COURS 8

Équation des ondes

Considérons l'équation des ondes dans un domaine borné $(0,1)$

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & ,(x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+_* \\ u(x+1,t) = u(x,t) & ,(x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+_* \\ u(x,0) = u_0(x) & ,x \in (0,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & ,x \in (0,1) \end{cases}$$

Avec les mêmes notations qu'auparavant, l'inconnue discrète est notée par $(u_j^n)_{0 \le j \le N} \in \mathbb{R}^N$. CL sont périodiques $\Rightarrow$ $u_0^n = u_{N+1}^n \Leftrightarrow u_j^n = u_{N+1+j}^n$. Comme les conditions aux limites ne fixent pas u aux extrémités de l'intervalle et pour obtenir une solution bornée en temps, on impose aussi

$$\int_0^1 u_1(x)\,dx = 0 \qquad (u_1 \text{ à moyenne nulle}).$$

(autrement pour $u_0 = 0$ et $u_1 = c \Rightarrow u(x,t) = ct$ pas bornée).

Un schéma classique : le θ-schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} + \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - (-2\theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$
$$- \theta \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = 0.$$

avec $0 \le \theta \le 1/2$. Pour $\theta = 0 \Rightarrow$ schéma explicite ; dans toutes les autres cas le schéma reste implicite.

Les conditions initiales :
$$\begin{cases} u_j^0 = u_0(x_j) \\ \dfrac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} = \displaystyle\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_1(x)\,dx. \end{cases} \quad x_{j+1/2} = (j+1/2)\Delta x$$

Comme chacune des différences finies est d'ordre 2 $\Rightarrow$ le schéma est précis à l'ordre 2 en espace et en temps.

Lemme. Si $1/4 \leq \theta \leq 1/2$ le θ-schéma centré est inconditionnellement stable en norme L^2. Si $0 \leq \theta < \frac{1}{4}$ il est stable sous la condition

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \sqrt{\frac{1}{1-4\theta}}.$$

(en exercices).

On a vu auparavant que l'équation des ondes vérifie une propriété de conservation de l'énergie c.a.d $\forall t>0$

$$E(t) = E(0) \quad \text{avec} \quad E(t) = \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx$$

On veut que le schéma numérique vérifie une version discrète de cette conservation. Pour le θ-schéma l'énergie discrète suivante

$$E^{n+1} = \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}\right)^2 + a_{\Delta x}(u^{n+1}, u^n) + \theta\, a_{\Delta x}(u^{n+1} - u^n, u^{n+1} - u^n)$$

avec $a_{\Delta x}(u,v) = \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}\right) \cdot \left(\frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta x}\right)$.

est exactement conservée c.a.d $E^n = E^0 \ \forall n \geq 0$.

Une autre façon de définir des schémas pour l'éq des ondes est de ré-écrire le système comme du premier ordre.

Soit $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, $w = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \\ v(x+1,t) = v(x,t), \quad w(x+1,t) = w(x,t) \\ w(x,0) = u_0'(x), \quad x \in (0,1) \\ v(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,1) \end{cases}$$

u - déplacement $\Rightarrow$ v - vitesse et w déformation.

On peut définir par exemple un schéma de type Lax-Friedrichs

$$\frac{1}{2\Delta t}\begin{pmatrix} 2v_j^{n+1} - v_{j+1}^n - v_{j-1}^n \\ 2w_j^{n+1} - w_{j+1}^n - w_{j-1}^n \end{pmatrix} - \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{j+1}^n - v_{j-1}^n \\ w_{j+1}^n - w_{j-1}^n \end{pmatrix} = 0$$

où $U = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2\Delta t}(2U_j^{n+1} - U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) - \frac{1}{2\Delta x} J (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) = 0$

$U_j^n = \begin{pmatrix} v_j^n \\ w_j^n \end{pmatrix}$ ici U est un vecteur et J une matrice $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pour la stabilité et l'erreur de troncature on procède comme dans le cas scalaire.