TD 8 – Formulation variationnelle

1. On considère le problème aux limites de Neumann suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

où f et g sont continues sur $\bar{\Omega}$ et Ω est un ouvert borné régulier et connexe.
a. Trouver une formulation variationnelle (V) de ce problème sur l'espace $X = H^1(\Omega)$ et montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ est solution de (1) ssi est solution de (V).
b. Montrer qu'une condition nécessaire d'existence de solution de (1) portant sur f et g (condition dite de compatibilité) est la suivante:

$$\int_\Omega f(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(x)d\sigma = 0.$$

c. Montrer que u est solution de (V) ssi elle minimise sur X une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.
d. Montrer que la solution n'est pas unique à une constante près.

2. On considère le problème des plaques suivant:

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f, \text{ dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

où f est continue sur $\bar{\Omega}$.
a. Trouver une formulation variationnelle (V) de ce problème sur l'espace $X = \{v \in H^2(\Omega),\ v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0,\ \partial\Omega\}$. Montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^4(\bar{\Omega})$ est solution de (2) ssi elle est solution de (V).
b. Montrer que u est solution de (V) ssi elle minimise sur X une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.

3. On suppose que Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et unicité de la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

où $f \in L^2(\Omega)$. On admettra l'inégalité suivante (qui généralise l'inégalité de Poincaré):

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}),\ \forall v \in H^1(\Omega).$$

4. Soit Ω un ouvert régulier. On considère l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u + V \cdot \nabla u = f, \text{ dans } \Omega \\ u = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

où V est un champ de divergence nulle.
a. Reprendre la première question de l'exercice 1.
b. Peut-on associer à ce problème un problème de minimisation comme nous l'avons fait à l'exercice 1?
c. Montrer que (4) admet au plus une solution.
d. Aurait-on obtenu un résultat identique si la divergence de V prenait des valeurs strictement positives?