Différences finies pour l’équation de la chaleur

Consistance, stabilité, convergence

Victorita Dolean

Equation de la chaleur - discrétisation

Equation de la chaleur en une dimension d'espace avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{for } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{for } x \in (0,1). \end{cases}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \forall t > 0$$

On discretise l'équation sur le maillage: $(t^n, x_j), n \geq 0, j \in \{0,1,\dots,N+1\}$

Discrétisation des conditions initiales: $u_j^0 = u_0(x_j), j \in \{0,1,\dots,N+1\}$

Discretisation des conditions aux limites: $u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \forall n > 0$

Si le second membre *f(t,x)* est non nul on le prend en compte dans la discretisation.

Schémas d'Euler explicite et implicite

On a déjà défini le schéma d'Euler explicite:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

Ou le schéma d'Euler implicite:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^{n+1} + 2u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0.$$

Une étude mathématique a montré qu'ils vérifient le principe du maximum discret.

Le θ-schéma

En combinant le schéma explicite et implicite ($\theta \in [0,1]$) on obtient le **θ-schéma**

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\theta\nu\frac{-u_{j-1}^{n+1}+2u_j^{n+1}-u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+(1-\theta)\nu\frac{-u_{j-1}^{n}+2u_j^{n}-u_{j+1}^{n}}{(\Delta x)^2}=0.$$

Si $\theta=\frac{1}{2}$ on obtient le schéma de **Crank-Nicolson.**

Les schémas explicites et implicites peuvent être vus comme cas particuliers de **θ-schéma** avec $\theta=0$ (schéma explicite) et $\theta=1$ (schéma implicite).

… et encore

Le schéma de Dufort-Frankel (à plusieurs niveaux en temps)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + u_j^{n+1} + u_j^{n-1} - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0,$$

Il y en a plein d'autres schémas, qu'on peut construire pour obtenir des approximations de plus en plus précises.

Q: Comment comparer ces schémas? **R**: En étudiant leur précision et stabilité.

Consistance et précision

Erreur de troncature (définition abstraite): La quantité obtenue en remplaçant dans le schéma la solution exacte évaluée exactement dans les points apparaissant dans la définition du schéma.

Consistance: Le schéma aux différence finies est *consistant* avec l'équation aux dérivées partielles si l'erreur de troncature tend vers 0 quand $\Delta t, \Delta x$ tendent vers 0 indépendamment.

Ordre et précision: Si l'erreur de troncature tend vers 0 comme

$$\mathcal{O}\Big((\Delta x)^p + (\Delta t)^q\Big)$$

on dit que le schéma est *d'ordre p en espace et q en temps.*

Consistance du schéma explicite

Erreur de troncature:

$$\mathcal{E}_j^n = \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} - \frac{\nu\left(u(t^n, x_{j+1}) - 2u(t^n, x_j) + u(t^n, x_{j-1})\right)}{\Delta x^2}$$

On utilise les séries de Taylor autour *du même point* pour évaluer l'erreur de troncature.

Développement par rapport a la variable temporelle:

$$u(t^{n+1}, x_j) = u(t^n + \Delta t, x_j) = u(t^n, x_j) + \Delta t\,\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Ce qui conduit à

$$\frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Consistance du schéma explicite

… ensuite par rapport a la variable spatiale

$$u(t^n, x_{j\pm1}) = u(t^n, x_j \pm \Delta x) = u(t^n, x_j) \pm \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

ce qui conduit à:

$$\nu \frac{\left(u(t^n, x_{j+1}) - 2u(t^n, x_j) + u(t^n, x_{j-1})\right)}{\Delta x^2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

On en conclut que l'erreur de troncature est:

$$\mathcal{E}_j^n = \frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_j) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Consistance du schéma explicite

Mais *u* est solution de l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(t^n, x_j\right) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(t^n, x_j\right) = 0$$

L'erreur de troncature devient:

$$\mathcal{E}_j^n = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

On en conclut que le *schéma explicite est consistant d'ordre 1 en temps et ordre 2 en espace*.

Consistance du schéma implicite

Erreur de troncature:

$$\mathcal{E}_j^n = \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} - \frac{\nu\left(u(t^{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t^{n+1}, x_j) + u(t^{n+1}, x_{j-1})\right)}{\Delta x^2}$$

On utilise les séries de Taylor autour *du même point* pour évaluer l'erreur de troncature.

Développement par rapport a la variable temporelle:

$$u(t^n, x_j) = u(t^{n+1} - \Delta t, x_j) = u(t^{n+1}, x_j) - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(t^{n+1}, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Ce qui conduit à

$$\frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(t^{n+1}, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Consistance du schéma implicite

... ensuite par rapport a la variable spatiale

$$u(t^{n+1}, x_{j\pm1}) = u(t^{n+1}, x_j \pm \Delta x) = u(t^{n+1}, x_j) \pm \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

ce qui conduit à:

$$\nu \frac{\left(u(t^{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t^{n+1}, x_j) + u(t^{n+1}, x_{j-1})\right)}{\Delta x^2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^{n+1}, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

On en conclut que l'erreur de troncature est:

$$\mathcal{E}_j^n = \frac{\partial u}{\partial t}(t^{n+1}, x_j) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^{n+1}, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Consistance du schéma implicite

Mais *u* est solution de l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(t^{n+1}, x_j\right) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(t^{n+1}, x_j\right) = 0$$

L'erreur de troncature devient:

$$\mathcal{E}_j^n = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

On en conclut que le *schéma implicite est consistant d'ordre 1 en temps et ordre 2 en espace!*

Conclusion*: les deux schémas sont consistants et ont la même précision!*

Stabilité :quelle norme?

Définition (abstraite): On dit que le schéma aux différence finies est *stable par rapport a la norme* $||\cdot||$ s'il existe une constante K indépendante de $\Delta t, \Delta x$ telle que:

$$||u^n|| \leq K\ ||u^0||$$

On va considérer les normes classiques

$$\|u^n\|_p = \left(\sum_{j=1}^{N} \Delta x |u_j^n|^p \right)^{1/p} \quad \text{for } 1 \leq p \leq +\infty,$$

notamment $p \in \{\ 2, \infty\}$
NB: On a déjà analysé le cas de la norme ∞ (la stabilité dans ce cas est équivalente au principe du maximum discret).

Stabilité en norme L2: séries de Fourier

Attention: ce qui suit est une justification de la stabilité mais pas une méthode qu'il faut appliquer systématiquement pour montrer la stabilité!

Si le schéma ne vérifie pas le principe du maximum (on peut quand même avoir une solution bornée en norme L2 -> bon schéma). Supp: solution périodique en x de pér. 1 (longueur du domaine spatial)

Pour chaque vecteur de solutions $u^n = (u_i^n)$ on construit une fonction qui sera périodique

$$u^n(x) = u_j^n \quad \text{if } x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$$

Développement en série de Fourier + formule de Plancherel:

$$u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}^n(k) \exp(2i\pi kx), \qquad \int_0^1 |u^n(x)|^2 \, dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2.$$

Stabilité: schéma explicite

Avec cette notation le schéma explicite s'écrit:

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\Delta t} + \nu \frac{-u^n(x-\Delta x) + 2u^n(x) - u^n(x+\Delta x)}{(\Delta x)^2} = 0.$$

En remplaçant chaque terme par sa série de Fourier, on déduit que les coeff de cette série vérifient:

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left(1 - \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(-\exp(-2i\pi k \Delta x) + 2 - \exp(2i\pi k \Delta x)\right)\right) \hat{u}^n(k).$$

Stabilité: schéma explicite

Ceci conduit reccursivement à la relation suivante et à la définition du facteur A(k)

$$\hat{u}^{n+1}(k) = A(k)\hat{u}^n(k) = A(k)^{n+1}\hat{u}^0(k) \quad \text{with } A(k) = 1 - \frac{4\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(\sin(\pi k \Delta x))^2.$$

La solution sera bornée en norme L2 seulement si le *facteur d'amplification* $|A(k)| \leq 1$

$$2\nu\Delta t(\sin(\pi k\Delta x))^2 \leq (\Delta x)^2.$$

$$\|u^n\|_2^2 = \int_0^1 |u^n(x)|^2 dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}^0(k)|^2 = \int_0^1 |u^0(x)|^2 dx = \|u^0\|_2^2,$$

Ceci est vrai pour tout *k* ssi $2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$ (*condition de stabilité L2 du schéma explicite*).

Stabilité: schéma implicite

Avec la notation précédente le schéma implicite s'écrit:

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\Delta t} + \nu \frac{-u^{n+1}(x-\Delta x) + 2u^{n+1}(x) - u^{n+1}(x+\Delta x)}{(\Delta x)^2} = 0,$$

En remplaçant la série de Fourier de chaque terme, les coeff de cette série vérifient:

$$\hat{u}^{n+1}(k)\left(1 + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}\left(-\exp(-2i\pi k \Delta x) + 2 - \exp(2i\pi k \Delta x)\right)\right) = \hat{u}^n(k).$$

Stabilité: schéma implicite

Ceci conduit reccursivement à la relation suivante et à la définition du facteur A(k)

$$\hat{u}^{n+1}(k) = A(k)\hat{u}^n(k) = A(k)^{n+1}\hat{u}^0(k) \text{ with } A(k) = \left(1 + \frac{4\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(\sin(\pi k \Delta x))^2\right)^{-1}.$$

La solution sera bornée en norme L2 seulement si le *facteur d'amplification* $|A(k)| \leq 1$

Ceci est toujours le cas pour le schéma implicite (sans condition supplémentaire)

On dit que le schéma est *inconditionnellement stable* en norme L2!

Recette pour l’analyse de stabilité

Dpdv pratique pour vérifier la stabilité des schémas on applique la Méthode de von Neumann

- On “injecte” un mode de Fourier dans le schéma:

$$u_j^n = A(k)^n \exp(2i\pi k x_j) \quad \text{with} \quad x_j = j\Delta x,$$

- On calcule à partir de cela le facteur d’amplification *A(k)* qui peut être une quantité complexe.
- L’inégalité suivante s’appelle *condition de stabilité de von Neumann*

$$|A(k)| \leq 1, \forall k \in Z$$

- Si cette condition est satisfaite (même sous certaines contraintes), on dit que le schéma est stable.

Convergence : **théoreme de Lax**

Un de plus importants théorèmes de l'analyse numérique!

Tout schéma linéaire, à deux niveaux qui est *consistant* et *stable* est aussi *convergent*. (on a supposé la solution suffisamment régulière avec des conditions aux limites données).

De plus, l'erreur d'approximation est bornée par l'erreur de troncature (multipliée par une constante) et la convergence vers la solution est d'autant plus rapide que le schéma est précis.

Preuve: a suivre…