cours 4

Stabilité et analyse de Fourier

Afin de définir rigoureusement la stabilité on a besoin de définir les normes pour la solution numériques. Ce sont les normes classiques pondérées par le pas d'espace Δx

$$(*)\ \|u^n\|_p = \left(\sum_{j=1}^{N} \Delta x |u_j^n|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad u^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq N}.$$

pour $p = \infty$ on a $\|u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |u_j^n|$

En pratique les seules normes utilisées sont $p = 2, \infty$.

Définition Un schéma aux différences finies est dit <u>stable</u> pour la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|\cdot\|$ s'il $\exists$ une constante $K > 0$ indépendante de Δt et Δx (lorsque $\Delta t, \Delta x \to 0$) t.q.

$$(1) \quad \|u^n\| \leq K \|u^0\| \quad \forall n \geq 0, \quad \forall u^0 \in \mathbb{R}^N$$

Si (1) n'a lieu que pour des pas Δt et Δx qui vérifient certaines inégalités on dit que le schéma est <u>conditionnellement stable</u>.

Interprétation. Supposons qu'on a un schéma linéaire (ce qui sera le cas dans nos exemples). Dans ce cas u^{n+1} peut s'écrire

$$u^{n+1} = A u^n \quad (, A\text{-matrice.})$$

$$\Rightarrow u^n = A^n u^0 \Rightarrow \|u^n\| = \|A^n u^0\|.$$ Donc la stabilité $\Leftrightarrow$

$$\|A^n u^0\| \leq K \|u^0\| \quad \forall n \geq 0, \forall u^0 \in \mathbb{R}^N$$

$$\Leftrightarrow \frac{\|A^n u^0\|}{\|u^0\|} \leq K, \quad \forall u^0 \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow \boxed{\|A^n\| \leq K \quad \forall n \geq 0}$$

où $\|A^n\|$ est la norme matricielle de A^n $\left(\|M\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ x \neq 0}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}\right)$.

La stabilité en norme L^∞ est très liée avec le principe du maximum discret énoncé auparavant.

La vérification du principe du maximum discret entraîne la stabilité en norme L^∞.

Stabilité en norme L^2

Il y a des schémas qui ne vérifient pas le principe du max discret mais ils sont qd même de bons schémas. Il faudra alors changer la norme. On choisira la norme L^2

On suppose des conditions aux limites de périodicité $u(t, x+1) = u(t, x)$ $x \in [0,1]$, $\forall t \geq 0$. Dans le schéma numérique cela se traduit par $u_j^n = u_{N+1+j}^n$ $\forall j \geq 0$, $\forall n \geq 0$

L'hypothèse de périodicité est nécessaire car on décomposera u_j^n en série de Fourier : $u_j^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A(k)^n \exp(2i\pi k x_j)$, $x_j = j\Delta x$.

Afin d'étudier la stabilité du schéma il suffira d'injecter un seul mode $A(k)^n \exp(2i\pi k x_j)$ dans le schéma et ensuite calculer $A(k)$ (facteur d'amplification). On appelle condition de stabilité de von Neumann l'inégalité

$$|A(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Exemple : schéma explicite $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$

$u_j^n = A(k)^n \exp(2i\pi k x_j)$:

$$\frac{A(k)^{n+1} e^{2i\pi k x_j} - A(k)^n e^{2i\pi k x_j}}{\Delta t} - \frac{\nu}{\Delta x^2} A(k)^n \left(e^{2i\pi k x_{j+1}} - 2e^{2i\pi k x_j} + e^{2i\pi k x_{j-1}}\right) = 0$$

On divise par $A(k)\, e^{2i\pi k x_j}$ $\Rightarrow$

$$\cancel{e^{2i\pi}} \frac{A(k)-1}{\Delta t} - \frac{\nu}{\Delta x^2}\left(e^{i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-i\pi k \Delta x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A(k) = 1 + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}\left(2\cos(k\pi\Delta x) - 2\right)$$

$$= 1 - 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k\pi\Delta x}{2}\right)$$

$$|A(k)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1 - 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\left(\frac{k\pi\Delta x}{2}\right) \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2\nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\left(\frac{k\pi\Delta x}{2}\right) \leq 1 \quad \boxed{\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}}$$