Equation de la chaleur 2d

Implementation numérique

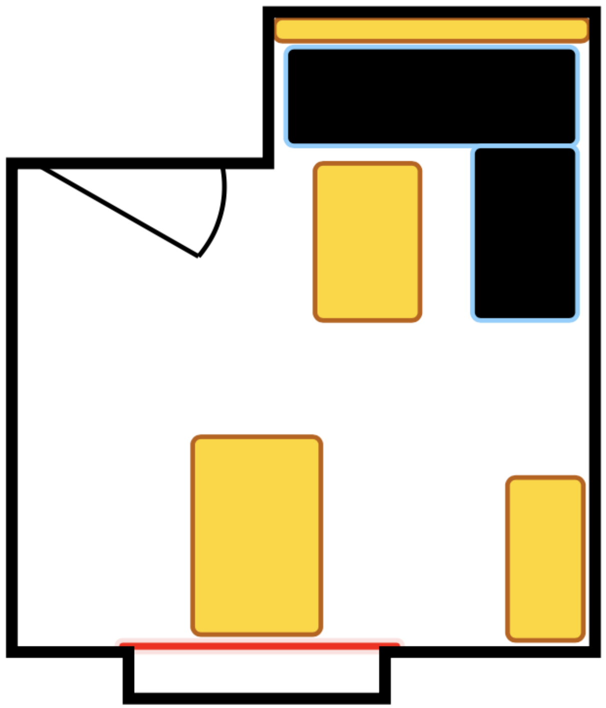
Distribution de la temperature dans une chambre

Situation pratique:

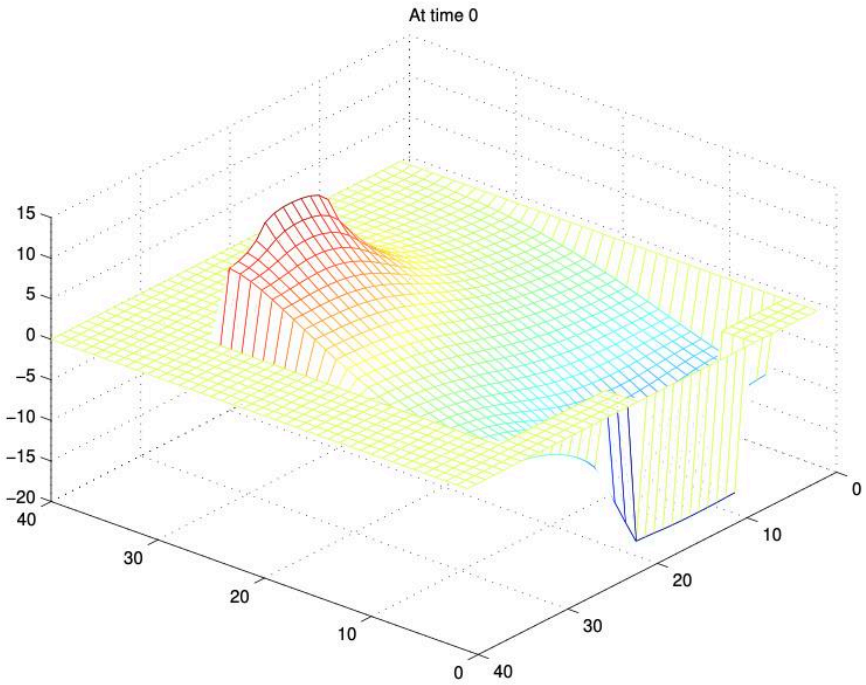
- Plan de chambre avec la position de la porte d'entrée (ici connectée à un hall d'entrée maintenu à temperature constante Tp)
- La fenêtre située en bas
- Le radiateur en rouge, juste en dessous de la fenêtre. Celle-ci n'est pas isolée.
- Les murs sont parfaitement isolants.

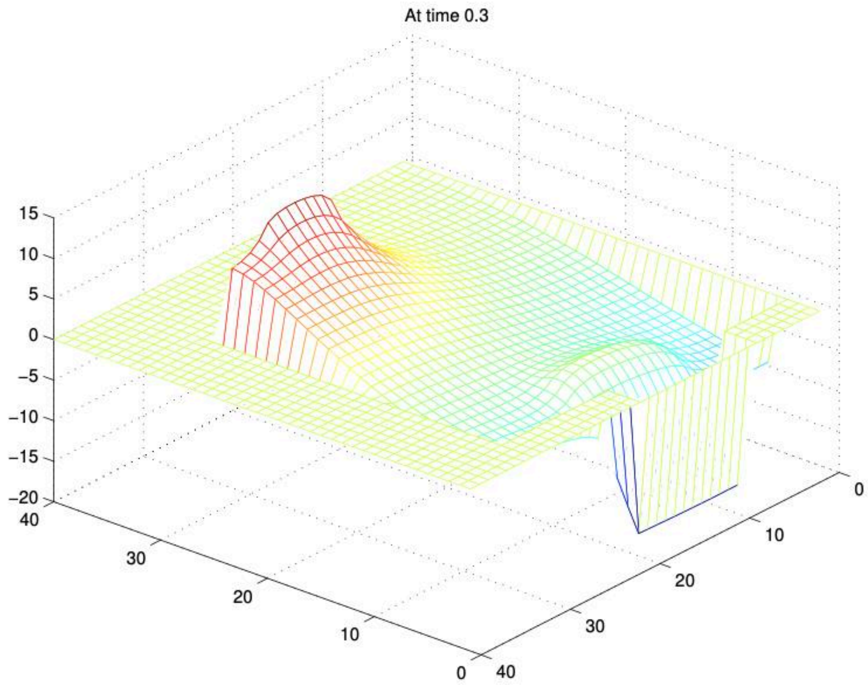
Dpdv mathématique:

- La porte et la fenêtre: conditions aux limites de Dirichlet.
- Murs: condition au limite Neumann homogène

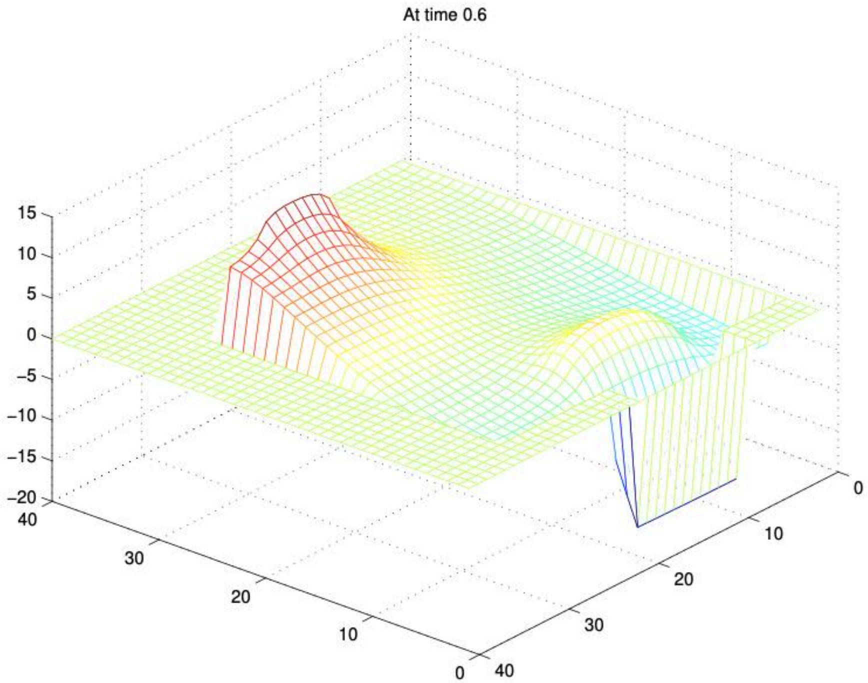


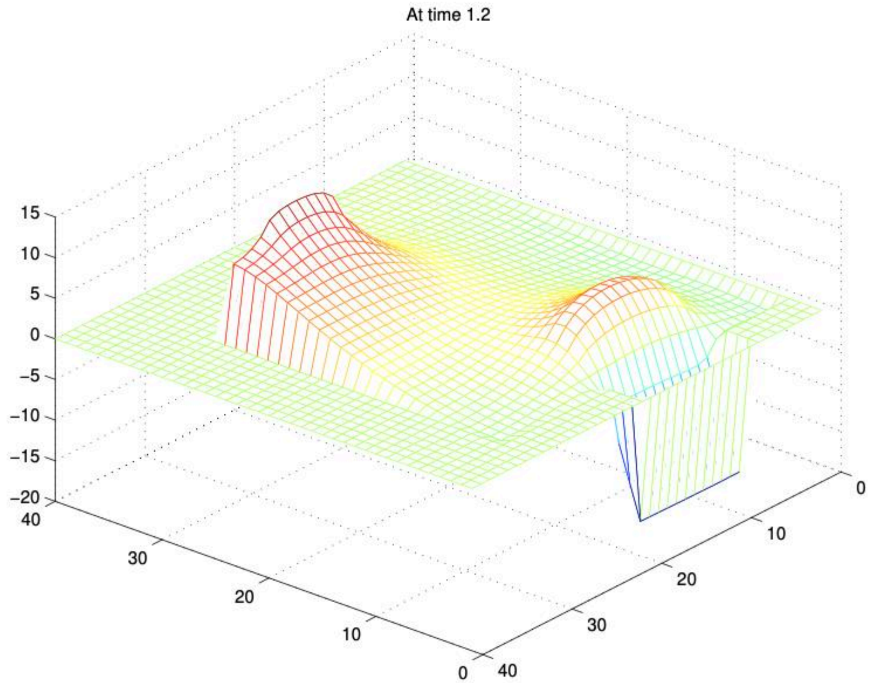
Exemple de résultat (simulation en temps) - I



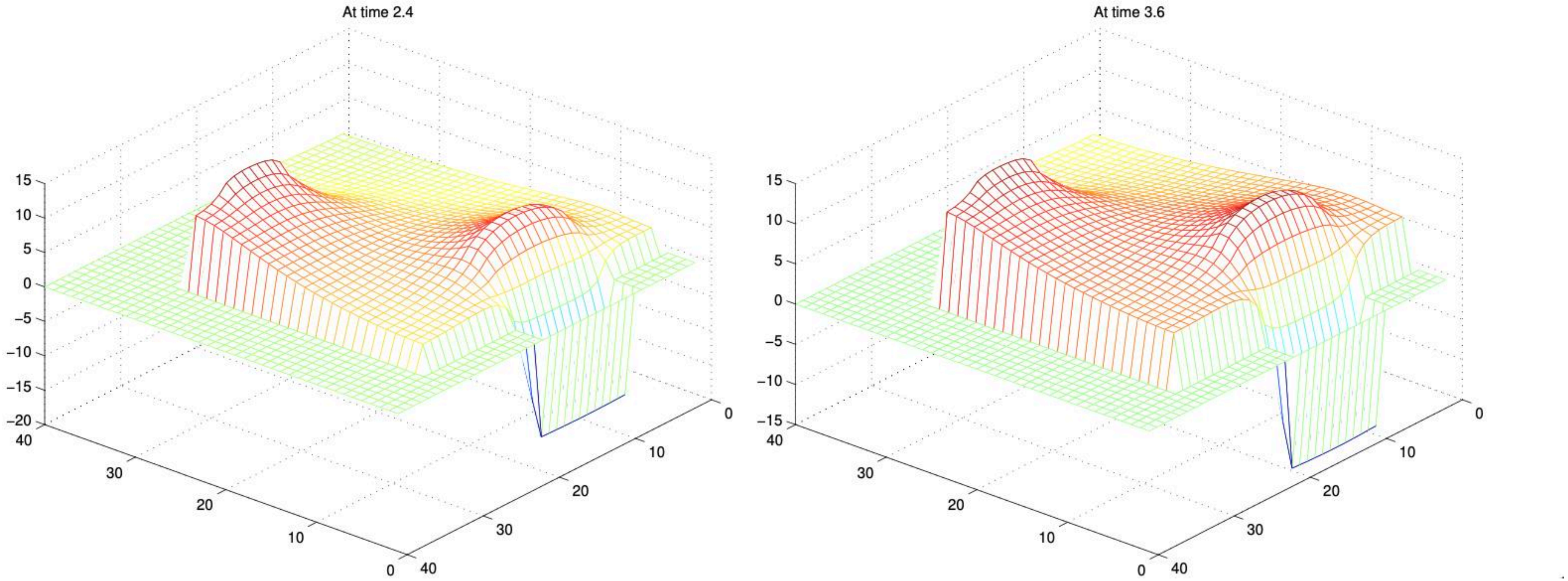


Exemple de résultat (simulation en temps) - II

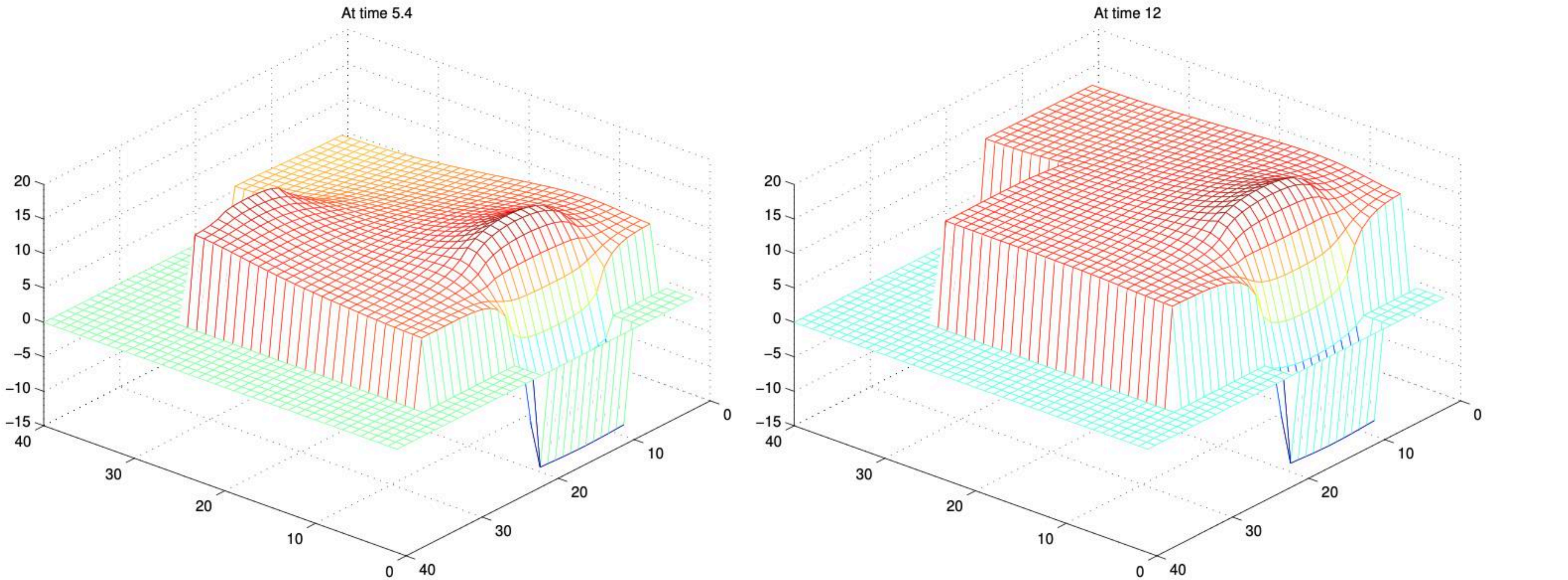




Exemple de résultat (simulation en temps) - III



Exemple de résultat (simulation en temps) - IV



Ingredients de l’implementation

- Les schéma explicites et implicites :

$$\frac{u_{j,k}^{n+1}-u_{j,k}^{n}}{\Delta t}+\nu\frac{-u_{j-1,k}^{n}+2u_{j,k}^{n}-u_{j+1,k}^{n}}{(\Delta x)^2}+\nu\frac{-u_{j,k-1}^{n}+2u_{j,k}^{n}-u_{j,k+1}^{n}}{(\Delta y)^2}=0$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1}-u_{j,k}^{n}}{\Delta t}+\nu\frac{-u_{j-1,k}^{n+1}+2u_{j,k}^{n+1}-u_{j+1,k}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+\nu\frac{-u_{j,k-1}^{n+1}+2u_{j,k}^{n+1}-u_{j,k+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}=0.$$

peuvent s’écrire sous forme matricielle :

$$U^{n+1}= (I + \nu\Delta t\ A)U^{n}\,\text{(explicite)}\quad (I-\nu\Delta t\ A)U^{n+1}= U^{n}\,\text{(implicite)}$$

Ici A est la matrice obtenue par la discretisation de l’opérateur Δ $\Rightarrow$ il est important d’étudier juste le problème de Poisson $\Delta u = f$ (version stationnaire de l’eq de la chaleur)

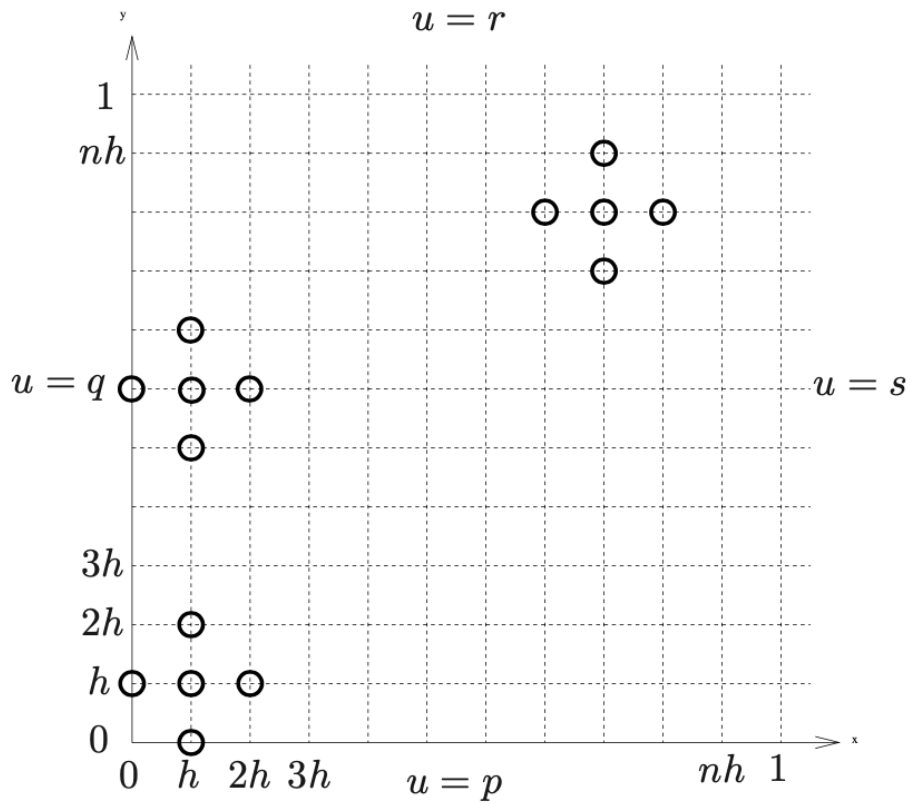
Étude du problème de Poisson

Problème au limite de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u & = & f & \text{in } \Omega, \\ u & = & g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Conditions aux limites:

$$\begin{cases} u(x,0) & = & p(x), \\ u(0,y) & = & q(y), \\ u(x,1) & = & r(x), \\ u(1,y) & = & s(y), \end{cases}$$



Differences finies: schéma au 5 points

Implementation du schéma (si le second membre est non nul on écrira $f_{i,j}$)

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0.$$

Prise en compte des CL.
Prenons la première eq ($p_1 = p(x_1), q_1 = q(x_1)$:

$$\frac{u_{2,1} + u_{1,2} - 4u_{1,1} + q_1 + p_1}{h^2} = f_{1,1},$$

Ceci se transforme en:

$$\frac{u_{2,1} + u_{1,2} - 4u_{1,1}}{h^2} = f_{1,1} - \frac{1}{h^2}(q_1 + p_1).$$

Pour la deuxième equation on a:

$$\frac{u_{1,3} + u_{2,2} - 4u_{1,2} + u_{1,1}}{h^2} = f_{1,2} - \frac{1}{h^2}q_2.$$

D'une manière générale les conditions de Dirichlet se retrouvent dans le second membre.

Système discret **Au = b**

$$
A = \frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
-4 & 1 & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
1 & -4 & \ddots & & & 1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & 1 & & & \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & -4 & & & & 1 & & & & & & & & \\
\hline
1 & & & & -4 & 1 & & & \ddots & & & & & & & \\
& 1 & & & 1 & -4 & \ddots & & & & & & & & & \\
& & \ddots & & & \ddots & \ddots & 1 & & & & & & & & \\
& & & 1 & & & 1 & -4 & & & & \ddots & & & & \\
\hline
& & & & \ddots & & & & \ddots & & & & 1 & & & \\
& & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & \ddots & & & & \ddots & & & & 1 \\
\hline
& & & & & & & & 1 & & & & -4 & 1 & & \\
& & & & & & & & & 1 & & & 1 & -4 & \ddots & \\
& & & & & & & & & & \ddots & & & \ddots & \ddots & 1 \\
& & & & & & & & & & & 1 & & & 1 & -4
\end{array}\right].
\qquad
\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ \vdots \\ u_{1,n} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{2,n} \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ u_{n,1} \\ u_{n,2} \\ \vdots \\ u_{n,n} \end{pmatrix},
\qquad
\mathbf{f} := \begin{pmatrix} f_{1,1} - \frac{1}{h^2}(p_1 + q_1) \\ f_{1,2} - \frac{1}{h^2} q_2 \\ \vdots \\ f_{1,n} - \frac{1}{h^2}(q_n + r_1) \\ f_{2,1} - \frac{1}{h^2} p_2 \\ f_{2,2} \\ \vdots \\ f_{2,n} - \frac{1}{h^2} r_2 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ f_{n,1} - \frac{1}{h^2}(p_n + s_1) \\ f_{n,2} - \frac{1}{h^2}(s_2) \\ \vdots \\ f_{n,n} - \frac{1}{h^2}(r_n + s_n) \end{pmatrix}.
$$

Autre types de conditions aux limites

- Considérons le cas 1d pour simplifier: $-u'' = f$

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} & = & f(x_i) \quad \text{for all } i = 1, \ldots, n, \\ u_0 & = & a, \\ u_{n+1} & = & b, \end{cases}$$

- Approximation décentrée de la condition de Neumann $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = a.$ $\qquad \dfrac{u_1 - u_0}{h} = -a,$

(inconvénient: on perd un ordre d'approximation)

- Apprximation centrée (on a besoin de définir la valeur "fantome" u_{-1})

$$\frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = -a.$$

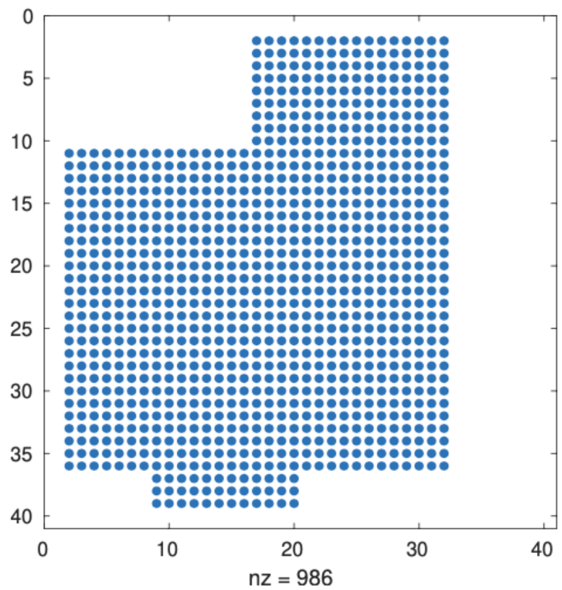
$$\frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{h^2} = f_0. \qquad u_{-1} = h^2 f_0 + 2u_0 - u_1,$$

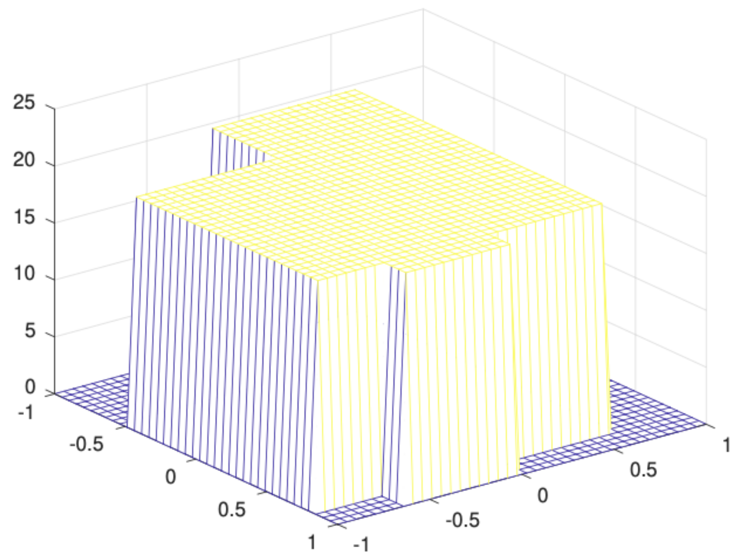
$$\frac{u_1 - u_0}{h} = -a + \frac{h}{2} f_0.$$

Approx d'ordre 2!

Exemple de simulation stationnaire (laplacien)

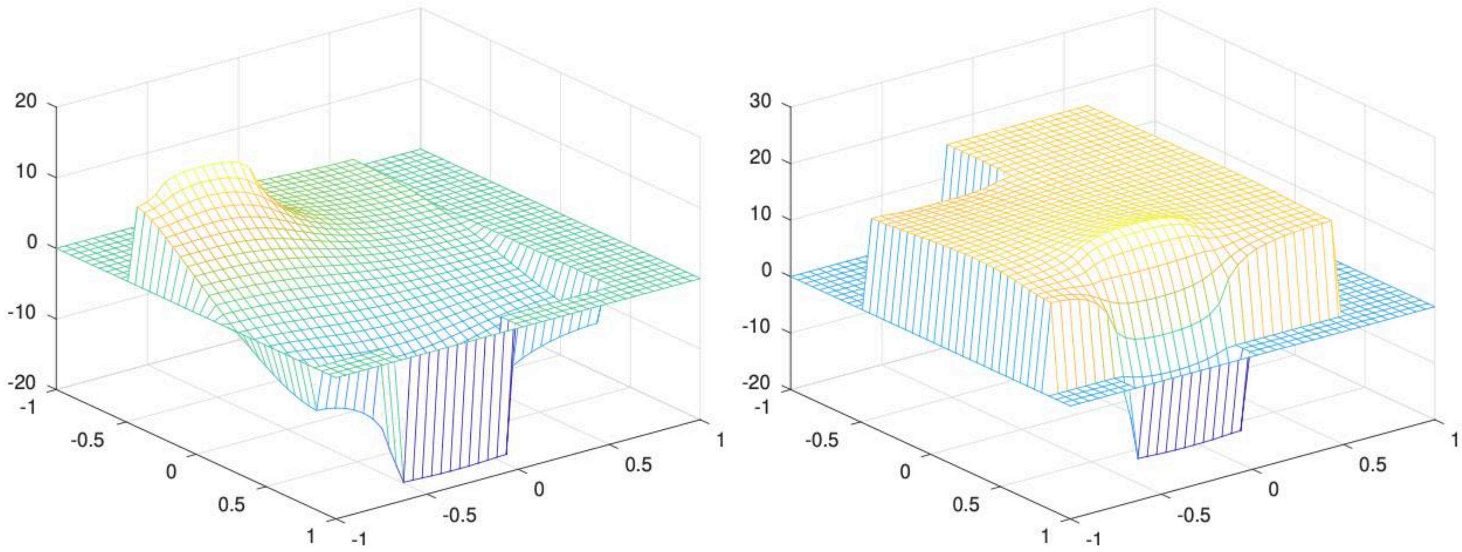
Grille de calcul et résultat de la simulation de la temperature en été (sans chauffage, porte et fenêtre à 20C)





Exemple de simulation stationnaire (laplacien) - II

Temperature en hiver sans chauffage (gauche)
Temperature en hiver avec chauffage (droite)



Placement du chauffage

Bon vs. mauvais placement du chauffage: