Formulation variationnelle - suite

Lemme : $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert. Soit g une fonction continue dans Ω. Si pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω on a

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

alors la fonction g est nulle dans Ω.

Preuve. Supp $\exists\, x_0$ t.q. $g(x_0) \neq 0$. Supp par exemple que $g(x_0) > 0 \Rightarrow$ par continuité $\exists$ un petit voisinage $\omega \subset \Omega$ de x_0 t.q. $g(x) > 0$ $\forall x \in \omega$. Soit φ une fonction tet non-nulle à support inclus dans ω et positive

$$\Rightarrow \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx = \int_\omega \underbrace{g(x)\varphi(x)}_{>0}\,dx = 0$$

contradiction avec l'hypothèse sur g.

Donc on a bien que $g(x) = 0$ $\forall x \in \Omega$

$\rightsquigarrow$ propriété très utile par la suite.

On a prouvé l'équivalence entre la formulation faible et forte c.a.d

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \iff \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\forall v \in X = \{\varphi \in C^1(\bar{\Omega}), \varphi = 0, \partial\Omega\}$$

pour toute fonction $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Notation plus compacte pour la formulation variationnelle

Trouver $u \in X$ t.q. $a(u,v) = L(v), \forall v \in X$

(FV) $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$, $L(v) = \int_\Omega f v \, dx$

forme bi-linéaire   forme linéaire

- L'idée de l'approche variationnelle est de trouver l'$\exists!$ de la solution de (FV) qui entraînera $\exists!$ pour le problème de départ.
- théorie très puissante : analyse des (FV) mais on a besoin d'espaces de Hilbert.

- Espace de Hilbert : espace complet muni d'un produit scalaire. L'espace des fonctions continûment différentiables n'est pas complet.

Quels espaces de Hilbert utiliser ?

Espaces de Sobolev

$$\boxed{H_0^1(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in (L^2(\Omega))^d, \; v = 0 \,,\, \partial\Omega \}}$$

fonctions à carré intégrable dont le gradient est à carré intégrable.

Théorème de Lax-Milgram

V espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et une norme $\|\cdot\|$. Si

a) L est une forme linéaire et continue

$$\exists\, c > 0 \text{ t.q. } |L(v)| \leq c \|v\| , \; \forall v \in V$$

b) $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bi-linéaire sur V

c.-à-d. $w \longmapsto a(w,v)$ est linéaire $\forall v$

$v \longmapsto a(w,v)$ ——— $\forall w$

c) $a(\cdot,\cdot)$ est continue c-à-d $\exists M > 0$ t.q.

$$|a(w,v)| \leq M \|w\| \cdot \|v\| \quad \forall w, v \in V$$

d) $a(\cdot,\cdot)$ est coercive (ou elliptique)

$\exists \gamma > 0$ t.q. $a(v,v) \geq \gamma \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$

Alors la formulation variationnelle (FV) a une solution unique dans V.

*

Si on l'applique au pbme :

FV Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$V = H_0^1(\Omega)$ espace de Hilbert

$$(v,w)_{H^1(\Omega)} = (v,w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla v, \nabla w)_{L^2(\Omega)}$$

$\rightsquigarrow$ produit scalaire

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

où $(v,w)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v \cdot w \, dx$ $\rightsquigarrow$ produit scalaire en L^2

Vérifions les hypothèses de Lax-Milgram

a) $L(v) = \int_\Omega f v \, dx$ → linéaire

$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq M \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)}$

↑ Cauchy-Schwarz — continue si $f \in L^2(\Omega)$

b) $a(v,w) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx$ ⇝ bilinéaire

$|a(v,w)| \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}$

$< \|v\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|w\|_{H^1(\Omega)}$

⇝ continue

c) Coercivité ? Oui, grâce à l'inégalité de Poincaré

$\|v\|^2_{L^2} = \int_\Omega v^2 \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \Rightarrow$

$\Rightarrow (C+1) \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$

$\underbrace{\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}}_{a(v,v)} \geq \frac{1}{C+1} \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$

$a(v,v) \geq \frac{1}{C+1} \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$

⇝ coercive

Équivalence avec un problème d'optimisation

Proposition: Si la forme bilinéaire est symétrique $a(w,v) = a(v,w) \ \forall v,w \in V$ et

$$\boxed{J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v)} \quad \text{(énergie)}$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la (FV)
Alors u est aussi l'unique point de min de l'énergie

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

Réciproquement si $u \in V$ est un point de min de l'énergie $J(v)$ alors u est la sol unique de la FV.

Preuve. On ré-écrit l'energie

$$J(u+v) = \frac{1}{2} a(u+v, u+v) - L(u+v)$$

$$= \frac{1}{2} a(u,u) - L(u) + a(u,v) + \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) = J(u) + \frac{1}{2} a(v,v) + a(u,v) - L(v)$$

"$\Rightarrow$" Si u est solution de (FV) $\Rightarrow$

$$a(u,v) - L(v) = 0$$

$$\Rightarrow J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2} a(v,v) \geq J(u)$$

$\forall v \in V \Rightarrow u$ est un minimum de J.

"$\Leftarrow$" Soit u un min de J et

$j(t) = J(u+tv) \Rightarrow t=0$ min de j

$$\Rightarrow \frac{dj(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} a(u,u) + t\, a(u,v) + \frac{t^2}{2} a(v,v) - L(u) - t\, L(v)\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \left(a(u,v) - L(v) + t\, a(v,v)\right]\Big|_{t=0}$$

$$= a(u,v) - L(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

$\Rightarrow u$ solution de (FV)

Remarque. L'hypothèse de symetrie est essentielle sinon il n'y a pas équivalence (voir TD)