

Mini-projet Équations aux dérivées partielles

*MAM 4 – 27/11/2021
EDP*

*BARNETCHE Carine
DOUGNAC Jade*

Table des matières

- I. INTRODUCTION3
- II. PARTIE 1 : SIMULATION STATIQUE3
 - A. PRESENTATION DES CHAMBRES3
 - B. TEMPERATURE AMBIANTE DE LA PIECE EN ETE5
 - C. TEMPERATURE AMBIANTE DE LA PIECE EN HIVER SANS CHAUFFAGE.....5
 - D. TEMPERATURE AMBIANTE DE LA PIECE EN HIVER AVEC CHAUFFAGE.....5
- III. PARTIE 2 : SIMULATION INSTATIONNAIRE6
 - A. METHODE D'EULER EXPLICITE.....6
 - B. METHODE D'EULER IMPLICITE7
 - C. ANALYSE ET DIFFERENCES ENTRE LES DEUX SCHEMAS7
- IV. CONCLUSION11

I. INTRODUCTION

Le but de ce mini-projet été de mieux comprendre la méthode des différences finies en l'appliquant à un cas test assez réaliste, à savoir la simulation numérique de la température dans une pièce. Le projet a été découpé en deux parties, la première partie portait sur la simulation statique de la chaleur et la deuxième partie sur la simulation instationnaire en utilisant la discrétisation de l'équation de la chaleur par les schémas d'Euler explicite et implicite.

II. PARTIE 1 : SIMULATION STATIQUE

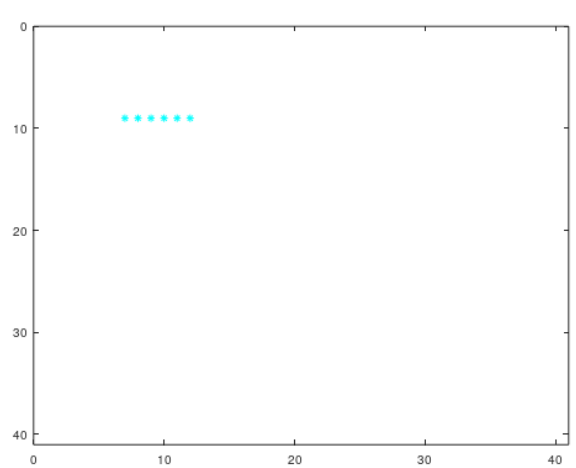
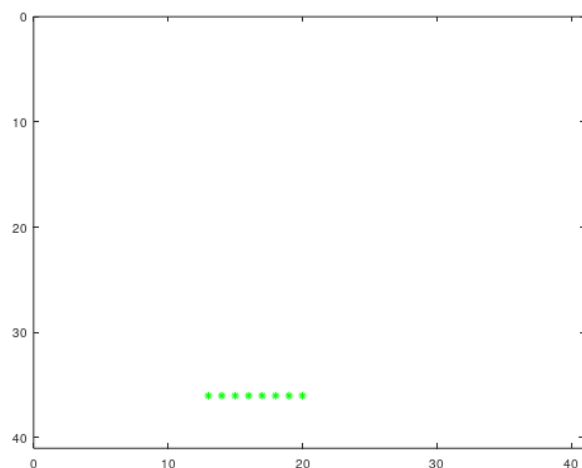
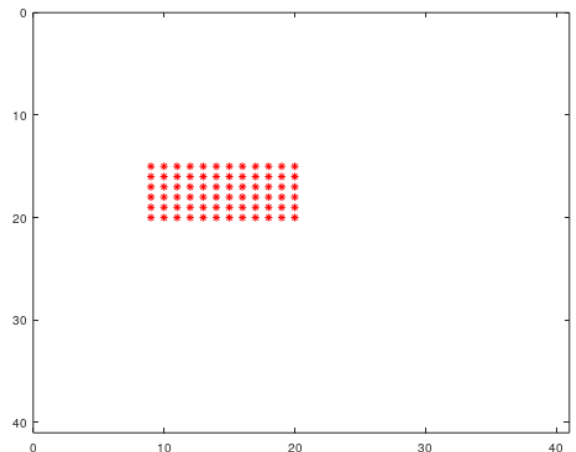
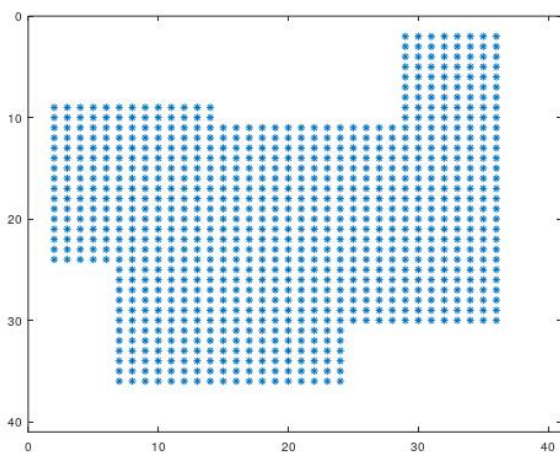
a. PRESENTATION DES CHAMBRES

Dans un premier temps nous avons dessiné nos 2 chambres avec chacune leur fenêtre, leur porte et leur chauffage. Voici les deux conceptions que nous avons choisi.

Chambre 1 :

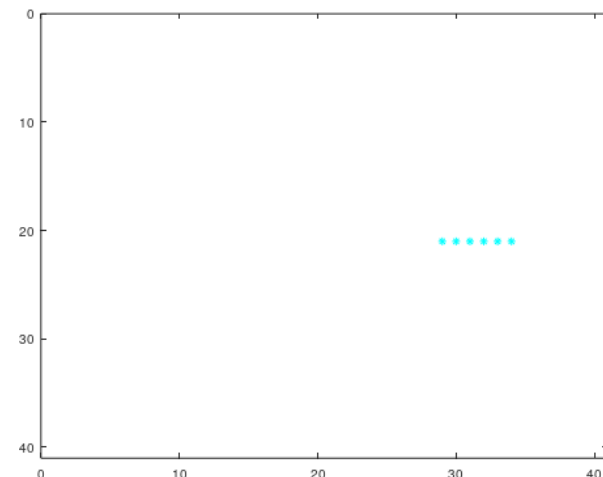
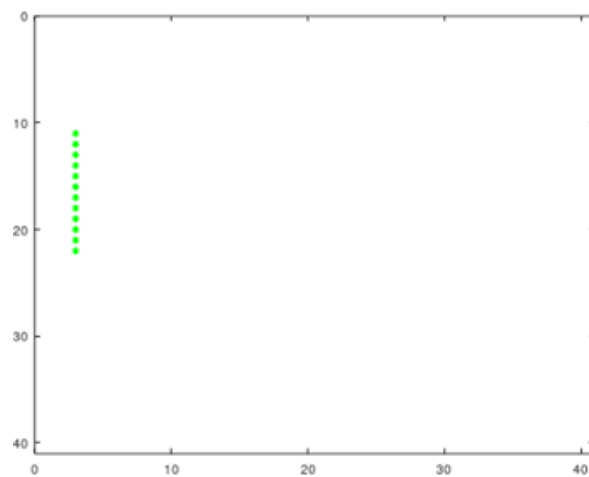
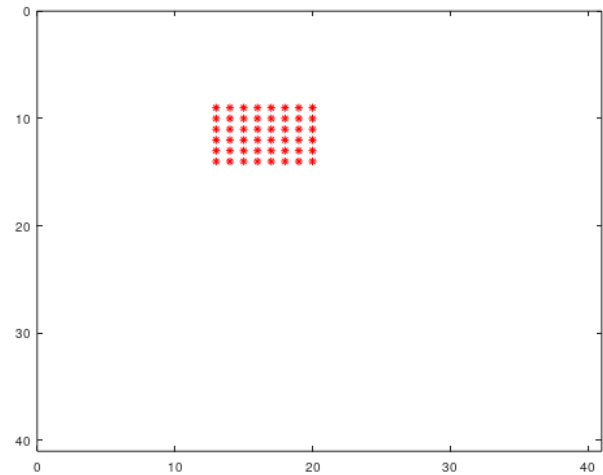
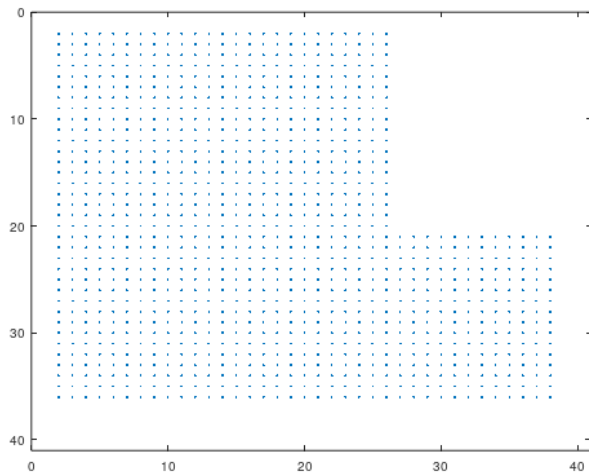
Pour la première chambre nous avons voulu montrer que nous avons bien compris comment manipuler le code, nous avons créé une disposition un peu plus complexe que celle que nous avons à titre d'exemple.

Voici l'emplacement des différents éléments dans la pièce (en bleu) : chauffage (en rouge), fenêtre (en vert), porte (en bleu turquoise).



Chambre 2 :

Pour la seconde chambre nous avons opté pour une disposition légèrement plus simple. Voici l'emplacement des différents éléments dans la pièce (en bleu) : chauffage (en rouge), fenêtre (en vert), porte (en bleu turquoise).



Après avoir dessiné nos deux chambres nous avons modélisé la température dans notre pièce en utilisant l'équation de Poisson $-\Delta u = f$. Cela revient à résoudre $Au = f$ avec A la matrice Laplacienne.

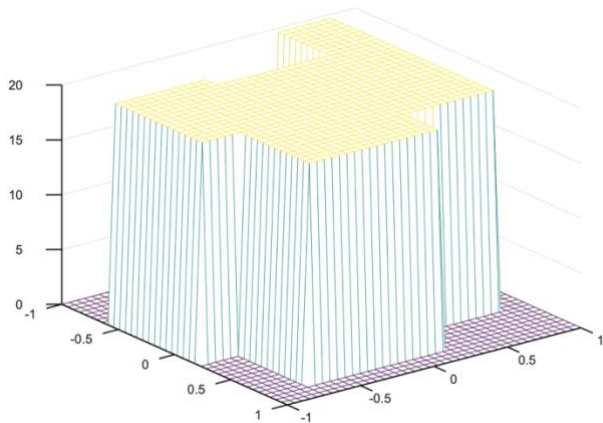
Nous supposons que les murs sont parfaitement isolants, ce qui implique des conditions aux limites de Neumann homogènes. Pour les fenêtres et les portes, on suppose aucune isolation, ce qui implique des conditions de Dirichlet avec une température donnée.

b. TEMPERATURE AMBIANTE DE LA PIECE EN ETE

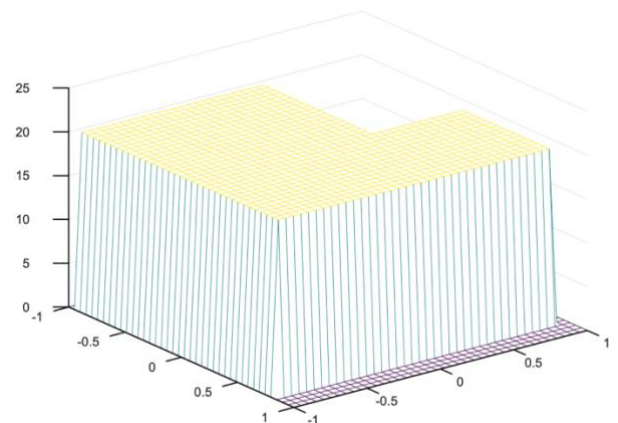
Nous avons donc calculé la température ambiante en été, en considérant les portes et l'extérieur à 20°C : nous observons que la température est uniforme dans les deux chambres (20°C).

Voici les résultats pour les deux chambres : RoomTemperature(20, 20, 0, 40) ;

Pour la chambre 1 :



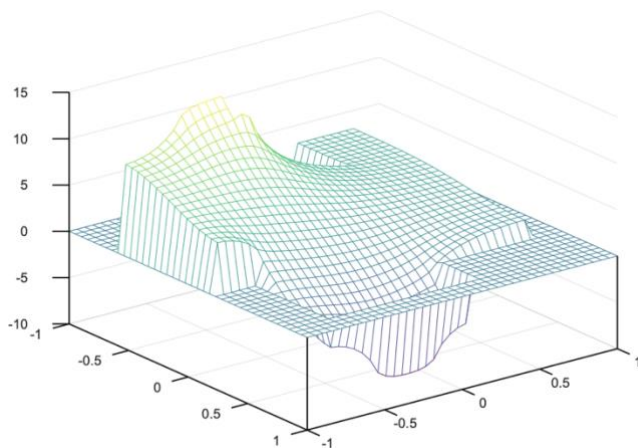
Pour la chambre 2 :



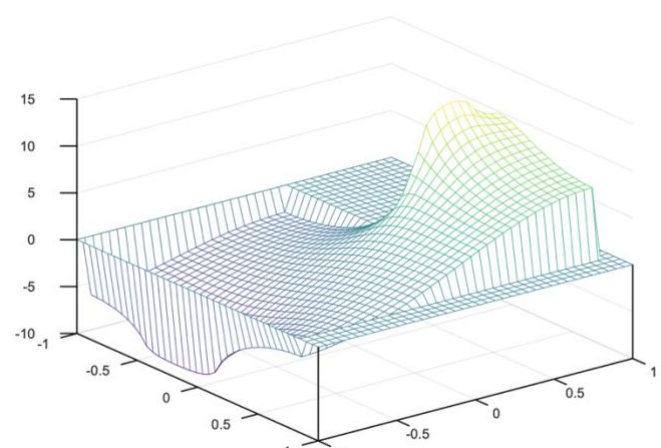
c. TEMPERATURE AMBIANTE DE LA PIECE EN HIVER SANS CHAUFFAGE

Nous avons calculé la température ambiante en hiver, sans chauffage avec une température extérieure de -10°C et la porte à une température de 15°C. Voici les résultats que l'on obtient pour les deux chambres pour la température en hiver sans chauffage : RoomTemperature(-10, 15, 0, 40) ;

Pour la chambre 1 :



Pour la chambre 2 :



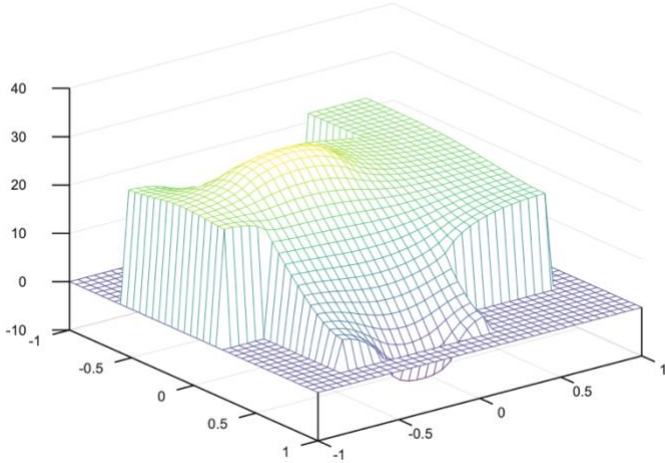
En calculant la température de nos deux chambres, on obtient une température moyenne de 1,3°C pour la chambre 1 et de -0,3°C pour la chambre 2. Une telle différence de température s'explique par la disposition de la porte et de la fenêtre. Cela peut être aussi dû à la taille des fenêtres qui est légèrement différente (la fenêtre de la chambre 1 est plus petite).

C. TEMPERATURE AMBIANTE DE LA PIECE EN HIVER AVEC CHAUFFAGE

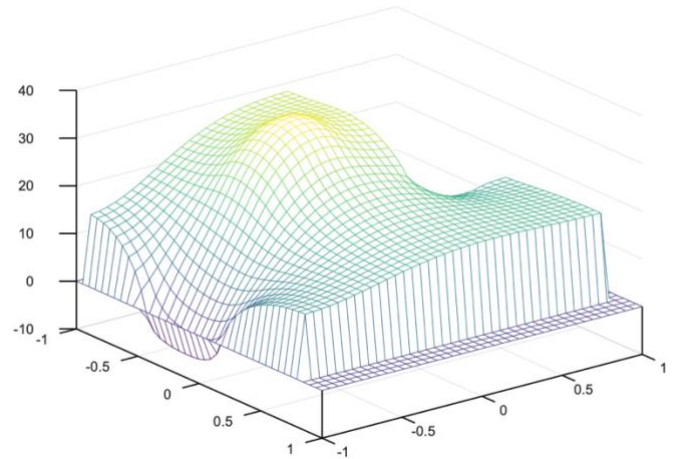
Enfin, nous avons fait fonctionner le chauffage afin que la température de la chambre soit plus confortable. Voici les résultats que l'on obtient pour les deux chambres pour la température en hiver avec chauffage :

RoomTemperature(-10, 15, 300, 40).

Pour la chambre 1 :



Pour la chambre 2 :



En comparant de nouveau les températures moyennes, on observe que la température moyenne de la chambre 1 (environ 22,5°C) est plus haute que celle de la chambre 2 (environ 12°C). Le chauffage de la chambre 1 étant légèrement plus grand et la fenêtre plus petite, nous avons comparé les températures moyennes en ayant un chauffage et une fenêtre de même taille que ceux de la chambre 2 : la température de la chambre 1 reste toujours supérieure.

On en déduit donc que notre chauffage est mieux placé dans la chambre 1.

III. PARTIE 2 : SIMULATION INSTATIONNAIRE

On a maintenant effectué une simulation instationnaire de la discrétisation de l'équation de la Chaleur en implémentant les schémas d'Euler explicite et implicite.

On va donc s'intéresser à l'équation instationnaire de la chaleur à deux dimensions :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vartheta \Delta u + f \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) + f(x, y, t) \text{ Avec } \vartheta \text{ le coefficient de diffusion}$$

a. METHODE D'EULER EXPLICITE

On s'intéresse ici à un point à l'intérieur de la chambre (pas sur un bord). Avec les développements en série de Taylor, la discrétisation de la dérivée seconde par rapport à x et celle par rapport à y se fait par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, y_l, t_n) \rightarrow \frac{u_{j+1,l}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j-1,l}^n}{\Delta x^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_j, y_l, t_n) \rightarrow \frac{u_{j,l+1}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j,l-1}^n}{\Delta y^2}$$

De même pour la dérivée temporelle :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, y_l, t_n) \rightarrow \frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^n}{\Delta t}$$

On obtient donc le schéma :

$$\frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^n}{\Delta t} - \vartheta \frac{u_{j+1,l}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j-1,l}^n}{\Delta x^2} - \vartheta \frac{u_{j,l+1}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j,l-1}^n}{\Delta y^2} = f_{j,l}$$

Avec : $1 \leq j \leq Nx + 1$ et $1 \leq l \leq Ny + 1$

Qui s'écrit sous forme matricielle :

$$U^{n+1} = (I + \vartheta \Delta t A) U^n + \Delta t F$$

Avec :

$$U^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{1,1}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{n,n}^{n+1} \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, A \text{ la matrice Laplacienne}$$

En introduisant les conditions aux limites de Dirichlet,

$$\begin{cases} u_{0,l}^n = u_{Nx+1,l}^n = a \\ u_{j,0}^n = u_{j,Ny+1}^n = b \end{cases} \quad \text{on a: } F = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \\ b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} \quad (\text{on prend } \Delta x^2 = \Delta y^2)$$

b. METHODE D'EULER IMPLICITE

Comme précédemment, on obtient le schéma implicite :

$$\frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^n}{\Delta t} - \vartheta \frac{u_{j+1,l}^{n+1} - 2u_{j,l}^{n+1} + u_{j-1,l}^{n+1}}{\Delta x^2} - \vartheta \frac{u_{j,l+1}^{n+1} - 2u_{j,l}^{n+1} + u_{j,l-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = f_{j,l}$$

Qui s'écrit sous forme matricielle :

$$(I - \vartheta \Delta t A) U^{n+1} = U^n + \Delta t F$$

Pour nos tests nous avons fixé $\vartheta = 1$ et initialisé notre pièce à la température extérieure.

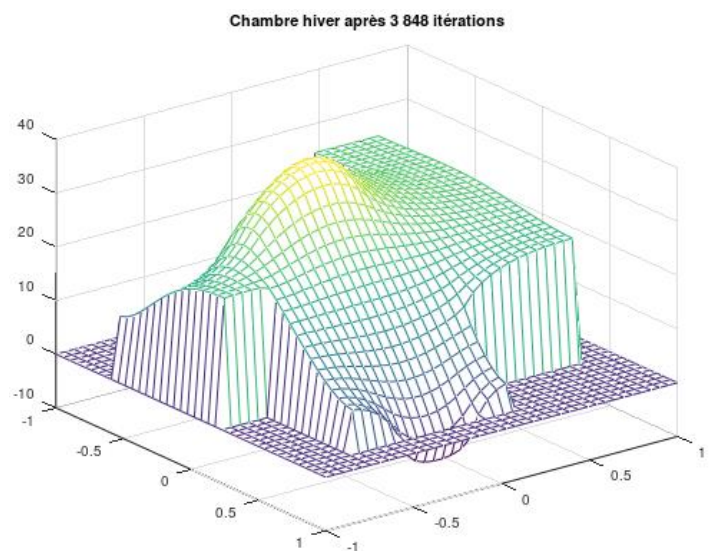
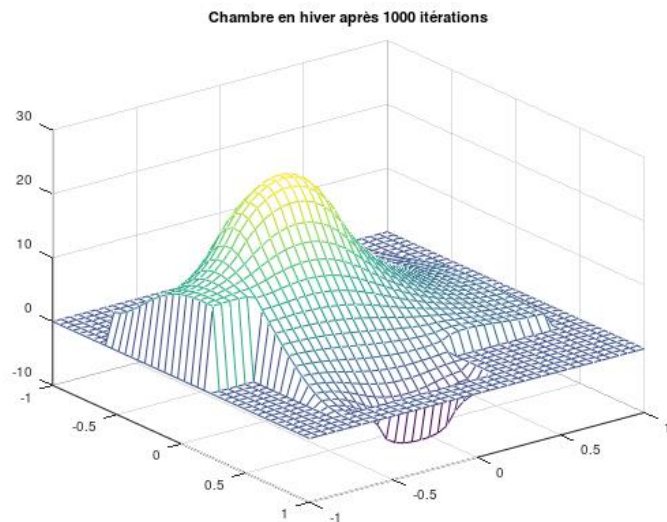
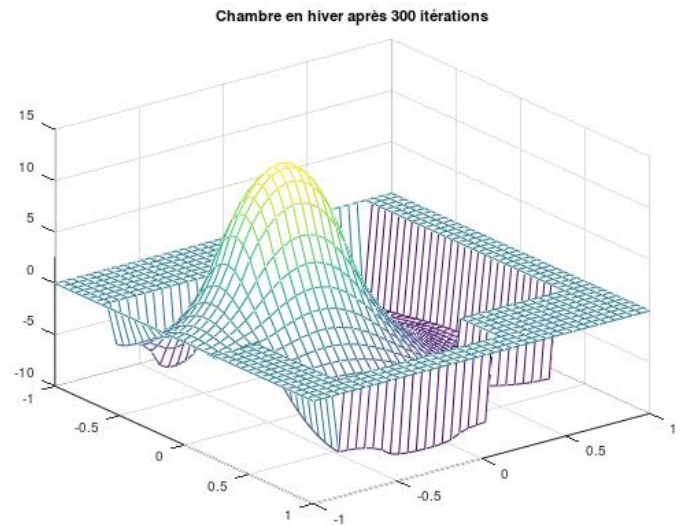
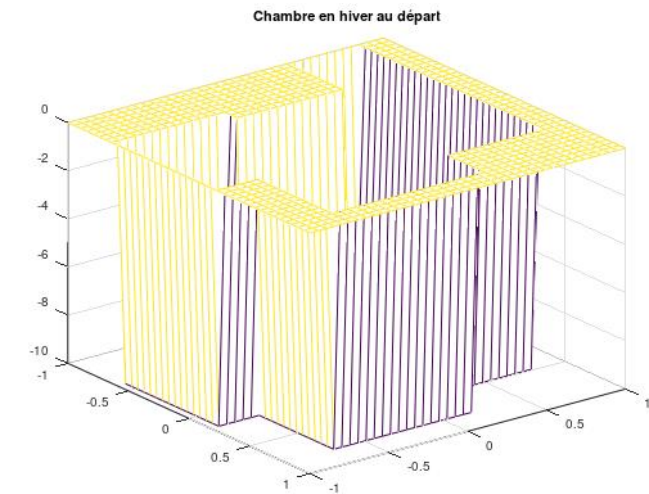
c. ANALYSE ET DIFFERENCES ENTRE LES DEUX SCHEMAS

Nous allons analyser les différences entre ces deux schémas en se basant sur quelques tests (sur la chambre 1) :

Pour évaluer les progressions du chauffage au cours du temps, on a créé une boucle en temps sur laquelle on a fixé i itérations, c'est-à-dire que l'on a un temps écoulé de $i * \Delta t$.

Chambre en hiver : RoomTemperature(-10,-10,500,40)

Notre chambre est initialement froide, à -10°C (ainsi que la porte), en rentrant de vacances on allume le chauffage afin d'arriver à notre température idéale de 22°C . Pour ce test on s'arrête à 3848 itérations, c'est suffisant pour atteindre une température moyenne idéale d'environ 22°C avec les deux schémas (pour $n = 40$).

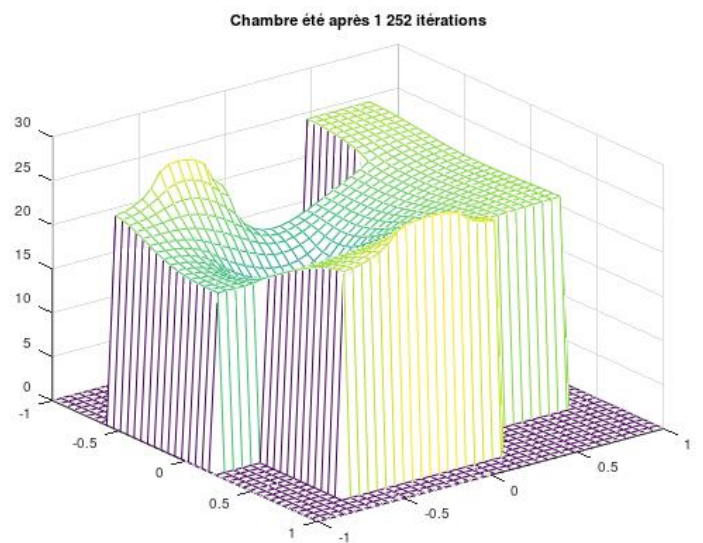
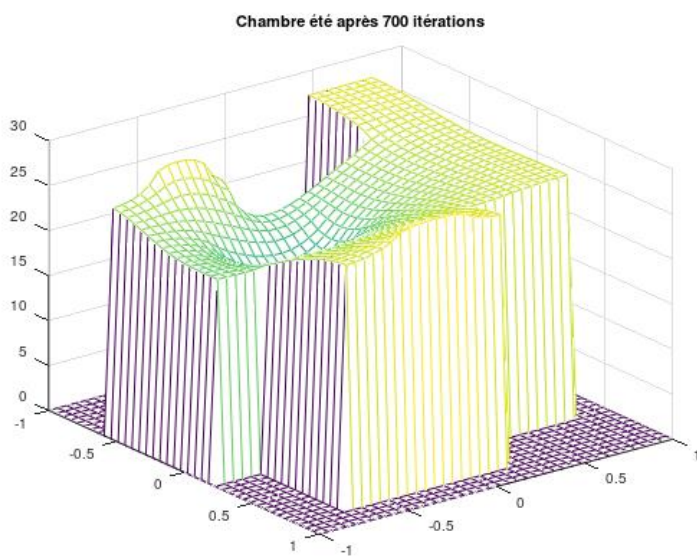
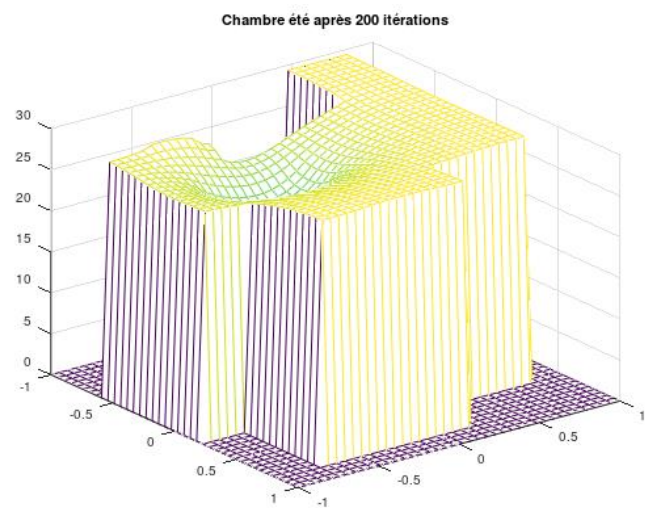
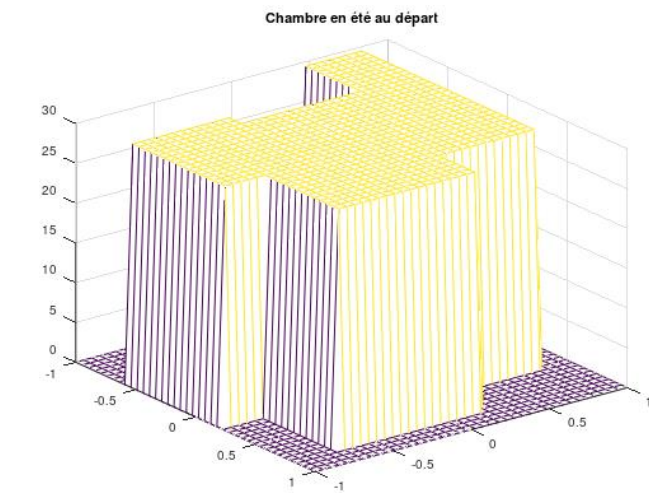


Le schéma d'Euler explicite à un temps d'exécution de 0.43 secondes alors que celui d'Euler implicite est de 3.76 secondes.

Chambre en été : RoomTemperature(30,30,-200,40)

La chambre est initialement à une température très élevée, à 30°C (ainsi que la porte), en rentrant de vacances on allume le chauffage en mode « clim » afin d'arriver à une température autour de 22°C .

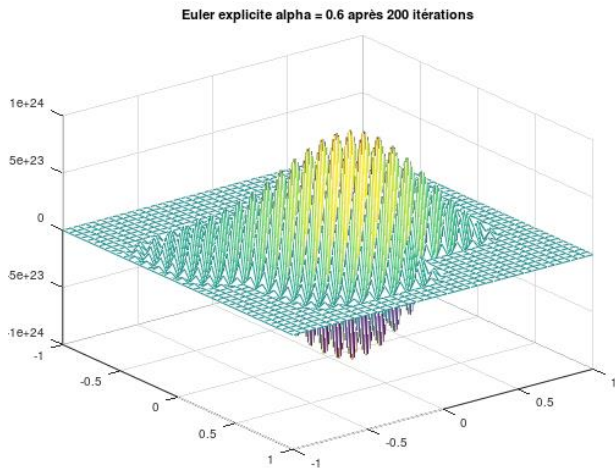
On s'arrête à 1 252 itérations, c'est suffisant pour atteindre une température moyenne idéale de 22°C avec les deux schémas (pour $n = 40$).



Le schéma d'Euler explicite à un temps d'exécution de 0,12 secondes alors que celui d'Euler implicite est de 1,26 secondes.

Pour les deux schémas on arrive à la même température avec le même nombre d'itérations mais on obtient des vitesses d'exécution différente : celle d'Euler explicite est bien plus rapide.

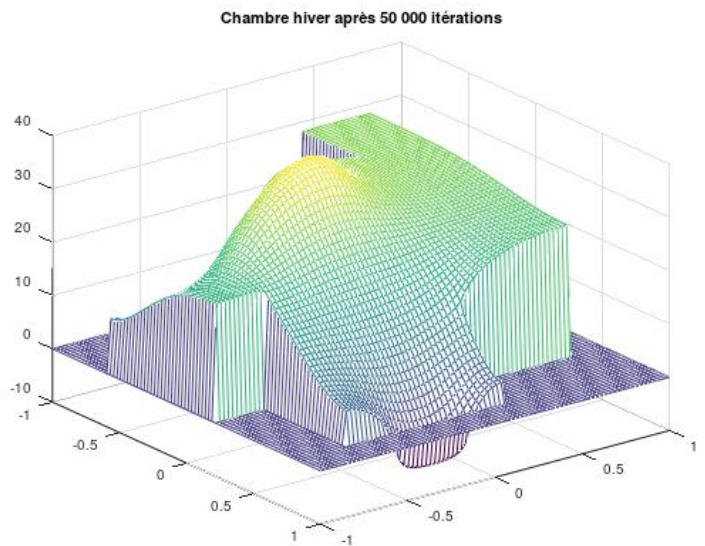
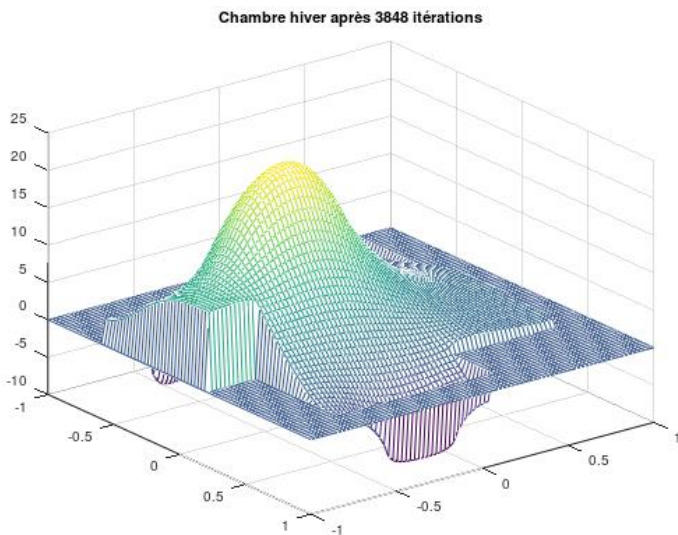
Pour évaluer la stabilité, on pose : $\alpha = 2\vartheta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ (on prend $\Delta x = \Delta y$). En testant sur plusieurs valeurs, on remarque que le schéma d'Euler explicite est stable si la condition CFL $\alpha \leq 0.5$ est vérifiée, sinon les températures divergent très rapidement à l'infini. Alors que le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable.



Ici on a implémenté Euler explicite avec $\alpha = 0.6$, après seulement 200 itérations on voit bien que les températures sont instables et divergent vers des valeurs très élevées.

De plus on remarque que dès que l'on diminue le pas d'espace de la grille, les schémas mettent plus de temps à s'exécuter et nécessitent un plus grand nombre d'itérations.

Revenons sur notre exemple de chauffage en hiver, et mettons maintenant $n = 80$:
RoomTemperature(-10,-10,500,80)



Après 3 848 itérations on obtient une température moyenne de 6°C et un temps d'exécution pour Euler explicite de 1,40 secondes contre 15,59 secondes pour Euler implicite. Pour arriver à notre température idéale moyenne d'environ 22°C, il nous faut 50 000 itérations qui s'exécutent en 17,74 secondes pour Euler explicite et 199,52 secondes pour Euler implicite.

On peut retrouver ce résultat par le calcul mathématique : en augmentant n on diminue le pas de d'espace et donc comme nous avons $\Delta t = \frac{\alpha}{2\theta} \Delta x^2$, cela implique que Δt diminue aussi et donc le temps d'exécution également. Il faut alors augmenter les itérations (car le temps écoulé correspond à nombre d'itérations $\times \Delta t$).

IV. CONCLUSION

La méthode des différences finies est basée sur des principes mathématiques qui nous permettent d'obtenir une simulation de la température assez réaliste.

En implémentant ces résultats au cours du temps avec les deux schémas on a conclu que Euler explicite à une meilleure vitesse d'exécution, cependant il a une condition de stabilité très contraignante dès que le pas d'espace diminue et/ou dès que le pas de temps augmente. Ainsi pour notre simulation on privilégiera le schéma d'Euler implicite qui reste inconditionnellement stable.

Il serait intéressant de tester d'autres schémas (par exemple Crank-Nickolson) et de les comparer afin d'obtenir la méthode la moins coûteuse et la plus adaptée à cette simulation.