MALTESE Salomé EDP_ Sujet A

Problème 1

1. Schéma décentré explicite

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + 3\,\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \qquad (1)$$

- Stabilité norme L^∞ :

$$U_j^{n+1} = \left(1 - \frac{3\Delta t}{\Delta x}\right) U_j^n + \frac{3\Delta t}{\Delta x}\, U_{j-1}^n$$

avec la condition $\frac{3\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ le principe du maximum discret est vérifié.

- Stabilité norme L^2 : $U_j^n = A(k)\, e^{2i\pi j\Delta x}$

$$A(k) = 1 - \frac{3\Delta t}{\Delta x}\left(1 - e^{-2i\pi j\Delta x}\right)$$

$$= 1 - \frac{3\Delta t}{\Delta x}\left(1 - \cos(2\pi j\Delta x) + i\sin(2\pi j\Delta x)\right)$$

$$= 1 - \frac{3\Delta t}{\Delta x}\left(2S_k^2 + i\,2S_kC_k\right) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} S_k = \sin(\pi j\Delta x) \\ C_k = \cos(\pi j\Delta x) \end{array}$$

$$|A(k)|^2 = \left(1 - \frac{3\Delta t}{\Delta x}\,2S_k^2\right)^2 + 4\left(\frac{3\Delta t}{\Delta x}\right)^2 S_k^2C_k^2$$

$$= 1 - 4\left(\frac{3\Delta t}{\Delta x}\right)^2 + 4\left(\frac{3\Delta t}{\Delta x}\right)^2 S_k^2$$

$$= 1 - 4\,\frac{3\Delta t}{\Delta x}\,S_k^2 + 4\left(\frac{3\Delta t}{\Delta x}\right)^2 S_k^2$$

$$|A(k)|^2 \leq 1 \iff -4\frac{3\Delta t}{\Delta x} Sk^2 + 4\left(\frac{3\Delta t}{\Delta x}\right)^2 Sk^2 \leq 0$$

$$\iff \frac{3\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

En prenant un schéma explicite centré au lieu de décentré on a un schéma inconditionnellement instable.

$$\frac{u_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + 3\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \qquad (2)$$

Norme L^2 : $A(k) = 1 - \frac{3\Delta t}{2\Delta x}\left(e^{2i\pi j\Delta x} - e^{-2i\pi j\Delta x}\right)$

$$\Rightarrow A(k) = 1 + i\frac{3\Delta t}{2\Delta x}\sin(2\pi j\Delta x)$$

$$\Rightarrow |A(k)|^2 = 1 + \left(\frac{3\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(2\pi j\Delta x) > 1$$

2. Erreur de troncature schema (1)

$$\mathcal{E}_j^n = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + 3\frac{u(x_j, t^n) - U(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O(\Delta t) + 3\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + O(\Delta x)$$

u solution $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + 3\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) = 0$

$$\varepsilon_j^n = O(\Delta t) + O(\Delta x)$$

Ordre 1 espace et temps.

Schéma (2)

$$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - U(x_j, t^n)}{\Delta t} + 3 \ast \frac{U(x_{j+1}, t^n) - U(x_{j-1}, t^n)}{2 \Delta x}$$

$$= O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$$

Consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace

3i)

Problème 2

f à carré intégrable $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|^2 < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \int_0^{1/2} |-1|dx + \int_{1/2}^1 1\,dx$$

$$= \int_0^1 1dx$$

$$= 1 < \infty$$

f n'est pas continue en effet pour $x \in]1/2, 1[$

$$\lim_{x \to 1/2} f(x) = 1 \neq f(1/2) = -1$$

On cherche une solution en intégrant sur chaque intervalle

- $x \in]0, 1/2]$: $-u''(x) = -1$

$$u'(x) = +x + C_1$$

$$u(x) = +\frac{x^2}{2} + C_1 x + d_1$$

$u(0) = 1 \Rightarrow u(x) = +\frac{x^2}{2} + C_1 x + 1$

- $x \in]1/2, 1[$: $-u''(x) = 1$

$$u'(x) = -x + C_2$$

$$u(x) = -\frac{x^2}{2} + C_2 x + d_2$$

$u(0) = 1 \Rightarrow u(x) = -\frac{x^2}{2} + C_2 x + 1$

Problème 3

$$\underbrace{\int_0^1 -(x^2 u'(x))' v(x)}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 u(x) v(x) dx}_{I_2} = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

- IPP I_1 : $I_1 = \int_0^1 x^2 u'(x) v'(x) dx + \underbrace{[x^2 u'(x) v(x)]_0^1}_{=0 \text{ car } v \text{ fonction test} \Rightarrow v=0 \text{ sur les bords}}$

- IPP I_2 : $I_2 =$