Examen Équations aux Dérivées Partielles. Durée : 1H30

Les documents de cours ne sont pas autorisés. Justifier vos réponses de façon claire et concise.

Questions de cours :

- citer un avantage de la formulation faible par rapport à la formulation forte
- donner un exemple d'espace de Hilbert
- énoncer le théorème de Lax-Milgram
- énoncer le résultat d'équivalence entre la formulation faible d'un problème variationnel et un problème d'optimisation

Exercice 1
Considérons l'équation d'advection dans le domaine borné $(0,1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+,$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1.

1. Construire un schéma décentré explicite conditionnellement stable au sens L^2 et donner sa condition de stabilité.
2. À l'aide d'un développement de Taylor d'ordre 3 en x et 3 en t, calculer l'erreur de troncature et donner l'ordre d'approximation.
3. Expliquer finalement les différentes modifications à apporter au schéma
   (i) pour le rendre inconditionnellement stable sans changer son ordre d'approximation,
   (ii) pour qu'il soit d'ordre deux en temps et en espace,
   (iii) pour qu'il soit non-dissipatif (utiliser l'équation équivalente).

Exercice 2
Considérons le problème aux limites suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} -(e^x u'(x))' + u(x) & = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(0) & = 0, \\ u'(1) + 2u(1) & = 1, \end{array}\right. \tag{1}$$

où f est une fonction continue sur $[0,1]$.

1. En multipliant l'équation (1) par une fonction test v, en intégrant par parties et en prenant en compte les conditions aux limites, écrire la formulation variationnelle (FV) du problème (1) sous la forme

   $$\text{Trouver } u \in V_E \text{ tel que } (\forall v \in V_E) : a(u,v) = L(v).$$

   Identifier clairement la forme bilinéaire a, la forme linéaire L, et l'espace fonctionnel V_E. Bien distinguer les conditions aux limites essentielles (à inclure dans l'espace) de celle naturelles (prises en compte directement dans la formulation variationnelle).
2. Montrer que u est solution de (FV) ssi elle minimise sur V_E une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.