TD 6 – Équations des ondes

Considérons l'équation des ondes dans le domaine borné $(0,1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \; \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \end{cases}$$

avec $u(x,0) = u_0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$, u,u_0 et u_1 périodiques de période 1 et u_1 à moyenne nulle

$$\int_0^1 u_1(x)\, dx = 0.$$

On discrétise le domaine en utilisant un maillage régulier $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$, $\forall n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ où $\Delta x = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$.

Problème 1. Considérons d'abord le θ-schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - (1-2\theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \theta \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = 0. \tag{1}$$

avec $0 \leq \theta \leq 1/2$.

1. Montrer que si $1/4 \leq \theta \leq 1$, le θ-schéma centré est inconditionnellement stable en norme L^2. Si $0 \leq \theta < 1/4$, il est stable sous la condition

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \sqrt{\frac{1}{1-4\theta}}.$$

   Considérons maintenant le cas limite où $\Delta t / \Delta x = (1-4\theta)^{-1/2}$ avec $0 \leq \theta < 1/4$. Montrer que le schéma est instable dans ce cas, en vérifiant que $u_j^n = (-1)^{j+n}(2n-1)$ est une solution.

2. On admettera que l'énergie discrete suivante

$$E^n = \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + a_{\Delta x}(u^{n+1}, u^n) + \theta a_{\Delta x}(u^{n+1} - u^n, u^{n+1} - u^n)$$

   est une approximation d'ordre 1 en espace et en temps de l'énergie continue définie en cours. Ici on a noté pour tout $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$, $u = (u_j)_{0 \leq j \leq N}$, $v = (v_j)_{0 \leq j \leq N}$

$$a_{\Delta x}(u,v) = \sum_{j=0}^{N} \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \cdot \frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta x}.$$

   Montrer que le θ-schéma centré conserve l'énergie discrete, c.a.d. $E^n = E^0$ pour tout $n > 0$.

Problème 2. Considérons le schéma de Lax-Friedrichs appliqué à l'équation des ondes écrite comme système du premier ordre

$$\frac{1}{2\Delta t}\begin{pmatrix} 2v_j^{n+1} - v_{j+1}^n - v_{j-1}^n \\ 2w_j^{n+1} - w_{j+1}^n - w_{j-1}^n \end{pmatrix} - \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{j+1}^n - v_{j-1}^n \\ w_{j+1}^n - w_{j-1}^n \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

Ici v a la signification d'un déplacement et w, d'une déformation. Montrer que ce schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$ et qu'il est précis à l'ordre 1 en espace et en temps si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est gardé constant lorsque Δt et Δx tendent vers 0.

Problème 3. Considérons le schéma de Lax-Wendroff appliqué à l'équation des ondes écrite comme système du premier ordre

$$\frac{1}{\Delta t}\begin{pmatrix} v_j^{n+1} - v_j^n \\ w_j^{n+1} - w_j^n \end{pmatrix} - \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{j+1}^n - v_{j-1}^n \\ w_{j+1}^n - w_{j-1}^n \end{pmatrix} - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n \\ w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

Montrer que ce schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$ et qu'il est précis à l'ordre 2 en espace et en temps.