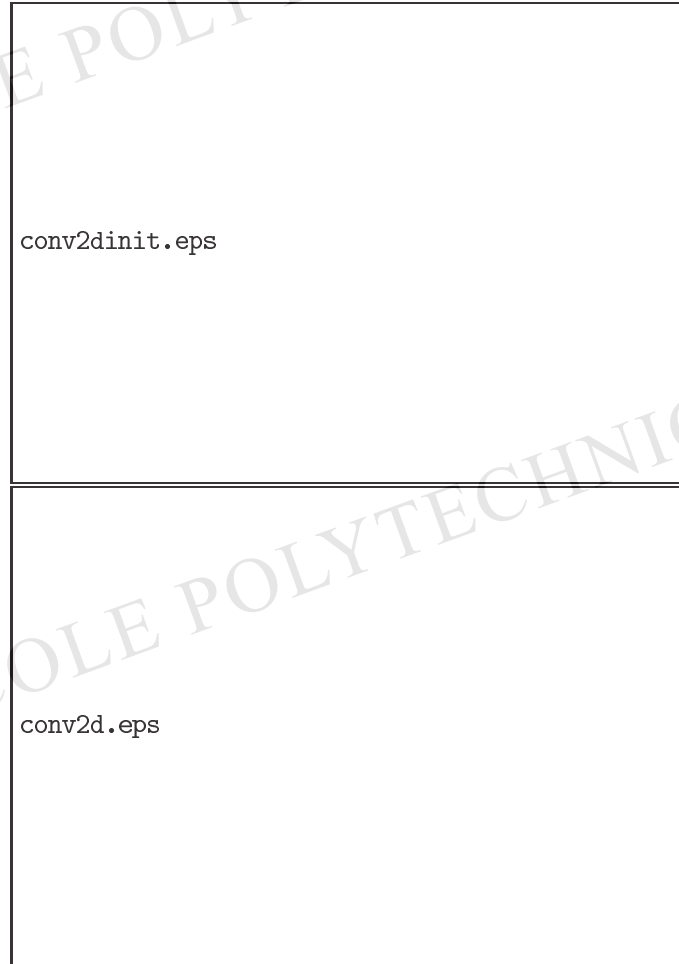


FIG. 2.2 – Schéma explicite pour l’équation de convection-diffusion en deux dimensions : donnée initiale (haut) et solution (bas).

De même, on a le **schéma implicite**

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j+1,k}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = 0. \quad (2.30)$$

Remarquons que le schéma implicite nécessite, pour calculer u^{n+1} en fonction de u^n , la résolution d’un système linéaire sensiblement plus compliqué qu’en une dimension

d'espace (la situation serait encore pire en trois dimensions). Rappelons qu'en dimension un, il suffit d'inverser une matrice tridiagonale. Nous allons voir qu'en dimension deux la matrice a une structure moins simple. L'inconnue discrète $u_{j,k}^n$ est indexée par deux entiers j et k , mais en pratique on utilise un seul indice pour stocker u^n sous la forme d'un vecteur dans l'ordinateur. Une manière (simple et efficace) de ranger dans un seul vecteur les inconnues $u_{j,k}^n$ est d'écrire

$$u^n = (u_{1,1}^n, \dots, u_{1,N_y}^n, u_{2,1}^n, \dots, u_{2,N_y}^n, \dots, u_{N_x,1}^n, \dots, u_{N_x,N_y}^n).$$

Remarquons qu'on a rangé les inconnues "colonne par colonne", mais qu'on aurait aussi bien pu le faire "ligne par ligne" en "déroulant" d'abord l'indice j plutôt que k (N_x est le nombre de colonnes et N_y celui de lignes). Avec cette convention, le schéma implicite (2.30) requiert l'inversion de la matrice symétrique tridiagonale "par blocs"

$$M = \begin{pmatrix} D_1 & E_1 & & & 0 \\ E_1 & D_2 & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & E_{N_x-2} & D_{N_x-1} & E_{N_x-1} \\ 0 & & & E_{N_x-1} & D_{N_x} \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux D_j sont des matrices carrées de taille N_y

$$D_j = \begin{pmatrix} 1 + 2(c_y + c_x) & -c_y & & & 0 \\ -c_y & 1 + 2(c_y + c_x) & -c_y & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -c_y & 1 + 2(c_y + c_x) & -c_y \\ 0 & & & -c_y & 1 + 2(c_y + c_x) \end{pmatrix}$$

avec $c_x = \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}$ et $c_y = \frac{\nu \Delta t}{(\Delta y)^2}$, et les blocs extra-diagonaux $E_j = (E_j)^t$ sont des matrices carrées de taille N_y

$$E_j = \begin{pmatrix} -c_x & 0 & & & 0 \\ 0 & -c_x & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -c_x & 0 \\ 0 & & & 0 & -c_x \end{pmatrix}.$$

Au total la matrice M est pentadiagonale et symétrique. Cependant les cinq diagonales ne sont pas contiguës, ce qui entraîne une augmentation considérable du coût de la résolution d'un système linéaire associé à M (voir l'annexe sur l'analyse numérique matricielle et notamment les Remarques 13.1.21 et 13.1.41). La situation serait encore pire en trois dimensions.

Exercice 2.2.9 Montrer que le schéma de Peaceman-Rachford

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j,k+1}^n}{2(\Delta y)^2} = 0$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{2(\Delta y)^2} = 0.$$

est précis d'ordre 2 en espace et temps et inconditionnellement stable en norme L^2 (pour des conditions aux limites de périodicité dans chaque direction).

A cause de son coût de calcul élevé, on remplace souvent le schéma implicite par une généralisation à plusieurs dimensions d'espace de schémas unidimensionnels, obtenue par une technique de **directions alternées** (dite aussi de séparation d'opérateurs, ou **splitting** en anglais). L'idée est de résoudre, au lieu de l'équation bidimensionnelle (2.28), alternativement les deux équations unidimensionnelles

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

dont la "moyenne" redonne (2.28). Par exemple, en utilisant dans chaque direction un schéma de Crank-Nicholson pour un demi pas de temps $\Delta/2$, on obtient un **schéma de directions alternées**

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j+1,k}^n}{2(\Delta x)^2} = 0$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{2(\Delta y)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k+1}^{n+1/2}}{2(\Delta y)^2} = 0 \quad (2.31)$$

L'avantage de ce type de schéma est qu'il suffit, à chaque demi pas de temps, d'inverser une matrice tridiagonale de type unidimensionnel (c'est donc un calcul peu cher). En trois dimensions, il suffit de faire trois tiers-pas de temps et les propriétés du schéma sont inchangées. Ce schéma est non seulement stable mais consistant avec l'équation bidimensionnelle (2.28).

Exercice 2.2.10 Montrer que le schéma de directions alternées (2.31) est précis d'ordre 2 en espace et temps et inconditionnellement stable en norme L^2 (pour des conditions aux limites de périodicité dans chaque direction).

Concluons cette section par quelques considérations pratiques à propos de la méthode des différences finies. Son avantage principal est sa simplicité aussi bien conceptuelle que de mise en oeuvre informatique. Elle présente cependant un certain nombre de défauts qui, pour de nombreux problèmes complexes, lui font préférer d'autres méthodes comme celle des éléments finis (voir les Chapitres 6 et 8). Une des principales

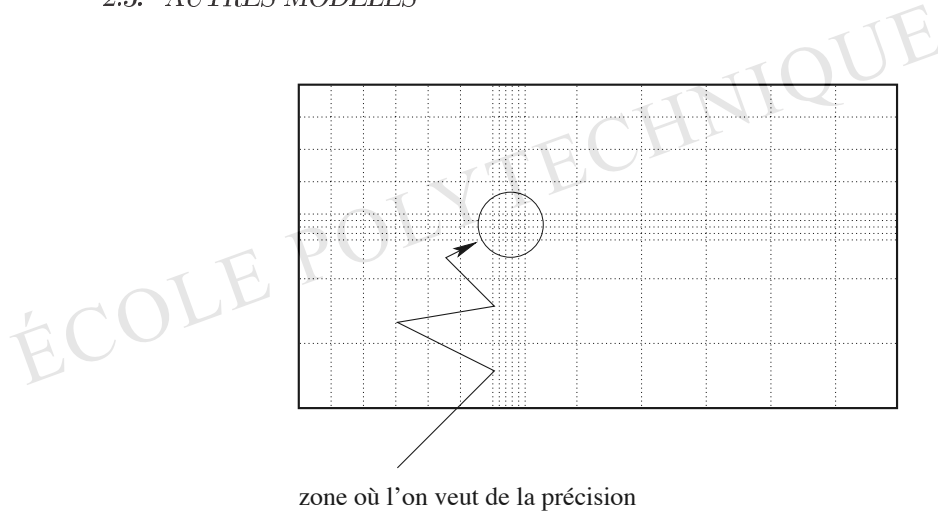


FIG. 2.3 – Raffinement de maillage en différences finies : la zone entourée est celle où l'on veut plus de précision.

limitations de la méthode est qu'elle ne fonctionne que pour des maillages réguliers, dits **rectangulaires**. Il n'est pas toujours facile de paver un domaine quelconque de l'espace par des mailles rectangulaires ! Par ailleurs, il n'est pas possible de raffiner localement le maillage pour avoir une meilleure précision en un endroit précis du domaine de calcul. Il est possible de faire varier dans chaque direction le pas d'espace mais cette variation est uniforme dans les directions perpendiculaires (Δx et Δy peuvent changer le long des axes x et y , respectivement, mais cette variation est uniforme dans les directions orthogonales ; voir la Figure 2.3). Un raffinement de maillage en différences finies produit donc des mailles élancées loin de la zone d'intérêt. Par ailleurs, la théorie comme la pratique des différences finies se compliquent singulièrement lorsque les coefficients dans les équations aux dérivées partielles sont variables et lorsque les problèmes sont non-linéaires.

2.3 Autres modèles

2.3.1 Équation d'advection

Nous considérons l'équation d'advection en une dimension d'espace dans le domaine borné $(0, 1)$ avec une vitesse constante $V > 0$ et des conditions aux limites de périodicité

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t, x + 1) = u(t, x) \text{ pour } (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0, 1). \end{cases} \quad (2.32)$$