Examen EDP. Durée : 2H00

Documents autorisés: les documents de cours et TD. Justifier vos reponses et commenter les programmes d'une façon concise et claire. On pourra considérer comme acquis les développements déjà faits ailleurs à condition de bien situer la source (cours, no. série exercices, no. exercice)

Problème 1. Considérons l'équation d'advection dans le domaine borné $(0,1)$:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \right. \tag{1}$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1 et la vitesse de convection négative $V < 0$. On souhaite discrétiser (1) en utilisant le schéma explicite décentré amont.

1. Préciser le schéma de discrétisation et déterminer l'équation équivalente associée, aprés l'évaluation du terme dominant de son erreur de troncature. Montrer que la discrétisation de cette équation équivalente donne un nouveau schéma qui peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \nu^* \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0. \tag{2}$$

   avec un ν^* que l'on précisera.

2. Déterminer les conditions de stabilité L^∞ et L^2 pour le schéma (2). Est-ce qu'elles sont différentes de celles pour le schéma décentré initial?

Problème 2. Considérons l'équation d'advection-diffusion dans le domaine borné $(0,1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \tag{3}$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1. Considérons le schéma centré suivant:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \nu\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2} - \nu\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} = 0.$$

1. Montrer que le schéma est consistant et déterminer son ordre.

2. Étudier la stabilité L^2 du schéma. Que se passe-t-il lorsque $\nu \to 0$?

Problème 3. On cherche à résoudre le problème aux limites le suivant dans le carré $\Omega = [-1,1]^2$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\Delta u & = & f, \text{ dans } \Omega \\ u(x,\pm 1) & = & 0,\ \forall x \in]-1,1[, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\pm 1, y) & = & 1,\ \forall y \in]-1,1[. \end{array} \right. \tag{4}$$

1. Déterminer la formulation variationnelle (FV) associée dans un espace X que l'on précisera.

2. Montrer que u est solution de (FV) ssi elle minimise sur X une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.

3. Peut-on établir l'unicité de la solution à partir de cette équivalence ? (on suppose qu'il existent deux solutions. etc...)

`Indication`: après la multiplication par la fonction test v et integration par parties, on constatera que l'integrale sur la frontière $\partial\Omega$ se décompose en 4 parties correspondant aux cotés du carré et où les conditions aux limites sont différentes.

Problème 4. On s'interesse au calcul d'une approximation de la solution $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ du problème:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Une discrétisation par différences finies de l'équation, en utilisant une partition uniforme de l'intervalle $[0,1]$, donnée par les points $x_j = j/n$, $j = 1, ..., n-1$ conduit à un système linéaire $A\mathbf{u} = b$ où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$ est une vecteur de composantes u_j représentant la solution discrète. Cette dernière approche la solution exacte aux $n-1$ points intérieurs x_j, $j = 1, .., n-1$ (on dit que u_j est une approximation de $u(x_j)$ et $u_0 = u_n = 0$, ceci traduisant le fait que $u(0) = u(1) = 0$). La matrice $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et le second membre $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ sont respectivement:

$$A = n^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

1. Initialisation.

   - Écrire une fonction `laplaceD(n)` construisant la matrice A, dont l'argument d'entrée est n et l'argument de sortie est A.
   - Écrire une fonction ayant pour argument n et f et qui construit le vecteur b.

2. Validation.

   - Donner la solution exacte $\tilde{u}^e(x)$ du problème (5), quand la fonction f est constante égale à 1.
   - Écrire une fonction construisant le vecteur $\mathbf{u}^e = (\tilde{u}^e(x_1), \dots, \tilde{u}^e(x_{n-1}))^t$ qui donne la solution exacte aux points x_k.
   - Résoudre le système $A\mathbf{u} = b$. Comparer $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}^e$ en les dessinant sur le même graphique. Expliquer quel genre de résultat on attend.

3. Convergence de la méthode. On prend comme solution exacte et second membre les fonctions suivantes

$$\tilde{u}^e(x) = (x-1)\sin(10x), \ f(x) = -20\cos(10x) + 100(x-1)\sin(10x).$$

   - Construire d'abord deux fonctions correspondant à $\tilde{u}^e(x)$ et $f(x)$.
   - Représenter la norme de l'erreur entre la solution approchée (obtenue par la méthode des différences finies) et celle exacte $\mathbf{u} - \mathbf{u}^e$ en fonction de n en échelle logarithmique. Expliquer quel genre de résultat on attend.

   `Indication`: on pourra prendre par exemple la norme L^∞ ($\|u\|_{L^\infty} = \max_i |u_i|$) calculée par exemple en `Scilab` par `norm(x,'inf')`