Chapitre 2

METHODE DES DIFFERENCES FINIES

2.1 Introduction

2.2 Différences finies pour l'équation de la chaleur

Exercice 2.2.1 Montrer que le schéma (**2.6**) n'est rien d'autre que le θ-schéma avec $\theta = 1/2 - (\Delta x)^2/12\nu\Delta t$.

Correction. Trivial.

Exercice 2.2.2 Pour chacun des schémas de la Sous-section **2.2.1**, vérifier que l'erreur de troncature est bien du type annoncé dans le Tableau **2.1**. (On remarquera que tous ces schémas sont consistants sauf celui de DuFort-Frankel.)

Correction. Le calcul de l'erreur de troncature d'un schéma est souvent délicat à mener. Si on ne procède pas de manière soignée et méthodique, on peut aisément se retrouver englué dans un calcul inextricable, dont le coût croît exponentiellement en fonction de l'ordre à déterminer. Quelques régles simples permettent en général d'éviter ce travers. L'erreur de troncature se calcule en développant tous les termes du schéma au même point à l'aide des formules de Taylor. Le point choisi n'a évidemment aucune influence sur le résultat obtenu (l'ordre du schéma ne dépend pas du point considéré). Par contre, ce choix influt sur la taille du calcul qui en résulte. Il est recommandé de diviser le calcul en plusieurs étapes. Les développements calculés lors d'une étape pouvant être réutilisé à une autre. Il faut absolument utiliser l'équation vérifiée par la solution (par exemple remplacer les dérivées en temps par des dérivées en espace). Cela simplifie considérablement les calculs, et nous permet de déterminer l'ordre optimal du schéma. Enfin, il faut éviter à tout prix d'effectuer des calculs inutiles et ne pas manipuler des termes d'ordre non significatifs. Enfin, un petit truc classique consiste à utiliser les symétries du schéma, qui peuvent impliquer que les termes non nul du développement sont nécessairement soit paires, soit impaires.

Les schémas explicite, implicite et de Crank-Nicholson ne sont que des cas particulier du θ-schéma. Ce dernier possède des termes communs avec le schéma à 6 points dont nous donnons le développement ci-dessous. Le schéma d'ordre le plus élevé étant le schéma à 6 points, d'ordre 2 en temps et 4 en espace, on peut donc négliger les termes en $\mathrm{o}((\Delta x)^4)$ et $\mathrm{o}((\Delta t)^2)$. On effectue nos développement au point (t_n, x_j) (un autre choix raisonnable consisterait à effectuer les développements au point $(t_n + \Delta t/2, x_j)$). Par développement de Taylor, puis en utilisant le fait que u est solution de l'équation de la chaleur, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} = \\
&\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)(t_n, x_j) + \mathrm{o}((\Delta t)^2) \\
&\qquad = \left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu^2\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \nu^3\frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n, x_j) + \mathrm{o}((\Delta t)^2).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_n, x_{j-1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j+1})}{(\Delta x)^2} = \\
&\qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{(\Delta x)^4}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n, x_j) + \mathrm{o}((\Delta x)^4).
\end{aligned}$$

En remplaçant n par $n+1$ dans l'expression précédente, on obtient suite à un développement en (t_n, x_j) que

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1}, x_{j-1}) - 2u(t_{n+1}, x_j) + u(t_{n+1}, x_{j+1})}{(\Delta x)^2} = \\
&\qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{(\Delta x)^4}{6!}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n, x_j) \\
&\qquad + \Delta t\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^4}\right)(t_n, x_j) \\
&\qquad + \frac{(\Delta t)^2}{2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}\right)(t_n, x_j) + \mathrm{o}((\Delta x)^4 + (\Delta t)^2)
\end{aligned}$$

De l'équation $\partial u/\partial t = \nu\partial^2 u/\partial x^2$, il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1}, x_{j-1} - 2u(t_{n+1}, x_j) + u(t_{n+1}, x_{j+1})}{(\Delta x)^2} = \\
&\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{(\Delta x)^2}{12} + \nu\Delta t\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left(2\frac{(\Delta x)^4}{6!} + \frac{\nu(\Delta t)(\Delta x)^2}{12} + \frac{\nu^2(\Delta t)^2}{2}\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n, x_j) \\
&\qquad + \mathrm{o}((\Delta x)^4 + (\Delta t)^2)
\end{aligned}$$

1. Consistance des schémas explicite, implicite, θ-schéma et Crank-Nicholson.

Par combinaison linéaire, des développements calculés précédemment,

$$\begin{aligned}\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t} &+ \theta\nu\frac{-u(t_{n+1},x_{j-1})+2u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n+1},x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\ &+ (1-\theta)\nu\frac{-u(t_n,x_{j-1})+2u(t_n,x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\ &= (1-\theta-(1-\theta))\,\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ &+\left(\frac{\nu\Delta t}{2}-\theta\left(\frac{(\Delta x)^2}{12}+\nu\Delta t\right)-(1-\theta)\frac{(\Delta x)^2}{12}\right)\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\\ &+\left(\frac{1}{6}-\frac{\theta}{2}\right)(\Delta t)^2\nu^3\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\mathrm{o}((\Delta t)^2+(\Delta x)^2).\end{aligned}$$

Après simplification,

$$\begin{aligned}\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t} &+ \theta\nu\frac{-u(t_{n+1},x_{j-1})+2u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n+1},x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\ &+ (1-\theta)\nu\frac{-u(t_n,x_{j-1})+2u(t_n,x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\ =\left(\left(\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\nu\Delta t-\frac{(\Delta x)^2}{12}\right)\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right.&\left.+\left(\frac{1}{6}-\frac{\theta}{2}\right)(\Delta t)^2\nu^3\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n,x_j)\\ &+\mathrm{o}((\Delta t)^2+(\Delta x)^2).\end{aligned}$$

Ainsi pour le $\theta \neq 1/2$ (en particulier pour les schémas explicite et implicite), le θ-schéma est d'ordre un en temps et deux en espace, tandis que le schéma de Crank-Nicholson est d'ordre deux en temps et en espace.

2. Consistance du schéma à 6 points.

Il nous reste à considérer le terme

$$\frac{u(t_{n+1},x_{j+1})-u(t_n,x_{j+1})}{\Delta t}+\frac{u(t_{n+1},x_{j-1})-u(t_n,x_{j-1})}{\Delta t}$$

D'après le développement effectué au début de l'exercice, puis en développant le résultat obtenu en (t_n,x_j), on a

$$\begin{aligned}\frac{u(t_{n+1},x_{j+1})-u(t_n,x_{j+1})}{\Delta t}&+\frac{u(t_{n+1},x_{j-1})-u(t_n,x_{j-1})}{\Delta t}\\ &=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\nu\Delta t}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\nu^2(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n,x_{j+1})\\ &+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\nu\Delta t}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\nu^2(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n,x_{j-1})+\mathrm{o}((\Delta t)^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\left(2\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\nu\Delta t}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\nu^2(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)+\nu(\Delta x)^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\nu\Delta t}{2}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)\right.\\ \left.+\frac{\nu(\Delta x)^4}{12}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)(t_n,x_j)+\mathrm{o}((\Delta t)^2+(\Delta x)^4)\end{aligned}$$

Soit,

$$\begin{aligned}&\frac{u(t_{n+1},x_{j+1})-u(t_n,x_{j+1})}{\Delta t}+\frac{u(t_{n+1},x_{j-1})-u(t_n,x_{j-1})}{\Delta t}\\&\quad=2\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\nu^2\Delta t+\nu(\Delta x)^2\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\left(\frac{\nu^3(\Delta t)^2}{3}+\frac{\nu^2\Delta t(\Delta x)^2}{2}+\frac{\nu(\Delta x)^4}{12}\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\\&\qquad+\mathrm{o}((\Delta t)^2+(\Delta x)^4)\end{aligned}$$

Par combinaison linéaire avec les autres développements effectués, on obtient (après simplification)

$$\begin{aligned}&\frac{u(t_{n+1},x_{j+1})-u(t_n,x_{j+1})}{12\Delta t}+\frac{5(u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j))}{6\Delta t}+\frac{u(t_{n+1},x_{j-1})-u(t_n,x_{j-1})}{12\Delta t}\\&-\nu\frac{u(t_{n+1},x_{j-1})-2u(t_{n+1},x_j)+u(t_{n+1},x_{j+1})}{2(\Delta x)^2}-\nu\frac{u(t_n,x_{j-1})-2u(t_n,x_j)+u(t_n,x_{j+1})}{2(\Delta x)^2}\\&\qquad=\left(\frac{3}{6!}\nu(\Delta x)^4-\frac{\nu^3}{12}(\Delta t)^2\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\mathrm{o}((\Delta x)^4+(\Delta t)^2).\end{aligned}$$

Le schéma à 6 points est donc d'ordre 4 en espace et 2 en temps.
3. Consistance du schéma de DuFort-Frankel **(2.7), p.31**

$$\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n-1},x_j)}{2\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{o}\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{-u(t_n,x_{j-1})+u(t_{n+1},x_j)+u(t_{n-1},x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\&=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\mathrm{o}\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2+(\Delta x)^2\right)\end{aligned}$$

En combinant ces deux expressions, on en déduit que si u est solution de l'équation de la chaleur,

$$\begin{aligned}&\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n-1},x_j)}{2\Delta t}\\&+\nu\frac{-u(t_n,x_{j-1})+u(t_{n+1},x_j)+u(t_{n-1},x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\&=\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2-\frac{(\Delta x)^2}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\mathrm{o}\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2+(\Delta x)^2\right)\end{aligned}$$

Le schéma est d'ordre $\mathcal{O}((\Delta t/\Delta x)^2+(\Delta x)^2)$.
4. Consistance du schéma de Gear **(2.8), p.31**

$$\begin{aligned}&3u(t_{n+1},x_j)-4u(t_n,x_j)+u(t_{n-1},x_j)\\&\qquad=2(\Delta t)\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{2}{3}(\Delta t)^3\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_{n+1},x_j)+\mathcal{O}((\Delta t)^4)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&-u(t_{n+1},x_{j-1})+3u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n+1},x_{j+1})\\&\qquad=-\,(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{(\Delta x)^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\mathcal{O}((\Delta x)^6).\end{aligned}$$

En appliquant ces deux développements de Taylor à la solution u de l'équation des ondes, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{3u(t_{n+1},x_j)-4u(t_n,x_j)+u(t_{n-1},x_j)}{(\Delta x)^2}\\&+\nu\frac{-u(t_{n+1},x_{j-1})+3u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n+1},x_{j+1})}{2\Delta t}\\&=-\frac{\nu(\Delta x)^2}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{(\Delta t)^2}{3}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\mathcal{O}((\Delta t)^3+(\Delta x)^3)\end{aligned}$$

Le schéma de Gear est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

Exercice 2.2.3 Montrer que le schéma de Crank-Nicholson (**2.5**) (avec $\theta=1/2$) est stable en norme L^∞ si $\nu\Delta t\le(\Delta x)^2$, et que le schéma de DuFort-Frankel (**2.7**) est stable en norme L^∞ si $2\nu\Delta t\le(\Delta x)^2$

Correction. Le schéma de Crank-Nicholson est défini de manière implicite par

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\nu\frac{-u_{j-1}^{n+1}+2u_j^{n+1}-u_{j+1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2}+\nu\frac{-u_{j-1}^n+2u_j^n-u_{j+1}^n}{2(\Delta x)^2}=0, \tag{2.1}$$

$$u_0^{n+1}=u_{N+1}^{n+1}=0. \tag{2.2}$$

On va montrer que sous une condition CFL appropriée, ce schéma vérifie le principe du maximum discret.

Soit k et l tels que

$$u_k^{n+1}=M=\max_j u_j^{n+1} \text{ et } u_l^{n+1}=m=\min_j u^{n+1}.$$

Notons que M est positif ou nul et m négatif ou nul. On va montrer que

$$M\le\max(0,\max_j u_j^n) \tag{2.3}$$

$$\text{et } \min(0,\min_j u_j^n)\le m. \tag{2.4}$$

Dans un premier temps, on considère l'inégalité (2.3). Cette dernière est trivialement vérifiée si $M\neq 0$. On peut donc se restreindre au cas $M\neq 0$. Le maximum de u_j^{n+1} pour tout $j\in\{0,\cdots,N+1\}$ est atteint en un élément $k\in\{1,\cdots,N\}$ et d'après (2.1),

$$\frac{M-u_k^n}{\Delta t}+\nu\frac{-u_{k-1}^n+2u_k^n-u_{k+1}^n}{2(\Delta x)^2}\le 0,$$

soit

$$M\le\left(1-\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)u_k^n+\frac{\nu\Delta t}{2(\Delta x)^2}(u_{k-1}^n+u_{k+1}^n).$$

Si

$$\nu \Delta t \leq (\Delta x)^2, \tag{2.5}$$

le terme de droite est une combinaison convexe des coordonnées de u^n, et le premier point de (2.3) est vérifié. La minoration de m s'en déduit en remplaçant u^n par $-u^n$ et M par $-m$. Si la condition CFL (2.5) est vérifiée, le schéma de Crank-Nicholson vérifie le principe du maximum discret. En conséquence, il est stable pour la norme L^∞.

Le schéma de DuFort-Frankel **(2.7), p.31** est défini par

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{\nu}{(\Delta x)^2}\right) u_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{\nu}{(\Delta x)^2}\right) u_j^{n-1} + \frac{\nu}{(\Delta x)^2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)$$

Si $2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$, u_j^{n+1} est une combinaison convexe de u_j^{n-1}, u_{j-1}^n et u_{j+1}^n. Ainsi, il est stable pour la norme L^∞, c'est a dire

$$\|u^n\|_\infty \leq \max\left(\|u^0\|_\infty, \|u^1\|_\infty\right).$$

Finalement, on peut remarquer que la différence de traitement des deux schémas est due leur nature : implicite pour le schéma de Crank-Nicholson, explicite pour le schéma de DuFort-Frankel.

Exercice 2.2.4 Montrer que le θ-schéma **(2.5)** est stable en norme L^2 inconditionnellement si $1/2 \leq \theta \leq 1$, et sous la condition CFL $2(1-2\theta)\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$ si $0 \leq \theta < 1/2$.

Correction. Étudions la stabilité en norme L^2 du θ-schéma. Par application de la transformation de Fourier, il vient

$$\left(1 + \frac{2\theta\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1 - \cos(2k\pi\Delta x))\right)\hat{u}^{n+1}(k) =$$
$$\left(1 + \frac{2(\theta-1)\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1 - \cos(2k\pi\Delta x))\right)\hat{u}^n(k).$$

Ainsi, le schéma sera stable en norme L^2 dès que

$$\left|1 + \frac{2(\theta-1)\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1 - \cos(2k\pi\Delta x))\right| \leq \left|1 + \frac{2\theta\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1 - \cos(2k\pi\Delta x))\right|$$

pour tout k, c'est à dire

$$\left|1 - \frac{4\nu\Delta t \sin^2(k\pi\Delta x)}{(\Delta x)^2 + 4\theta\nu\Delta t \sin^2(k\pi\Delta x)}\right| \leq 1$$

ou encore

$$0 \leq \frac{4\nu\Delta t \sin^2(k\pi\Delta x)}{(\Delta x)^2 + 4\theta\nu\Delta t \sin^2(k\pi\Delta x)} \leq 2.$$

Comme θ est positif, cette condition est équivalente à

$$(\Delta x)^2 \geq 2(1-2\theta)\nu\Delta t \sin^2(k\pi\Delta x).$$

Cette dernière relation est vérifiée pour tout k dès que $(1-2\theta) \leq 0$ ou $(\Delta x)^2 \geq 2(1-2\theta)\nu\Delta t$.

Exercice 2.2.5 Montrer que le schéma à 6 points (**2.6**) est inconditionnellement stable en norme L^2.

Correction. Par transformation de Fourier appliquée au schéma à 6 points **(2.6), p.31**, on obtient

$$\left(\frac{\cos(2k\pi\Delta x)}{6\Delta t}+\frac{5}{6\Delta t}\right)(\hat{u}^{n+1}-\hat{u}^n)+\frac{\nu}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))(\hat{u}^{n+1}+\hat{u}^n)=0,$$

c'est à dire

$$\left(5+\cos(2k\pi\Delta x)+\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))\right)\hat{u}^{n+1}=\left(5+\cos(2k\pi\Delta x)-\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))\right)\hat{u}^n.$$

Le schéma est donc L^2-stable dès que

$$5+\cos(2k\pi\Delta x)+\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))\geq\left|5+\cos(2k\pi\Delta x)-\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))\right|.$$

Relation qui est trivialement vérifiée indépendamment de Δx et Δt.

Exercice 2.2.6 Montrer que le schéma de Gear (**2.8**) est inconditionnellement stable et donc convergent en norme L^2.

Correction. En appliquant la transformation de Fourier au schéma de Gear **(2.8), p.31**, on obtient

$$\left(3+c\sin^2(k\pi\Delta x)\right)\hat{u}^{n+1}=4\hat{u}^n-\hat{u}^{n-1}, \tag{2.6}$$

où $c=\frac{8\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}$. On introduit les polynômes (dépendants implicitement de k, Δt et Δx)

$$P(X)=(3+8c\sin^2(k\pi\Delta x))X^2-4X+1.$$

On note λ_1 et λ_2 les racines de P et $\Delta=(\lambda_2-\lambda_1)^2$ son discriminant. Les solutions de (2.6) s'expriment explicitement en fonction de $\hat{u}^0$ et $\hat{u}^1$:

$$\hat{u}^n=\begin{cases}\left(\frac{\lambda_2\lambda_1^n-\lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\hat{u}^0+\left(\frac{\lambda_2^n-\lambda_1^n}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\hat{u}^1 & \text{si } \Delta\neq 0,\\ (1-n)\lambda_1^n\hat{u}^0+n\lambda_1^{n-1}\hat{u}^1 & \text{si } \Delta=0.\end{cases}$$

Une condition nécessaire de stabilité est donc que $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2|$ soient au plus égaux à un. Dans ce cas, afin que le schéma soit stable, il suffit qu'il existe deux réels δ et β tels que pour tout k, Δx et Δt,

$$|\Delta(k,\Delta x,\Delta t)|\leq\delta\Longrightarrow\max(|\lambda_1(k,\Delta x,\Delta t)|,|\lambda_2(k,\Delta x,\Delta t)|)<\beta<1. \tag{2.7}$$

En effet, posons $C(\beta) = \max_n n\beta^{n-1}$. Comme $0 < \beta < 1$, $C(\beta) < +\infty$. De plus, si $|\Delta(k, \Delta x, \Delta t)| \geq \delta$,

$$\left|\frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}\right| \leq 2/\sqrt{\delta};$$

si $0 < |\Delta(k, \Delta x, \Delta t)| < \delta$,

$$\left|\frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_1^k \lambda_2^{n-1-k}\right| \leq n \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)^{n-1} \leq C(\beta);$$

et si $\Delta(k, \Delta x, \Delta t) = 0$, $n|\lambda_1|^{n-1} \leq C(\beta)$. De ces trois inégalités, on en déduit que

$$|\hat{u}^n(k)| < K(|\hat{u}^0 + \hat{u}^1|)$$

où $K = 1 + 3(C(\beta) + 2/\sqrt{\delta})$. Ainsi, $\|\hat{u}^n\|_{L^2} \leq K(\|u^0\|_{L^2} + \|u^1\|_{L^2})$.

Reste à prouver que la condition de stabilité (2.7) est en effet vérifiée. Tout d'abord, on vérifie que pour tout k, Δx et Δt, $|\lambda_1| \leq 1$ et $|\lambda_2| \leq 1$. Enfin, λ_1 et λ_2 sont des fonctions continues de Δ. Or si $\Delta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. Il existe donc δ et β, $1/2 < \beta < 1$ tels que la condition 2.7 est vérifiée.

Exercice 2.2.7 Montrer que le schéma de DuFort-Frankel (**2.7**) est inconditionnellement stable en norme L^2. Montrer que, si on fait tendre Δt et Δx vers 0 de telle manière que le rapport $\Delta t/\Delta x$ tende aussi vers 0, alors le schéma de DuFort-Frankel est convergent. (On dit qu'il est "conditionnellement" convergent.)

Correction. Par transformation de Fourier, on obtient que

$$\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^{n-1} + \frac{2\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(-2\hat{u}^n \cos(2k\pi\Delta x) + \hat{u}^{n+1} + \hat{u}^{n-1}) = 0.$$

Soit encore

$$(1 + c)\hat{u}^{n+1}(k) - 2c\cos(k\pi\Delta x)\hat{u}^n(k) - (1 - c)\hat{u}^{n-1}(k) = 0,$$

où

$$c = \frac{2(\Delta t)\nu}{(\Delta x)^2}.$$

Notons que dans le cas $c \leq 1$, on a prouvé précédemment la stabilité L^∞ du schéma de DuFort-Frankel. Cette dernière impliquant la stabilité L^2, nous n'avons plus qu'à étudier le cas $c > 1$. On procède comme pour l'exercice précédent. Considérons le polynôme

$$P(X) = (1 + c)X^2 - 2\beta\cos(k\pi\Delta x)X - (1 - c)$$

On vérifie sans mal que les racines de P sont de module inférieur ou égale à un. Enfin,

$$|\lambda_1|, |\lambda_2| \leq (1 + c)^{-1}\left(c|\cos(2k\pi\Delta x)| + |\Delta|^{1/2}/2\right).$$

Or $c^2\cos^2(2k\pi\Delta x) = \Delta/4 + \beta^2 - 1$. Ainsi,

$$|\lambda_1|, |\lambda_2| \leq (1 + c)^{-1}\left(|\Delta/4 + c^2 - 1|^{1/2} + |\Delta|^{1/2}/2\right).$$

Le terme de gauche est continue par rapport à Δ et c. De plus, pour $\Delta = 0$, il est égale à $(\frac{c-1}{c+1})^{1/2}$. Sous la condition CFL $c < M$, il existe γ tel que $(\frac{c-1}{c+1})^{1/2} < \gamma < 1$. Comme $[1, c] \times 0$ est un compact, il existe δ et ε tel que pour tout $1 \leq c \leq M$,

$$|\Delta| \leq \delta \Longrightarrow \left(|\Delta/4 + c^2 - 1|^{1/2} + |\Delta|^{1/2}/2\right) < \gamma + \varepsilon < 1.$$

La condition de stabilité (2.7) énoncée dans la correction de l'Exercice 2.2.5 est vérifiée. Le schéma est donc convergent pourvu que le rapport $\Delta t/(\Delta x)^2$ reste borné. Enfin, la stabilité combinée à la consistance implique la convergence.

Exercice 2.2.8 Montrer que le schéma explicite (**2.29**) est stable en norme L^∞ (et même qu'il vérifie le principe du maximum) sous la condition CFL

$$\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Correction. Le schéma explicite **(2.29), p.45** est défini par

$$u_{j,k}^{n+1} = \left(1 - 2\Big(\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta u)^2}\Big)\right)u_{j,k}^n$$
$$+ \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{j-1,k}^n + u_{j+1,k}^n) + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}(u_{j,k-1}^n + u_{j,k+1}^n)$$

Si

$$\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq 1/2,$$

$u_{j,k}^{n+1}$ est une combinaison convexe de coordonnées de u^n et

$$|u_{j,k}^{n+1}| \leq \|u^n\|_\infty.$$

Exercice 2.2.9 Montrer que le schéma de Peaceman-Rachford

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu\frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} + \nu\frac{-u_{j,k-1}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j,k+1}^n}{2(\Delta y)^2} = 0$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + \nu\frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} + \nu\frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{2(\Delta y)^2} = 0.$$

est précis d' ordre 2 en espace et temps et inconditionnellement stable en norme L^2 (pour des conditions aux limites de périodicité dans chaque direction).

Correction. 1. Consistance

En effectuant la soustraction des deux équations définissant le schéma de Peaceman-Rachford, on obtient l'expression de $u^{n+1/2}$ en fonction de u^n et u^{n+1}.

$$u_{j,k}^{n+1/2} = \frac{u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k}^n}{2} + \frac{\nu\Delta t}{4(\Delta y)^2}(u_{j,k-1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}).$$

En substituant l'expression de $u^{n+1/2}$ dans l'une des équations du schéma, on détermine la relation reliant u^{n+1} à u^n. On pourrait effectuer le calcul explicite de cette expression, puis établir la consistance. Cependant, cela constitue un calcul fastidieux qu'on peut éviter. On introduit donc la fonction intermédiaire

$$\begin{aligned} v_{\Delta t,\Delta x,\Delta y}(t,x,y) = \frac{u(t+\Delta t,x,y)+u(t,x,y)}{2} + \frac{\nu\Delta t}{4(\Delta y)^2} \\ \Big(u(t,x,y-\Delta y) - 2u(t,x,y) + u(t,x,y+\Delta y) \\ - u(t+\Delta t,x,y-\Delta y) + 2u(t+\Delta t,x,y) - u(t+\Delta t,x,y+\Delta y)\Big) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pour toute solution u de l'équation de l'équation de la chaleur, l'erreur de troncature est

$$\begin{aligned} E(u) =& \frac{v(t,x,y)-u(t,x,y)}{\Delta t} + \nu\frac{-v(t,x-\Delta x,y)+2v(t,x,y)-v(t,x+\Delta x,y)}{2(\Delta x)^2} \\ &+ \nu\frac{-u(t,x,y-\Delta y)+2u(t,x,y)-u(t,x,y+\Delta y)}{2(\Delta y)^2} \end{aligned}$$

où v est définit par 2.8. Par développement de Taylor, on établit que

$$\begin{aligned} & v_{\Delta t,\Delta x,\Delta y} \\ =& u + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial y^2}\right) + \frac{(\Delta t)^3}{24}\left(2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - 3\nu\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial y^2}\right) \\ &+ \mathrm{o}\left((\Delta t)^3 + (\Delta t)(\Delta y)^2\right) \end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned} E(u) =& \frac{v-u}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{(\Delta y)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + \mathrm{o}((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)) \\ =& \frac{\nu^3(\Delta t)^2}{24}\Delta\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} - \Delta^2 u\right) - \frac{\nu}{24}\left((\Delta x)^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (\Delta y)^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) \\ &+ \mathrm{o}((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta t)^2). \end{aligned}$$

L'erreur de troncature est d'ordre 2 en espace et en temps.
<u>2. étude de la stabilité L^2</u>

En appliquant la transformation de Fourier au schéma, on en déduit que

$$\hat{u}^{n+1/2} = \frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}\hat{u}^n$$

et

$$\hat{u}^{n+1} = \frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}\hat{u}^{n+1/2}.$$

Ainsi, $\hat{u}^{n+1}(k,l) = A(k,l)\hat{u}^n(k,l)$ où

$$A(k,l) = \frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)} \frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}.$$

Comme pour tout $x \geq 0$, $|(1-x)/(1+x)| \leq 1$, on a $|A(k,l)| \leq 1$. Le schéma est inconditionnellement stable en norme L^2.

Exercice 2.2.10 Montrer que le schéma de directions alternées (**2.31**) est précis d'ordre 2 en espace et temps et inconditionnellement stable en norme L^2 (pour des conditions aux limites de périodicité dans chaque direction).

Correction.

1. étude de la consistance

Le schéma se décompose en deux étapes

$$\left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}M_y\right)u^{n+1/2} - \left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} + \frac{\nu}{2}M_y\right)u^n = 0$$

et

$$\left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}M_x\right)u^{n+1} - \left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} + \frac{\nu}{2}M_x\right)u^{n+1/2} = 0,$$

où

$$(M_x v)_{j,k} = \frac{v_{j+1,k} - 2v_{j,k} + v^n_{j-1,k}}{(\Delta x)^2}$$

et

$$(M_y v)_{j,k} = \frac{v_{j,k+1} - 2v_{j,k} + v^n_{j,k-1}}{(\Delta y)^2}.$$

Afin d'appliquer la définition de la consistance donnée dasn le cours, il faut exhiber la relation reliant u^{n+1} à u^n. Il faut donc supprimer l'inconnue intermédiaire $u^{n+1/2}$ des équations définissant le schéma numérique. A cet effet, il suffit de multiplier la deuxième équation par $\left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}M_y\right)$ et de constater que cette matrice commute avec $\left(\frac{\mathrm{Id}}{\Delta t} + \frac{\nu}{2}M_x\right)$. On obtient ainsi

$$\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2}M_y\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2}M_x\right)u^{n+1} = \left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2}M_x\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2}M_y\right)u^{n+1/2}.$$

D'après la première équation du schéma, il vient

$$(\Delta t)^{-1}\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2}M_y\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2}M_x\right)u^{n+1} - (\Delta t)^{-1}\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2}M_x\right)\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2}M_y\right)u^n = 0.$$

Pour toute fonction v, on note $M_y(v)$ la fonction définie par

$$M_y(v)(t,x,y) = \frac{v(t,x,y+\Delta y) - 2v(t,x,y) + v(t,x,y-\Delta y)}{(\Delta y)^2}.$$

On définit de même la fonction $M_x(v)$ en échangeant les rôles respectifs de x et y. De plus, on note

$$\tau(t,x,y) = v(t+\Delta t, x, y).$$

En effectuant un développement de Taylor en (t,x,y), on montre que

$$M_y(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mathcal{O}((\Delta y)^2).$$

On en déduit que

$$(\Delta t)^{-1}\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2} M_y\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2} M_x\right)(\tau(v)) =$$
$$\tau\left(\frac{v}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}\Delta v + \frac{\nu^2\Delta t}{4}\frac{\partial^4 v}{\partial x^2}\partial y^2 + \mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2).\right)$$

De même,

$$(\Delta t)^{-1}\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2} M_x\right)\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2} M_y\right)(v) =$$
$$\frac{v}{\Delta t} + \frac{\nu}{2}\Delta v + \frac{\nu^2\Delta t}{4}\frac{\partial^4 v}{\partial x^2}\partial y^2 + \mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2).$$

Ainsi,

$$(\Delta t)^{-1}\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2} M_y\right)\left(\mathrm{Id} - \frac{\nu\Delta t}{2} M_x\right)(\tau(v)) - (\Delta t)^{-1}\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2} M_x\right)\left(\mathrm{Id} + \frac{\nu\Delta t}{2} M_y\right)(v) =$$
$$\frac{\tau(v) - v}{\Delta t} - \nu\Delta\left(\frac{\tau(v) + v}{2}\right) + \mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) =$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2),$$

d'où on déduit que le schéma est d'ordre 2 en espace et 1 en temps.

Remarque 2.2.1 *Le point essentiel sur lequel repose la démonstration de la consistance porte sur la propriété de commutation employée au début de la preuve.*

2. étude de la stabilité L^2

En appliquant la transformation de Fourier au schéma, on établit que

$$\hat{u}^{n+1/2} = \frac{1 - \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k\Delta x)}{1 + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k\Delta x)}\hat{u}^n$$

et

$$\hat{u}^{n+1} = \frac{1 - \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(\pi l\Delta y)}{1 + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(\pi l\Delta y)}\hat{u}^{n+1/2}.$$

Ainsi, $|\hat{u}^{n+1}| \leq |\hat{u}^{n+1/2}| \leq |\hat{u}^n|$ et le schéma est inconditionnellement stable L^2.

2.3 Autres modèles

Exercice 2.3.1 Montrer que le schéma implicite centré (**2.34**) est consistant avec l'équation d'advection (**2.32**), précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace, inconditionnellement stable en norme L^2, donc convergent.

Correction. La consistance et la précision ne posent pas de problèmes. Pour la stabilité L^2, l'analyse de Fourier conduit à

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left(1 + i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right)^{-1}\hat{u}^n(k) = A(k)\hat{u}^n(k).$$

On vérifie alors que le module du facteur d'amplification est toujours plus petit que 1

$$|A(k)|^2 = \left(1 + \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right)^2\right)^{-1} \leq 1,$$

donc le schéma est inconditionnellement stable. La convergence s'obtient alors par le Théorème de Lax **2.2.20, p.40**.

Exercice 2.3.2 Montrer que le schéma de Lax Wendroff est stable et convergent en norme L^2 si $|V|\Delta t \leq \Delta x$.

Correction. Il suffit de montrer la stabilité en norme L^2 afin d'en déduire la convergence par le théorème de Lax. En appliquant la transformation de Fourier au schéma de Lax-Wendroff **(2.37), p.51**, on obtient

$$\hat{u}^{n+1}(k) = A(k)\hat{u}^n(k)$$

où

$$A(k) = 1 - 2\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2(k\pi\Delta x) - i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2k\pi\Delta x)$$

Le schéma est stable en norme L^2 dès que $|A(k)| \leq 1$. On montre aisément que

$$|A(k)|^2 = 1 - 4\sin^2(k\pi\Delta x)\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(1 - \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right).$$

Ainsi, le schéma est stable et convergent dès que

$$\frac{|V|\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Exercice 2.3.3 Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs préserve le principe du maximum discret si la condition CFL $|V|\Delta t \leq \Delta x$ est satisfaite, tandis que le schéma de Lax-Wendroff ne le préserve pas sauf si $V\Delta t/\Delta x$ vaut $-1, 0,$ ou 1.

Correction. 1. Schéma de Lax-Friedrichs

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\right)u_{j+1}^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\right)u_{j-1}^n.$$

Ainsi, u_j^{n+1} est une combinaison linéaire convexes de u_{j+1}^n et u_j^n dès que $|V|\Delta t \leq \Delta x$. Sous cette condition, le schéma vérifie le principe du maximum discret.
2. Schéma de Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x} - 1\right)u_{j+1}^n + \left(1 - \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)u_j^n + \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x} + 1\right)u_{j-1}^n.$$

Le schéma préserve le principe du maximum discret, ssi chacun des coefficients apparaissant dans le terme de droite sont positifs, c'est à dire ssi $V\Delta t/\Delta x = -1$, 0 ou 1.

Exercice 2.3.4 Montrer que le schéma de Lax-Wendroff (**2.37**) est le seul schéma précis à l'ordre 2 en espace et temps qui soit du type

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n,$$

où α, β, γ dépendent seulement de $V\Delta t/\Delta x$.

Correction. L'erreur de troncature est

$$E = (\Delta t)^{-1}\left(u(x_j, t_{n+1}) - \alpha u(x_{j-1}, t_n) - \beta u(t_n, x_j) - \gamma u(t_n, x_{j+1})\right).$$

En effectuant un développement de Taylor en (x_j, t_n), on montre que

$$\begin{aligned} E = (\Delta t)^{-1}\left(1 - (\alpha + \beta + \gamma)\right)u + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta x}{\Delta t}(\alpha - \gamma)\frac{\partial u}{\partial x} \\ + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\alpha + \gamma}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 + \frac{|\alpha - \gamma|}{c}(\Delta x)^2\right). \end{aligned}$$

Si u est solution de l'équation d'advection,

$$\partial u/\partial t = -V\partial u/\partial x \text{ et } \partial^2 u/\partial t^2 = V^2\partial^2 u/\partial x^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E = (\Delta t)^{-1}\left(1 - (\alpha + \beta + \gamma)\right)u - \frac{\Delta x}{\Delta t}\left(c - (\alpha - \gamma)\right)\frac{\partial u}{\partial x} \\ + \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\left(c^2 - (\alpha + \gamma)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2\left(1 + \frac{|\alpha - \gamma|}{c^3}\right)\right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

où $c = V\Delta t/\Delta x$. Si le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace, on doit avoir

$$\begin{aligned} 1 - (\alpha + \beta + \gamma) &= \mathcal{O}\left((\Delta t)^3\left(1 + \frac{|\alpha - \gamma|}{c^3}\right)\right), \\ c - \alpha + \gamma &= \mathcal{O}\left(c(\Delta t)^2\left(1 + \frac{|\alpha - \gamma|}{c^3}\right)\right), \\ c^2 - (\alpha + \gamma) &= \mathcal{O}\left(c^2(\Delta t)\left(1 + \frac{|\alpha - \gamma|}{c^3}\right)\right). \end{aligned}$$

En faisant tendre vers zéro Δt et Δx à c constant, on obtient le système linéaire suivant

$$\begin{aligned} 1-(\alpha+\beta+\gamma) &= 0 \\ c-\alpha+\gamma &= 0 \\ c^2-(\alpha+\gamma) &= 0. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} \alpha &= c(1+c)/2 \\ \beta &= 1-c^2 \\ \gamma &= c(c-1)/2. \end{aligned}$$

Enfin, comme $\alpha-\gamma=\mathcal{O}(c)$, d'après 2.9, le schéma est en effet au moins d'ordre 2 en espace et en temps.

Exercice 2.3.5 Montrer que le schéma explicite décentré amont (**2.38**) est consistant avec l'équation d'advection (**2.32**), précis à l'ordre 1 en espace et temps, stable et convergent en norme L^2 si la condition CFL $|V|\Delta t \leq \Delta x$ est satisfaite.

Correction. La consistance d'ordre 1 en temps et en espace est aisée à établir. En effet, dans le cas $V>0$,

$$\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t}+V\frac{u(t_n,x_j)-u(t_n,x_{j-1})}{\Delta x} \\ = (u_t+Vu_x)(t_n,x_j)+\mathcal{O}(\Delta t+\Delta x).$$

Le cas $V<0$ est identique. Enfin, la stabilité L^2 se déduit de la stabilité L^∞.

Exercice 2.3.6 Montrer que l'équation équivalente du schéma décentré amont (**2.38**) est

$$\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{|V|}{2}\left(\Delta x-|V|\Delta t\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

Correction. Considérons le cas $V>0$. L'erreur de troncature du schéma décentré amont **(2.38), p.52** est

$$E=\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{V\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathcal{O}((\Delta t)^2+(\Delta x)^2).$$

Soit u tel que l'erreur de troncature du schéma décentré soit d'ordre 2 en espace et en temps, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathcal{O}(\Delta t+\Delta x).$$

Ainsi, l'erreur de troncature pour u est égale à

$$\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{V}{2}(V\Delta t-\Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathcal{O}((\Delta t)^2+(\Delta x)^2).$$

L'équation équivalente dans le cas $V > 0$ est donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V}{2}(V\Delta t - \Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Il suffit de substituer Δx par $-\Delta x$ pour obtenir l'équation équivalente dans le cas $V < 0$. Enfin, on peut résumer ces deux résultats par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{|V|}{2}(\Delta x - |V|\Delta t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

valable dans les deux cas.

Exercice 2.3.7 Montrer que l'équation équivalente du schéma de Lax-Wendroff (**2.37**) est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V(\Delta x)^2}{6}\left(1 - \frac{(V\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Correction. L'erreur de troncature dans le cas du schéma de Lax-Wendroff **(2.37), p.51** est

$$E(u) = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} + V\frac{u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})}{2\Delta x} - \left(\frac{V^2\Delta t}{2}\right)\frac{u(t_n, x_{j-1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j+1})}{(\Delta x)^2}.$$

En effectuant un développement de Taylor en (t_n, x_j), on montre que

$$E(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{V(\Delta x)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^3 + (\Delta t)^3). \quad (2.10)$$

Soit u tel que $E(u)$ soit d'ordre 3 en espace et en temps, on montre que dans ce cas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$$

De plus, $\partial^3 u/\partial t^3 = -V^3\partial^3 u/\partial^3 x + \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x)$. En substituant ces expressions dans l'équation 2.10, on obtient l'équation équivalente attendue :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V(\Delta x)^2}{6}\left(1 - V^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mathcal{O}((\Delta x)^3 + (\Delta t)^3).$$

Exercice 2.3.8 Soit l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0,x) = \sin(\omega x + \phi) \text{ pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $V, \nu, \mu, \omega, \phi \in \mathbb{R}$. Montrer que sa solution est

$$u(t,x) = \exp(-\nu\omega^2 t)\sin\big(\omega(x-(V+\mu\omega^2)t)+\phi\big)$$

(on admettra son unicité). En déduire que la diffusion atténue l'amplitude de la solution, tandis que la dispersion modifie la vitesse de propagation.

Correction. On vérifie aisément que

$$u(t,x) = \exp(-\nu\omega^2 t)\sin(\omega(x-(V+\mu\omega^2)t)+\phi)$$

est solution de l'équation donnée. L'atténuation de l'amplitude est $\exp(-\nu\omega^2 t)$. Elle est donc d'autant plus forte que le terme de diffusion ν est important par rapport à ω^{-2}. La vitesse de propagation de l'onde est $(V+\mu\omega^2)$ et dépend donc du terme de dispersion μ.

Exercice 2.3.9 On définit le schéma "saute-mouton" (leapfrog, en anglais)

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

Étudier la consistance et l'erreur de troncature de ce schéma. Montrer par analyse de Fourier qu'il est stable sous la condition CFL $|V|\Delta t \leq M\Delta x$ avec $M<1$.

Correction.
1. étude de la consistance

Par développement de Taylor en (t_n, x_j) on a

$$\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n-1},x_j)}{2\Delta t} + V\frac{u(t_n,x_{j+1})-u(t_n,x_{j-1})}{2\Delta x} =$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta t)^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + V\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + (\Delta x)^3).$$

Si u est solution de l'équation d'advection, l'erreur de troncature est donc

$$E = \frac{1}{12}\left((\Delta x)^2 - (\Delta t)^2 V^3\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Ainsi, le schéma saute-mouton est consistant, d'ordre 2 en espace et en temps.
2. Stabilité L^2

Par transformation de Fourier, on obtient

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \hat{u}^{n-1} - i2c\sin(2\pi k\Delta x)\hat{u}^n(k). \tag{2.11}$$

où $c = \frac{V\Delta t}{\Delta x}$. On introduit les polynômes (dépendants implicitement de k, Δt et Δx)

$$P(X) = X^2 + i2c\sin(2\pi k\Delta x)X - 1.$$

On note λ_1 et λ_2 les racines de P et $\Delta = 4(1-c^2\sin^2(2k\pi\Delta x))$ son discriminant. Les solutions de 2.11 s'expriment explicitement en fonction de $\hat{u}^0$ et $\hat{u}^1$:

$$\hat{u}^n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_2\lambda_1^n - \lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\hat{u}^0 + \left(\frac{\lambda_2^n-\lambda_1^n}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\hat{u}^1 & \text{si } \Delta \neq 0, \\ (1-n)\lambda_1^n\hat{u}^0 + n\lambda_1^{n-1}\hat{u}^1 & \text{si } \Delta = 0. \end{cases}$$

Si $c > 1$, le module de la somme des deux racines est égale à $2c > 2$. Le module de l'une des deux racines est plus grand que un et le schéma est instable. Si $c = 1$, on peut avoir $\Delta = 0$ pour certaines valeurs de k et Δx. Dans ce cas, $\lambda_1 = \lambda_2 = i$ et

$$\hat{u}^n = (n\hat{u}^1 + i(n-1)\hat{u}^0)i^{n-1}.$$

Le schéma est instable.

Considérons le cas où c est majoré par une constante $M < 1$. Dans ce cas, les racines de P sont de même module

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.$$

De plus, $|\lambda_1 - \lambda_2| = \sqrt{\Delta} > 2\sqrt{1-M^2} > 0$. On déduit de l'expression explicite de $\hat{u}^n$ en fonction de $\hat{u}^0$ et $\hat{u}^1$ que

$$|\hat{u}^n| \leq \frac{|\hat{u}^0| + |\hat{u}^1|}{\sqrt{1-M^2}}.$$

Ainsi, sous la condition CFL $V\Delta t/\Delta x < M < 1$, le schéma saute mouton est stable L^2.

Exercice 2.3.10 On définit le schéma de Crank-Nicholson

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4\Delta x} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4\Delta x} = 0.$$

Étudier la consistance et l'erreur de troncature de ce schéma. Montrer par analyse de Fourier qu'il est inconditionnellement stable.

Correction.

1. Consistance

Par développement de Taylor en (t_n, x_n), on montre que

$$\begin{aligned}
\frac{u(t_{n+1},x_j) - u(t_n,x_j)}{\Delta t} &+ V\frac{u(t_{n+1},x_{j+1}) - u(t_{n+1},x_{j-1})}{4\Delta x} \\
&+ V\frac{u(t_n,x_{j+1}) - u(t_n,x_{j-1})}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t^2} + V\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right) \\
&+ \frac{(\Delta t)^2}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{V}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\right) \\
&+ \frac{(\Delta x)^2 V}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + (\Delta x)^3).
\end{aligned}$$

Ainsi, si u est solution de l'équation d'advection,n l'erreur de troncature est

$$E(u) = \frac{V}{12}\left(2(\Delta x)^2 - V^2(\Delta t)^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + (\Delta x)^3).$$

Le schéma de Crank-Nicholson est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

2. Stabilité L^2

Par transformation de Fourier, on établit que

$$\hat{u}^{n+1}\left(1+\frac{iV\Delta t}{2\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right)=\hat{u}^{n}\left(1-\frac{iV\Delta t}{2\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right).$$

Ainsi, $|\hat{u}^{n+1}|=|\hat{u}^n|$. Le schéma est donc inconditionnellement stable en norme L^2.

Exercice 2.3.11 Finir la démonstration du Lemme **2.3.6** en calculant $A(k)^n$, et montrer la stabilité du schéma sous condition CFL grâce à (**2.41**).

Correction. On utilise l'analyse de Fourier pour obtenir

$$\hat{U}^{n+1}(k)=\begin{pmatrix}\hat{u}^{n+1}(k)\\ \hat{u}^{n}(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2-(1-2\theta)\alpha(k)}{1+\theta\alpha(k)} & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\hat{U}^n(k)=A(k)\hat{U}^n(k),$$

où

$$\alpha(k)=4\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2(\pi k\Delta x)$$

Ainsi, $\hat{U}^{n+1}(k)=A(k)^n\hat{U}^0(k)$. Les valeurs propres de la matrice $A(k)$ sont les racines du polynôme

$$\lambda^2-\frac{2-(1-2\theta)\alpha(k)}{1+\theta\alpha(k)}\lambda+1=0, \tag{2.12}$$

dont le discriminant est

$$\Delta(k)=-\frac{\alpha(k)}{(1+\theta\alpha(k))^2}\left(4-(1-4\theta)\alpha(k)\right).$$

Si $\alpha(k)=0$, le polynôme (2.12) possède une racine double $\lambda=1$. Si $\alpha(k)\neq 0$, d'après la condition CFL, $\Delta(k)<0$ et le polynôme possède deux racines distinctes complexes, conjuguées l'une de l'autre, de module 1. Considérons le premier cas, c'est à dire $\alpha(k)=0$. Dans ce cas, il existe p tel que $k=p(N+1)$. De plus, comme $\sum_j v_j=0$, on vérifie que $\hat{v}(k)=0$. Ainsi, $\hat{u}^1(k)=\hat{u}^0(k)+\hat{v}(k)=\hat{u}^0(k)$. Or

$$A(k)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\hat{U}^n(k)=A(k)^n\hat{U}^n(0)=A(k)^n\begin{pmatrix}\hat{u}^0(k)\\ \hat{u}^0(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{u}^0(k)\\ \hat{u}^0(k)\end{pmatrix}=\hat{U}^0(k).$$

On a montré que si $\alpha(k)=0$, $\hat{u}^n(k)=\hat{u}^0(k)$ pour tout n.

Reste à considérer le cas $\alpha(k)\neq 0$. Dans ce cas, le polynôme (2.12) possède deux racines distinctes λ et $\overline{\lambda}$. La matrice $A(k)$ est diagonalisable. Plus précisément,

$$A(k)=\frac{1}{\lambda-\overline{\lambda}}\begin{pmatrix}\lambda & \overline{\lambda}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \overline{\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\overline{\lambda}\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$A(k)^n = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \begin{pmatrix} \lambda & \overline{\lambda} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\lambda} \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi une expression explicite de $\hat{u}^{n+1}(k)$ en fonction de $\hat{u}^0(k)$ et $\hat{v}(k)$. Plus précisément,

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\left((\lambda^{n+1} - \overline{\lambda}^{n+1}) - (\lambda^n - \overline{\lambda}^n) \right) \right) \hat{u}^0(k) - \Delta t(\lambda^n - \overline{\lambda}^n)\hat{v}(k),$$

ou encore

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\lambda^n(\lambda - 1) - \overline{\lambda}^n(\overline{\lambda} - 1) \right) \hat{u}^0(k) - \Delta t(\lambda^n - \overline{\lambda}^n)\hat{v}(k).$$

Un calcul explicite de la racine λ du polynôme (2.12) nous donne

$$\lambda = \frac{2 - (1 - 2\theta)\alpha(k) + i\sqrt{-\Delta(k)}}{2(1 + \theta\alpha(k))}.$$

D'après la condition CFL, il existe une constante C_1 indépendante de k telle que

$$\left| \frac{\lambda - 1}{\lambda - \overline{\lambda}} \right| = (2(1 + \theta\alpha(k)))^{-1} \left| 1 + i2(1 - 2\theta)\sqrt{\frac{\alpha(k)}{4 - (1 - 4\theta)\alpha(k)}} \right| < C_1. \qquad (2.13)$$

D'autre part, en utilisant à nouveau la condition CFL, on établit qu'il existe une constante C_2, indépendante de k telle que

$$\frac{\Delta t}{|\lambda - \overline{\lambda}|} \leq C_2 \frac{\Delta t}{\sqrt{\alpha(k)}}$$

Or

$$\min_{k:\sin(k\pi\Delta x)\neq 0} \sqrt{\alpha(k)} = 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \sin(\pi\Delta x) > \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \pi\Delta x = \pi\Delta t$$

dès que Δx est assez petit. Ainsi,

$$\frac{\Delta t}{|\lambda - \overline{\lambda}|} \leq \pi^{-1}C_2.$$

De cette dernière estimation, de l'estimation (2.13) ,de l'expression de $u^{n+1}(k)$ et le module de λ étant égale à 1, on déduit que

$$|\hat{u}^{n+1}(k)| \leq C_1|\hat{u}^0(k)| + \pi^{-1}C_2|\hat{v}(k)|.$$

Le schéma est donc stable pour la norme L^2 et il existe une constante C telle que

$$\|u^n\|_{L^2} \leq C\left(\|u^0\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\right)$$

Exercice 2.3.12 On considère le cas limite du Lemme **2.3.6**, c'est-à-dire $\Delta t/\Delta x = (1-4\theta)^{-1/2}$ avec $0 \leq \theta < 1/4$. Montrer que le θ-schéma centré (**2.42**) est instable dans ce cas en vérifiant que $u_j^n = (-1)^{n+j}(2n-1)$ est une solution (remarquez qu'il s'agit d'une instabilité "faible" puisque la croissance de u^n est linéaire et non exponentielle).

Correction. Soit $u_j^n = (-1)^{n+j}(2n-1)$,

$$-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n = 4(-1)^{n+j}(2n-1)$$

et

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = 4(-1)^{n+j+1}(2n-1).$$

En substituant ses relations dans l'expression du θ schéma et en considérant le cas $(\Delta t \Delta x)^2 = (1-4\theta)^{-1}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \theta\frac{-u_{j-1}^{n+1} + 2u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \\
&\qquad + (1-2\theta)\frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} + \theta\frac{-u_{j-1}^{n-1} + 2u_j^{n-1} - u_{j+1}^{n-1}}{(\Delta x)^2} \\
&\qquad = 4(\Delta t)^{-2}(2n-1)(-1)^{n+j}\big(-1 - \theta(1-4\theta)^{-1} \\
&\qquad\qquad + (1-2\theta)(1-4\theta)^{-1} - \theta(1-4\theta)^{-1}\big) = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 2.3.13 Montrer que le θ-schéma centré (**2.42**) conserve l'énergie discrète, c'est-à-dire que $E^n = E^0$ pour tout $n \geq 0$.

Correction. On multiplie **(2.42), p.57** par $u_j^{n+1} - u_j^{n-1}$ et il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\Delta t)^2}\left(u_j^{n+1} - u_j^n - (u_j^n - u_j^{n-1})\right)\left(u_j^{n+1} - u_j^n + (u_j^n - u_j^{n-1})\right) \\
&+\frac{1}{(\Delta x)^2}\left(-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n\right)\left(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\right) \\
&+\frac{\theta}{(\Delta x)^2}\left(-(u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n) + 2(u_j^{n+1} - u_j^n) - (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n)\right)\left(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\right) \\
&+\frac{\theta}{(\Delta x)^2}\left(-(u_{j-1}^{n-1} - u_{j-1}^n) + 2(u_j^{n-1} - u_j^n) - (u_{j+1}^{n-1} - u_{j+1}^n)\right)\left(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\right) = 0
\end{aligned}$$

Si on somme par rapport à j, comme

$$\sum_{j=0}^{N}\left(-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n\right)v_j = \sum_{j=0}^{N}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right)\left(v_{j+1} - v_j\right),$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}\right)^2-\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{u_j^{n}-u_j^{n-1}}{\Delta t}\right)^2\\
&+a_{\Delta x}(u^n,u^{n+1}-u^{n-1})\\
&+a_{\Delta x}(u^{n+1}-u^n,u^{n+1}-u^n+(u^n-u^{n-1}))\\
&+a_{\Delta x}(u^{n-1}-u^n,u^{n+1}-u^n+(u^n-u^{n-1}))=0,
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}\right)^2+a_{\Delta x}(u^n,u^{n+1})+\theta a_{\Delta x}(u^{n+1}-u^n,u^{n+1}-u^n)\\
=&\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{u_j^{n}-u_j^{n-1}}{\Delta t}\right)^2+a_{\Delta x}(u^{n-1},u^n)+\theta a_{\Delta x}(u^n-u^{n-1},u^n-u^{n-1}).
\end{aligned}$$

Exercice 2.3.14 Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs (**2.44**) est stable en norme L^2 sous la condition CFL $\Delta t\leq\Delta x$, et qu'il est précis à l'ordre 1 en espace et temps si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est gardé constant lorsque Δt et Δx tendent vers zéro.

Correction.

1. Consistance

On pose $U=(v,w)$ et

$$J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

On effectue un développement de Taylor en (t_n,x_j) sur le schéma **(2.44), p.60** :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\left(2U(t_{n+1},x_j)-U(t_n,x_{j+1})-U(t_n,x_{j-1})\right)\\
&\qquad-\frac{1}{2\Delta x}J\left(U(t_n,x_{j+1})-U(t_n,x_{j-1})\right)\\
&=\frac{\partial U}{\partial t}-J\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\left(1-\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\mathcal{O}\left((\Delta x)^2+\frac{(\Delta x)^4}{\Delta t}\right)
\end{aligned}$$

Le schéma est donc consistant et précis à l'ordre 1 si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est constant.

2. Stabilité L^2

Étudions la stabilité L^2. Par transformation de Fourier, on établit que

$$\begin{pmatrix}\hat v^{n+1}\\ \hat w^{n+1}\end{pmatrix}=\left(\cos(2k\pi\Delta x)+i\sin(2k\pi\Delta x)\frac{\Delta t}{\Delta x}\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\hat v^{n}\\ \hat w^{n}\end{pmatrix}.$$

On pose $\alpha=\cos(2k\pi\Delta x)$ et $\beta=\sin(2k\pi\Delta x)\frac{\Delta t}{\Delta x}$. On diagonalise la matrice $A(k)$ et on établit que

$$A(k)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha-i\beta&0\\0&\alpha+i\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

Notons que
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = I.$$
Ainsi, le schéma est stable L^2 si et seulement si $|\alpha + i\beta| \leq 1$. Or
$$|\alpha + i\beta|^2 = (\cos(2k\pi\Delta x)^2 + \sin(2k\pi\Delta x)^2(\Delta t/\Delta x)^2)$$
et que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$.

Exercice 2.3.15 Montrer que le schéma de Lax-Wendroff (**2.45**) est stable en norme L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$, et qu'il est précis à l'ordre 2 en espace et temps.

Correction.

1. Consistance

On pose $U = (v, w)$ et
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On effectue un développement de Taylor en (t_n, x_j) sur le schéma **(2.45), p.60** :
$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t}(U(t_{n+1}, x_j) - U(t_n, x_j)) - \frac{1}{2\Delta x}J.\left(U(t_n, x_{j+1}) - U(t_n, x_{j-1})\right)\\ &+\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}(-U(t_n, x_j - 1) + 2U(t_n, x_j) - U(t_n, x_{j+1})) = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\\ &+ J\frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - J\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{(\Delta x)^2}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + (\Delta x)^3).\end{aligned}$$
Si U est solution de l'équation **(2.43), p.60**, on en déduit que l'erreur de troncature est
$$E(U) = \frac{1}{6}\left((\Delta t)^2 - (\Delta x)^2\right)J\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2).$$

2. Stabilité L^2.

Établissons la stabilité L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$. Par transformation de Fourier, on établit que
$$\hat{U}^{n+1}(k) = \left(1 - 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\pi\Delta x) + i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(2k\pi\Delta x)J\right)\hat{U}^n(k)$$
On pose $\alpha = 1 - 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\pi\Delta x)$ et $\beta = \frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(2k\pi\Delta x)$ et on procède comme pour l'exercice précédent. Ainsi, le schéma est stable L^2 ssi $|\alpha + i\beta| \leq 1$. Or
$$|\alpha + i\beta|^2 = 1 - 4\sin^3(k\pi\Delta x)\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right).$$
Ainsi, le schéma est stable L^2 dès que
$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$