05/12/2012

COURS 11

<u>Lemme</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Soit $g(x)$ une fonction continue dans Ω. Si, pour toute fonction φ de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω on a

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

alors la fonction g est nulle dans Ω.

<u>Preuve</u>. Supp qu'il $\exists\, x_0 \in \Omega$ tq. $g(x_0) \neq 0$. Supp par exemple que $g(x_0) > 0$. Par continuité, il $\exists$ un petit voisinage $\omega \subset \Omega$ de x_0 tq $g(x) > 0$ $\forall x \in \omega$. Soit φ une fonction test non nulle à support inclus dans ω et positive. Alors,

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx = \int_\omega \underbrace{g(x)\varphi(x)}_{>0}\,dx = 0$$ contrad avec l'hypothèse sur g. Donc $g(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

On a prouvé l'équivalence entre la formulation forte et faible

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \iff \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx$$
$$\forall v \in X = \{\varphi \in C^1(\bar\Omega),\ \varphi = 0, \partial\Omega\}$$

pour toute fonction $u \in C^2(\bar\Omega)$.

Il $\exists$ une notation + compacte pour la formulation variationnelle

Trouver $u \in X$, tq. $a(u,v) = L(v)$ $\forall v \in X$

où $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$ et $L(v) = \int_\Omega f v\,dx$

L'idée de l'approche variationnelle est de montrer l'$\exists$ et l'unicité de la solution de (FV) ce qui entraînera l'$\exists$ et l'unicité pour le problème de départ.

Il $\exists$ une théorie très puissante pour analyser les (FV). Mais celle ci ne fonctionne pas dans les espaces comme X qui n'est pas un espace de Hilbert. (espace complet muni d'un produit scalaire)

On aura donc besoin d'autres espaces que X. Ces espaces sont les espaces de Sobolev.

$$H_0^1(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in (L^2(\Omega))^d,\ v = 0\ \partial\Omega \}$$

Fonctions à carrée intégrable de gradient à carré intégrable

Soit V un espace de Hilbert avec un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et une norme $\|\cdot\|$.

Si a) L est une forme linéaire continue sur V c.a.d $v \mapsto L(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il $\exists C>0$ tq

$$|L(v)| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$$

b) $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire sur V, c.a.d. $w \mapsto a(w,v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ $\forall v \in V$ et $v \mapsto a(w,v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ $\forall w \in V$.

c) $a(\cdot,\cdot)$ est continue c.a.d $\exists M>0$ tq

$$|a(w,v)| \leq M\|w\|\cdot\|v\| \quad \forall w,v \in V$$

d) $a(\cdot,\cdot)$ est coercive (ou elliptique) c.a.d $\exists \nu>0$ tq

$$a(v,v) \geq \nu\|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Alors la formulation variationnelle admet une solution unique dans V.

<u>Proposition</u>: Si la forme bilinéaire a est symétrique $a(w,v)=a(v,w)$ $\forall v,w \in V$ et $J(v)$ est l'énergie définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle. Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Réciproquement si $u \in V$ est un point de min de l'énergie $J(v)$ alors u est la solution unique de la formulation variationnelle

<u>Preuve</u>: $J(u+v) = \cancel{J(u)}\ \frac{1}{2}a(u+v,u+v) - L(u+v)$

$$= \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) + a(u,v) + \frac{1}{2}(a(v,v) - L(v))$$

$$= J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) + a(u,v) - L(v)$$

"$\Rightarrow$" si u solution de (FV) $\Rightarrow a(u,v) - L(v) = 0 \Rightarrow$

$$J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \geq J(u) \quad \forall v \in V \Rightarrow u \text{ min.}$$

"$\Leftarrow$" soit u min J. $j(t) = J(u+tv) \Rightarrow t=0$ min de j

$$\left.\frac{dj(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}a(u,u) + t\,a(u,v) + \frac{t^2}{2}a(v,v) - L(u) - tL(v)\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \Big[(a(u,v) - L(v)) + t\,a(v,v)\Big]\Big|_{t=0} = a(u,v) - L(v) = 0 \Rightarrow u \text{ sol (FV)}$$

CORRECTION TD 8

1) a) On multiplie l'équation vérifiée par u dans Ω par une fction test $v \in X$, puis on intègre par parties

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v \, dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

(FV)

Grâce aux CL on a $\frac{\partial u}{\partial n} = g \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma + \int_\Omega f v \, dx$

$v \in X = C^1(\bar{\Omega})$.

Réciproquement, on suppose que $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma + \int_\Omega f v \, dx \ \forall v \in X$ et que $u \in C^2(\bar{\Omega})$. On intègre de nouveau par parties:

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma + \int_\Omega f v \, ds \Leftrightarrow$$

(1) $$\int_\Omega -(\Delta u + f) v \, dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v \, d\sigma = 0$$

On choisit maintenant $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ à support compact dans Ω

$\Rightarrow v$ nulle sur le bord $\partial\Omega \Rightarrow -\int_\Omega (\Delta u + f) v \cdot dx = 0 \ \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega})$

$-(\Delta u + f)$ étant continue on en déduit (en appliquant le résultat du cours) que $+\Delta u = f$ dans Ω. En remplaçant maintenant cela dans (1) $\Rightarrow \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v \, d\sigma = 0$ et par les mêmes arguments de continuité on voit que $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur $\partial\Omega$.

b) En choisissant $v = 1$ dans la formulation variationnelle (FV)

$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma + \int_\Omega f \, dx = 0$

c) $E(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma - \int_\Omega f v \, dx$

$E(u+v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla (u+v)|^2 dx - \int_{\partial\Omega} g(u+v) \, d\sigma - \int_\Omega f(u+v) \, dx$

$= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial\Omega} g u \, d\sigma - \int_\Omega f u \, dx + \underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma - \int_\Omega f v \, dx}_{F_v}$

$+ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = E(u) + F_{v\alpha} + \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx$

α

"⇒" Si u est solution de FV ⇒ $F_{var}=0$ donc (2) implique ②
$E(u+v) \geq E(u)$ $\forall v$ ⇒ u min de E.

"⇐" si u min de E ⇒ $t=0$ min de $J(t)$:

$$J(t)=E(u+tv) = E(u) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + tF_{var}$$

$J'(t) = t\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + F_{var}$, $J'(0) = \underline{F_{var}=0}$ ⇒
u sol du problème variationnel.

② a) On multiplie par v puis on intègre par parties.

$$\int_\Omega \Delta(\Delta u)\, v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \iff$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v\, d\sigma - \int_\Omega \nabla(\Delta u)\cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \iff$$

$$\iff \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v\, d\sigma - \underbrace{\int_\Omega \nabla\cdot(\Delta u \cdot \nabla v)\, dx}_{= \int_{\partial\Omega} \Delta u \cdot \nabla v \cdot n\, d\sigma} + \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v\, dx = \int_\Omega f v\, dx.$$

(formule de la divergence

$$\iff \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v\, d\sigma - \int_{\partial\Omega} \Delta u \cdot \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma + \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$$

On choisit $v=0$, $\partial\Omega$ et $\frac{\partial v}{\partial n}=0$ $\partial\Omega$ ⇒ (FV) $\int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$
$\forall v \in X = \{v \in C^4(\bar\Omega) \mid v=0, \frac{\partial v}{\partial n}=0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

Inversement si (FV) a lieu: $\int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$
on intègre de nouveau par parties en sens inverse et
en choisissant de nouveau des fonctions test à support compact
on en déduit par continuité que $\Delta(\Delta u) = f$.

b) $E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta v)^2 dx - \int_\Omega f v\, dx$

on montre de la même façon que si u est min de E alors
u solution de (FV).

3) a) $\int_\Omega (-\Delta u + V\cdot\nabla u) v = \int_\Omega f v \, dx.$ ③

On intègre par parties $\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega V\cdot\nabla u \cdot v \, dx}_{a(u,v)} = \int_\Omega f v \, dx$

b) La forme bilinéaire $a(u,v)$

n'est pas symétrique donc on ne pourra pas montrer l'équivalence avec un problème de minimisation. En effet, soit
$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega V \nabla v \cdot v \, dx - \int_\Omega f v \, dx$$
on voit que $\int_\Omega V \nabla v \cdot v \, dx = -\int_\Omega (V \nabla v) v \, dx - \int_\Omega (\nabla\cdot V) \cdot v^2 dx$ (IPP)

Mais $\nabla\cdot V = 0$ donc $\int_\Omega V\cdot\nabla v \cdot v \, dx = 0.$ (3) $\Rightarrow$
$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f v \, dx.$$
On obtient donc la même fonctionnelle que celle découlant de l'étude du laplacien avec des conditions aux bords de Dirichlet. Minimiser $E(v)$ revient donc à la résolution de ce dernier et pas du problème de diffusion.

conv

c). Pour démontrer l'unicité, soit u_1 et u_2 2 solutions du problème variationnel. $\forall v \in X \Rightarrow$
$$\int_\Omega \nabla(u_1-u_2)\nabla v \, dx + \int_\Omega V \nabla(u_1-u_2) v \, dx = 0.$$
On applique cela à $v = u_1 - u_2 \Rightarrow$
$$\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \nabla\cdot V \, (u_1-u_2)^2 dx = 0 \quad (\text{de } (3))$$
Comme $\nabla\cdot V = 0 \Rightarrow \int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^2 dx = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = \text{cst}$

Mais comme $u_1 = u_2 = 0$ sur $\partial\Omega$ on en déduit que $\underline{u_1 = u_2}$

Si ~~div~~ $\underline{\nabla\cdot V > 0}$ le raisonnement précédent ne peut plus s'appliquer