Cours 5 10/10/12

Convergence des schémas

Consistance + stabilité $\Rightarrow$ convergence ! (théo de Lax)

Cette propriété n'est pas propre aux différences finies.
Pour toute méthode numérique la convergence est le résultat des propriétés de consistance et stabilité.

<u>Théo</u> (Lax). Soit $u(x,t)$ la solution suff régulière de l'éq de la chaleur. Soit u_j^n la solution numérique discrète par un schéma aux différences finies avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$. On suppose que le schéma à deux niveaux est consistant et stable pour une norme $\|\cdot\|$. Alors le schéma est convergent au sens suivant :

$$\forall T > 0 \quad \lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \left(\sup_{t_n \leq T} \|e^n\| \right) = 0 ; \quad e_j^n = u_j^n - u(x_j, t_n)$$

(e^n s'appelle vecteur erreur).

De plus, si le schéma est précis à l'ordre p en espace et q en temps, alors $\forall T > 0$, $\exists C_T > 0$ t.q.

$$\sup_{t_n \leq T} \|e^n\| \leq C_T \left((\Delta x)^p + (\Delta t)^q \right)$$

<u>Preuve</u>. On va supposer les CL de Dirichlet. Le schéma s'écrit

(1) $u^{n+1} = A u^n \qquad u^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq N}$

Soit $\tilde{u}^n = (\tilde{u}_j^n)_{1 \leq j \leq N} \qquad \tilde{u}_j^n = u(x_j, t_n)$

Le schéma est consistant donc il $\exists$ ε^n t.q.

$$(2) \quad \tilde{u}^{n+1} = A \tilde{u}^n + \Delta t \, \varepsilon^n , \quad \lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \|\varepsilon^n\| = 0 \text{ et}$$

$\|\varepsilon^n\| \leq C \left((\Delta x)^p + (\Delta t)^q \right)$

On soustrait maintenant les relations (1) et (4) ②

$\Rightarrow$ $$\underbrace{u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}_{e^{n+1}} = A(\underbrace{u^n - \tilde{u}^n}_{e^n}) - \Delta t\, \varepsilon^n.$$

On obtient par récurrence que

$$e^{n+1} = A e^n - \Delta t \varepsilon^n = A^2 e^{n-1} - (\Delta t \varepsilon^n + \Delta t A \varepsilon^{n-1}) = \dots$$

$$\dots = A^{n+1} e^0 - \Delta t \sum_{k=1}^{n+1} A^{n+1-k} \varepsilon^{k-1}$$

On sait que $e_j^0 = u_j^0 - u(x_j, 0) = 0$, Donc

$$e^n = -\Delta t \sum_{k=1}^{n} A^{n-k} \varepsilon^{k-1} \Rightarrow \|e^n\| \leq \Delta t \sum_{k=1}^{n} \|A^{n-k}\| \, \|\varepsilon^{k-1}\|$$

Le schéma est stable donc $\|A^{n-k}\| \leq K$ où K ne dépend pas de n.

$$\Rightarrow \|e^n\| \leq C \underbrace{\Delta t\, n}_{t_n \leq T} \cdot K \left((\Delta x)^p + (\Delta t)^q \right) \leq CTK \left((\Delta x)^p + (\Delta t)^q \right)$$

si $t_n \leq T$.

ce qui prouve l'inégalité sur $\|e^n\|$.

Remarques.

a) le théorème est valable pour toute EDP linéaire pas uniquement pour l'équation de la chaleur.

b) Il admet une réciproque : si le schéma est consistant + converg alors il est nécessairement stable.

c) La vitesse de convergence dépend de la précision du schéma

d) L'estimation de convergence est valable uniquement sur un intervalle borné et elle est indépendante du nombre de points de discrétisation