Équations aux dérivées partielles – Série 4

Le but de cette série d'exercices est d'illuster la propriété de stabilité en norme L^∞ et en norme L^2 de quelques schémas appliqués à l'équation de la chaleur. Pour la stabilité L^∞ on vérifiera le principe du maximum discret. Pour la stabilité L^2 on calculera le facteur d'amplification de chaque schéma en y injectant un mode de Fourier et on établira sous quelles conditions ce facteur d'amplification est inferieur à un en module.

Considérons l'équation de la chaleur en une dimension d'espace dans la domaine borné $(0,1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \ \forall x \in (0,1). \end{cases}$$

On discrétise le domaine en utilisant un maillage régulier $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$, $\forall n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ où $\Delta x = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$. Les conditions aux limites sont des conditions de Dirichlet homogènes: $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_*^+$.

On se propose d'étudier les schémas suivants:

1. *Schéma d'Euler explicite*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

2. *Schéma d'Euler implicite*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0.$$

3. *Schéma de Crank-Nicolson*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} = 0.$$

4. *Le θ schéma*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta\nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - (1-\theta)\nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0.$$

5. *Schéma aux six points*

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{12\Delta t} &+ \frac{5(u_j^{n+1} - u_j^n)}{6\Delta t} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{12\Delta t} + \\ &- \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} = 0. \end{aligned}$$

6. *Schéma de DuFort-Frankel*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

Stabilité en norme L^∞
1) Montrer que le schéma de Crank-Nicolson est stable en norme L^∞ si $\nu\Delta t \le \Delta x^2$.
2) Montrer que que le schéma de DuFort-Frankel et Euler explicite sont stables en norme L^∞ si $2\nu\Delta t \le \Delta x^2$.
3) Que peut-on dire de la stabilité L^∞ du schéma d'Euler implicite?

Stabilité en norme L^2
1) Montrer que le schéma explicite est stable en norme L^2 sous la condition $2\nu\Delta t \le \Delta x^2$ et que le schéma implicite est inconditionnellement stable.
2) Montrer que le θ- schéma est stable en norme L^2 inconditionnellement si $1/2 \le \theta \le 1$ et sous la conditions CFL $2(1-2\theta)\nu\Delta t \le (\Delta x)^2$ si $0 \le \theta \le 1$.
3) Montrer que le schéma de DuFort-Frankel est inconditionnellement stable en norme L^2. Montrer que si on fait tendre Δt et Δx simultanement vers 0 de manière que le rapport $\Delta t/\Delta x$ tende aussi vers 0, alors le schéma de DuFort-Frankel est convergent (on dit qu'il est "conditionnellement" convergent).

Evaluation du cours Équations aux Dérivées Partielles :

- Un contrôle écrit le mercredi 24 octobre (pendant la séance de TD).
- Une note sur les exercices des TDs: présence au tableau pendant les séances.
- Un examen écrit durant la session d'examens.

La note finale est : $\frac{1}{3}$(note contrôle cont.) + $\frac{1}{3}$(note exercices TD) + $\frac{1}{3}$(note examen).