On en déduit que $\lambda^2 \leq 1$. Donc (2.10) est vérifée. Passons à la vérification de (2.11). Supposons que λ_2 soit la plus grande valeur propre, on a alors $\lambda_2 = \lambda_1 + \sqrt{\Delta}$ où $\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$. Or

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\frac{c\cos(2k\pi\Delta x)}{1+c}.$$

On a donc

$$\lambda_2 = \frac{c\cos(2k\pi\Delta x)}{1+c} + \sqrt{\Delta}/2$$

et

$$|\lambda_2| \leq \frac{c}{1+c} + \sqrt{\Delta}/2 = 1 + \sqrt{\Delta} - \frac{1}{1+c}.$$

Si le rapport $\Delta t/(\Delta x)^2$ reste borné, c est majoré par une constante $M > 0$. On a donc dans ce cas

$$|\lambda_2| =\leq 1 + \sqrt{\Delta} - (1+M)^{-1}.$$

Pour Δ suffisament petit, le membre de droite est strictement plus petit que 1, ce qui établit la deuxième condition de stabilité (2.11).

Le schéma est donc stable en norme L^2 pourvu que le rapport $\Delta t/(\Delta x)^2$ reste borné. Enfin, d'après le Théorème de Lax, la stabilité combinée à la consistance implique la convergence.

Exercice 2.2.8 Montrer que le schéma explicite

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu\frac{-u_{j-1,k}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j+1,k}^n}{(\Delta x)^2} + \nu\frac{-u_{j,k-1}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j,k+1}^n}{(\Delta y)^2} = 0 \qquad (2.12)$$

est stable en norme L^∞ (et même qu'il vérifie le principe du maximum) sous la condition CFL

$$\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Correction. Le schéma explicite (2.12) est défini par

$$u_{j,k}^{n+1} = \left(1 - 2\Big(\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta u)^2}\Big)\right)u_{j,k}^n + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{j-1,k}^n + u_{j+1,k}^n) + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}(u_{j,k-1}^n + u_{j,k+1}^n).$$

Si

$$\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq 1/2\ ,$$

$u_{j,k}^{n+1}$ est une combinaison convexe de coordonnées de u^n et donc

$$|u_{j,k}^{n+1}| \leq \|u^n\|_\infty.$$

Exercice 2.2.9 Montrer que le schéma de Peaceman-Rachford

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2}-u_{j,k}^{n}}{\Delta t}+\nu\frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2}+2u_{j,k}^{n+1/2}-u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2}+\nu\frac{-u_{j,k-1}^{n}+2u_{j,k}^{n}-u_{j,k+1}^{n}}{2(\Delta y)^2}=0$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1}-u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t}+\nu\frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2}+2u_{j,k}^{n+1/2}-u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2}+\nu\frac{-u_{j,k-1}^{n+1}+2u_{j,k}^{n+1}-u_{j,k+1}^{n+1}}{2(\Delta y)^2}=0$$

est précis d'ordre 2 en espace et temps et inconditionnellement stable en norme L^2 (pour des conditions aux limites de périodicité dans chaque direction).

Correction.

1. Consistance

En effectuant la soustraction des deux équations définissant le schéma, on obtient l'expression de $u^{n+1/2}$ en fonction de u^n et u^{n+1}.

$$u_{j,k}^{n+1/2}=\frac{u_{j,k}^{n+1}+u_{j,k}^{n}}{2}+\frac{\nu\Delta t}{4(\Delta y)^2}(u_{j,k-1}^{n}-2u_{j,k}^{n}+u_{j,k+1}^{n}-u_{j,k-1}^{n+1}+2u_{j,k}^{n+1}-u_{j,k+1}^{n+1}).$$

En substituant l'expression de $u^{n+1/2}$ dans l'une des équations du schéma, on détermine la relation reliant u^{n+1} à u^n. On pourrait effectuer le calcul explicite de cette expression, puis établir la consistance. Cependant, cela constitue un calcul fastidieux qu'on peut éviter. On introduit plutôt la fonction intermédiaire, qui ressemble à $u_{j,k}^{n+1/2}$,

$$\begin{aligned}v(t,x,y)=&\frac{u(t+\Delta t,x,y)+u(t,x,y)}{2}\\&+\frac{\nu\Delta t}{4(\Delta y)^2}\Big(u(t,x,y-\Delta y)-2u(t,x,y)+u(t,x,y+\Delta y)\\&-u(t+\Delta t,x,y-\Delta y)+2u(t+\Delta t,x,y)-u(t+\Delta t,x,y+\Delta y)\Big).\end{aligned}\tag{2.13}$$

Pour toute solution u de l'équation de la chaleur, l'erreur de troncature (venant de la première équation du schéma) est

$$\begin{aligned}E(u)=&\frac{v(t,x,y)-u(t,x,y)}{\Delta t}+\nu\frac{-v(t,x-\Delta x,y)+2v(t,x,y)-v(t,x+\Delta x,y)}{2(\Delta x)^2}\\&+\nu\frac{-u(t,x,y-\Delta y)+2u(t,x,y)-u(t,x,y+\Delta y)}{2(\Delta y)^2},\end{aligned}$$

où v est définie par (2.13). Par développement de Taylor, on établit que

$$\begin{aligned}v=&u+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{(\Delta t)^2}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nu\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial y^2}\right)+\frac{(\Delta t)^3}{24}\left(2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-3\nu\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial y^2}\right)\\&+\mathrm{o}\left((\Delta t)^3+(\Delta t)(\Delta y)^2\right),\end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned}E(u) =&\frac{v-u}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{(\Delta y)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + \mathrm{o}((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2))\\ =&\frac{\nu^3(\Delta t)^2}{24}\Delta\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \Delta^2 u\right) - \frac{\nu}{24}\left((\Delta x)^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (\Delta y)^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)\\ &+ \mathrm{o}((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta t)^2),\end{aligned}$$

où Δ (seul) désigne le Laplacien. Le schéma est donc d'ordre 2 en espace et en temps.

2. Étude de la stabilité L^2

En appliquant la transformation de Fourier au schéma, on en déduit que

$$\hat{u}^{n+1/2} = \frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}\hat{u}^n$$

et

$$\hat{u}^{n+1} = \frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}\hat{u}^{n+1/2}.$$

Ainsi, $\hat{u}^{n+1}(k,l) = A(k,l)\hat{u}^n(k,l)$ où

$$A(k,l) = \left(\frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}\right)\left(\frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}\right).$$

Comme pour tout $x \geq 0$, $|(1-x)/(1+x)| \leq 1$, on a $|A(k,l)| \leq 1$. Le schéma est inconditionnellement stable en norme L^2.

Exercice 2.2.10 Montrer que le schéma de directions alternées

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu\frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} + \nu\frac{-u_{j-1,k}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j+1,k}^n}{2(\Delta x)^2} = 0$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + \nu\frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{2(\Delta y)^2} + \nu\frac{-u_{j,k-1}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k+1}^{n+1/2}}{2(\Delta y)^2} = 0 \tag{2.14}$$

est précis d'ordre 2 en espace et temps et inconditionnellement stable en norme L^2 (pour des conditions aux limites de périodicité dans chaque direction).

Correction.

1. Étude de la consistance

Le schéma se décompose en deux étapes

$$\left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}M_y\right)u^{n+1/2} - \left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} + \frac{\nu}{2}M_y\right)u^n = 0$$

et

$$\left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}M_x\right)u^{n+1} - \left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} + \frac{\nu}{2}M_x\right)u^{n+1/2} = 0,$$

où
$$(M_x v)_{j,k} = \frac{v_{j+1,k} - 2v_{j,k} + v_{j-1,k}}{(\Delta x)^2}$$
et
$$(M_y v)_{j,k} = \frac{v_{j,k+1} - 2v_{j,k} + v_{j,k-1}}{(\Delta y)^2}.$$
Afin d'appliquer la définition de la consistance donnée dans le cours, il faut exhiber la relation reliant u^{n+1} à u^n. Il faut donc supprimer l'inconnue intermédiaire $u^{n+1/2}$ des équations définissant le schéma numérique. A cet effet, il suffit de multiplier la deuxième équation par $\left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}M_y\right)$ et de constater que cette matrice commute avec $\left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} + \frac{\nu}{2}M_x\right)$. Cette propriété de commutation est l'analogue discret de la commutation des opérateurs de dérivations dans le cas continu. On peut s'en convaincre en constatant que M_x et M_y n'agissent pas sur les mêmes indices, on plus simplement en comparant $M_x(M_y v)$ et $M_y(M_x v)$. On vérifie à la main que
$$\begin{aligned}(M_x(M_y v))_{j,k} = (M_y(M_x v))_{j,k} = \\ (\Delta x)^{-2}(\Delta y)^{-2}\Big(v_{j+1,k+1} + 4v_{j,k} + v_{j-1,k-1} + (v_{j-1,k+1} + v_{j+1,k-1}) \\ - 2(v_{j,k+1} + v_{j+1,k} + v_{j,k-1} + v_{j-1,k})\Big).\end{aligned}$$
On obtient ainsi
$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2}M_y\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2}M_x\right)u^{n+1} = \\ \left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2}M_x\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2}M_y\right)u^{n+1/2}.\end{aligned}$$
D'après la première équation du schéma, il vient
$$\begin{aligned}(\Delta t)^{-1}\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2}M_y\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2}M_x\right)u^{n+1} - \\ (\Delta t)^{-1}\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2}M_x\right)\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2}M_y\right)u^{n} = 0.\end{aligned}$$
Pour toute fonction v, on note $M_y(v)$ la fonction définie par
$$M_y(v)(t,x,y) = \frac{v(t,x,y+\Delta y) - 2v(t,x,y) + v(t,x,y-\Delta y)}{(\Delta y)^2}.$$
On définit de même la fonction $M_x(v)$ en échangeant les rôles respectifs de x et y. De plus, on note
$$\tau(v)(t,x,y) = v(t+\Delta t, x, y).$$
En utilisant ces notations, l'erreur de troncature est donc
$$\begin{aligned}E(u) = (\Delta)^{-1}\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2}M_y\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2}M_x\right)(\tau(v)) \\ - (\Delta t)^{-1}\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2}M_y\right)\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2}M_x\right)(v).\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient que l'erreur de troncature est

$$E(u) = (\Delta t)^{-1}(\tau(u) - u) - \frac{\nu}{2}(M_x + M_y)(\tau(u) + u) + \nu^2 \frac{\Delta t}{4} M_x M_y (\tau(u) - u).$$

En effectuant un développement de Taylor en (t, x, y), on montre que

$$\tau(v) = v + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \mathrm{o}(\Delta t^3)$$

et que

$$M_x(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2)}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(\Delta x^2).$$

En substituant ces expressions dans celle de la troncature, on obtient

$$E(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\nu}{2}(M_x + M_y) \left(2u + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \nu^2 \frac{\Delta t^2}{4} M_x M_y \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{o}(\Delta t^2)$$

et

$$E(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \nu \left(\Delta u + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) - \nu \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) - \nu \frac{\Delta t^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u) + \nu^2 \frac{\Delta t^2}{4} \frac{\partial^5 v}{\partial^2 x \partial^2 y \partial t} + \mathrm{o}(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2).$$

On en déduit que

$$E(u) = \nu^3 \Delta t^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) \Delta^{(3)} v + \frac{\nu^3 (\Delta t)^2}{4} \frac{\partial^4 \Delta u}{\partial x^2 \partial y^2} - \nu \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \nu \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \mathrm{o}(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2),$$

et enfin que

$$E(u) = \nu^3 (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{4} \frac{\partial^4 \Delta v}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{1}{12} \Delta^{(3)} v \right) - \nu \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \nu \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \mathrm{o}(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2).$$

Ainsi, le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.

<u>2. Étude de la stabilité L^2</u>

En appliquant la transformation de Fourier au schéma, on établit que

$$\hat{u}^{n+1/2} = \frac{1 - \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(\pi k \Delta x)}{1 + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(\pi k \Delta x)} \hat{u}^n$$

et

$$\hat{u}^{n+1} = \frac{1 - \frac{\nu \Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2(\pi l \Delta y)}{1 + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2(\pi l \Delta y)} \hat{u}^{n+1/2}.$$

Rappelons que pour tout $x \geq 0$, $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| \leq 1$. Ainsi, $|\hat{u}^{n+1}| \leq |\hat{u}^{n+1/2}| \leq |\hat{u}^n|$ et le schéma est inconditionnellement stable L^2.