Questions de cours

(i) $L^2(\Omega) = \{ v \mid \int_\Omega v^2 dx < \infty \}$, $(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv\, dx$, $\|v\|^2_{L^2(\Omega)} = (v,v)_{L^2(\Omega)}$

$H^1(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega),\ \nabla v \in (L^2(\Omega))^d \}$, $(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ ✓

$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = (v,v)_{H^1(\Omega)}$ ✓

(ii) V espace de Hilbert ;
L - forme linéaire et continue, $|L(v)| \leq M\|v\|_V$ ✓
a - forme bilinéaire, $|a(u,v)| \leq C\|u\|_V \|v\|_V$
a - coercive $a(v,v) \geq \gamma \|v\|_V^2$ avec $\gamma > 0$ ✓
$\Rightarrow$ le problème variationnel a une solution unique. ✓
Trouver $u \in V$ $a(u,v) = L(v)$, $\forall v \in V$

6 points.

(iii) CL essentielles Dirichlet $\rightarrow$ prises en compte dans V
CL naturelles Neumann, Robin $\rightarrow$ incluses directement dans la FV ✓

Exercice 1

1. $V = -4 < 0 \Rightarrow$ le schéma décentré amont est stable

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 4\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \text{cond de stabilité } \frac{|V|\Delta t}{\Delta x} = \frac{4\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$ ✓

La version centrée est instable mais aussi décentrée aval

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 4\cdot\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 4\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$ ✓

Stabilité L^2 : $u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ $\rightarrow$ on injecte et on simplifie

$$\frac{A(k)-1}{\Delta t} - 4\cdot\frac{e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x}}{2\Delta x} = 0 \Leftrightarrow A(k) = 1 + 4i\sin(2\pi k\Delta x) \times \Delta t$$ ✓

$|A(k)|^2 = 1 + 4\sin^2(2\pi k\Delta x) \geq 1 \Rightarrow$ incond instable ✓

2. Erreur de troncature

$$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j,t^{n+1}) - u(x_j,t^n)}{\Delta t} - 4\frac{u(x_{j+1},t^n) - u(x_j,t^n)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n) + O(\Delta t) - 4\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t^n) + O(\Delta x)$$

$= O(\Delta t) + O(\Delta x)$ $\rightarrow$ ordre 1 en temps et espace pour le schéma décentré ✓

$$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j,t^{n+1}) - u(x_j,t^n)}{\Delta t} - 4\frac{u(x_{j+1},t^n) - u(x_{j-1},t^n)}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n) + O(\Delta t) - 4\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t^n) + O(\Delta x^2)$$

$= O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ $\rightarrow$ ordre 1 en temps et 2 en espace ✓

3. $\varepsilon_j^n = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^n) + O(\Delta t^2) - 4\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t^n) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^n) + O(\Delta x^2)\right)$

$$= \underbrace{(8\Delta t - 2\Delta x)}_{\text{dissipation numérique}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^n) + O(\Delta x^2)$$ ✓

Equation équivalente : $\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial u}{\partial x} - (8\Delta t - 2\Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ✓

4. (i) Schéma implicite décentré amont ✓
(ii) Crank Nicolson
(iii) Lax Wendroff ✓

10 points

Exercice 2

$$-\int_0^1 ((x^2+1)u')'\cdot v + u\cdot v \, dx = \int_0^1 f v \, dx \quad \leadsto \text{ on IPP}$$

$$-\left[(x^2+1)u'v\right]_0^1 + \int_0^1 \left[(x^2+1)u'v' + uv\right] dx = \int_0^1 f v \, dx$$ ✓

$$-2u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 \left[(x^2+1)u'v' + uv\right] dx = \int_0^1 f v \, dx$$ ✓

Les conditions à gauche et à droite sont naturelles ✓

4 points

$u'(1) = 1$ et $u'(0) = 2 - u(0)$ $\leadsto$ on remplace

$$\underbrace{\int_0^1 \left((x^2+1)u'v' + uv\right) dx - u(0)v(0)}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f v \, dx + 2v(1) - 2v(0)}_{L(v)} \qquad \forall v \in H^1(0,1)$$ ✓

On a attribué des points même pour le schéma décentré aval :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 4\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$ ✓

L'étude de stabilité un peu plus compliquée

$$A(k) = 1 + 4\alpha(1 - e^{-2i\pi k\Delta x}) = 1 + 4\alpha\left(2\sin^2(k\pi\Delta x) + 2i\sin(k\pi\Delta x)\cos(k\pi\Delta x)\right)$$

$$A(k) = 1 + 8\alpha s_k(s_k + ic_k) = (1 + 8\alpha s_k^2) + i8\alpha s_k c_k$$

$$|A(k)|^2 = (1 + 8\alpha s_k^2)^2 + 8\alpha^2 s_k^2 c_k^2 = 1 + 16\alpha s_k^2 + 64\alpha^2 s_k^2 \geq 1$$

$\Rightarrow$ schéma inconditionnellement stable.

Dans le cas de l'étude de consistance on obtient le même ordre d'approximation !