TD 8 – Formulation variationnelle

1. On suppose que Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et unicité de solution faible du problème aux limites suivant (conditions de Robin) :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$. On admettra l'inégalité suivante (qui généralise l'inégalité de Poincaré):

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}),\ \forall v \in H^1(\Omega).$$

2. On considère le problème des plaques suivant:

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f \text{ dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

où f est continue sur $\bar{\Omega}$.
a. Trouver une formulation variationnelle de ce problème sur l'espace $H = \{v \in H^2(\Omega),\ v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0,\ \partial\Omega\}$.
b. Montrer que u est solution faible si et seulement si elle minimise sur H une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.

3. Soit Ω un ouvert régulier. On considère l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u + V \cdot \nabla u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

où V est un champ de divergence nulle.
a. Proposer une formulation variationnelle.
b. Peut-on associer à ce problème un problème de minimisation ?
c. Montrer que (3) admet au plus une solution.

4. On considère le problème aux limites de Neumann suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

où f et g sont continues sur $\bar{\Omega}$ et Ω est un ouvert borné régulier et connexe.
a. Trouver une formulation variationnelle de ce problème sur l'espace $H^1(\Omega)$.
b. Montrer qu'une condition nécessaire d'existence de solution de (4) portant sur f et g (condition dite de compatibilité) est la suivante:

$$\int_\Omega f(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(x)d\sigma = 0.$$

c. Montrer que u est solution faible si et seulement si elle minimise sur $H^1(\Omega)$ une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.
d. Montrer qu'on n'a pas unicité de solution.