

# EDP1 - Mini-Projet

Yoann Le Saint & Maxime Le

## Contenu des livrables rendus :

- Le rapport de ce projet
- 4 fichiers octaves :
  - `mini_projet_chambre1.m` : il s'agit de la simulation de l'équation statique de la chaleur appliquée à la chambre 1 (*cf.* figure 1).
  - `mini_projet_chambre2.m` : *idem* sauf que cette fois-ci on l'applique sur la chambre 2 (*cf.* figure 2).
  - `Simulation_instationnaire_Explicite_Implicite.m` : il s'agit de la simulation instationnaire de la chaleur appliquée sur la chambre 2 avec d'une part Euler Explicite et d'autre par Euler Implicite.
  - `Simulation_instationnaire_Theta_Schema.m` : Il s'agit d'un ajout de notre part en utilisant le theta-schéma en lieu et place d'Euler.
- `Test1.m` Il s'agit du test 1 de la deuxième partie
- `Test2.m` Il s'agit du test 2 de la deuxième partie

## README :

Pour les fichiers `mini_projet_chambre1.m`, il suffit de lancer le programme normalement en changeant les paramètres écrit au début à votre convenance.

Pour `Simulation_instationnaire_Explicite_Implicite.m`, il faut choisir entre  $p = 1$  pour la simulation avec le schéma explicite et  $p = 2$  pour la simulation avec le schéma implicite.

## Partie 1 : Simulation statique de la chaleur

Pour ce mini-projet, on considérera les deux plans de chambre (chambre 1 et 2, *cf.* figure 1). Par soucis de simplicité, nous avons décidé de considérer les deux chambres dans des carrés de côté unitaire dans lequel on a restreint les dites chambres.

En considérant l'équation stationnaire  $-\Delta u = f$  et en considérant que les murs sont parfaitement isolant (adiabatiques) et les conditions aux limites sont Neumann homogènes. De plus, on considère que les températures de la porte, fenêtre et extérieure sont constantes (donc des conditions de Dirichlet).

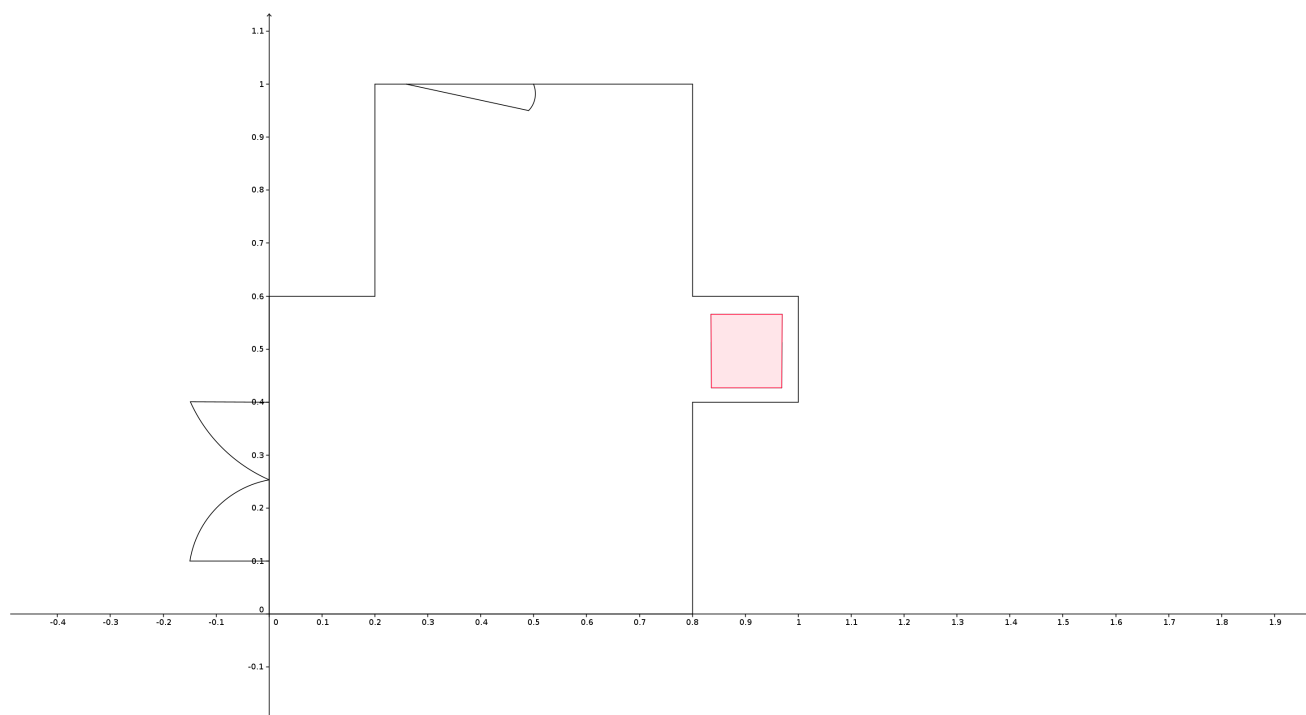


FIGURE 1 – Chambre 1

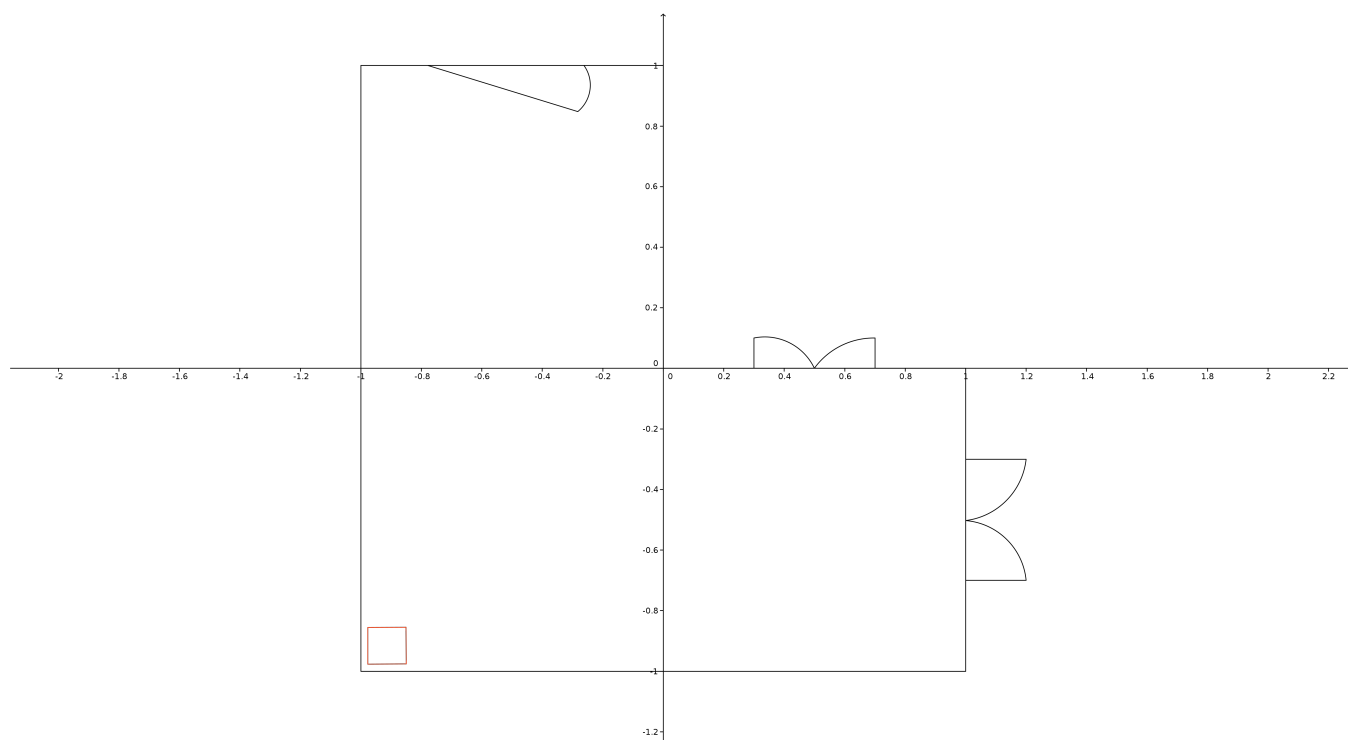


FIGURE 2 – Chambre 2

## 1 Température en été

Dans cette section, on se place dans les conditions suivantes :

$$T_{fenetre} = 20^{\circ}C \quad T_{porte} = 20^{\circ}C \quad T_{chauffage} = \emptyset$$

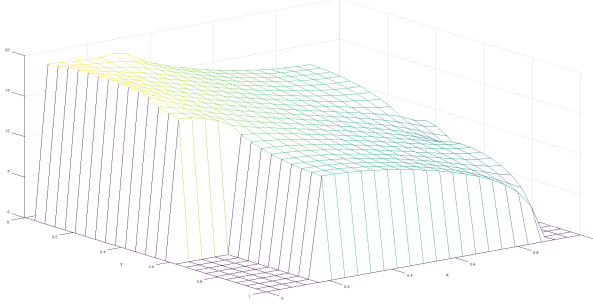


FIGURE 3 – Chambre 1  $|T_{moy} = 5.4^{\circ}C$

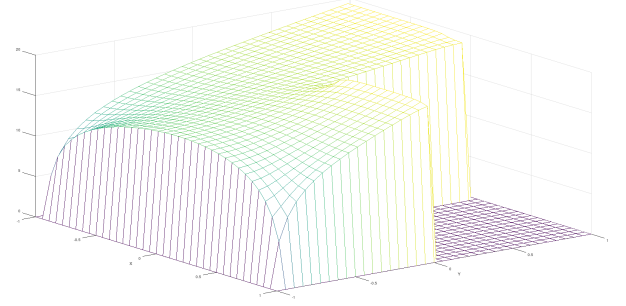


FIGURE 4 – Chambre 2  $|T_{moy} = 11.9^{\circ}C$

## 2 Température en hiver

Dans cette section, on se place dans les conditions suivantes :

$$T_{fenetre} = -10^{\circ}C \quad T_{porte} = 15^{\circ}C \quad T_{chauffage} = \emptyset$$

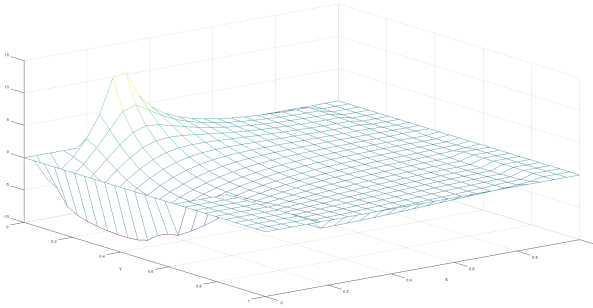


FIGURE 5 – Chambre 1  $|T_{moy} = 1.1^{\circ}C$

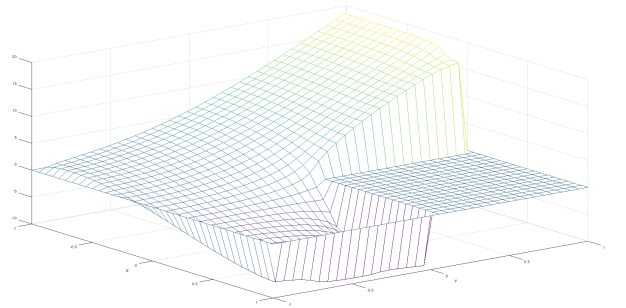


FIGURE 6 – Chambre 2  $|T_{moy} = 1.8^{\circ}C$

## 3 Température en hiver avec chauffage

Dans cette section, on se place dans les conditions suivantes avec cette fois-ci un chauffage :

$$T_{fenetre} = -10^{\circ}C \quad T_{porte} = 15^{\circ}C \quad T_{chauffage} = 1520; 1500$$

Pour la première chambre on obtient une température moyenne de  $17,3^{\circ}C$  alors que pour la deuxième on obtient  $T_{moy} = 16.7^{\circ}C$ .

On peut voir que la "puissance" des chauffages n'est pas la même alors que le volume des deux chambres est similaire alors qu'elles ont des caractéristiques proches (que l'on peut voir dans les deux applications précédentes). Cette différence peut être expliquée par les différentes tailles choisies pour les fenêtres, les portes et surtout la taille du chauffage.

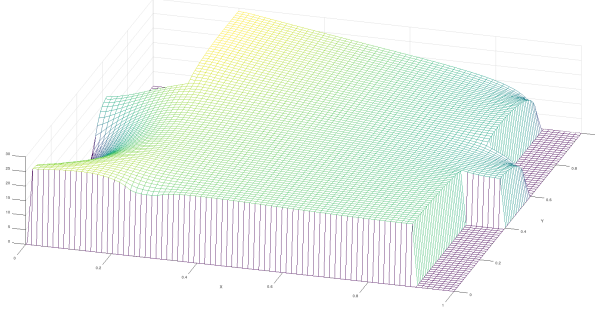


FIGURE 7 – Chambre 1 – Chauffage à 150

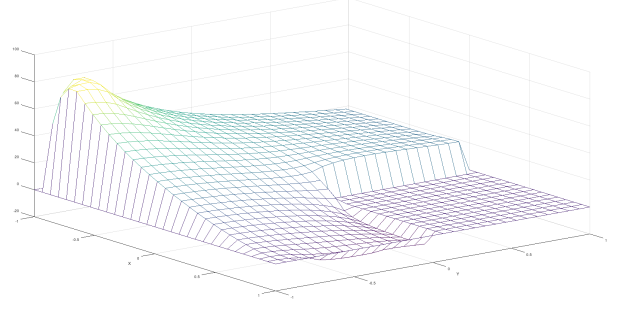


FIGURE 8 – Chambre 2 – Chauffage à 1500

## Partie 2 : Simulation instationnaire

Dans cette partie nous allons étudier l'équation de la chaleur avec sa discrétisation par les méthodes d'Euler explicite et Euler implicite. Par soucis de simplicité visuelle du rapport, nous avons décidé de ne présenter que les exemples basés sur la deuxième chambre (les calculs sont exactement les mêmes qu'avec la première chambre, la présentation de celle-ci est simplement redondante).

### 1 Stabilité

On trouve que la condition de stabilité est donnée par :

$$\frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta y^2} \leq \frac{1}{2}$$

En posant  $h^2 = \Delta x^2 = \Delta y^2$  :

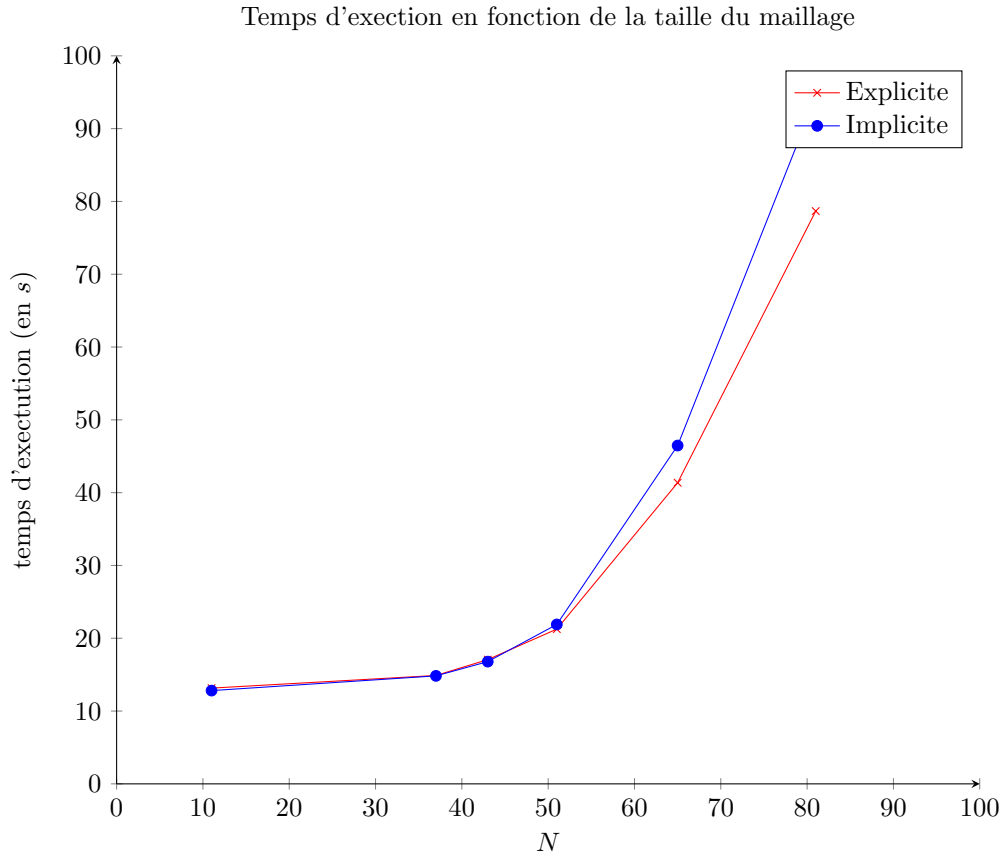
$$\frac{\nu \Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{4}$$

soit :

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{4\nu}$$

En posant  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  ; on peut écrire  $\Delta t = \frac{\alpha h^2}{2\nu}$

## 2 Analyse de vitesse d'exécution entre les schémas explicite et implicite



On voit qu'en terme de temps de calcul, les deux méthodes sont similaires pour des  $N$  petits (*i.e* une grille grande ou grossière). Mais on observe sur le graphique pour une grille plus fine (*i.e*  $N$  grand), une tendance à une meilleure efficacité pour la méthode explicite mais cette différence n'est pas significative d'une efficacité accrue en comparaison de la méthode implicite. Pour autant cette différence peut aussi s'expliquer par l'utilisation d'un "garde fou" avec  $T_{max}$  qui représente le temps maximum acceptable pour le calcul (pour éviter la problématique d'une boucle temporelle non raisonnable).

### 3 Test 1

La pièce est initialement froide ( $T_{ini} = T_{ext} = -10$ ) et on allume le chauffage.

On utilise les paramètres suivants :

$n$	$T_{ext}$	$T_{porte}$	puissance chauffage
18	-10	-10	2000

Pour  $\nu = 1$  et  $\alpha = 0,5$ , sachant que  $\Delta t = \frac{\alpha h^2}{2\nu}$ , on obtient :

$$\Delta t = 0,000771 \dots$$

Pour obtenir une chambre à  $18^\circ C$  il faut 1305 itérations pour avoir  $18^\circ C$  en moyenne dans la chambre.

### 4 Test 2

$n$	$T_{ext}$	$T_{porte}$	puissance chauffage
18	35	35	-500

Pour cette expérience, pour atteindre une température  $T_{moy} = 25^\circ C$ , il faut 922 itérations.

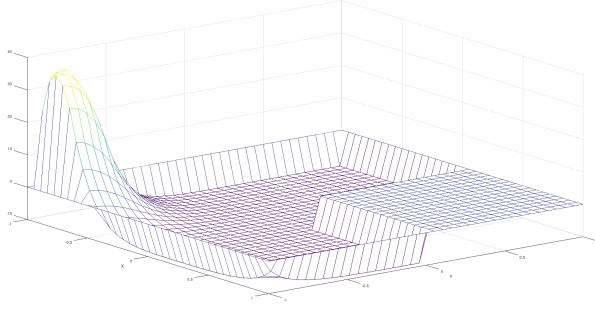


FIGURE 9 – Début de la simulation

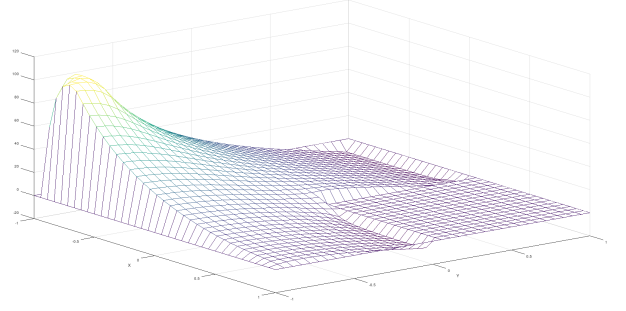


FIGURE 10 – Fin de la simulation

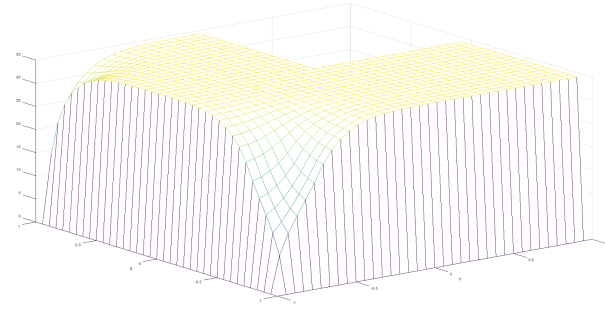


FIGURE 11 – Début de la simulation

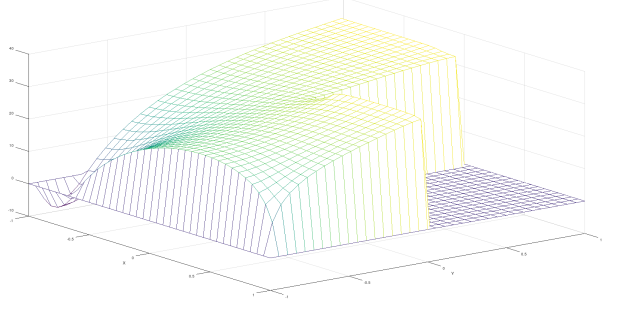


FIGURE 12 – Fin de la simulation

## 5 Calculs du theta schéma

Dans cette partie, on souhaite regarder (à titre de comparaison) le schéma Crank-Nicolson. Pour se faire, nous basons nos calculs sur le téta-schéma.

Euler explicite donne en multipliant par  $\theta$  :

$$\theta b_i = \theta \left( \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j+1,k}^n}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k+1}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{(\Delta y)^2} \right)$$

Euler implicite donne en multipliant par  $1 - \theta$  :

$$(1 - \theta)b_i = (1 - \theta) \left( \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j+1,k}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k+1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right)$$

En additionnant les deux premières équations, on a le système matriciel équivalent :

$$\begin{aligned} \theta U^{n+1} &= \theta(I + \nu \Delta t A)U^n + \theta B \\ (1 - \theta)(I - \nu \Delta t A)U^{n+1} &= (1 - \theta)U^n + (1 - \theta)B \end{aligned}$$

Qui donne :

$$(I - (1 - \theta)\nu \Delta t A)U^{n+1} = (I + \theta \Delta t \nu A)U^n + B$$

avec  $b$  qui est le second membre et  $B = \Delta t b$

On utilisera cette équation matricielle pour implémenter le theta schéma sur la chambre 2.

### Remarques/Améliorations :

1. A chaque utilisation de la commande "\" de matlab, on aurait pu utiliser les méthodes prédéfinies du pivot de Gauss sur Matlab, afin d'optimiser le temps d'exécution des algorithmes.
2. On aurait pu essayer d'implémenter encore d'autres méthodes.