Équations aux dérivées partielles – TD 4

Considérons l'équation de la chaleur en deux dimension d'espace dans le domaine borné $(0,1)^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \, \forall (x,t) \in (0,1)^2 \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \, \forall x \in (0,1). \end{cases}$$

On discrétise le domaine en utilisant un maillage régulier $(t_n, x_j, y_l) = (n\Delta t, j\Delta x, l\Delta y)$, $\forall n \geq 0, j \in \{0,1,...,N+1\}$, $l \in \{0,1,...,M+1\}$ où $\Delta x = 1/(N+1)$, $\Delta y = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$.

Les conditions aux limites sont des conditions de Dirichlet homogènes: $u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0$, $u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0$, $\forall t$.

Le but de cette série d'exercices est d'étudier la stabilité quelques schémas classiques.

On se propose d'étudier les schémas suivants:

1. *Schéma d'Euler explicite*

$$\frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1,l}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j-1,l}^n}{\Delta x^2} - \nu \frac{u_{j,l+1}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j,l-1}^n}{\Delta y^2} = 0.$$

2. *Schéma d'Euler implicite*

$$\frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1,l}^{n+1} - 2u_{j,l}^{n+1} + u_{j-1,l}^{n+1}}{\Delta x^2} - \nu \frac{u_{j,l+1}^{n+1} - 2u_{j,l}^{n+1} + u_{j,l-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = 0.$$

3. *Schéma de Peaceman-Rachford*

$$\frac{u_{j,l}^{n+1/2} - u_{j,l}^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1,l}^{n+1/2} - 2u_{j,l}^{n+1/2} + u_{j-1,l}^{n+1/2}}{2\Delta x^2} - \nu \frac{u_{j,l+1}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j,l-1}^n}{2\Delta y^2} = 0.$$
$$\frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^{n+1/2}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1,l}^{n+1/2} - 2u_{j,l}^{n+1/2} + u_{j-1,l}^{n+1/2}}{2\Delta x^2} - \nu \frac{u_{j,l+1}^{n+1} - 2u_{j,l}^{n+1} + u_{j,l-1}^{n+1}}{2\Delta y^2} = 0.$$

4. *Schéma des directions alternées (ADI)*

$$\frac{u_{j,l}^{n+1/2} - u_{j,l}^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1,l}^{n+1/2} - 2u_{j,l}^{n+1/2} + u_{j-1,l}^{n+1/2}}{2\Delta x^2} - \nu \frac{u_{j+1,l}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j-1,l}^n}{2\Delta x^2} = 0.$$
$$\frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^{n+1/2}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j,l+1}^{n+1} - 2u_{j,l}^{n+1} + u_{j,l-1}^{n+1}}{2\Delta y^2} - \nu \frac{u_{j,l+1}^{n+1/2} - 2u_{j,l}^{n+1/2} + u_{j,l-1}^{n+1/2}}{2\Delta y^2} = 0.$$

Indication

Dans le cas du schéma d'Euler explicite on pourra montrer dans un premier temps la stabilité en norme L^∞ en montrant que $u_{j,l}^{n+1}$ est une combinaison convexe des valeurs calculées au pas du temps précédent.

Ensuite on pourra appliquer de la méthode de von Neumann dans le cas de la stabilité L^2 pour les schémas d'Euler explicite et implicite.

- Injecter dans le schéma un mode de Fourier:

$$u_{j,l}^n = A(k,m)^n e^{2i\pi(kj\Delta x + ml\Delta y)},\ k,m \in \mathbb{Z}$$

- Simplifier et calculer le facteur d'amplification du schéma $A(k,m)$ (on remarquera que dans ce cas, ce facteur dépend de deux arguments car la série de Fourier sera en fait une double somme sur k et m).
- Si la condition de stabilité $|A(k,m)| \leq 1$ est vérifiée alors le schéma est stable.

On devra trouver que les schémas d'Euler implicite est inconditionnellement stable et le schéma d'Euler explicite est conditionnellement stable sous la condition:

$$\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Dans le cas des schémas Peaceman-Rashford et ADI on va procéder de la façon suivante: Injecter dans le schéma un mode de Fourier:

$$u_{j,l}^n = \hat{u}_{k,m}^n e^{2i\pi(kj\Delta x + ml\Delta y)},\ k,m \in \mathbb{Z}$$

et ensuite on montrera que

$$\hat{u}_{k,m}^{n+1} = A(k,m)\hat{u}_{k,m}^n.$$

Si le facteur d'amplification du schéma $|A(k,m)| \leq 1$ alors le schéma est stable.