Équations aux dérivées partielles – TD 2

Le but de cette série d'exercices est d'illuster la propriété de stabilité de quelques schémas appliqués aux équations de la chaleur et d'advection à travers le principe du maximum discret. On considérera les schémas explicite et implicite pour l'équation de la chaleur et explicite decentré pour l'équation d'advection.

1. On veut approcher l'équation de la chaleur en une dimension d'espace. Considérons le schéma aux différences finies *explicite* suivant
$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}-\nu\frac{u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n}{\Delta x^2}=0,\ n>0, j\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$
avec u_j^0 donnés par une condition initiale.
a) Montrer que si la condition CFL (Courant Friedrichs Lewy) suivante est vérifée
$$\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\leq\frac{1}{2} \tag{2}$$
alors u_j^{n+1} peut s'écrire comme combinaison convexe[1] des valeurs au temps précédent u_{j-1}^n, u_j^n et u_{j+1}^n. En déduire que si la donnée initiale est bornée par deux constantes m et M alors les mêmes inégalités restent vraies pour tous les temps ultérieurs c.a.d.
$$m\leq u_j^0\leq M, \forall j\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\leq u_j^n\leq M, \forall j\in\mathbb{Z}, \forall n\geq 0. \tag{3}$$
On dit que le *principe du maximum discret* est vérifié et le schéma est *stable* à condition que (2) soit vérifiée (ou *conditionnellement stable*).
b) Supposons maintenant que la condition CFL (2) ne soit par vérifiée. Montrer que si la solution initiale est donnée par $u_j^0=(-1)^j$, u_j^n explose, c.a.d. tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Dans ce cas on dit que le schéma est *instable.*

2. On veut approcher l'équation de la chaleur en une dimension d'espace par le schéma aux différences finies *implicite* suivant
$$\begin{cases}\dfrac{u_j^n-u_j^{n-1}}{\Delta t}-\nu\dfrac{u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n}{\Delta x^2} & = & 0,\ n>1, 0<j<J,\\ u_0^n=u_J^n & = & 0,\ \forall n\geq 0.\end{cases} \tag{4}$$
Il s'agit ici d'un problème aux limites où on a imposé des conditions de Dirichlet.
a) Si on note par $U^n=(u_j^n)_{1\leq j\leq J}$ le vecteur des valeurs inconnues à l'instant n, vérifier qu'on peut calculer de manière unique U^n en fonction de U^{n-1}, en résolvant un système linéaire de la forme
$$AU^n=U^{n-1}$$
dont on précisera la matrice. (Il faudra ensuite montrer que la matrice est inversible ce qui entraînera l'unicité).
b) Montrer que pour tous les temps $t_n\geq 0$ le principe du maximum discret (3) est vérifié sans aucune condition sur le pas de temps Δt et le pas d'espace Δx. On dit que le schéma est *inconditionnellement stable.*

[1] combinaison linéaire où tous les coéfficients sont positifs et leur somme vaut 1.

3. Considérons maintenat le schéma explicite *décentré amont* en tant qu'approximation par différences finies de l'équation d'advection avec $V > 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0,\, n > 0. \tag{5}$$

a) Montrer que sous une nouvelle condition CFL, différente de (2)

$$\frac{V\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{6}$$

le schéma (5) vérifie le principe du maximum discret et donc il est stable.
b) Montrer que si la condition (6) n'est pas satisfaite, le schéma décentré amont n'est pas stable pour la condition initiale donnée par $u_j^0 = (-1)^j$.

4. Le but de cet exercice est de montrer que le problème de Cauchy pour le Laplacien est mal posé. Prenons un domaine bidimensionnel $\Omega = (0,1) \times (0, 2\pi)$. Nous considérons le problème de Cauchy suivant en x et le problème des valeurs aux limites en y

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & = & 0, & x \in \Omega, \\ u(x,0) = u(x,2\pi) & = & 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,y) = 0, \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) & = & -ne^{-\sqrt{n}}\sin(ny), & 0 < y < 2\pi. \end{array}\right.$$

a) Vérifier que $u(x,y) = -e^{-\sqrt{n}}\sin(ny)\sinh(nx)$ est une solution.
b) Montrer que la condition initiale et toutes ses dérivées en $x = 0$ convergent uniformément vers 0, tandis que, pour tout $x > 0$, la solution $u(x,y)$ et toutes ses dérivées sont non bornées lorsque n tend vers l'infini.