Équations aux dérivées partielles –Série 6
SOLUTIONS

Problème 1

1. On injecte un mode de Fourier $u_j^n = G(k)^n e^{2\pi ijk\Delta x}$ dans le schéma afin d'évaluer son facteur d'amplification. Après simplification des termes ceci conduit à:

$$\begin{aligned} &\frac{G(k)^2 - 2G(k) + 1}{\Delta t^2} - (\theta G^2(k) + (1-2\theta)G(k) + \theta)\frac{e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}}{\Delta x^2} = 0, \\ &\Leftrightarrow G(k)^2 - 2G(k) + 1 + 4\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\theta G^2(k) + (1-2\theta)G(k) + \theta)\sin^2(k\pi\Delta x) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

En notant $\sigma = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$ et $s_k = \sin^2(k\pi\Delta x)$ l'équation devient

$$(1 + 4\theta s_k\sigma)G^2(k) - 2(1 - 2(1-2\theta)s_k\sigma)G(k) + 1 + 4\theta s_k\sigma = 0. \tag{2}$$

Le determinant réduit de cette équation est donné par

$$\Delta = (1 - 2(1-2\theta)s_k\sigma)^2 - (1 + 4\theta s_k\sigma)^2 = -4s_k\sigma(1 - s_k\sigma + 4\theta s_k\sigma)$$

Considérons d'abord le cas $\Delta < 0$ ce qui équivaut à $(1-4\theta)s_k\sigma < 1$. On voit bien que si $\theta \geq 1/4$ ceci est automatiquement vérifié. Dans le cas $\theta \leq 1/4$, ceci a lieu si $\sigma < \frac{1}{1-4\theta}$ ou

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \sqrt{\frac{1}{1-4\theta}}. \tag{3}$$

Si le déterminant est négatif, les racines complexes $G_{1,2}(k)$ de l'équation (2) sont conjuguées et vérifient

$$|G_j(k)|^2 = |G_1(k)G_2(k)| = \frac{1 + 4\theta s_k\sigma}{1 + 4\theta s_k\sigma} = 1 \Rightarrow |G_j(k)| = 1.$$

ce qui prouve que le schéma est stable inconditionnellement si $\theta \geq 1/4$ et sous la condition (3) si $\theta < 1/4$. Dans le cas où les racines de (2) sont réelles, ce qui correspond au cas où $(1-4\theta)s_k\sigma > 1$, le fait que le produit $G_1(k)G_2(k) = 1$ prouve bien qu'il y en a une plus grand en module que 1, donc le schéma est instable.

2. On prouvera l'égalité de l'énergie dans le cas du schéma explicite $\theta = 0$, dans le cas général ceci se faisant, par linéarité, de la même façon. En multipliant le schéma par $u_j^{n+1} - u_j^{n-1}$ et en sommant ensuite sir j on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \cdot (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \cdot (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) = 0, \\ &\Leftrightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n - u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t} \cdot \frac{u_j^{n+1} - u_j^n + u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \cdot (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) = 0, \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{N}\left[\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}\right)^2\right] - \sum_{j=0}^{N}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \cdot (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Pour calculer le deuxième terme de l'équation (4) on montrera que pour un $v = (v_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ périodique, c.a.d. $v_j = v_{j+N}$, $j \in \mathbb{Z}$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} v_j &= \sum_{j=0}^{N} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x^2} v_j - \sum_{j=0}^{N} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x^2} v_j \\
&= \sum_{j=0}^{N} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x^2} v_j - \sum_{l=-1}^{N-1} \frac{u_{l+1}^n - u_l^n}{\Delta x^2} v_{l+1} = \sum_{j=0}^{N} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x^2} v_j - \sum_{l=0}^{N} \frac{u_{l+1}^n - u_l^n}{\Delta x^2} v_{l+1} \\
&= -\sum_{j=0}^{N} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x^2} (v_{j+1} - v_j) = -a_{\Delta x}(u^n, v).
\end{aligned} \tag{5}$$

En introduisant le résultat de (5) dans (4) on obtient

$$\sum_{j=0}^{N} \left[\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \right] + a_{\Delta x}(u^n, u^{n+1} - u^{n-1}) = 0 \Leftrightarrow E^{n+1} - E^n = 0 \tag{6}$$

ce qui prouve que l'énergie discrete se conserve.

Problème 2

1. Pour l'étude de la stabilité on cherchera à calculer les valeurs propres de la matrice d'amplification $A(k)$ après avoir injecté $U_j^n = A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x} I$ dans le schéma

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\left[2A(k) - (e^{2i\pi k\Delta x} + e^{-2i\pi k\Delta x})I\right] - \frac{1}{2\Delta x} J(e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x}) = 0, \\
&\Leftrightarrow A(k) = \cos(2\pi k\Delta x)I + i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)J
\end{aligned}$$

   Les valeurs propres de $A(k)$, qu'on notera $G_{1,2}(k)$ sont données par

$$G_{1,2}(k) = \cos(2\pi k\Delta x) \pm i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x) \tag{7}$$

   Celles-ci sont de module inferieur à 1 si $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

2. Pour l'étude de la stabilité on cherchera à calculer les valeurs propres de la matrice d'amplification $A(k)$ après avoir injecté $U_j^n = A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x} I$ dans le schéma

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}\left[A(k) - I\right] - \frac{1}{2\Delta x} J(e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} J^2(e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}) = 0, \\
&\Leftrightarrow A(k) = I + i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)J + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\cos(2\pi k\Delta x) - 1)J^2
\end{aligned}$$

   Les valeurs propres de $A(k)$, qu'on notera $G_{1,2}(k)$ sont données par

$$G_{1,2}(k) = 1 \pm i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x) + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\cos(2\pi k\Delta x) - 1) \tag{8}$$

   et leur module est

$$|G_{1,2}(k)|^2 = \left(1 + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\cos(2\pi k\Delta x) - 1)\right)^2 + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\sin^2(2\pi k\Delta x).$$

   Par calcul on déduit que $|G_{1,2}(k)| \leq 1$ si $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.