

FIG. 2.3 – Raffinement de maillage en différences finies : la zone entourée est celle où l'on veut plus de précision.

limitations de la méthode est qu'elle ne fonctionne que pour des maillages réguliers, dits **rectangulaires**. Il n'est pas toujours facile de pavier un domaine quelconque de l'espace par des mailles rectangulaires ! Par ailleurs, il n'est pas possible de raffiner localement le maillage pour avoir une meilleure précision en un endroit précis du domaine de calcul. Il est possible de faire varier dans chaque direction le pas d'espace mais cette variation est uniforme dans les directions perpendiculaires (Δx et Δy peuvent changer le long des axes x et y , respectivement, mais cette variation est uniforme dans les directions orthogonales ; voir la Figure 2.3). Un raffinement de maillage en différences finies produit donc des mailles élancées loin de la zone d'intérêt. Par ailleurs, la théorie comme la pratique des différences finies se compliquent singulièrement lorsque les coefficients dans les équations aux dérivées partielles sont variables et lorsque les problèmes sont non-linéaires.

2.3 Autres modèles

2.3.1 Équation d'advection

Nous considérons l'équation d'advection en une dimension d'espace dans le domaine borné $(0, 1)$ avec une vitesse constante $V > 0$ et des conditions aux limites de périodicité

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour } (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t, x+1) = u(t, x) & \text{pour } (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour } x \in (0, 1). \end{cases} \quad (2.32)$$

On discrétise toujours l'espace avec un pas $\Delta x = 1/(N+1) > 0$ (N entier positif) et le temps avec $\Delta t > 0$, et on note $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$ pour $n \geq 0, j \in \{0, 1, \dots, N+1\}$, u_j^n la valeur d'une solution discrète approchée au point (t_n, x_j) , et $u(t, x)$ la solution exacte de (2.32). Les conditions aux limites de périodicité conduisent aux égalités $u_0^n = u_{N+1}^n$ pour tout $n \geq 0$, et plus généralement $u_j^n = u_{N+1+j}^n$. Par conséquent, l'inconnue discrète à chaque pas de temps est un vecteur $u^n = (u_j^n)_{0 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^{N+1}$. Nous donnons quelques schémas possibles pour l'équation d'advection (2.32). Au Chapitre 1 nous avons déjà constaté le mauvais comportement numérique du **schéma explicite centré**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (2.33)$$

pour $n \geq 0$ et $j \in \{0, \dots, N\}$. Le caractère instable de ce schéma est confirmé par le lemme suivant.

Lemme 2.3.1 *Le schéma explicite centré (2.33) est consistant avec l'équation d'advection (2.32), précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace, mais inconditionnellement instable en norme L^2 .*

Démonstration. A l'aide d'un développement de Taylor autour du point (t_n, x_j) , on vérifie facilement que le schéma est consistant, précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace. Par analyse de Fourier, on étudie la stabilité L^2 . Avec les notations de la Sous-section 2.2.3, les composantes de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de u^n vérifient

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left(1 - i \frac{V\Delta t}{\Delta x} \sin(2\pi k \Delta x)\right) \hat{u}^n(k) = A(k) \hat{u}^n(k).$$

On vérifie que le module du facteur d'amplification est toujours plus grand que 1,

$$|A(k)|^2 = 1 + \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x} \sin(2\pi k \Delta x)\right)^2 \geq 1,$$

avec inégalité stricte dès que $2k\Delta x$ n'est pas entier. Donc le schéma est instable. \square

On peut écrire une version implicite du précédent schéma qui devient stable : c'est le **schéma implicite centré**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0. \quad (2.34)$$

Exercice 2.3.1 Montrer que le schéma implicite centré (2.34) est consistant avec l'équation d'advection (2.32), précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace, inconditionnellement stable en norme L^2 , donc convergent.

Si l'on tient absolument à rester centré et explicite, le **schéma de Lax-Friedrichs**

$$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (2.35)$$

est un schéma simple, robuste, mais pas très précis.

Lemme 2.3.2 *Le schéma de Lax-Friedrichs (2.35) est stable en norme L^2 sous la condition CFL*

$$|V|\Delta t \leq \Delta x.$$

Si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est gardé constant lorsque Δt et Δx tendent vers zéro, il est consistant avec l'équation d'advection (2.32) et précis à l'ordre 1 en espace et temps. Par conséquent, il est conditionnellement convergent.

Démonstration. Par analyse de Fourier on a

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left(\cos(2\pi k\Delta x) - i \frac{V\Delta t}{\Delta x} \sin(2\pi k\Delta x) \right) \hat{u}^n(k) = A(k)\hat{u}^n(k).$$

Le module du facteur d'amplification est donné par

$$|A(k)|^2 = \cos^2(2\pi k\Delta x) + \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(2\pi k\Delta x).$$

On vérifie donc que $|A(k)| \leq 1$ pour tout k si la condition $|V|\Delta t \leq \Delta x$ est satisfaite, tandis qu'il existe des modes instables k tels que $|A(k)| > 1$ si non. Le schéma est donc conditionnellement stable. Pour étudier la consistance, on effectue un développement de Taylor autour de (t_n, x_j) pour la solution u :

$$\begin{aligned} \frac{2u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})}{2\Delta t} + V \frac{u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})}{2\Delta x} = \\ (u_t + Vu_x)(t_n, x_j) - \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \left(1 - \frac{(V\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right) u_{xx}(t_n, x_j) + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2 + \frac{(\Delta x)^4}{\Delta t}\right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Comme l'erreur de troncature contient un terme en $\mathcal{O}\left((\Delta x)^2/\Delta t\right)$, le schéma n'est pas consistant si Δt tend vers zéro plus vite que $(\Delta x)^2$. Par contre, il est consistant et précis d'ordre 1 si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est constant. Pour obtenir la convergence on reprend la démonstration du Théorème de Lax 2.2.20. L'erreur e^n est toujours majorée par l'erreur de troncature, et donc ici

$$\|e^n\| \leq \Delta t n K C \left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} + \Delta t \right).$$

Si on garde fixe le rapport $\Delta x/\Delta t$ l'erreur est donc majoré par une constante fois Δt qui tend bien vers zéro, d'où la convergence. \square

Remarque 2.3.3 Le schéma de Lax-Friedrichs n'est pas consistant (stricto sensu suivant la Définition 2.2.4). Néanmoins il est conditionnellement consistant et convergent. Il faut cependant faire attention que si on prend le pas de temps Δt beaucoup plus petit que ce qui est permis par la condition CFL de stabilité, la convergence sera très lente. En pratique le schéma de Lax-Friedrichs n'est pas recommandé. •

Un schéma centré, explicite, plus précis est le **schéma de Lax-Wendroff**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \left(\frac{V^2 \Delta t}{2} \right) \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0. \quad (2.37)$$

Sa dérivation n'est pas immédiate, aussi nous la présentons en détail. On commence par écrire un développement à l'ordre 2 en temps de la solution exacte

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) + (\Delta t)u_t(t_n, x_j) + \frac{(\Delta t)^2}{2}u_{tt}(t_n, x_j) + \mathcal{O}((\Delta t)^3).$$

En utilisant l'équation d'advection on remplace les dérivées en temps par des dérivées en espace

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) - (V \Delta t)u_x(t_n, x_j) + \frac{(V \Delta t)^2}{2}u_{xx}(t_n, x_j) + \mathcal{O}((\Delta t)^3).$$

Enfin, on remplace les dérivées en espace par des formules centrées d'ordre 2

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}, x_j) &= u(t_n, x_j) - V \Delta t \frac{u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})}{2\Delta x} \\ &\quad + \frac{(V \Delta t)^2}{2} \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1})}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + \Delta t(\Delta x)^2). \end{aligned}$$

On retrouve bien le schéma de Lax-Wendroff en négligeant les termes du troisième ordre et en remplaçant $u(t_n, x_j)$ par u_j^n . Remarquer que, par rapport aux précédents schémas, on a discréétisé "simultanément" les dérivées en espace et en temps de l'équation d'advection. Par construction, le schéma de Lax-Wendroff est précis à l'ordre 2 en temps et en espace. On peut montrer qu'il ne vérifie pas le principe du maximum discret (voir l'Exercice 2.3.3). Par contre, il est stable en norme L^2 et donc convergent sous la condition CFL $|V|\Delta t \leq \Delta x$.

Exercice 2.3.2 Montrer que le schéma de Lax-Wendroff est stable et convergent en norme L^2 si $|V|\Delta t \leq \Delta x$.

Exercice 2.3.3 Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs préserve le principe du maximum discret si la condition CFL $|V|\Delta t \leq \Delta x$ est satisfaite, tandis que le schéma de Lax-Wendroff ne le préserve pas sauf si $V\Delta t/\Delta x$ vaut $-1, 0$, ou 1 .

Exercice 2.3.4 Montrer que le schéma de Lax-Wendroff (2.37) est le seul schéma précis à l'ordre 2 en espace et temps qui soit du type

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n,$$

où α, β, γ dépendent seulement de $V\Delta t/\Delta x$.

Comme nous l'avons déjà dit au Chapitre 1, une idée fondamentale pour obtenir de “bons” schémas pour l’équation d’advection (2.32) est le **décentrement amont**. Nous donnons la forme générale du **schéma décentré amont**

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 \quad \text{si} \quad V > 0 \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} &= 0 \quad \text{si} \quad V < 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

On a déjà vu au Chapitre 1 que le schéma décentré amont est stable en norme L^∞ si la condition CFL, $|V|\Delta t \leq \Delta x$, est satisfaite. Comme il est consistant et précis d’ordre 1 en espace et temps, il converge en norme L^∞ d’après le théorème de Lax. Le même résultat est vrai en norme L^2 avec la même condition CFL.

Exercice 2.3.5 Montrer que le schéma explicite décentré amont (2.38) est consistant avec l’équation d’advection (2.32), précis à l’ordre 1 en espace et temps, stable et convergent en norme L^2 si la condition CFL $|V|\Delta t \leq \Delta x$ est satisfaite.

Remarque 2.3.4 Pour des problèmes non-linéaires (où la vitesse V dépend elle-même de l’inconnue u), et notamment pour des modèles d’écoulements de fluides, le schéma décentré amont est vraiment supérieur aux autres. Il est à la source de nombreuses généralisations, beaucoup plus complexes que l’original (voir à ce sujet le cours [18]). En particulier, bien que le schéma original soit seulement d’ordre 1, il admet des variantes d’ordre 2. •

Schéma	Stabilité	Erreur de troncature
Explicite centré (2.33)	instable	$\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$
Implicite centré(2.34)	stable L^2	$\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$
Lax-Friedrichs (2.35)	stable L^2 et L^∞ si condition CFL $ V \Delta t \leq \Delta x$	$\mathcal{O}\left(\Delta t + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right)$
Lax-Wendroff (2.37)	stable L^2 si condition CFL $ V \Delta t \leq \Delta x$	$\mathcal{O}\left((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2\right)$
Décentré amont (2.38)	stable L^2 et L^∞ si condition CFL $ V \Delta t \leq \Delta x$	$\mathcal{O}(\Delta t + \Delta x)$

TAB. 2.2 – Résumé des propriétés de divers schémas pour l’équation d’advection

Pour comparer ces divers schémas d’un point de vue pratique, un concept pertinent (quoique formel) est celui d’équation équivalente.

Définition 2.3.5 On appelle **équation équivalente** d'un schéma l'équation obtenue en ajoutant au modèle étudié la partie principale (c'est-à-dire le terme d'ordre dominant) de l'erreur de troncature du schéma.

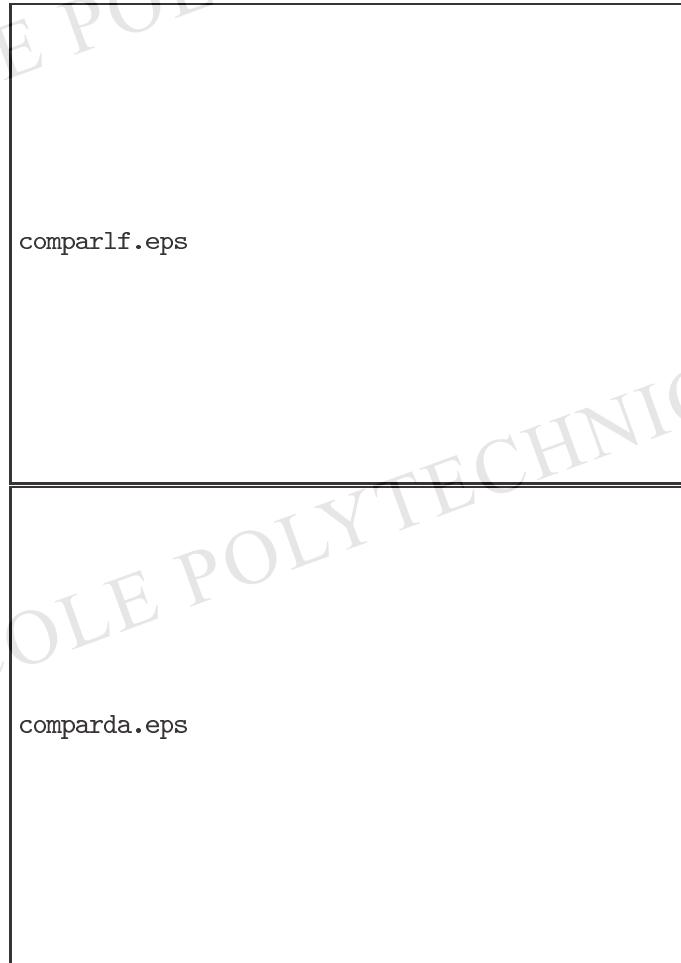


FIG. 2.4 – Influence de la CFL sur la diffusion numérique du schéma de Lax-Friedrichs (haut) et du schéma décentré amont (bas).

Tous les schémas que nous venons de voir sont consistants. Cependant, si on ajoute à l'équation la partie principale de l'erreur de troncature d'un schéma, alors ce schéma est non seulement encore consistant avec cette nouvelle équation "équivalente", mais est même strictement plus précis pour cette équation équivalente. En d'autres termes, le schéma est "plus consistant" avec l'équation équivalente qu'avec l'équa-

tion d'origine. Prenons l'exemple du schéma de Lax-Friedrichs (2.35) pour l'équation d'advection : d'après (2.36), la partie principale de son erreur de troncature est $-\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \left(1 - \frac{(V\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\right) u_{xx}$. Par conséquent, l'équation équivalente du schéma de Lax-Friedrichs est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \left(1 - \frac{(V\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\right). \quad (2.39)$$

Cette équation équivalente va nous donner des renseignements précieux sur le comportement numérique du schéma. En effet, le schéma de Lax-Friedrichs est une bonne approximation (à l'ordre 2) de l'équation de convection-diffusion (2.39) où le coefficient de diffusion ν est petit (voire nul si la condition CFL est exactement satisfaite, i.e. $\Delta x = |V|\Delta t$). Remarquons que si le pas de temps est pris trop petit, le coefficient de diffusion ν peut être très grand et le schéma mauvais car trop porté à la diffusion (voir la Figure 2.4). Le coefficient de diffusion ν de l'équation équivalente est appelé **diffusion numérique**. S'il est grand, on dit que le schéma est **diffusif** (ou dissipatif). Le comportement typique d'un schéma diffusif est sa tendance à étaler artificiellement les données initiales au cours du temps. Les schémas trop diffusifs sont donc de "mauvais" schémas.

Exercice 2.3.6 Montrer que l'équation équivalente du schéma décentré amont (2.38) est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{|V|}{2} (\Delta x - |V|\Delta t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Le schéma décentré amont est aussi diffusif (sauf si la condition CFL est exactement satisfaite, i.e. $\Delta x = |V|\Delta t$). En tout cas, le coefficient de diffusion de l'équation équivalente ne tend pas vers l'infini si le pas de temps tend vers zéro (à Δx fixé), ce qui est une nette amélioration par rapport au schéma de Lax-Friedrichs (voir la Figure 2.4). Cet effet de diffusion numérique est illustré par la Figure 2.4 où l'on résout l'équation d'advection sur un intervalle de longueur 1 avec des conditions aux limites de périodicité, une donnée initiale sinusoïdale, un pas d'espace $\Delta x = 0.01$, une vitesse $V = 1$ et un temps final $T = 5$. On compare deux valeurs du pas de temps $\Delta t = 0.9\Delta x$ et $\Delta t = 0.45\Delta x$.

Exercice 2.3.7 Montrer que l'équation équivalente du schéma de Lax-Wendroff (2.37) est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V(\Delta x)^2}{6} \left(1 - \frac{(V\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Comme le schéma de Lax-Wendroff est précis d'ordre 2, l'équation équivalente ne contient pas de terme de diffusion mais un terme du troisième ordre, dit **dispersif**. Remarquons que le coefficient devant ce terme dispersif est un ordre plus petit que le coefficient de diffusion des équations équivalentes des schémas diffusifs. C'est pourquoi cet effet dispersif ne peut se voir, en général, que sur un schéma non diffusif. Le

comportement typique d'un schéma dispersif est qu'il produit des oscillations lorsque la solution est discontinue (voir la Figure 2.5). En effet, le terme dispersif modifie la vitesse de propagation des ondes planes ou modes de Fourier de la solution (particulièrement des modes de fréquence élevée), alors qu'un terme diffusif ne fait qu'atténuer son amplitude (voir l'Exercice 2.3.8).

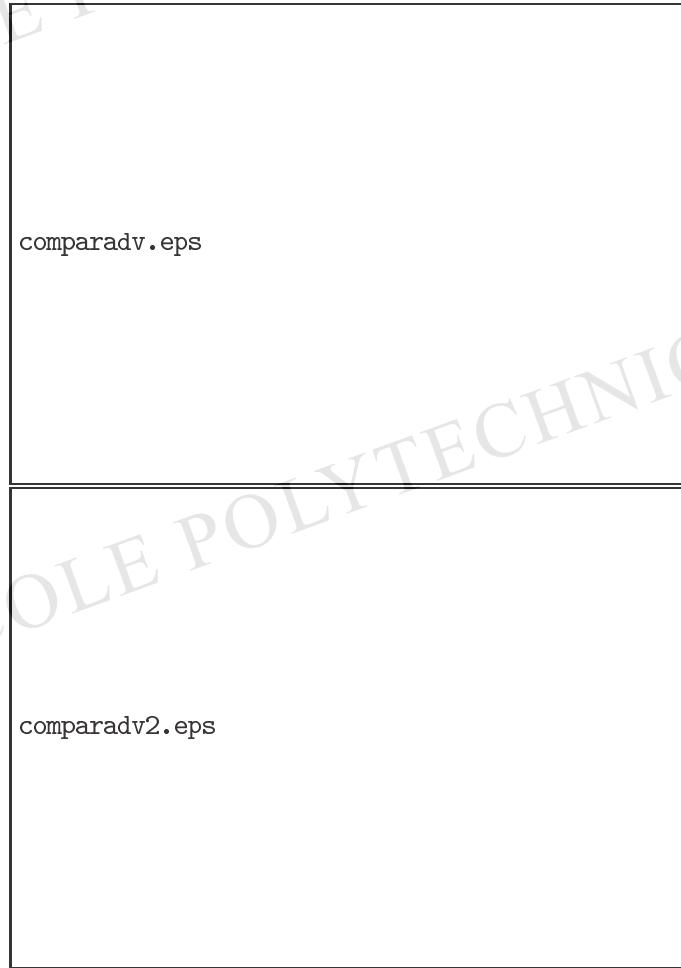


FIG. 2.5 – Comparaison des schémas de Lax-Friedrichs, de Lax-Wendroff, et décentré amont pour une donnée initiale sinusoïdale (haut) ou en créneau (bas).

Afin d'illustrer notre propos nous présentons des calculs effectués sur un intervalle de longueur 1 avec des conditions aux limites de périodicité, un pas d'espace $\Delta x = 0.01$, un pas de temps $\Delta t = 0.9 * \Delta x$, une vitesse $V = 1$ et un temps final $T = 5$. Deux types de conditions initiales sont testées : tout d'abord une condition initiale très

régulière, un sinus, puis une condition initiale discontinue, un créneau (voir la Figure 2.5). Les schémas précis à l'ordre 1 sont clairement diffusifs : ils écrasent la solution. Le schéma de Lax-Wendroff précis à l'ordre 2 est très bon pour une solution régulière mais oscille pour le créneau car il est dispersif. Le concept d'équation équivalente permet de comprendre ces phénomènes numériques.

Exercice 2.3.8 Soit l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0, x) = \sin(\omega x + \phi) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $V, \nu, \mu, \omega, \phi \in \mathbb{R}$. Montrer que sa solution est

$$u(t, x) = \exp(-\nu\omega^2 t) \sin(\omega(x - (V + \mu\omega^2)t) + \phi)$$

(on admettra son unicité). En déduire que la diffusion atténue l'amplitude de la solution, tandis que la dispersion modifie la vitesse de propagation.

Exercice 2.3.9 On définit le schéma “saute-mouton” (leapfrog, en anglais)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

Étudier la consistance et l'erreur de troncature de ce schéma. Montrer par analyse de Fourier qu'il est stable sous la condition CFL $|V|\Delta t \leq M\Delta x$ avec $M < 1$.

Exercice 2.3.10 On définit le schéma de Crank-Nicholson

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4\Delta x} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4\Delta x} = 0.$$

Étudier la consistance et l'erreur de troncature de ce schéma. Montrer par analyse de Fourier qu'il est inconditionnellement stable.

2.3.2 Équation des ondes

Nous considérons l'équation des ondes dans le domaine borné $(0, 1)$ avec conditions aux limites de périodicité

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pour } (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t, x+1) = u(t, x) & \text{pour } (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0, x) = u_0(x) & \text{pour } x \in (0, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0, x) = u_1(x) & \text{pour } x \in (0, 1). \end{cases} \quad (2.40)$$