**Exercice I.** Équation de convection-diffusion

On considère l'équation de convection-diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

avec $u(x,0) = u^0$, $u$ et $u^0$ périodique de période 1.

**1.** Schéma décentré amont.

On considère le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \nu\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0.$$

**a.** Déterminer l'ordre du schéma.
**b.** Déterminer les conditions des stabilité $L^\infty$ du schéma lorsque $V > 0$ et $V < 0$. Dans le cas $V < 0$ que ce passe-t-il à la limite $\nu \to 0$? Pouvait-on prévoir ce résultat ?
**c.** Montrer que le schéma est convergent sous la condition CFL introduite précédemment.
**d.** Déterminer l'équation équivalente associée au schéma. Comment peut-on améliorer l'ordre du schéma à moindre frais ? Quelles sont alors les nouvelles conditions CFL? **2.** Schéma centré.

Pour la même équation, on considère le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2)} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2)}\right) = 0.$$

**a.** Étudier la stabilité $L^2$ du schéma. Que se passe-t-il lorsque $\nu \to 0$?

**b.** Montrer que le schéma est consistant, déterminer son ordre. **c.** Établir un résultat de convergence.

**Exercice II.** $\theta$-schéma.

On considère l'équation de la chaleur avec conditions aux bords périodique sur l'intervalle $[0,1]$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = u^0,$$

$u$ et $u^0$ étant périodiques de période 1.

**1.** On étudie le $\theta$-schéma défini par

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - (1-\theta)\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0,$$

$\theta$ désignant un réel entre 0 et 1.

**a.** Déterminer l'ordre du schéma en fonction de $\theta$.
**b.** Étudier la stabilité $L^2$ du schéma.
**c .**Étudier la convergence du schéma.
**2.** On considère dorénavant l'équation de convection-diffusion avec coefficients variables (on suppose que $0 < \sigma_* \leq \sigma(x) \leq \sigma^*$ et $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$), i.e.

$$\sigma(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0.$$

**a.** Proposer un schéma numérique qui généralise le $\theta$-schéma étudié précédemment.
**b.** Pour toute $N$, $\Delta x = 1/(N+1)$, on note $L^2_{\Delta x}(0,1)$ l'espace $\mathbb{R}^{N+1}$ muni de la norme

$$\|u\| = \sum_{j=0}^{N} |u_j|^2 \Delta x.$$

Montrer que si $u$ désigne la solution du schéma numérique, on a alors pour tout $v \in L^2_{\Delta x}(0,1)$,

$$\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, v\right)_\sigma + a_h\left(\theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n, v\right) = 0.$$

**c.** En utilisant une méthode énergétique, montrer que le schéma est $L^2$-stable pour $\theta \geq 1/2$.
**d.** Établir la consistance du schéma. En déduire la convergence du schéma pour $\theta \geq 1/2$ ainsi que son ordre de convergence.