Équations aux dérivées partielles – Série 4
SOLUTIONS

Stabilité en norme L^∞.

1. Schéma de Crank-Nicolson. On notera comme avant par $M = \max_{j\in\mathbb{Z}}\{u_j^{n+1}\}$ et $m = \min_{j\in\mathbb{Z}}\{u_j^{n+1}\}$ le maximum et le minimum des valeurs fournies par le schéma à l'instant $n+1$. On montrera d'abord que le maximum est borné par les valeurs obtenues à l'instant précedent. Notos par u_k^{n+1}, l'élément pour lequel ce maximum est atteint. On écrit ensuite le schéma pour $j = k$ et on utilise le fait que le maximum est u_k^{n+1}. Ceci nous donne

$$\frac{M - u_k^n}{\Delta t} - \nu\frac{u_{k-1}^n - u_k^n + u_{k+1}^n}{2\Delta x^2} \le 0 \Rightarrow M \le \left(1 - \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\right)u_k^n + \frac{\nu\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{k-1}^n + u_{k+1}^n).$$

   On voit bien que si $\nu\Delta t \le \Delta x^2$, le terme de droite est une combinaison convexe des u_{k-1}^n, u_k^n et u_{k+1}^n, d'où le fait que $M \le \max_{j\in\mathbb{Z}}\{u_j^n\}$. En ce qui concerne l'inégalité sur le minimum, ceci se déduit avec les mêmes arguments, en remplaçant u_j^n par $-u_j^n$ et M par $-m$.

2. Schéma de DuFort-Frankel. On va ré-écrire ce schéma de la façon suivante.

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{\nu}{\Delta x^2}\right)u_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{\nu}{\Delta x^2}\right)u_j^{n-1} + \frac{\nu}{\Delta x^2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n).$$

   On remarque que si $2\nu\Delta t \le \Delta x^2$, alors u_j^{n+1} est bien une combinaison convexe des éléments du second membre, ce qui conduit à la stabilité L^∞ su schéma.

Stabilité en norme L^2

1. Schéma d'Euler implicite. On injecte un mode de Fourier $u_j^n = G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ dans le schéma, afin de calculer son facteur d'amplification

$$\frac{G(k)^{n+1}e^{2i\pi jk\Delta x} - G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}}{\Delta t} - \nu\frac{G(k)^{n+1}e^{2i\pi(j+1)k\Delta x} - 2G(k)^{n+1}e^{2i\pi jk\Delta x} + G(k)^{n+1}e^{2i\pi(j-1)k\Delta x}}{\Delta x^2} = 0.$$

   En simplifiant le facteur $G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ on obtient

$$G(k) - 1 - \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}G(k)(e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}) = 0.$$

   Ensuite,

$$G(k)\left(1 + \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}(2 - 2\cos(2\pi\Delta x))\right) = 1 \Leftrightarrow G(k) = \frac{1}{1 + 4\dfrac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x)}$$

   ce qui prouve qu'indépendamment de Δt et Δx, $|G(k)| \le 1$, donc le schéma est *inconditionnellement stable.*

2. Le θ-schéma. On injecte un mode de Fourier $u_j^n = G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ dans le schéma, afin de calculer son facteur d'amplification

$$\begin{aligned}
&\frac{G(k)^{n+1}e^{2i\pi jk\Delta x} - G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}}{\Delta t} \\
&\quad -\theta\nu\frac{G(k)^{n+1}e^{2i\pi (j+1)k\Delta x} - 2G(k)^{n+1}e^{2i\pi jk\Delta x} + G(k)^{n+1}e^{2i\pi (j-1)k\Delta x}}{\Delta x^2} \\
&\quad -(1-\theta)\nu\frac{G(k)^{n}e^{2i\pi (j+1)k\Delta x} - 2G(k)^{n}e^{2i\pi jk\Delta x} + G(k)^{n}e^{2i\pi (j-1)k\Delta x}}{\Delta x^2} = 0
\end{aligned}$$

En simplifiant le facteur $G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ on obtient

$$G(k) - 1 - \theta\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}G(k)(e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}) - (1-\theta)\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}(e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}) = 0.$$

ce qui conduit à

$$G(k)\left(1 + 4\theta\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x)\right) = 1 - 4(1-\theta)\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x).$$

La condition $G(k) \leq 1$ sera donc équivalente à

$$-1 \leq \frac{1 - 4(1-\theta)\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x)}{1 + 4\theta\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x)} \leq 1 \Leftrightarrow (1-2\theta)\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x) \leq 1.$$

On en déduit que si $\theta \geq 1/2$, le schéma est *inconditionnellement stable* et que si $0 \leq \theta < 1/2$ alors il est stable sous la condition $(1-2\theta)\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$.

3. Schéma de DuFort-Frankel. On injecte un mode de Fourier $u_j^n = G(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ dans le schéma, afin de calculer son facteur d'amplification et on simplifiera ensuite $G(k)^{n-1}e^{2i\pi jk\Delta x}$

$$\begin{aligned}
G(k)^2 - 1 - c\,(2G(k)\cos(k\pi\Delta x) - G(k)^2 - 1) = 0,\ c = \tfrac{2\nu\Delta t}{\Delta x^2} \\
\Rightarrow G(k)^2(1+c) - 2cG(k)\cos(k\pi\Delta x) + c - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une equation de second degré, possedant 2 racines $G_{1,2}(k)$. Si le determinant de cette équation est négatif, les deux racines sont conjuguées complexes, de même module et

$$|G_1(k)|^2 = |G_2(k)|^2 = |G_1(k)G_2(k)| = \left|\frac{c-1}{c+1}\right| < 1.$$

on en déduit que le schéma est inconditionnellement stable. Si le determinant est positif, les deux racines sont réelles

$$G_{1,2}(k) = \frac{c\cos(k\pi\Delta x) \pm \sqrt{c^2\cos^2(k\pi\Delta x) - c^2 + 1}}{c+1}.$$

et on pourra montrer facilement par simple calcul que $\max\{G_1(k), G_2(k)\} = G_1(k) \leq 1$ et que $\min\{G_1(k), G_2(k)\} = G_2(k) \geq -1$.