

## Équations aux dérivées partielles – Série 6

Considérons l'équation des ondes dans le domaine borné  $(0, 1)$ :

$$\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \forall (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+, \right.$$

avec  $u(x, 0) = u_0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$ ,  $u, u_0$  et  $u_1$  périodiques de période 1 et  $u_1$  à moyenne nulle

$$\int_0^1 u_1(x) dx = 0.$$

On discrétise le domaine en utilisant un maillage régulier  $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$ ,  $\forall n \geq 0, j \in \{0, 1, \dots, N+1\}$  où  $\Delta x = 1/(N+1)$  et  $\Delta t > 0$ .

**Problème 1.** Considérons d'abord le  $\theta$ -schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - (1-2\theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \theta \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = 0. \quad (1)$$

avec  $0 \leq \theta \leq 1/2$ .

1. Montrer que si  $1/4 \leq \theta \leq 1$ , le  $\theta$ -schéma centré est inconditionnellement stable en norme  $L^2$ . Si  $0 \leq \theta < 1/4$ , il est stable sous la condition

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \sqrt{\frac{1}{1-4\theta}}.$$

Considérons maintenant le cas limite où  $\Delta t/\Delta x = (1-4\theta)^{-1/2}$  avec  $0 \leq \theta < 1/4$ . Montrer que le schéma est instable dans ce cas, en vérifiant que  $u_j^n = (-1)^{j+n}(2n-1)$  est une solution.

2. On admettra que l'énergie discrete suivante

$$E^n = \sum_{j=0}^N \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + a_{\Delta x}(u^{n+1}, u^n) + \theta a_{\Delta x}(u^{n+1} - u^n, u^{n+1} - u^n)$$

est une approximation d'ordre 1 en espace et en temps de l'énergie continue définie en cours. Ici on a noté pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $u = (u_j)_{0 \leq j \leq N}$ ,  $v = (v_j)_{0 \leq j \leq N}$

$$a_{\Delta x}(u, v) = \sum_{j=0}^N \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \cdot \frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta x}.$$

Montrer que le  $\theta$ -schéma centré conserve l'énergie discrete, c.a.d.  $E^n = E^0$  pour tout  $n > 0$ .

**Problème 2.** Considérons le schéma de Lax-Friedrichs appliqué à l'équation des ondes écrite comme système du premier ordre

$$\frac{1}{2\Delta t} \begin{pmatrix} 2v_j^{n+1} - v_{j+1}^n - v_{j-1}^n \\ 2w_j^{n+1} - w_{j+1}^n - w_{j-1}^n \end{pmatrix} - \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j+1}^n - v_{j-1}^n \\ w_{j+1}^n - w_{j-1}^n \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

Ici  $v$  a la signification d'un déplacement et  $w$ , d'une déformation. Montrer que ce schéma est stable en norme  $L^2$  sous la condition CFL  $\Delta t \leq \Delta x$  et qu'il est précis à l'ordre 1 en espace et en temps si le rapport  $\Delta t/\Delta x$  est gardé constant lorsque  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers 0.

**Problème 3.** Considérons le schéma de Lax-Wendroff appliqué à l'équation des ondes écrite comme système du premier ordre

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} v_j^{n+1} - v_j^n \\ w_j^{n+1} - w_j^n \end{pmatrix} - \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j+1}^n - v_{j-1}^n \\ w_{j+1}^n - w_{j-1}^n \end{pmatrix} - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n \\ w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

Montrer que ce schéma est stable en norme  $L^2$  sous la condition CFL  $\Delta t \leq \Delta x$  et qu'il est précis à l'ordre 2 en espace et en temps.

### Evaluation du cours Équations aux Dérivées Partielles :

- Un contrôle écrit le mercredi 24 octobre (pendant la séance de TD).
- Une note sur les exercices des TDs: présence au tableau pendant les séances.
- Un examen écrit durant la session d'examens.

La note finale est :  $\frac{1}{3}(\text{note contrôle cont.}) + \frac{1}{3}(\text{note exercices TD}) + \frac{1}{3}(\text{note examen})$ .