Examen Équations aux Dérivées Partielles. Durée : 2h

Les documents de cours ne sont pas autorisés. Justifier vos reponses d'une façon concise et claire.

Problème 1

Considérons l'équation d'advection dans le domaine borné $(0,1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \end{cases}$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1.

1. Montrer que le schéma de *Lax-Friedrichs*

$$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

   est stable en norme L^2 si $|V|\Delta x \leq \Delta x$.

   Calculer l'erreur de troncature du schéma. En déduire que si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est gardé constant quand Δt et Δx tendent vers 0, alors le schéma est consistant avec l'équation d'advection et précis à l'ordre 1 et espace et en temps.

2. Montrer que le schéma de *Lax-Wendroff* ne préserve pas le principe du maximum discret

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{V^2\Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

   sauf si le rapport $V\Delta t/\Delta x$ vaut -1, 0 ou 1.

   Montrer que ce schéma est L^2-stable sous la condition CFL $|V|\Delta t \leq \Delta x$.

   Montrer également qu'il est consistant avec l'équation d'advection et précis à l'ordre 2 et espace et en temps.

Problème 2

Considérons l'équation d'advection-diffusion dans le domaine borné $(0,1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \end{cases}$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1.
Considérons le schéma décentré amont suivant:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \nu\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

1. Déterminer l'ordre du schéma.

2. On veut déterminer les conditions des stabilité L^2 du schéma lorsque $V > 0$ et $V < 0$. Pour cela on procédera en plusieurs étapes. Écrire d'abord le facteur d'amplification $G(k)$ sous la forme
$$G(k) = \alpha e^{2i\pi k\Delta x} + \beta + \gamma e^{-2i\pi k\Delta x},\ \alpha + \beta + \gamma = 1.$$
avec des α, β, γ que l'on précisera.

   Calculer le module complexe de $G(k)$ et montrer qu'il peut se mettre sous la forme
$$|G(k)|^2 = (1 - 2(\alpha + \gamma)s_k)^2 + 4(\alpha - \gamma)^2 s_k(1 - s_k),\ s_k = \sin^2(k\pi\Delta x)$$
   (sans remplacer pour le moment les valeurs de coefficients).

   En déduire que la condition de stabilité $|G(k)|^2 \leq 1$ est satisfaite si $(\alpha - \gamma)^2 \leq (\alpha + \gamma)$. Remplacer maintenant les coefficients α et γ et donner la condition de stabilité en fonction des paramètres du problème. Dans le cas où $V < 0$ que se passe-t-il si $\nu \to 0$?

Problème 3

On cherche à résoudre le problème aux limites le suivant dans le carré $\Omega = [-1, 1]^2$,
$$\begin{cases} -\Delta u & = & f, \text{ dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, \pm 1) & = & 1,\ \forall x \in (-1, 1), \\ u(\pm 1, y) & = & 0,\ \forall y \in (-1, 1). \end{cases} \tag{1}$$
où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à la frontière du domaine.

1. En multipliant par une fonction test v et en intégrant par parties, déterminer la formulation variationnelle (FV) de ce problème. On va préciser l'espace X sur lequel cette formulation est définie ainsi que la forme bilinéaire a et la forme linéaire.

2. Montrer que u est solution de (FV) ssi elle minimise sur X une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.

`Indication`: après la multiplication par la fonction test v et integration par parties, on va constater que l'integrale sur la frontière $\partial\Omega$ se décompose en 4 parties correspondant aux cotés du carré et où les conditions aux limites sont différentes.