

TD 8 – Formulation variationnelle

1. On suppose que Ω est un ouvert borné régulier de classe \mathcal{C}^1 . A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et unicité de solution faible du problème aux limites suivant (conditions de Robin) :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

où $f \in L^2(\Omega)$. On admettra l'inégalité suivante (qui généralise l'inégalité de Poincaré) :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

2. On considère le problème des plaques suivant:

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

où f est continue sur $\bar{\Omega}$.

a. Trouver une formulation variationnelle de ce problème sur l'espace $H = \{v \in H^2(\Omega), v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \partial\Omega\}$.

b. Montrer que u est solution faible si et seulement si elle minimise sur H une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.

3. Soit Ω un ouvert régulier. On considère l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u + V \cdot \nabla u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

où V est un champ de divergence nulle.

a. Proposer une formulation variationnelle.

b. Peut-on associer à ce problème un problème de minimisation ?

c. Montrer que (3) admet au plus une solution.

4. On considère le problème aux limites de Neumann suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

où f et g sont continues sur $\bar{\Omega}$ et Ω est un ouvert borné régulier et connexe.

a. Trouver une formulation variationnelle de ce problème sur l'espace $H^1(\Omega)$.

b. Montrer qu'une condition nécessaire d'existence de solution de (4) portant sur f et g (condition dite de compatibilité) est la suivante:

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma = 0.$$

c. Montrer que u est solution faible si et seulement si elle minimise sur $H^1(\Omega)$ une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.

d. Montrer qu'on n'a pas unicité de solution.