Considérons l'équation de la chaleur en une dimension d'espace dans la domaine borné (a, b):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \, \forall (x,t) \in (a,b) \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \, \forall x \in (a,b). \end{cases}$$

On discrétise le domaine en utilisant un maillage régulier $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$, $\forall n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ où $\Delta x = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$. Les conditions aux limites sont des conditions de Dirichlet homogènes: $u(a,t) = u(b,t) = 0$, $\forall t$.

Le but de cette séance dédiée aux travaux pratiques est de tester numériquement les propriétés de consistance et stabilité pour les schémas d'Euler implicite et explicite dans un premier temps et ensuite pour le schéma de Crank-Nicolson et theta-schéma. L'étude théorique de ces propriétés a été faite dans le TD précédent.

Étude du schéma d'Euler explicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \Leftrightarrow u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

- On va démarrer par une etude de *stabilité* on considérant un calcul sur l'intervalle $(-10, 10)$ avec une solution initiale $u_0(x) = \max(0, 1 - x^2)$.

- En faisant tourner le programme `chaleur_explicite` pour différentes valeurs du nombre CFL on constate que si $CFL > 0.5$ des oscillations apparaissent.

- Noter que dans le cas on fait un estimation de la solution exacte en calculant d'une façon approché la convolution par un noyaux gaussien.

- Pour l'étude de *consistance* on va changer de cas test en considérant un situation où l'on connait la solution exacte (construction à l'aide de la méthode des variables séparées). On va se placer sur l'intervalle $(0, L)$ avec une solution initiale $u_0(x) = \sin(k\pi/Lx)$ comme dans le programme `chaleur_explicite2`. On peut aussi remarquer au passage que le schéma peut s'écrire sous une forme plus compacte, matricielle.

- On va faire tourner le programme `chaleur_explicite2` pour un pas de temps très petit (prenons par exemple CFL=0.01) afin que l'erreur d'approximation soit dominée par celle spatiale. On fait tourner pour différentes valeurs de Δx, on enregistre les valeurs dans le programme `test_prec` on constate une décroissance quadratique de l'erreur. Ceci montre que le schéma est d'ordre 2 en espace.

- On fait tourner maintenant le programme `chaleur_explicite2` pour un pas d'espace petit (prenons par exemple nx = 50) afin que l'erreur d'approximation soit dominée par celle temporelle. On fait tourner pour différentes valeurs de Δt (en faisant décroitre le nombre de CFL), on enregistre les valeurs dans le programme `test_prec` on constate une décroissance linéaire de l'erreur. Ceci montre que le schéma est d'ordre 1 en temps.

On va faire maintenant la même étude sur les autres schémas: implicite, Crank-Nicolson et theta-schéma. On va constater qu'en utilisant l'écriture matricielle des schémas on pourra utiliser un programme unique avec un paramètre θ pour tous.

1. *Schéma d'Euler implicite*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0$$

2. *Schéma de Crank-Nicolson*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}}{2\Delta x^2} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} = 0.$$

3. *Le θ schéma*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta\nu \frac{u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}}{\Delta x^2} - (1-\theta)\nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0.$$