

Chapitre 1

INTRODUCTION A LA MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET A LA SIMULATION NUMÉRIQUE

1.1 Introduction générale

Ce chapitre est une introduction à deux aspects distincts, mais très liés, des mathématiques appliquées : la **modélisation mathématique** et la **simulation numérique**. Un modèle mathématique est une représentation ou une interprétation abstraite de la réalité physique qui est accessible à l'analyse et au calcul. La simulation numérique permet de calculer sur ordinateur les solutions de ces modèles, et donc de simuler la réalité physique. Dans ce cours, les modèles que nous étudierons seront des équations aux dérivées partielles (ou e.d.p. en abrégé), c'est-à-dire des équations différentielles à plusieurs variables (le temps et l'espace, par exemple).

Pour l'instant nous laissons de coté un troisième aspect fondamental des mathématiques appliquées, à savoir l'analyse mathématique des modèles, sur lequel nous reviendrons un peu plus longuement dans les chapitres suivants. En pratiquant de la sorte, nous voulons en quelque sorte, motiver et justifier cette nécessaire intrusion de l'analyse mathématique. Nous allons voir, en effet, que le calcul numérique des solutions de ces modèles physiques réserve parfois des surprises (désagréables) qui ne peuvent s'expliquer et s'éviter que par une bonne compréhension de leurs propriétés mathématiques. Rappelons encore une fois le caractère fondamentalement multidisciplinaire des mathématiques appliquées, et donc de la simulation numérique, qui mêlent mathématiques, calcul informatique, et sciences de l'ingénieur.

Bien que la plupart des problèmes et des applications qui motivent les mathé-

matiques appliquées sont fondamentalement **non-linéaires** (voir par exemple [13], [29]), nous nous restreignons dans cet ouvrage aux problèmes linéaires par souci de simplicité. De la même façon, nous n'envisageons que des problèmes déterministes, c'est-à-dire sans introduction d'aléatoire ou de stochastique. Enfin, ce chapitre se voulant introductif et attractif, nous resterons souvent un peu flou dans l'argumentaire mathématique pour ne pas alourdir inutilement l'exposé. Que le lecteur rigoureux se rassure : nous reprendrons tous les concepts introduits de manière plus précise au prochain chapitre.

Le plan de ce chapitre est le suivant. La Section 1.2 est consacrée à un exemple élémentaire de modélisation qui conduit à **l'équation de la chaleur**. La Section 1.3 est une revue rapide des principales équations aux dérivées partielles que l'on rencontre dans les modèles usuels en mécanique, physique, ou sciences de l'ingénieur. La Section 1.4 est une introduction assez informelle au calcul numérique et à la méthode des **differences finies**. Enfin, nous donnons dans la Section 1.5 la définition d'un **problème bien posé** ainsi qu'une classification (sommaire) des équations aux dérivées partielles.

1.2 Un exemple de modélisation

La modélisation représente une part considérable du travail du mathématicien appliqué et nécessite une connaissance approfondie, non seulement des mathématiques appliquées, mais aussi de la discipline scientifique à laquelle elles s'appliquent. En effet, dans de nombreux cas le modèle mathématique n'est pas encore établi, ou bien il faut en sélectionner un pertinent parmi plusieurs disponibles, ou encore il faut simplifier des modèles connus mais trop complexes. Néanmoins, il ne nous est pas possible dans une première présentation de la discipline de rendre compte avec justice de l'importance de cette démarche de modélisation : il faut bien commencer par apprendre les notions de base propres aux mathématiques appliquées ! C'est pourquoi nous nous limitons à décrire un exemple de dérivation d'un modèle physique très classique, et nous renvoyons le lecteur désireux d'en savoir plus à des ouvrages ou cours plus spécialisés.

Le modèle que nous allons décrire est connu sous le nom **d'équation de la chaleur**, ou d'équation de diffusion.

Considérons un domaine Ω de l'espace à N dimensions (noté \mathbb{R}^N , avec en général $N = 1, 2$, ou 3) que l'on suppose occupé par un matériau homogène, isotrope, et conducteur de la chaleur. On note x la variable d'espace, c'est-à-dire un point de Ω , et t la variable de temps. Dans Ω les sources de chaleur (éventuellement non uniformes en espace et variables dans le temps) sont représentées par une fonction donnée $f(x, t)$, tandis que la température est une fonction inconnue $\theta(x, t)$. La quantité de chaleur est proportionnelle à la température θ et vaut $c\theta$ où c est une constante physique (qui dépend du type de matériau) appelée chaleur spécifique. Pour déterminer la température θ , nous écrivons la **loi de conservation de l'énergie** ou de la quantité de chaleur. Dans un volume élémentaire V inclus dans Ω , la variation en temps de la

quantité de chaleur est le bilan de ce qui est produit par les sources et de ce qui sort ou rentre à travers les parois. Autrement dit,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V c\theta dx \right) = \int_V f dx - \int_{\partial V} q \cdot n ds \quad (1.1)$$

où ∂V est le bord de V (d'élément de surface ds), n est la normale extérieure unité de V , et q est le vecteur flux de chaleur. Si on applique le théorème de Gauss, on obtient

$$\int_{\partial V} q \cdot n ds = \int_V \operatorname{div} q dx.$$

Regroupant les différents termes de (1.1) et utilisant le fait que le volume élémentaire V est quelconque, indépendant du temps, on en déduit l'équation de conservation de l'énergie

$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div} q = f \quad (1.2)$$

qui a lieu en tout point $x \in \Omega$ et à tout temps t . Rappelons que l'opérateur divergence est défini par

$$\operatorname{div} q = \sum_{i=1}^N \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \text{ avec } q = (q_1, \dots, q_N)^t.$$

Il faut maintenant relier le flux de chaleur à la température, et on fait appel à ce qu'on appelle une **loi constitutive**. Dans le cas présent, il s'agit de la loi de Fourier qui relie le flux de chaleur de manière proportionnelle au gradient de température

$$q = -k \nabla \theta, \quad (1.3)$$

où k est une constante positive (qui dépend du type de matériau) appelée conductivité thermique. Rappelons que l'opérateur gradient est défini par

$$\nabla \theta = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \theta}{\partial x_N} \right)^t.$$

En combinant la loi de conservation (1.2) et la loi constitutive (1.3), on obtient une équation pour la température θ

$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f,$$

où $\Delta = \operatorname{div} \nabla$ est l'opérateur laplacien donné par

$$\Delta \theta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2}.$$

Il faut ajouter à cette équation qui est valable dans tout le domaine Ω , une relation, appelée **condition aux limites**, qui indique ce qui se passe à la frontière ou au

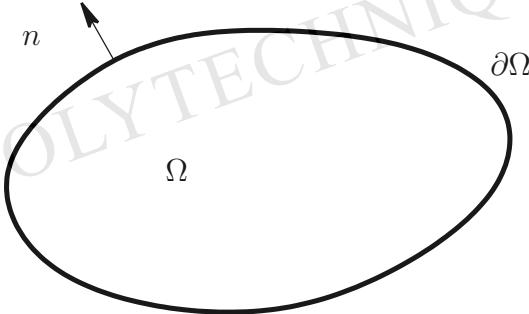


FIG. 1.1 – Vecteur normal unité orienté vers l’extérieur.

bord $\partial\Omega$ du domaine, et une autre relation qui indique quel est l’état initial de la température. Par convention, on choisit l’instant $t = 0$ pour être le temps initial, et on impose une **condition initiale**

$$\theta(t = 0, x) = \theta_0(x), \quad (1.4)$$

où θ_0 est la fonction de distribution initiale de température dans le domaine Ω . En ce qui concerne la condition aux limites, cela dépend du contexte physique. Si le domaine est supposé baigner dans un thermostat à température constante, alors, quitte à modifier l’échelle des températures, la température vérifie la condition aux limites de Dirichlet

$$\theta(t, x) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega \text{ et } t > 0. \quad (1.5)$$

Si le domaine est supposé adiabatique ou thermiquement isolé de l’extérieur, alors le flux de chaleur sortant au bord est nul et la température vérifie la condition aux limites de Neumann

$$\frac{\partial \theta}{\partial n}(t, x) \equiv n(x) \cdot \nabla \theta(t, x) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega \text{ et } t > 0, \quad (1.6)$$

où n est la normale extérieure unité de Ω (voir la Figure 1.1). Une situation intermédiaire peut aussi avoir lieu : le flux de chaleur sortant au bord est proportionnel au saut de température entre l’extérieur et l’intérieur, et la température vérifie la condition aux limites de Fourier

$$\frac{\partial \theta}{\partial n}(t, x) + \alpha \theta(t, x) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega, \text{ et } t > 0 \quad (1.7)$$

où α est une constante positive. Puisqu’il faut choisir (c’est une des étapes de la modélisation), nous allons sélectionner la condition aux limites de Dirichlet (1.5). Rassemblant enfin l’équation, la condition initiale, et la condition aux limites satisfaites

par la température, on obtient l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t, x) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t=0, x) = \theta_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \end{cases} \quad (1.8)$$

Le problème (1.8) est donc constitué d'une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites et d'une condition initiale. A cause de la présence de conditions aux limites, on dit que (1.8) est un **problème aux limites**, mais on dit aussi que c'est un **problème de Cauchy** à cause de la donnée initiale en temps.

Remarque 1.2.1 Dans ce modèle de propagation de la chaleur, il nous faut préciser les unités ou dimensions physiques : la température θ s'exprime en Kelvin (K), la chaleur spécifique c en Joule par kilogramme par Kelvin ($J/(kg \times K)$), la conductivité thermique (par unité de masse) k en Joule mètre carré par kilogramme par Kelvin par seconde ($Jm^2/(kg \times K \times s)$). D'un point de vue mathématique, nous allons très souvent oublier ces unités, et même ces constantes, en supposant que c et k valent 1 (cela revient à adimensionner les grandeurs physiques). •

Remarque 1.2.2 Nous avons mentionné trois types de conditions aux limites, Dirichlet, Neumann, Fourier (mais il en existe d'autres) qui ont lieu sur l'intégralité de la frontière $\partial\Omega$. Bien sûr, on peut aisément imaginer des situations où les conditions aux limites sont mélangées : Dirichlet sur $\partial\Omega_D$, Neumann sur $\partial\Omega_N$, et Fourier sur $\partial\Omega_F$, avec $\partial\Omega_D, \partial\Omega_N, \partial\Omega_F$ formant une partition de la frontière $\partial\Omega$. •

Remarque 1.2.3 L'équation de la chaleur (1.8) est **linéaire** au sens où sa solution θ dépend linéairement des données (f, θ_0) . En physique cette propriété de linéarité est souvent traduite sous la forme d'un principe de superposition : une combinaison linéaire des données (f, θ_0) conduit à une solution θ qui est la même combinaison linéaire des solutions correspondant à chaque terme de la décomposition des données. D'un point de vue physique, la linéarité n'est qu'une hypothèse parmi d'autres. En effet, pour les problèmes à forte variation de température, la loi de Fourier est fausse, et il faut la corriger en supposant que la conductivité thermique k dépend en fait de la température θ et de son gradient $\nabla\theta$ (ce qui rend le problème non-linéaire). Encore pire, pour des phénomènes extrêmement rapides (explosion, par exemple) il est nécessaire d'abandonner le principe même de la loi de Fourier qui suppose la proportionnalité du flux de chaleur q avec le gradient de température $\nabla\theta$. En effet, cette hypothèse ("naturelle" à première vue) entraîne une propriété paradoxale : la chaleur se propage à une vitesse infinie dans le domaine Ω . Nous verrons plus loin (voir la Remarque 1.2.9) comment établir ce paradoxe. Retenons pour l'instant que modéliser c'est faire des hypothèses et préciser leur domaine de validité... •

Remarque 1.2.4 Le problème (1.8) n'est pas seulement un modèle de propagation de la chaleur. Il a en fait un caractère universel, et on le retrouve comme modèle

de nombreux phénomènes sans aucun rapport entre eux (il faut simplement changer le nom des diverses variables du problème). Par exemple, (1.8) est aussi connue sous le nom **d'équation de diffusion**, et modélise la diffusion ou migration d'une concentration ou densité à travers le domaine Ω (imaginer un polluant diffusant dans l'atmosphère, ou bien une espèce chimique migrant dans un substrat). Dans ce cas, θ est la concentration ou la densité en question, q est le flux de masse, k est la diffusivité, et c est la densité volumique de l'espèce. De même, la loi de conservation (1.2) est un bilan de masse, tandis que la loi constitutive (1.3) est appelée loi de Fick. •

Remarque 1.2.5 Le problème (1.8) intervient aussi en finance où il porte le nom de **modèle de Black et Scholes**. Une variante de (1.8) permet de trouver le prix de l'option d'achat (ou call) d'une action qui vaut initialement x et qu'on pourra acheter au prix k dans un temps ultérieur T . Ce prix est la solution u de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - ru + 1/2rx\frac{\partial u}{\partial x} + 1/2\sigma^2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(t = T, x) = \max(x - k, 0) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.9)$$

Plus précisément, $u(0, x)$ est le prix au temps $t = 0$ de l'option d'achat de prix d'exercice k à l'échéance $T > 0$, et d'actif x en $t = 0$. On note σ la volatilité de l'action et r le taux d'intérêt. Remarquons que (1.9) est un problème avec condition finale et non pas initiale, mais que le signe de la dérivée seconde en espace est opposé à celui dans (1.8). Par conséquent, après inversion du temps (1.9) est bien une équation parabolique. •

Il existe de nombreuses variantes de l'équation de la chaleur (1.8) dont nous explorons certaines maintenant. Jusqu'ici nous avons supposé que la chaleur se propageait dans un milieu immobile ou au repos. Supposons à présent qu'elle se propage dans un milieu en mouvement comme, par exemple, un fluide animé d'une vitesse $V(x, t)$ (une fonction à valeurs vectorielles dans \mathbb{R}^N). Alors, il faut changer la loi constitutive car le flux de chaleur est la somme d'un flux de diffusion (comme précédemment) et d'un flux de convection (proportionnel à la vitesse V), et des considérations similaires à celles qui précèdent nous conduisent à un problème, dit de **convection-diffusion**

$$\begin{cases} c\frac{\partial \theta}{\partial t} + cV \cdot \nabla \theta - k\Delta \theta = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.10)$$

La différence entre (1.8) et (1.10) est l'apparition d'un terme de convection. On mesure la balance entre ce nouveau terme de convection et le terme de diffusion par un nombre sans dimension, appelé **nombre de Péclet**, défini par

$$\text{Pe} = \frac{cVL}{k}, \quad (1.11)$$

où L est une longueur caractéristique du problème (par exemple le diamètre du domaine Ω). Si le nombre de Péclet est très petit, alors les effets diffusifs dominent les effets convectifs, et le modèle (1.8) est suffisant pour décrire le phénomène. Si le nombre de Péclet n'est ni petit, ni grand (on dit qu'il est de l'ordre de l'unité), le modèle (1.10) est plus réaliste que (1.8). Par contre, si le nombre de Péclet est très grand, on peut simplifier (1.10) en supprimant le terme de diffusion. On obtient alors l'équation dite **d'advection**

$$\begin{cases} c \frac{\partial \theta}{\partial t} + c V \cdot \nabla \theta = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t, x) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \text{ si } V(x) \cdot n(x) < 0 \\ \theta(t=0, x) = \theta_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.12)$$

Remarquons la différence dans la condition aux limites de (1.12) par rapport à celle de (1.10) : on n'impose plus à la température θ d'être nulle partout sur le bord $\partial\Omega$ mais seulement en ces points du bord où la vitesse V est rentrante.

Nous venons donc de décrire trois modèles de propagation de la chaleur par convection et diffusion, (1.8), (1.10), (1.12), qui ont des régimes de validité correspondant à des valeurs différentes du nombre de Péclet. Bien sûr, la résolution analytique ou numérique de ces trois modèles est assez différente. Il s'agit là d'une situation courante en modélisation mathématique : plusieurs modèles sont en concurrence et il faut pouvoir choisir le "meilleur".

Afin de mieux comprendre les différences fondamentales qui existent entre ces modèles, nous nous restreignons provisoirement au cas où $\Omega = \mathbb{R}$ est l'espace tout entier en dimension 1 (ce qui évacue la question des conditions aux limites), où le terme source f est nul, et où la vitesse V est constante. On peut alors calculer explicitement des solutions de ces modèles. Par exemple, (1.10) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + V \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t=0, x) = \theta_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.13)$$

avec $\nu = k/c$, qui admet comme solution

$$\theta(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(y) \exp\left(-\frac{(x-Vt-y)^2}{4\nu t}\right) dy. \quad (1.14)$$

Une solution de (1.8) est facilement obtenue en faisant $V = 0$ dans l'expression (1.14).

Exercice 1.2.1 On suppose que la donnée initiale θ_0 est continue et uniformément bornée sur \mathbb{R} . Vérifier que (1.14) est bien une solution de (1.13).

Avec les mêmes hypothèses simplificatrices, l'équation d'advection devient

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + V \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ \theta(t=0, x) = \theta_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.15)$$

On vérifie que

$$\theta(t, x) = \theta_0(x - Vt) \quad (1.16)$$

est une solution de l'équation (1.15).

Exercice 1.2.2 On suppose que la donnée initiale θ_0 est dérivable et uniformément bornée sur \mathbb{R} . Vérifier que (1.16) est bien une solution de (1.15). Montrer que (1.16) est la limite de (1.14) lorsque le paramètre ν tend vers zéro.

Remarque 1.2.6 Si l'on résolvait l'équation de la chaleur (1.8) sur un intervalle borné (et non dans tout l'espace), on pourrait aussi calculer une solution explicite en utilisant l'analyse de Fourier (voir le cours de mathématiques [6]). Cette solution serait un peu moins “explicite” que (1.14) car définie comme la somme d'une série infinie. Remarquons que c'est précisément pour résoudre l'équation de la chaleur que Fourier a inventé l'analyse qui porte son nom. •

Remarque 1.2.7 Le rôle du temps est fondamentalement différent dans les équations (1.8) et (1.12). En effet, supposant que le terme source est nul, $f = 0$, si on change le signe du temps t et celui de la vitesse, l'équation d'advection (1.12) est inchangée (quand on remonte le temps, on remonte le courant). Au contraire, un changement de signe du temps dans l'équation de la chaleur (1.8) ne peut pas être “compensé” par une quelconque variation du signe des données. C'est manifeste dans la forme des solutions explicites de ces équations : (1.16) est invariant par changement de signe de t et V , alors que (1.14) (avec $V = 0$) décroît en temps ce qui indique la “flèche” du temps. On dit que l'équation d'advection est **réversible** en temps, tandis que l'équation de la chaleur est **irréversible** en temps. Cette observation mathématique est conforme à l'intuition physique : certains phénomènes sont réversibles en temps, d'autres non (comme la diffusion d'une goutte de lait dans une tasse de thé). •

Remarque 1.2.8 Une autre différence fondamentale entre les équations (1.8) et (1.12) porte sur les propriétés **d'invariance par changement d'échelle**. Supposons que le terme source est nul, $f = 0$. Il est facile de voir que si $\theta(x, t)$ est une solution de l'équation de la chaleur (1.8), alors, pour tout $\lambda > 0$, $\theta(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2})$ est aussi solution de la même équation (pour une donnée initiale différente). De même, en supposant que la vitesse V est constante, si $\theta(x, t)$ est une solution de l'équation d'advection (1.12), alors $\theta(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda})$ est aussi solution. On voit bien que la mise à l'échelle de la variable de temps n'est pas la même dans les deux cas. Remarquons aussi que, dans les deux cas, l'équation est invariante par translation en espace et en temps. •

Remarque 1.2.9 Une propriété surprenante (du point de vue de la physique) de l'équation de la chaleur (1.8) est que la solution en (x, t) dépend de toutes les valeurs de la donnée initiale dans \mathbb{R} (voir, la formule (1.14)). En particulier, dans le cas de (1.13), si la donnée initiale est positive à support compact, alors pour tout temps $t > 0$ (aussi petit soit-il) la solution est strictement positive sur tout \mathbb{R} : autrement

dit, l'effet de la chaleur se faire sentir “instantanément” à l'infini. On dit que la chaleur **se propage avec une vitesse infinie** (ce qui est bien sûr une limitation du modèle). Au contraire, dans l'équation d'advection (1.15) la donnée initiale est convectée à la vitesse V (voir la formule (1.16)) : il y a donc **propagation à vitesse finie**. •

Remarque 1.2.10 Grâce aux formules explicites (1.14) et (1.16), on vérifie aisément que les solutions de l'équation de convection-diffusion (1.13) et de l'équation d'advection (1.15) vérifient la propriété

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \theta_0(x) \leq \theta(x, t) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} \theta_0(x) \text{ pour tout } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

appelée **principe du maximum**. Cette propriété (très importante, aussi bien du point de vue mathématique que physique) se généralise aux formes plus générales de l'équation de convection-diffusion (1.10) et de l'équation d'advection (1.12). Nous l'étudierons précisément dans la suite. •

1.3 Quelques modèles classiques

Dans cette section nous donnons rapidement la forme de quelques modèles classiques. Le but de cette énumération est de dégager dès maintenant les principales classes d'équations aux dérivées partielles que nous étudierons par la suite, et de montrer que ces équations jouent un rôle important dans des domaines scientifiques très divers. Désormais nous adimensionnons toutes les variables, ce qui permet de fixer toutes les constantes des modèles égales à 1.

1.3.1 Équation de la chaleur

Comme nous venons de le voir, l'équation de la chaleur intervient comme modèle dans de nombreux problèmes des sciences de l'ingénieur. Elle s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.17)$$

Il s'agit d'une équation d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace (l'ordre est celui des dérivées partielles les plus élevées). On dira que cette équation est parabolique (voir plus loin la Sous-section 1.5.2). Nous avons déjà vu certaines propriétés de cette équation : irréversibilité en temps, propagation à vitesse infinie, et principe du maximum.

Exercice 1.3.1 On se propose de retrouver une propriété de décroissance exponentielle en temps (voir la formule (1.14)) de la solution de l'équation de la chaleur (1.17) dans un domaine borné. En une dimension d'espace, on pose $\Omega = (0, 1)$ et on suppose que

$f = 0$. Soit $u(t, x)$ une solution régulière de (1.17). En multipliant l'équation par u et en intégrant par rapport à x , établir l'égalité

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 u^2(t, x) dx \right) = - \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right|^2 dx$$

Montrer que toute fonction $v(x)$ continûment dérivable sur $[0, 1]$, telle que $v(0) = 0$, vérifie l'inégalité de Poincaré

$$\int_0^1 v^2(x) dx \leq \int_0^1 \left| \frac{dv}{dx}(x) \right|^2 dx.$$

En déduire la décroissance exponentielle en temps de $\int_0^1 u^2(t, x) dx$.

1.3.2 Équation des ondes

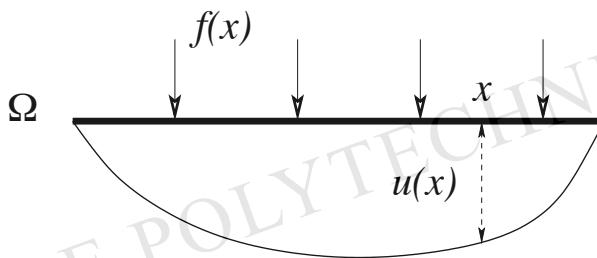


FIG. 1.2 – Déplacement d'une corde élastique.

L'équation des ondes modélise des phénomènes de propagation d'ondes ou de vibration. Par exemple, en deux dimensions d'espace elle est un modèle pour étudier les vibrations d'une membrane élastique tendue (comme la peau d'un tambour). En une dimension d'espace, elle est aussi appelée équation des cordes vibrantes. Au repos, la membrane occupe un domaine plan Ω . Sous l'action d'une force normale à ce plan d'intensité f , elle se déforme et son déplacement normal est noté u (voir la Figure 1.2). On suppose qu'elle est fixée sur son bord, ce qui donne une condition aux limites de Dirichlet. L'équation des ondes dont u est solution est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.18)$$

Remarquons qu'il s'agit d'une équation du deuxième ordre en temps et qu'il faut donc deux conditions initiales pour u . On dira que cette équation est hyperbolique (voir plus loin la Sous-section 1.5.2).

Exercice 1.3.2 On se place en dimension $N = 1$ d'espace. On suppose que les données initiales u_0 et u_1 sont des fonctions régulières, et que $f = 0$ avec $\Omega = \mathbb{R}$. On note U_1 une primitive de u_1 . Vérifier que

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2} (U_1(x+t) - U_1(x-t)), \quad (1.19)$$

est la solution unique de (1.18) dans la classe des fonctions régulières.

L'équation des ondes partage avec l'équation d'advection (1.12) la propriété importante de **propagation à vitesse finie**. En effet, l'Exercice 1.3.3 montre que sa solution en un point (x, t) ne dépend pas de toutes les valeurs des données initiales mais seulement des valeurs dans un intervalle restreint appelé **domaine de dépendance** (ou cône de lumière ; voir la Figure 1.3). Rappelons que cette propriété n'est pas partagée par l'équation de la chaleur puisqu'il est clair, à travers la formule (1.14), que la solution en (x, t) dépend de toutes les valeurs de la donnée initiale.

Une autre propriété de l'équation des ondes est son invariance par changement du sens du temps. Si on change t en $-t$, la forme de l'équation ne change pas. On peut donc “intégrer” l'équation des ondes vers les temps positifs ou négatifs de la même manière. On dit que l'équation des ondes est **réversible en temps**.

Exercice 1.3.3 Vérifier que la solution (1.19) au point (x, t) ne dépend des données initiales u_0 et u_1 qu'à travers leurs valeurs sur le segment $[x-t, x+t]$. Vérifier aussi que $u(-t, x)$ est solution de (1.18) dans $\Omega \times \mathbb{R}_*$ quitte à changer le signe de la vitesse initiale $u_1(x)$.

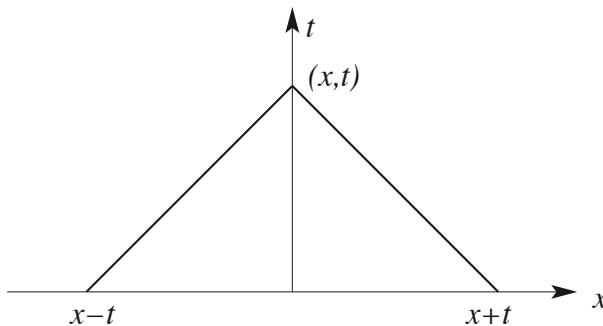


FIG. 1.3 – Domaine ou cône de dépendance de l'équation des ondes.

Exercice 1.3.4 On se propose de démontrer un principe de conservation de l'énergie pour l'équation des ondes (1.18) sans utiliser la formule explicite (1.19). En une dimension d'espace, on pose $\Omega = (0, 1)$ et on suppose $f = 0$. Soit $u(t, x)$ une solution régulière de

(1.18). En multipliant l'équation par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et en intégrant par rapport à x , établir l'égalité d'énergie

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right|^2 dx + \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right|^2 dx \right) = 0.$$

Conclure et comparer à ce qui se passe pour l'équation de la chaleur.

1.3.3 Le Laplacien

Pour certains choix du terme source f , la solution de l'équation de la chaleur (1.17) atteint un état **stationnaire**, c'est-à-dire que $u(t, x)$ admet une limite $u_\infty(x)$ quand le temps t tend vers l'infini. Souvent, il est intéressant de calculer directement cet état stationnaire. Dans ce cas, pour un terme source $f(x)$ indépendant du temps, on résout une équation du deuxième ordre en espace

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.20)$$

que l'on appelle Laplacien ou équation de Laplace. On dira que cette équation est elliptique (voir plus loin la Sous-section 1.5.2). Remarquons que le Laplacien est aussi la version stationnaire de l'équation des ondes (1.19). Le Laplacien intervient aussi dans de très nombreux domaines des sciences de l'ingénieur. Par exemple, (1.20) modélise le déplacement vertical d'une membrane élastique soumise à une force normale f et fixée sur son contour.

1.3.4 Équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger décrit l'évolution de la fonction d'onde u d'une particule soumise à un potentiel V . Rappelons que $u(t, x)$ est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ à valeurs dans \mathbb{C} et que son module au carré $|u|^2$ s'interprète comme la densité de probabilité pour détecter que la particule se trouve au point (t, x) . Le potentiel $V(x)$ est une fonction à valeurs réelles. La fonction d'onde u est solution de

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u - Vu = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^* \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (1.21)$$

Il n'y a pas de condition aux limites apparentes dans (1.21) puisque l'équation a lieu dans tout l'espace (qui n'a pas de bord). Néanmoins, nous verrons qu'un choix "raisonnable" d'espace fonctionnel dans lequel nous chercherons la solution entraîne de facto une condition de décroissance à l'infini de u qui peut s'interpréter comme une sorte de condition aux limites à l'infini.

Exercice 1.3.5 On se propose de démontrer des principes de conservation de l'énergie pour l'équation de Schrödinger (1.21). Soit $u(t, x)$ une solution régulière de (1.21) en une

dimension d'espace qui décroît vers zéro (ainsi que $\frac{\partial u}{\partial x}$) lorsque $|x| \rightarrow +\infty$. Montrer que pour toute fonction dérivable $v(t)$ on a

$$\mathcal{R} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \bar{v} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial |v|^2}{\partial t},$$

où \mathcal{R} désigne la partie réelle et \bar{v} le complexe conjugué de v . En multipliant l'équation par \bar{u} et en intégrant par rapport à x , établir l'égalité d'énergie

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx.$$

En multipliant l'équation par $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right|^2 + V(x) |u(t, x)|^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\left| \frac{\partial u_0}{\partial x}(x) \right|^2 + V(x) |u_0(x)|^2 \right) dx.$$

1.3.5 Système de Lamé

Le système de Lamé est un cas particulier des équations stationnaires de l'élasticité linéarisée qui modélisent les déformations d'un solide sous l'hypothèse de petites déformations et de petits déplacements (voir la Sous-section 5.3.1 pour plus de détails sur la modélisation). Pour obtenir le système de Lamé, on suppose que le solide est homogène isotrope et qu'il est fixé sur son bord. La principale différence avec les modèles précédents est qu'il s'agit ici d'un **système** d'équations, c'est-à-dire de plusieurs équations couplées entre elles. Le solide au repos occupe un domaine Ω de l'espace \mathbb{R}^N . Sous l'action d'une force f il se déforme, et chaque point x se déplace en $x + u(x)$. La force $f(x)$ est une fonction vectorielle de Ω dans \mathbb{R}^N , comme le déplacement $u(x)$. Ce dernier est solution de

$$\begin{cases} -\mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.22)$$

où λ et μ sont deux constantes, dites de Lamé, caractéristiques du matériau homogène isotrope dont est constitué le solide. Pour des raisons mécaniques ces constantes vérifient $\mu > 0$ et $2\mu + N\lambda > 0$. La condition aux limites de Dirichlet pour u traduit le fait que le solide est supposé fixé et immobilisé sur son bord $\partial\Omega$.

Le système (1.22) a été écrit en notation vectorielle. Si on note f_i et u_i , pour $1 \leq i \leq N$, les composantes de f et u dans la base canonique de \mathbb{R}^N , (1.22) est équivalent à

$$\begin{cases} -\mu \Delta u_i - (\mu + \lambda) \frac{\partial(\operatorname{div} u)}{\partial x_i} = f_i & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq N$. Remarquons que, si $(\mu + \lambda) \neq 0$, alors les équations pour chaque composante u_i sont couplées par le terme de divergence. Évidemment, en dimension $N = 1$, le système de Lamé n'a qu'une seule équation et se réduit au Laplacien.

1.3.6 Système de Stokes

Le système de Stokes modélise l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible à petite vitesse. On suppose que le fluide occupe un domaine Ω et qu'il adhère à la paroi de celui-ci, c'est-à-dire que sa vitesse est nulle sur la paroi (ce qui conduit à une condition aux limites de Dirichlet). Sous l'action d'une force $f(x)$ (une fonction de Ω dans \mathbb{R}^N), la vitesse $u(x)$ (un vecteur) et la pression $p(x)$ (un scalaire) sont solutions de

$$\begin{cases} \nabla p - \mu \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.23)$$

où $\mu > 0$ est la viscosité du fluide. Remarquons qu'en plus des N équations $\nabla p - \mu \Delta u = f$ (correspondant à la **conservation de la quantité de mouvement**), il y a une autre équation $\operatorname{div} u = 0$ appelée **condition d'incompressibilité** (qui correspond à la **conservation de la masse**). Si la dimension d'espace est $N = 1$, le système de Stokes est sans intérêt car on voit facilement que la vitesse est nulle et que la pression est une primitive de la force. Par contre en dimension $N \geq 2$, le système de Stokes a bien un sens : en particulier, il existe des champs de vitesses incompressibles non triviaux (prendre, par exemple, un rotationnel).

1.3.7 Équations des plaques

On considère la déformation élastique d'une plaque plane d'épaisseur petite (négligeable devant ses autres dimensions). Si on note Ω la surface moyenne de la plaque, et $f(x)$ (une fonction de Ω dans \mathbb{R}) la résultante normale des forces, alors la composante normale du déplacement $u(x)$ (un scalaire) est solution de l'équation des plaques (dites en flexion)

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.24)$$

où on note $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ avec n le vecteur normal unité extérieur à $\partial\Omega$. Remarquons qu'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre en espace (appelée aussi bi-laplacien). C'est pourquoi il est nécessaire d'avoir deux conditions aux limites. Ces conditions aux limites traduisent l'enca斯特rement de la plaque (pas de déplacement ni de rotation du bord de la plaque).

Remarquons qu'il est possible de justifier l'équation des plaques (1.24) par un raisonnement asymptotique à partir du système de Lamé (1.22) dans lequel on fait tendre l'épaisseur de la plaque vers zéro. Il s'agit là d'un exemple de modélisation mathématique.