Test Équations aux Dérivées Partielles. Durée : 1H30

NOM & Prénom : .... **Groupe TD** :

Documents autorisés: uniquement les documents cours et TD distribués. Réponses à rédiger sur la feuille d'énoncé (il n'en sera distribué qu'une), après avoir fait vos exercices/essais au brouillon. Justifier vos reponses et commenter les programmes Scilab d'une façon concise et claire.
On pourra considérer comme acquis les développements déjà faits ailleurs à condition de bien situer la source (cours, no. série exercices, no. exercice)

En absence de précisions supplémentaires, on discrétise toujours le domaine en utilisant un maillage régulier $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$, $\forall n \geq 0$, $j \in \{0, 1, ..., N+1\}$, $\Delta x = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$.

Problème 1. Considérons l'équation d'advection dans la domaine borné $(0,1)$:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \right.$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1.

1. Montrer que le schéma de *Lax-Friedrichs*

$$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

est stable en norme L^2 si $|V|\Delta t \leq \Delta x$. (2 POINTS)

On calcule le facteur d'amplif en injectant $u_j^n = G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$

$$G(k)^n \cdot e^{2i\pi jk\Delta x} \frac{\left(2G(k) - e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x}\right)}{2\Delta t} + V G(k)^n \cdot e^{2i\pi jk\Delta x} \frac{\left(e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x}\right)}{2\Delta x}$$

On simplifie $G(k)^n \cdot e^{2i\pi jk\Delta x}$ et $e^{2i\pi k\Delta x} + e^{-2i\pi k\Delta x} = 2\cos(2\pi k\Delta x)$

$e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x} = 2i\sin(2\pi k\Delta x)$

$$\Rightarrow \cancel{2}(G(k) - \cos(2\pi k\Delta x)) + \frac{2V\Delta t}{\Delta x} i\sin(2\pi k\Delta x)) = 0$$

$$G(k) = \cos(2\pi k\Delta x) - \frac{V\Delta t}{\Delta x} i\sin(2\pi k\Delta x)$$

$$|G(k)|^2 = \cos^2(2\pi k\Delta x) + \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(2\pi k\Delta x)$$

or voit que si $\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \leq 1 \Rightarrow |G(k)|^2 \leq 1 \Rightarrow$ schéma stable.

Calculer l'erreur de troncature du schéma. En déduire que si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est gardé constant quand Δt et Δx tendent vers 0, alors le schéma est consistant avec l'équation d'advection et précis à l'ordre 1 et espace et en temps. **(2 POINTS)**

Erreur de troncature $\varepsilon_j^n = \dfrac{2u(x_j, t^{n+1}) - u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2\Delta t}$

$+ V \cdot \dfrac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x}$. On développe en série de Taylor

$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t_n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + O(\Delta t^2)$

$u(x_{j+1}, t_n) + u(x_{j-1}, t_n) = 2u(x_j, t_n) + O(\Delta x^2)$

$$\frac{2u(x_j, t_{n+1}) - u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t) + O\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right)$$

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2)$$

En mettant tout ensemble, on obtient

$$\varepsilon_j^n = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + O(\Delta t) + O\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right) + O(\Delta x^2)$$

u vérifie l'équation.

On voit que si on maintient $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ = constant, le schéma est $O(\Delta t) + O(\Delta x)$

2. Montrer que le schéma de *Lax-Wendroff* ne préserve pas le principe du maximum discret

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{V^2 \Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

sauf si le rapport $V\Delta t/\Delta x$ vaut -1, 0 ou 1. **(2 POINTS)**

On écrit u_j^{n+1} comme combinaison du reste $(u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j-1}^n)$

$$u_j^{n+1} = \underbrace{\left(1 - \frac{V^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)}_{\alpha} u_j^n + \underbrace{\frac{V\Delta t}{2\Delta x}\left(-1 + \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)}_{\beta} u_{j+1}^n + \underbrace{\frac{V\Delta t}{2\Delta x}\left(1 + \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)}_{\gamma} u_{j-1}^n$$

On voit bien que la somme des coefficients $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

On a une combinaison convexe si $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \leq 1$, $\frac{V\Delta t}{\Delta x} \geq 1$ et $\frac{V\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ (si $\frac{V\Delta t}{\Delta x} \neq 0$)

ce qui conduit à $\frac{V\Delta t}{\Delta x} = -1$ ou $\frac{V\Delta t}{\Delta x} = 1$.

si $\frac{V\Delta t}{\Delta x} = 0$ ceci est aussi vrai.

Montrer que ce schéma est L^2-stable sous la condition CFL $|V|\Delta t \leq \Delta x$. (**3 POINTS**)

On calcule le facteur d'amplification. $u_j^n = G(k)^n e^{2i\pi j k \Delta x}$.

$$G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x} \frac{(G(k)-1)}{\Delta t} + V G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x} \frac{(e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x})}{2\Delta x}$$

$$- G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x} \cdot \frac{V^2\Delta t}{2} \cdot \frac{e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}}{\Delta x^2} = 0.$$ On simplifie $G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$

$$G(k) - 1 + i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x) - \frac{V^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(\cos(2\pi k\Delta x) - 1\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad G(k) = 1 + \frac{V^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(\cos(2\pi k\Delta x) - 1\right) + i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)$$

$$|G(k)|^2 = 1 + 2\frac{V^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(\cos(2\pi k\Delta x) - 1\right) + \frac{V^4\Delta t^4}{\Delta x^4}\left(\cos(2\pi k\Delta x - 1)\right)^2 + \frac{V^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\sin^2(2\pi k\Delta x)$$

$$|G(k)|^2 \leq 1 \iff \frac{V^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(\cos(2\pi k\Delta x) - 1\right)^2 + \sin^2(2\pi k\Delta x) \leq 2\left(1 - \cos(2\pi k\Delta x)\right)$$

Mais $1 - \cos 2\pi k\Delta x = 2\sin^2(\pi k\Delta x)$ $\quad \sin(2\pi k\Delta x) = 2\sin(\pi k\Delta x)\cos(\pi k\Delta x)$

$$\iff \frac{V^2\Delta t^2}{\Delta x^2} \cdot 4\sin^4(\pi k\Delta x) + 4\sin^2(\pi k\Delta x)\cos^2(\pi k\Delta x) \leq 4\sin^2(\pi k\Delta x)$$

$$\iff \frac{V^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x) + \cos^2(\pi k\Delta x) \leq 1.$$

Ceci est vrai si $\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \leq 1$

Montrer également qu'il est consistant avec l'équation d'advection et précis à l'ordre 2 et espace et en temps. (**2 POINTS**)

Erreur de troncature : $$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} + V\frac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{2\Delta x}$$

$$- \frac{V^2\Delta t}{2}\,\frac{u(x_{j+1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j-1},t_n)}{\Delta x^2}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + V\frac{\partial u}{\partial x} + V\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^3)$$

$$- \frac{V^2\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + O(\Delta x^2\Delta t) = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + V\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n)}_{=0}$$

$$+ \frac{\Delta t}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) - V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n)\right)}_{=0} = O(\Delta t^3) + O(\Delta x^3) + O(\Delta x^2\Delta t)$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + V\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$\Rightarrow$ on voit bien qu'il est d'ordre 2 en temps et espace

Problème 2. Considérons l'équation d'advection-diffusion dans la domaine borné $(0,1)$:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \right.$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1. Considérons le schéma décentré amont suivant:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

1. Déterminer l'ordre du schéma. **(2 POINTS)**

$$\varepsilon_j^k = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) + O(\Delta t) + V\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_k) + O(\Delta x)$$

$$- \gamma \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + O(\Delta x^2) \right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) + V\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_k) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k)}_{=0} + O(\Delta t) + O(\Delta x)$$

$\Rightarrow$ schéma d'ordre 1 en temps et espace

2. On veut déterminer les conditions des stabilité L^2 du schéema lorsque $V > 0$ et $V < 0$. Pour cela on procédera en plusieurs étapes. Écrire d'abord le facteur d'amplification $G(k)$ sous la forme

$$G(k) = \alpha e^{2i\pi k \Delta x} + \beta + \gamma e^{-2i\pi k\Delta x}, \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

avec des α, β, γ que l'on précisera. **(2 POINTS)**

$u_j^k = G(k)^k e^{2i\pi j k\Delta x}$ On introduit ds le schéma, on simplifie $G(k)^k e^{2i\pi j k \Delta x}$ et on obtient:

$$G(k) - 1 + \frac{V\Delta t}{\Delta x}\left(1 - e^{-2i\pi k\Delta x}\right) - \frac{\gamma \Delta t}{\Delta x^2}\left(e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k \Delta x}\right) =$$

$$\Leftrightarrow G(k) = \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x} - \frac{2\gamma\Delta t}{\Delta x^2}\right) + \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}e^{2i\pi k\Delta x} + \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x} + \frac{\gamma \Delta t}{\Delta x^2}\right)e^{-2i}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}, \quad \beta = 1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x} - 2\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}, \quad \gamma = \frac{V\Delta t}{\Delta x} + \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}$$

Calculer le module complexe de $G(k)$ et montrer qu'il peut se mettre sous la forme

$$|G(k)|^2 = (1-2(\alpha+\gamma)s_k)^2 + 4(\alpha-\gamma)^2 s_k(1-s_k),\ s_k = \sin^2(k\pi\Delta x)$$

(sans remplacer pour le moment les valeurs de coefficients). **(2 POINTS)**

On voit bien que $|G(k)|^2 = (\alpha e^{2i\pi k\Delta x} + \beta + \gamma e^{-2i\pi k\Delta x})(\alpha e^{-2i\pi k\Delta x} + \beta + \gamma e^{2i\pi k\Delta x})$

$= (\alpha\cos(2\pi k\Delta x) + \beta + \gamma\cos(2\pi k\Delta x))^2 + (\alpha-\gamma)^2\sin^2(2\pi k\Delta x)$

$\beta = 1-(\alpha+\gamma)$ et $\sin^2(2\pi k\Delta x) = (2\sin(\pi k\Delta x)\cos(\pi k\Delta x))^2$

$= 4\sin^2(\pi k\Delta x)(1-\sin^2(\pi k\Delta x))$.

$\cos(2\pi k\Delta x) = 1-2\sin^2(\pi k\Delta x)$

En remplaçant cela dans $G(k)$ on a.

$|G(k)|^2 = (1-(\alpha+\gamma)(1-\cos 2\pi k\Delta x))^2 + 4(\alpha-\gamma)\sin^2(\pi k\Delta x)(1-\sin^2(\pi k\Delta x))$

$= (1-4(\alpha+\gamma)s_k)^2 + 4(\alpha-\gamma)^2 s_k(1-s_k)$.

En déduire que la condition de stabilité $|G(k)|^2 \leq 1$ est satisfaite si $(\alpha-\gamma)^2 \leq (\alpha+\gamma)$. Remplacer maintenant les coefficients α et γ et donner la condition de stabilité en fonction des paramètres du problème. Dans le cas où $V<0$ que se passe-t-il si $\nu \to 0$? **(2 POINTS)**

On développe $|G(k)|^2 = 1 - 4(\alpha+\gamma)s_k + 4(\alpha+\gamma)^2 s_k^2 + 4(\alpha-\gamma)^2 s_k(1-s_k)$

$|G(k)|^2 \leq 1 \iff 4(\alpha+\gamma)^2 s_k^2 + 4(\alpha-\gamma)^2 s_k(1-s_k) \leq 4(\alpha+\gamma)s_k$.

On simplifie (par $4s_k$ $\Rightarrow$ $(\alpha+\gamma)^2 s_k + (\alpha-\gamma)^2(1-s_k) \leq \alpha+\gamma$ (1)

On voit bien que si $(\alpha+\gamma)^2 \leq \alpha+\gamma$ et $(\alpha-\gamma)^2 \leq \alpha+\gamma$

la relation précédente est vérifiée $\begin{cases} \alpha+\gamma \leq 1 \\ (\alpha-\gamma)^2 \leq \alpha+\gamma \end{cases}$ entraîne la stabilité.

Ensuite on remplace α et γ. Dans le cas où $\nu \to 0$ et $V<0$ cette dernière inégalité conduit à une contradiction. Ceci est logique car un schéma centré est instable pour l'éq d'advection.

Problème 3. On veut implementer numériquement à l'aide du logiciel `Scilab` le θ schéma

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \theta\nu\dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - (1-\theta)\nu\dfrac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = \theta f_j^n + (1-\theta)f_j^{n+1}, 1 \leq j \leq N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \\ u_j^0 = u_0(x_j),\ f_j^n = f(x_j^n),\ 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

où u_0 est la condition initiale et f est le second membre connu à priori.
Pour cela on procédera par étapes. On notera le vecteur de inconnues par $U^n = (u_j^n)_{1\leq j\leq n}$, celui qui donnera le second membre par $F^n = (f_j^n)_{1\leq j\leq n}$ et le nombre de CFL par $\sigma = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}$.