Solution : Total 45 pts

contrôle EDP - 23 Oct

Problème 1 22 pts

a) On multiplie l'éq par u et on intègre par rapport à x entre 0 et 1

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}\cdot u\, dx - \gamma \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot u \cdot dx = 0 \quad ①$$

On intègre par parties le 2e terme

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}\cdot u\, dx - \gamma \cancel{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot u\right]_0^1} + \gamma \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = 0 \quad ①$$

On prend en compte les CL

$$u(0,t) = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}\cdot u\, dx + \gamma \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = 0 \quad ①$$

Mais $\frac{\partial u}{\partial t}\cdot u = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u^2)$. $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx = -\gamma \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \quad ①$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{dE(t)}{dt} = -\gamma \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \quad ①$$

b) En utilisant l'égalité de l'énergie et l'inégalité de Poincaré on a

$$\frac{1}{2}\frac{dE(t)}{dt} = -\nu\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \leq -\nu \underbrace{\int_0^1 u^2\,dx}_{E(t)} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dE(t)}{E(t)} \leq -2\nu\,dt \quad (1)$$

En integrant par rapport au temps $\Rightarrow$

$$E(t) \leq E(0)\,e^{-2\nu t} \quad (1)$$

c) On introduit $u(x,t)$ dans (1)

$$g'(t)f(x) - \nu f''(x)g(t) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{g'(t)}{g(t)} = \nu\frac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda \text{ (cte)} \quad (1)$$

autrement 2 fctions de var indep ne peuvent pas être égales

$$\text{cà} \quad g'(t) + \lambda g(t) = 0 \qquad g(t) = c e^{-\lambda t}$$

$$\nu f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad (1)$$

· On sélectionne la solution bornée $\Rightarrow \lambda > 0$

$$\Rightarrow f(x) = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}\, x\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}\, x\right) \quad 1$$

· On utilise les CL :

$$u(0,t) = f(0)\, g(t) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}\, x\right) \cdot g(t) \,,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \gamma \left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2} \quad 2$$

· On utilise la CI (cond. initiale)

$$u(x,0) = f(x) \cdot g(0) = \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)x}_{u_0(x)} \quad 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C \sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$

$$\Leftrightarrow k = 1 \,,\ C = 1 \quad 1$$

Solution finale 1

$$\boxed{u(x,t) = e^{-\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 t} \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}$$

d)

$$E(t) = \int_0^1 u^2(x)\, dx$$

$$① = \int_0^1 f^2(x)\, g^2(t)\, dx =$$

$$① = g^2(t) \underbrace{\int_0^1 f^2(x)\, dx}_{E(0)}$$

$$g^2(t) = e^{-2\lambda t} = e^{-9\pi^2/2\, t} \leq e^{-2\gamma t} \ ①$$

D'une manière générale, dès que $\frac{\lambda}{\gamma} \geq 1$ l'inégalité de l'energie sera vérifiée. ①

Problème 2

2 3 points

a) L'erreur de troncature : (consistance)

$$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} - \qquad ①$$

$$- \gamma \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + 2u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x^2}$$

On utilise les développements de Taylor par rapport au temps et espace

$$u(x_j,t_{n+1}) = u(x_j,t_n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + O(\Delta t^2)$$ 1

$$u(x_{j\pm 1},t_n) = u(x_j,t_n) \pm \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) \pm \frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_n) + O(\Delta x^4)$$

L'erreur de troncature devient: 1

$$\varepsilon_j^n = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n)}_{=0 \text{ car } u \text{ sol de l'équation}} + O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$$

$\Rightarrow$ schéma d'ordre 1 en temps et 2 en espace 1

Stabilité: analyse de Von Neumann

$$u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi k j \Delta x} \rightsquigarrow \text{schéma}$$ 1

$$\frac{A(k)-1}{\Delta t} \cancel{e^{2i\pi k j\Delta x}} + \cancel{e^{2i\pi k j \Delta x}} \cdot \gamma \frac{e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k \Delta x}}{\Delta x^2} = 0$$

$$A(k) = 1 - \frac{4\gamma\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k \Delta x)$$ 1

$$|A(k)| \leq 1 \quad \text{si} \quad \frac{\gamma \Delta t}{\Delta x^2} \leq 1/2$$ 1

b) $$u_j^{n+1} = \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} u_{j+1}^n + \left(1 - \frac{2\gamma\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_j^n + \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} u_{j-1}^n \quad 1$$

u_j^{n+1} est une combinaison convexe de u_{j+1}^n, u_j^n et u_{j-1}^n si $1 - \frac{2\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$ 1

$\Rightarrow$ dans ce cas on a stabilité L^∞. 1

c) Les deux schémas sont θ-schémas avec $\theta = 1/2$ et $1/3$ respectivement. 1

On écrit l'erreur de troncature dans le cas général. (consistance)

1

$$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t}$$

$$- \theta\gamma \cdot \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x^2}$$

$$- (1-\theta)\gamma \cdot \frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t_{n+1})}{\Delta x^2}$$

On peut utiliser certains dévelop. de a)

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + O(\Delta t^2)$$

$$- \gamma\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + O(\Delta x^2)\right)$$

1

$$-\gamma(1-\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \Delta t \underbrace{\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}}_{\frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}(x_j,t_n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n)}_{=0} \quad (u \text{ sol de l'eq})$$

1

$$+ \Delta t\left(\frac{1}{2} - (1-\theta)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

On voit que si $\theta = 2/3$ ou $1/3$ le schéma est d'ordre 1 en temps et 2 en espace. 1

Pour améliorer la précision du schéma il faut $\theta = 1/2$ (Crank-Nicolson) $\Rightarrow$ 1

schéma d'ordre 2 en temps.

Stabilité : $u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi k j \Delta x}$

on l'introduit dans le schéma

$$\frac{A(k)-1}{\Delta t} - \gamma\theta \cdot \frac{e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}}{\Delta x^2}$$

$$- A(k)\gamma(1-\theta) \cdot \frac{e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}}{\Delta x^2} = 0$$

(1)

$$\Leftrightarrow \quad A(k)\left(1 + \frac{4\gamma\Delta t}{\Delta x^2}(1-\theta)\sin^2(k\pi\Delta x)\right)$$

$$= 1 - \frac{4\gamma\Delta t}{\Delta x^2}\theta \sin^2(k\pi\Delta x)$$ (1)

Facteur d'amplification :

$$A(k) = \frac{1 - \frac{4\gamma\Delta t}{\Delta x^2}\theta\sin^2(k\pi\Delta x)}{1 + \frac{4\gamma\Delta t}{\Delta x^2}(1-\theta)\sin^2(k\pi\Delta x)}$$

$|A(k)| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq A(k) \leq 1$ (1)

$$2(2\theta-1)\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$$

$\Rightarrow$ si $\theta \leq 1/2$ schéma incond stable (schéma (5)) 1

$\theta > 1/2$ cond stable

$\Rightarrow$ pour le schéma (4) $(\theta = 2/3)$ 1

$$\frac{\gamma \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{3}{2}$$ (moins restrictive que le schéma implicite)

d) le θ-schéma sous forme matricielle

$$A_1 = I - (1-\theta)\gamma \Delta t A$$ 1

$$A_2 = I + \theta \gamma \Delta t A$$

A matrice de discrétisation du laplacien

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ 1

Pour $\theta = 2/3 \Rightarrow$ schéma (4)

$\theta = 1/3 \Rightarrow$ schéma (5)