Équations aux dérivées partielles –TD1
SOLUTIONS

1. **a)** On écrit d'abord $v(x)$ comme integrale de sa dérivée sur l'intervalle $(0, x)$

$$v(x) = \int_0^x \frac{dv(y)}{dy} dy \Rightarrow \int_0^1 v^2(x)dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{dv(y)}{dy} dy \right)^2 dx.$$

Ensuite on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz tout en simplifiant les calculs qui suivent

$$\begin{aligned} \int_0^1 v^2(x)dx &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x dy \cdot \int_0^x \left(\frac{dv(y)}{dy} \right)^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x \cdot \int_0^x \left(\frac{dv(y)}{dy} \right)^2 dy \right) dx \\ &\leq \left(\int_0^1 x dx \right) \cdot \int_0^1 \left(\frac{dv(y)}{dy} \right)^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

b) En multipliant l'équation de la chaleur par u et en intégrant par rapport à x, on obient:

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot u \right) dx - \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot u \right) dx = 0$$

En intégrant ensuite par parties et en utilisant les conditions aux limites $u(0, t) = u(1, t) = 0$ on obtient

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(u^2(x, t) \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = 0.$$

La fonction u étant supposée suffisamment régulière on peut inverser l'integrale par rapport à x et la dérivée par rapport à t. En remplaçant l'expression de $E(t)$ on obtient le résultat.
c) En appliquant l'inégalité de Poincaré à $v(x) = u(x, t)$, l'égalité de l'énergie du point précédent se re-transcrit comme

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \leq -2 \int_0^1 u^2(x, t)dx = -2E(t).$$

En divisant par $E(t)$ (qui est une quantité positive) et intégrant entre 0 et t, on obtient le résultat. On voit bien que l'énergie *décroît exponentiellement en temps.*

2. **a)** En multipliant l'équation des ondes par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et en intégrant par rapport à x on obtient

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx - \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = 0$$

En intégrant par parties et en utilisant les conditions aux limites on obtient

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = 0.$$

ce qui conduit au résultat en inversant comme avant l'integrale et la dérivée.
c) En choisissant $u_0 = u_1 = 0$ et en intégrant l'égalité de l'énergie entre 0 et t on voit que

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx = 0,\ \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Il s'agissant des quantités positives, la somme des integrales peut être nulle uniquement si les fonctions à intégrer le sont. On en déduit donc que $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ et la conclusion suit.
b) Vérifiable par simple calcul:

$$\begin{array}{lcl}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & \frac{1}{2}(u_0''(x+t) + u_0''(x-t)) - \frac{1}{2}(u_1'(x+t) - u_1'(x-t)) \\
 & - & \frac{1}{2}(u_0''(x+t) + u_0''(x-t)) + \frac{1}{2}(u_1'(x+t) - u_1'(x-t)) = 0, \\
u(x,0) & = & u_0(x), \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & u_1(x).
\end{array}$$

3. **a)** On écrit $|v|^2 = v \cdot \bar{v}$ et on applique la formule de dérivation du produit

$$\frac{\partial |v|^2}{\partial t} = \frac{\partial (v \cdot \bar{v})}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}\bar{v} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} v = \frac{\partial v}{\partial t}\bar{v} + \overline{\frac{\partial v}{\partial t}\bar{v}} = 2\Re\left(\frac{\partial v}{\partial t}\bar{v}\right).$$

b) En multipliant l'équation de Schrödinger par $\bar{u}$ et en intégrant par rapport à x, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \left(i\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \bar{u} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot u - V|u|^2\right) dx = 0$$

En intégrant par parties et en utilisant les conditions sur le comportement de u à l'infini on déduit

$$\int_{\mathbb{R}} i\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \bar{u} dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + V|u|^2\right) dx.$$

Le membre de droite étant réel on déduit que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \bar{u} dx$ est purement imaginaire

$$\Re\left(\frac{\partial u}{\partial t}\bar{u}\right) = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial |u|^2}{\partial t} = 0.$$

Sous les hypothèses de régularité on change l'integrale et la dérivée et la conclusion suit:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx. \qquad (1)$$

c) En multipliant l'équation par $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left(i\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - Vu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right) dx = 0$$

On intègre par parties et en prenant la partie réelle on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \left(i\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial x} - Vu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right) dx = 0 \Leftrightarrow \Re\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial x} + Vu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right) dx = 0$$

ou d'une façon équivalente en utilisant le résultat du point a)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + V|u|^2\right) dx = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + V|u|^2\right) dx = 0.$$

En intégrant maintenant par rapport au temps on obtient le résultat voulu:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x)\right|^2 + V(x)|u(x,t)|^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}(x)\right|^2 + V(x)|u_0(x)|^2\right) dx. \qquad (2)$$