Université Côte d'Azur | Polytech Nice Sophia (PNS)
Mathématiques Appliquées et Modélisation (MAM4) | Jeudi 12 Octobre 2023

Équations aux dérivées partielles – TD 5

Problème 1. Considérons l'équation d'advection dans le domaine borné $(0,1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \forall (x,t) \in (0,1)\times \mathbb{R}_*^+, \end{cases}$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1. On discrétise le domaine en utilisant un maillage régulier $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$, $\forall n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ où $\Delta x = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$.

1. Montrer que l'équation équivalente pour le schéma de *Lax-Wendroff*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{V^2\Delta t}{2}\cdot\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

   est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{V\Delta x^2}{6}\left(1 - \frac{(V\Delta t)^2}{\Delta x^2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

   Est-ce qu'on peut améliorer le schéma à partir de cette équation équivalente pour le rendre plus précis?

2. On définit le schéma de Crank-Nicolson pour l'équation d'advection

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4\Delta x} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4\Delta x} = 0.$$

   Étudier la consistance et l'erreur de troncature du schéma. Montrer par analyse de Fourier qu'il est inconditionnellement stable. Écrire son équation équivalente. Peut-on encore l'améliorer à partir de cette dernière?

Problème 2. Considérons l'équation d'advection-diffusion dans la domaine borné $(0,1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \forall (x,t) \in (0,1)\times \mathbb{R}_*^+, \end{cases}$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1. Considérons le schéma décentré amont suivant:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \nu\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

1. Déterminer l'équation équivalente associée au schéma. Comment peut-on améliorer l'ordre du schéma à moindre frais ? Quelles sont alors les nouvelles conditions CFL?

2. Pour la même équation considérons le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{2}\left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right) = 0.$$

   Etudier la stabilité L^2 du schéma. Que se passe-t-il lorsque $\nu \to 0$?