Correction contrôle 3

EDP 1

1 ✓ = 1 point

Questions de cours (6 points)

- Dans la formulation faible on a besoin de moins de régularité. E.g. la formulation forte est définie que pour les fonctions C^2 alors que celle faible pour des fonctions H^1 V
- $H^1(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega),\ \nabla v \in (L^2(\Omega))^d \}$ fonctions à carré intégrable dont le gradient est à carré intégrable V
- Lax Milgram : Soit V un espace de Hilbert, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive (expliquer chaque terme !), $L : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire et continue. Alors la formulation variationnelle : trouver $u \in V$ t.q. $a(u,v) = L(v)$ $\forall v \in V$ a une solution unique $u \in V$. VV
- Equivalence avec un problème d'optimisation : Soit $J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v)$ une fonctionnelle définie sur l'espace V, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors u est solution de la formulation variationnelle $a(u,v) = L(v)$ $\forall v \in V$ ssi u minimise J sur V c.a.d

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$ VV

Exercice 1 (8 points)

1. Schéma décentré explicite : $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + 3 \dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$ (on décentre à gauche car $v = 3 > 0$)

Le schéma est conditionnellement stable : $u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi j k \Delta x} \rightsquigarrow$ schéma

$$\frac{A(k) - 1}{\Delta t} + 3 \cdot \frac{1 - e^{-2i\pi k \Delta x}}{\Delta x} = 0 \iff A(k) = 1 - \frac{3\Delta t}{\Delta x}\left(1 - e^{-2i\pi k \Delta x}\right)$$ V

$\sigma := \dfrac{3\Delta t}{\Delta x}$ $\quad 1 - e^{-2i\pi k \Delta x} = 1 - \cos(2\pi k \Delta x) + i \sin(2\pi k \Delta x) = 2 \underbrace{\sin(k\pi \Delta x)}_{s_k} \left(\sin(k\pi\Delta x) + i \underbrace{\cos(k\pi \Delta x)}_{c_k}\right)$

$$A(k) = 1 - 2\sigma s_k^2 + 2 i s_k c_k \sigma, \quad |A(k)|^2 = (1 - 2\sigma s_k^2)^2 + 4 s_k^2 c_k^2 \sigma^2 = 1 - 4\sigma s_k^2 + 4\sigma^2 s_k^2$$ V

$$= 1 - 4\sigma s_k^2 (1-\sigma) \leq 1 \text{ si } \boxed{\sigma \leq 1} \text{ cond stabilité}$$

2. Erreur de troncature

$$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + 3 \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x}$$ V

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O(\Delta t^3)$$

$$u(x_{j-1}, t^n) = u(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O(\Delta x^3)$$

le dévelop. à l'ordre 3 servira par la suite

$$\Rightarrow \varepsilon_j^n = \overbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + 3 \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n)}^{=0 \text{ (u sol)}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 3 \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) = O(\Delta t) + O(\Delta x)$$ V

$\Rightarrow$ schéma d'ordre 1 en temps et en espace.

3. (i) schéma implicite décentré → inconditionnellement stable, même ordre d'approximation

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + 3\,\frac{u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$ ✓

(ii) Crank – Nicolson + schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + \frac{3}{4}\,\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{3}{4}\,\frac{u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}}{\Delta x} = 0$$ ✓

(ordre 2 en espace car schéma centré ordre 2 en temps car moyenne du schéma explicite et implicite)

(iii) On utilise l'expression de l'erreur de troncature et l'ép

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -3\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \varepsilon_j^n = 3(3\Delta t-\Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

$$= -3(\Delta x - 3\Delta t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

⇒ l'équation équivalente est $\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - \underbrace{3(\Delta x-3\Delta t)}_{\geq 0 \text{ (diffusion numérique)}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ✓

En discrétisant l'ép équivalente on améliore le schéma

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + 3\,\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x} - 3(\Delta x-3\Delta t)\cdot\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$ ✓

Exercice 3, (6 points)

1. $$-\int_0^1 (e^x u'(x))' v(x) + u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

IPP $\int_0^1 e^x u'(x)v'(x)\,dx - \left[e^x u'(x)v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$ ✓

$v(0)=0$ (CL Dirichlet, essentielle)

$u'(1) = 1-2u(1)$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 e^x u'(x)v'(x) + \int_0^1 u(x)v(x)\,dx + 2e\,u(1)v(1)}_{a(u,v)\ \text{(forme bilinéaire)}} = \underbrace{\int_0^1 f(x)v(x)\,dx + e\,v(1)}_{L(v)\ \text{(forme linéaire)}}$$ ✓

$u, v \in V_E = \{v \in H^1(0,1),\ v(0)=0\}$ ✓

2. $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (v'(x))^2 e^x + v^2(x)\,dx + 2e\,v^2(1)\right) - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx - e\,v(1)$

On a que : $J(u+v) = \frac{1}{2}a(u+v,u+v) - L(u+v) = \frac{1}{2}(a(u,u) + 2a(u,v) + a(v,v)) - L(u) - L(v)$

$= J(u) + (a(u,v) - L(v)) + \frac{1}{2}a(v,v)$ ✓

"⇒" si u solution de $a(u,v) = L(v)$ ⇒

$J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \geq J(u), \forall v \in V$ car a est coercive. ⇒ u min de J ✓

"⇐" $J(u) = \min_{v\in V} J(v)$ alors $t=0$ est min de $j(t) = J(u+tv)$

$j(t) = J(u) + t(a(u,v) - L(v)) + \frac{t^2}{2}a(v,v)$ ✓

$j'(0) = 0 \Rightarrow a(u,v) = L(v) \Rightarrow$ sol du problème variationnel