Méthodes numériques pour les EDP

Projet en groupe

ANDRIEU Grégoire
GILLE Cyprien

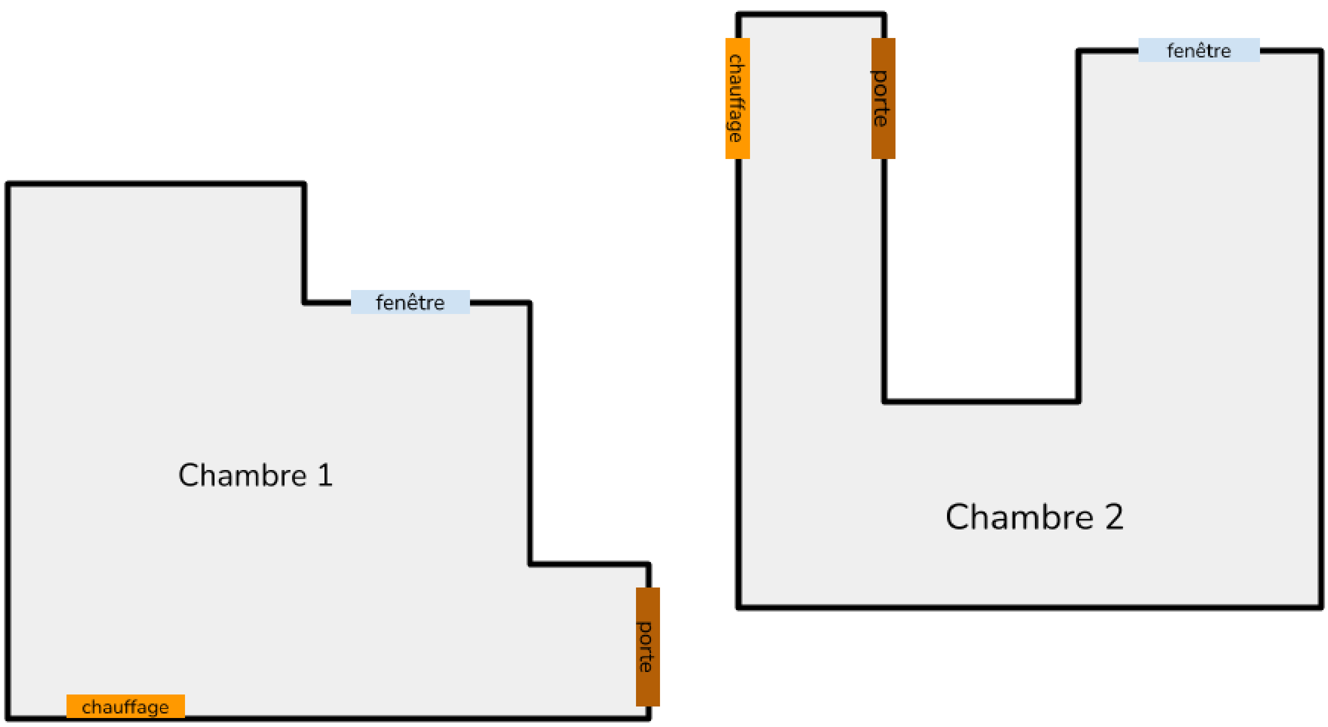
I. Présentation du problème

Notre problème est la modélisation de la température d'une pièce selon l'équation de chaleur stationnaire (ou équation de Poisson):

$$-\Delta u = f$$

Concernant les fenêtres et les portes, on supposera qu'elles ne sont pas du tout isolées. (autrement dit, nous utiliserons les conditions de Dirichlet). Nous supposerons les murs isolants (autrement dit, nous utiliserons les conditions aux limites de Neumann homogènes).

Pour tester notre code, nous avons étudié deux plans différents (géométrie des murs, placement des portes, fenêtres et du chauffage), représentés plus bas schématiquement.



Nous avons également étudié différents cas tests:

- Cas 1 - Été

Il fait 20°C dehors et dans le reste de la maison, c'est donc la température des fenêtres et de la porte (`wt=dt=20`). Pas de chauffage (`ht=0`).

- Cas 2 - Hiver sans chauffage

. Il fait -10°C dehors, c'est là la température de la fenêtre (`wt=-15`). La maison (i.e. la porte) est à 15°C (`dt=15`). Toujours pas de chauffage (`ht=0`).

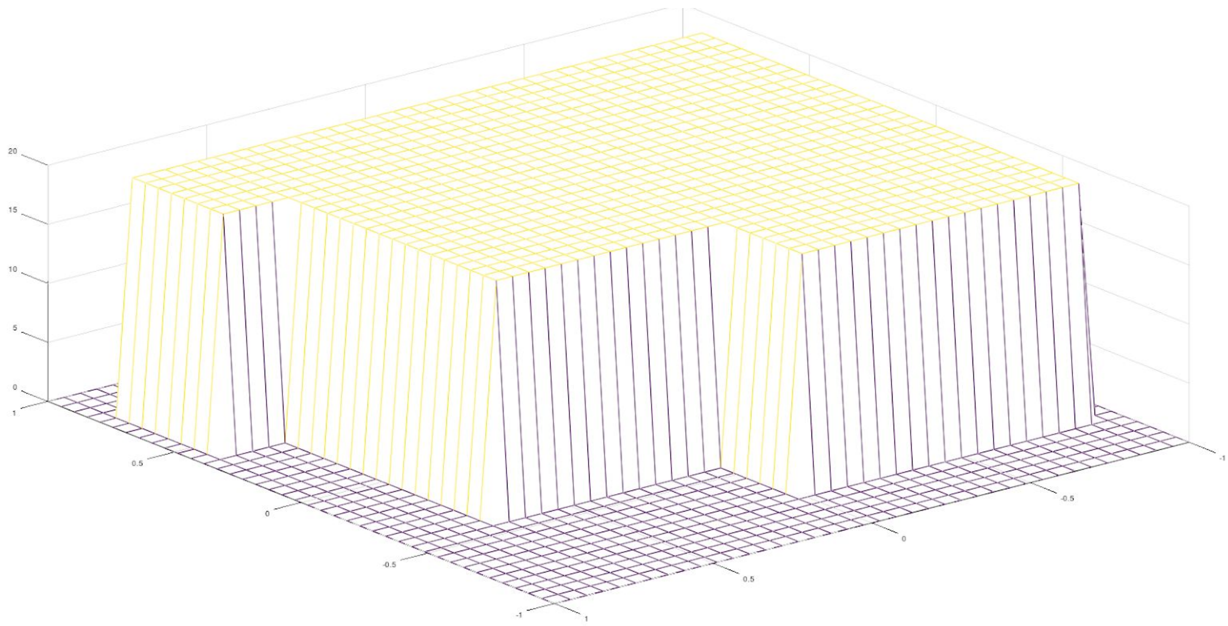
- Cas 3 - Hiver avec chauffage

Mêmes conditions que le cas précédent (`wt=-10, dt=15`), mais avec chauffage (`ht=`).

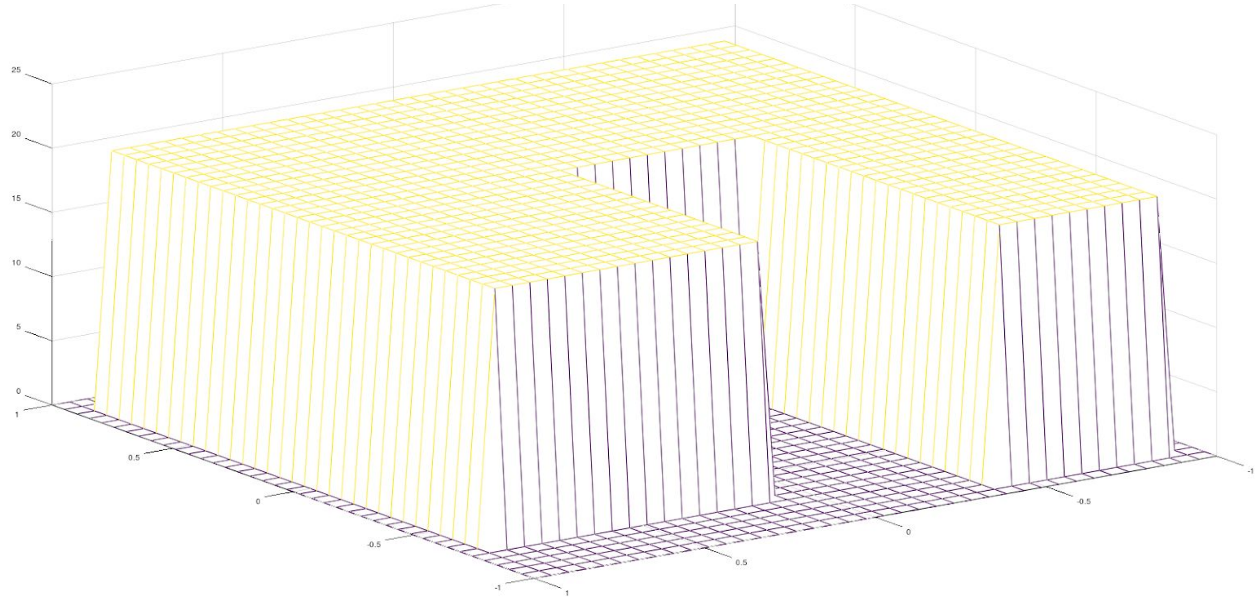
II. Résultats des simulations statiques

Cas 1 - `ht=0, dt=20, wt=20, n=40`

Chambre 1:



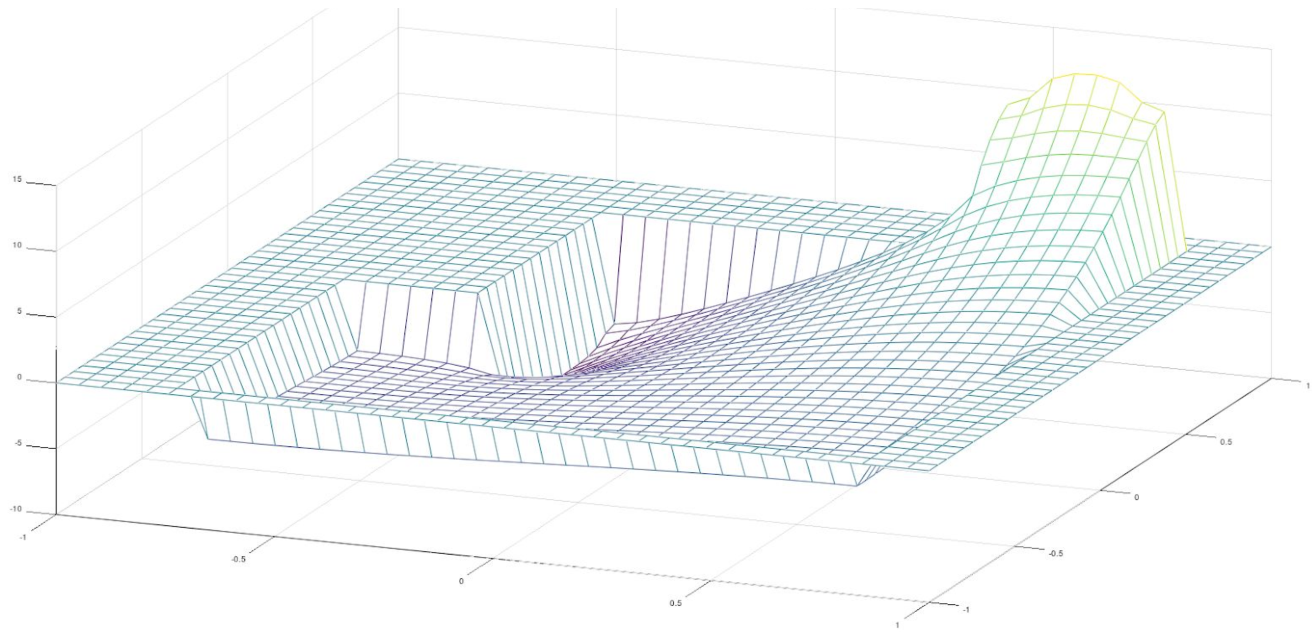
Chambre 2:



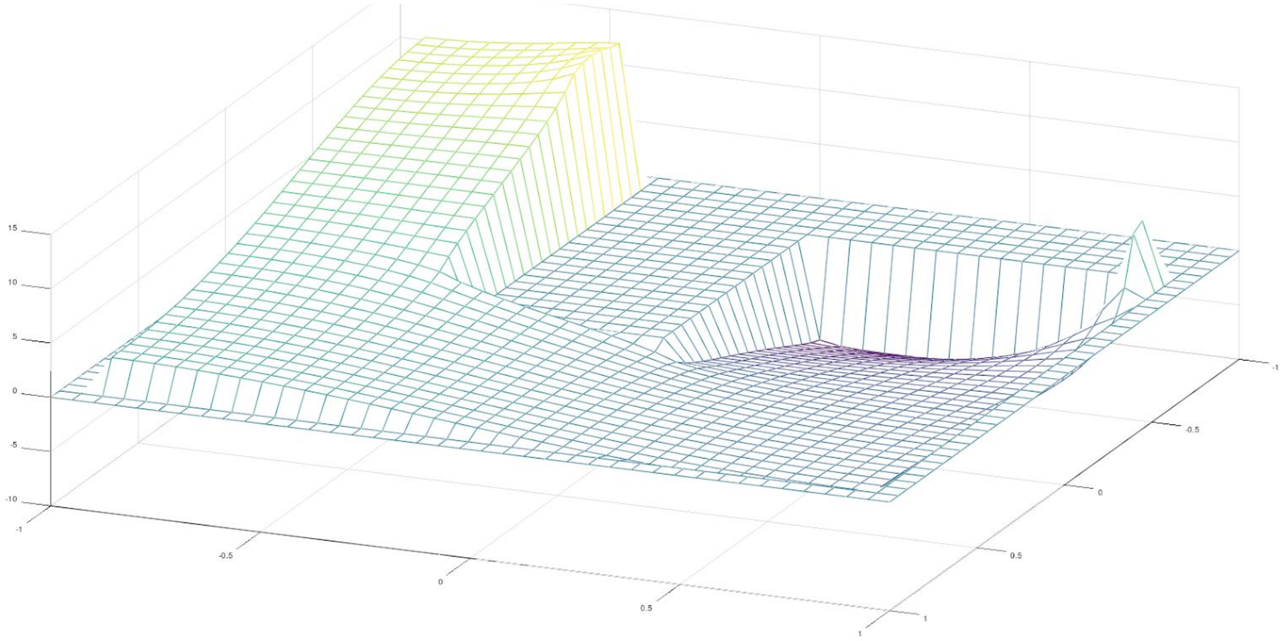
Sans chauffage, et avec des températures à l'extérieur et au niveau de la porte égales, on constate que la pièce est à une température constante.

Cas 2 - `ht=0, dt=15, wt=-10, n=40`

Chambre 1:



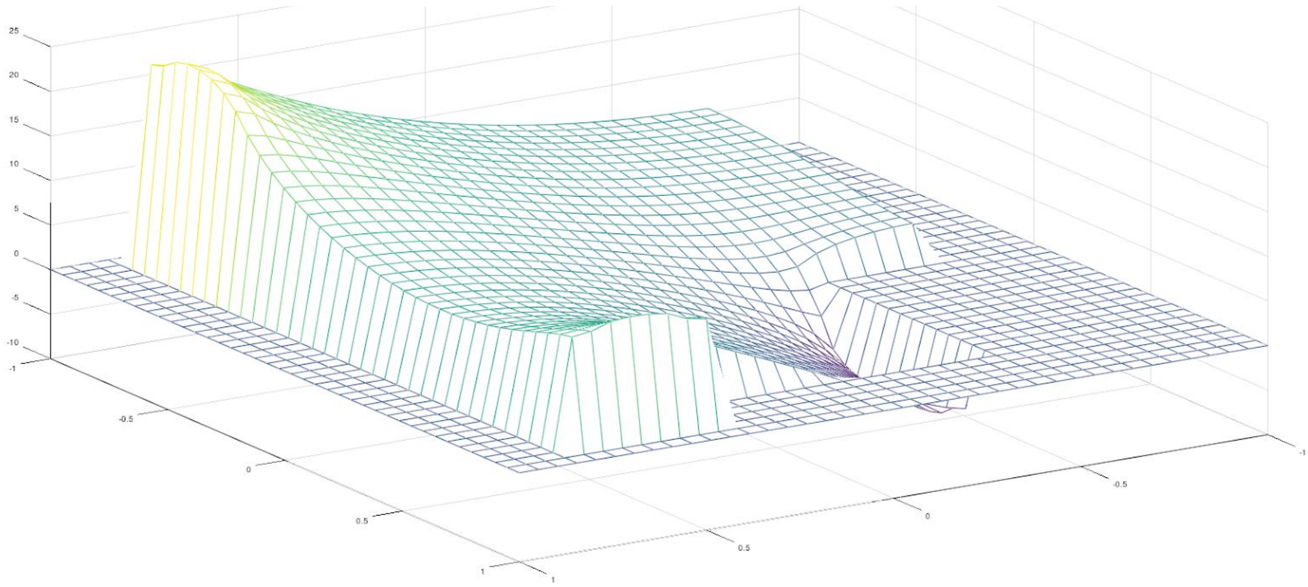
Chambre 2:



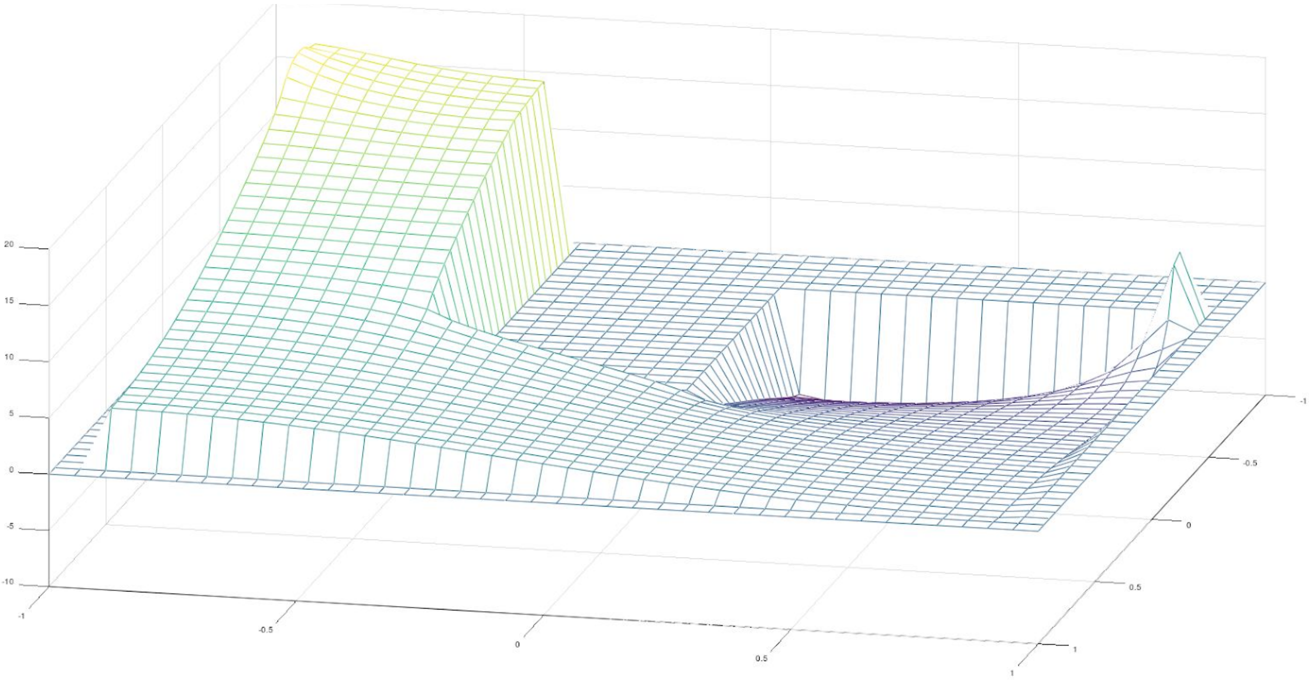
La fenêtre n’étant pas isolante, il fait très froid près d’elle. De plus, l’absence de chauffage ne permet pas de rehausser la température ambiante, et la faible chaleur de la porte ne parvient pas jusqu’à la zone de la fenêtre.

Cas 3 - `ht=500, dt=15, wt=-10, n=40`

Chambre 1:



Chambre 2:

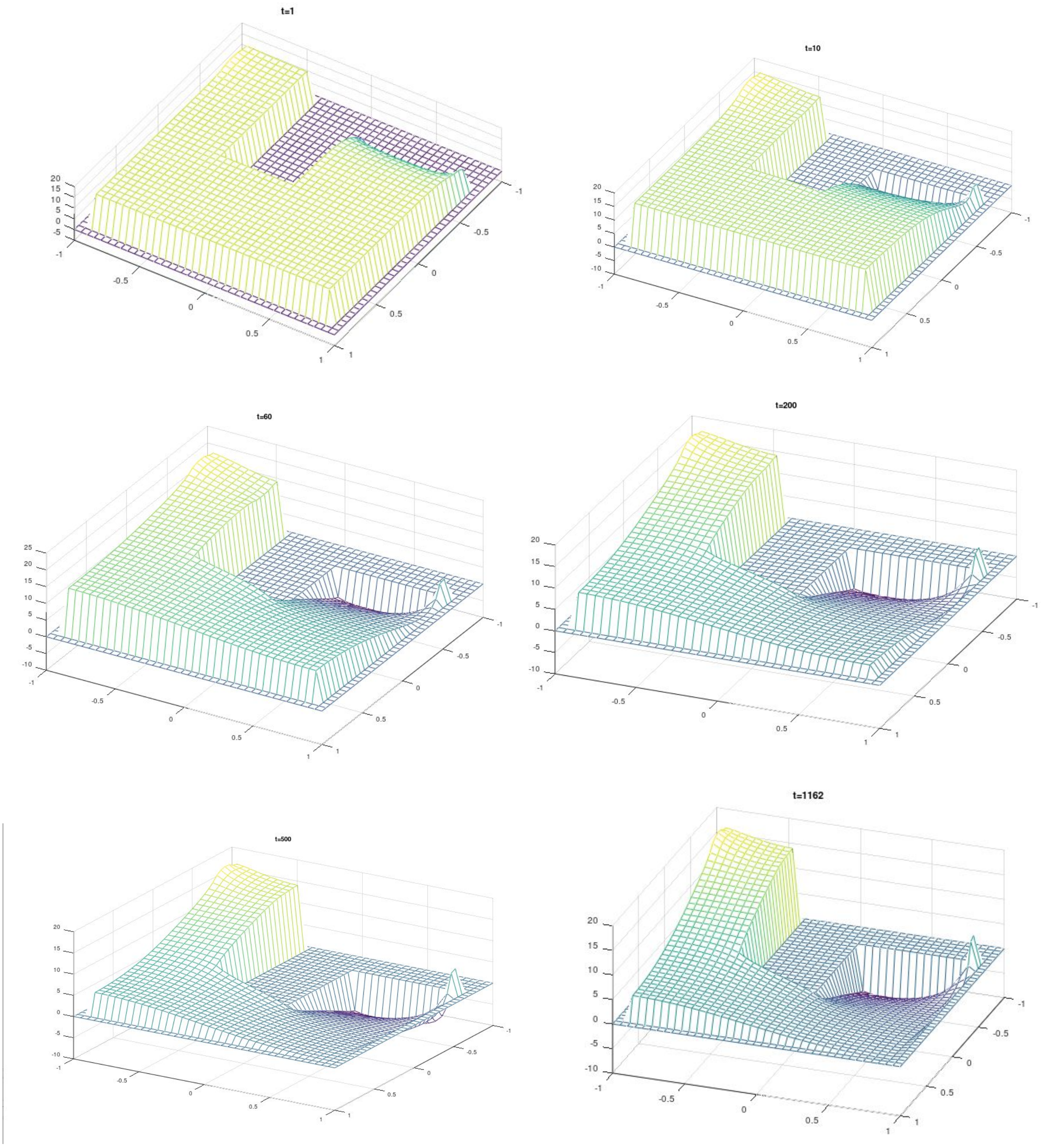


On constate que les appareils de chauffage ne sont pas bien placés. En effet, leur disposition par rapport à la forme de la pièce n’est pas optimale : par exemple, par rapport à la fenêtre qui refroidit la pièce sans que la diffusion de chaleur ne soit suffisante pour compenser cela, car le chauffage est à l’autre bout de la chambre, séparé de la zone froide par les murs parfaitement isolants. De plus, avec l’isolation des murs, placer son chauffage contre un de ceux-ci ne tire pas pleinement avantage de la chaleur émise par l’appareil de chauffage.

III. Résultats des simulations instationnaires

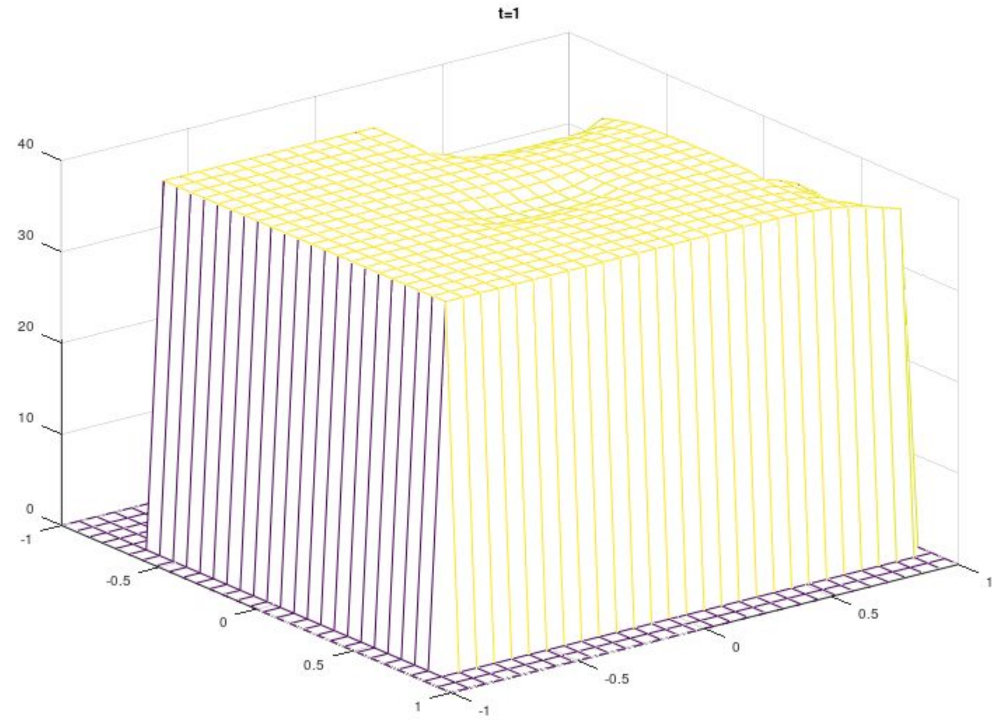
Nous ne nous étendrons pas sur la ré-obtention des résultats de la partie II. En effet, dans le code des schémas temporels, le critère d'arrêt n'est pas un nombre arbitraire de pas mais une différence cumulative d'au plus un degré entre la solution actuelle et la solution exacte obtenue par la partie II.

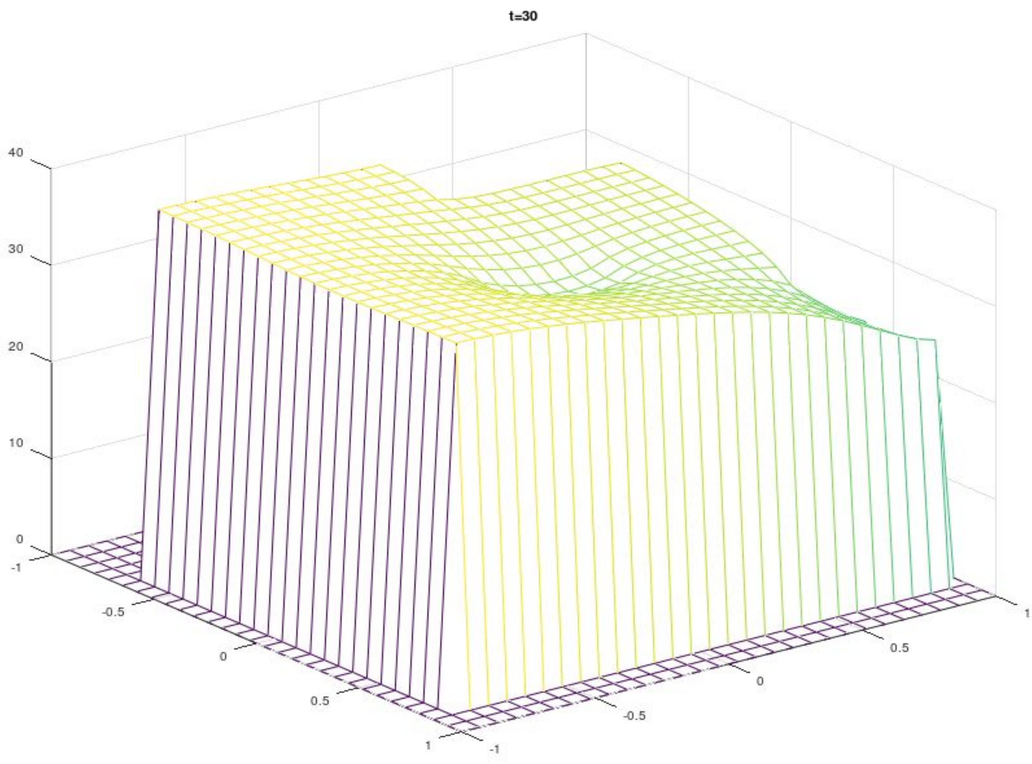
Présentons tout de même, par principe et à des fins de vérification, l'application du schéma implicite, avec une température initiale uniforme de 15°C, au cas 3, dans la chambre 2.

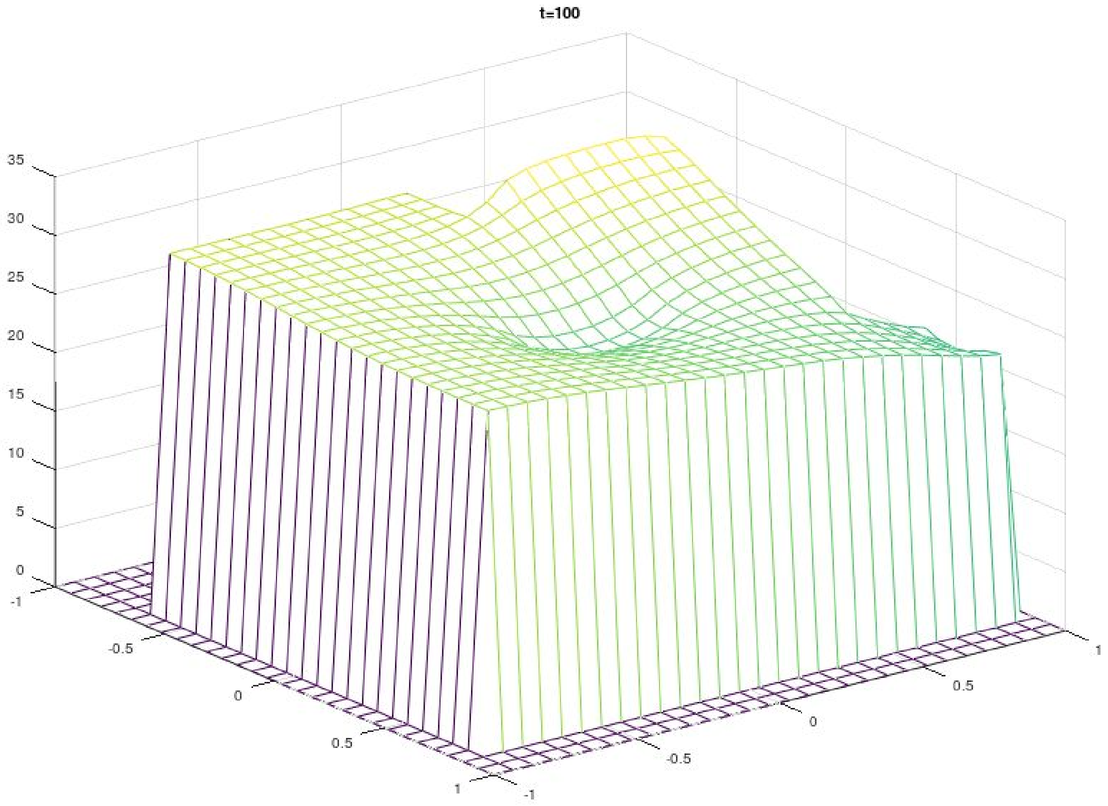


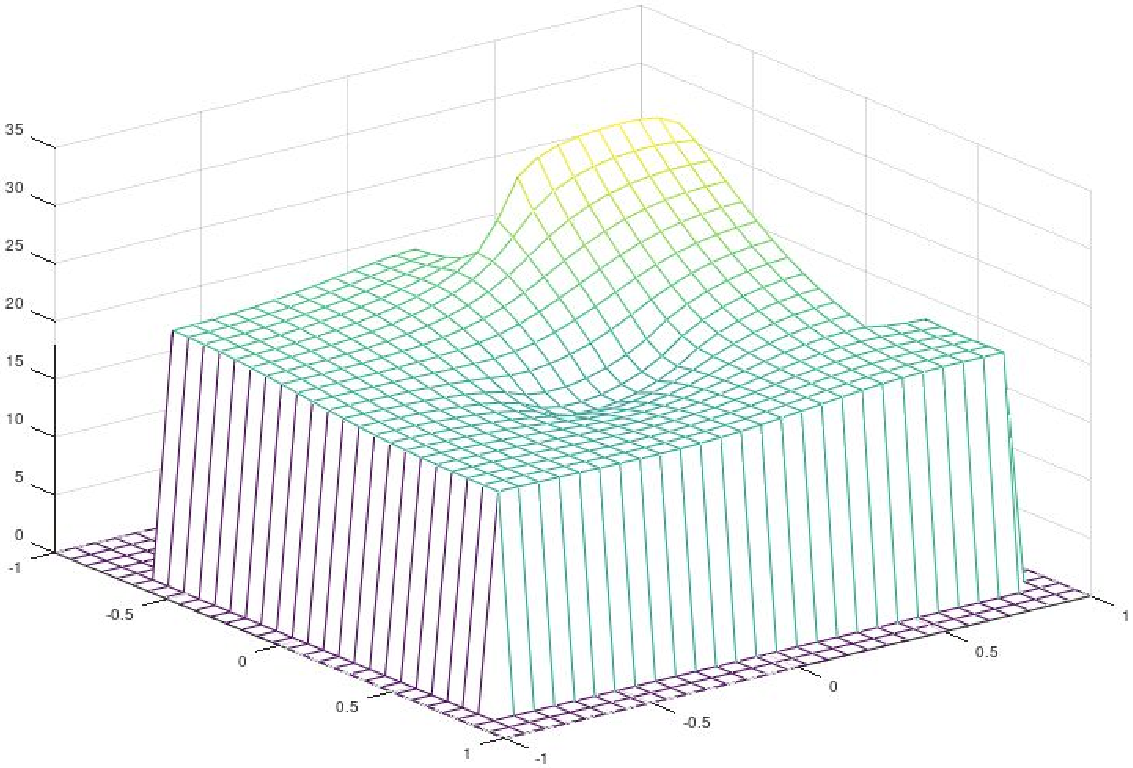
Maintenant que l'on dispose du moyen de faire des simulations en temps, étudions un cas test en plein été: supposons que la chambre 1, suite à son exposition au soleil, est à 40°C initialement. L'extérieur est à 35°C, et le reste de la maison est climatisé (dt=20°C). Le propriétaire de la chambre, dont la climatisation ne fonctionne plus, cède sous le désespoir et sous la chaleur et décide de vider au centre de sa pièce sa bonbonne d'azote liquide (ht=-195). Cela le refroidira-t-il?

Cas 4 - `ht=-195, dt=20, wt=35, n=30`





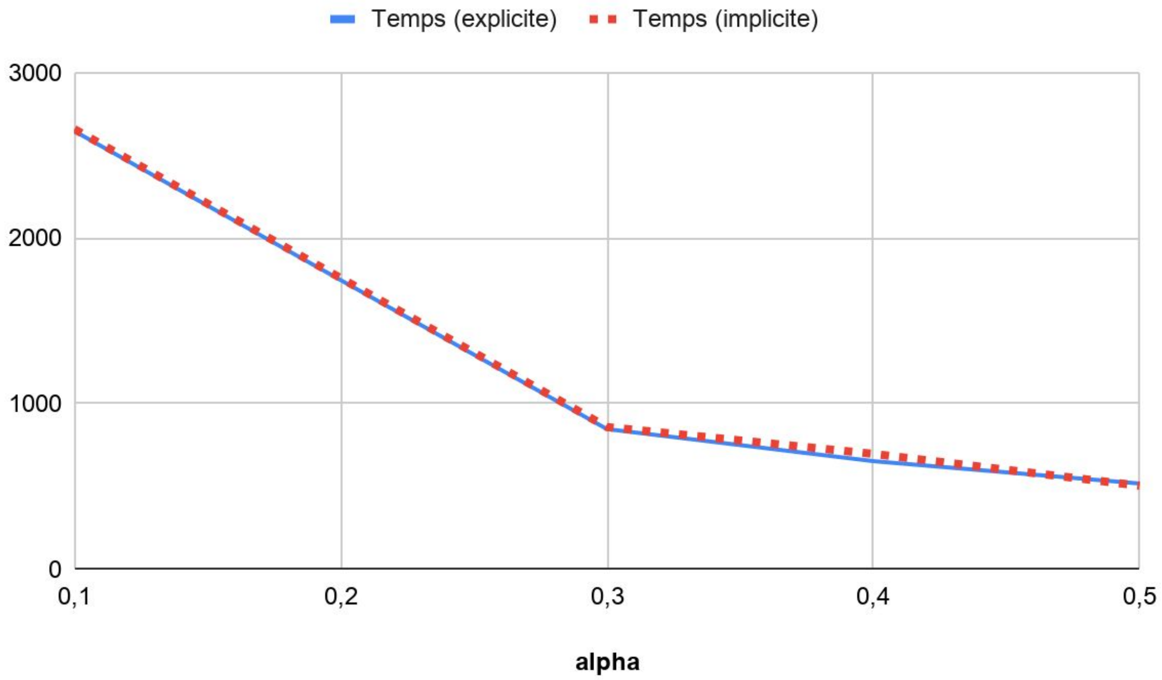




On peut voir que si l'on atteint assez vite la température de la fenêtre dans la pièce, il est plus long de descendre aux alentours de la température de la porte. Et même dans la situation finale, la température de la chambre n'est descendue 'que' jusqu'à 20°C, et le point plus froid au centre vers 15°C.

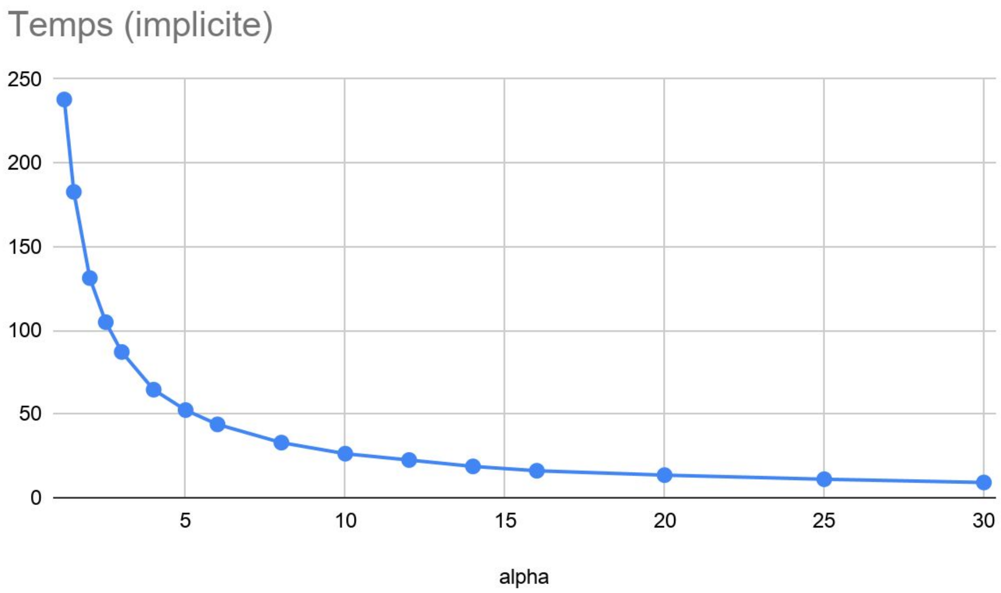
IV. Comparaison des schémas explicite et implicite

Comparons les schémas explicites et implicites sur un premier critère: la rapidité de convergence selon alpha. (Sachez que pour les deux graphiques ci-dessous, les courbes en nombre d'itérations ont la même allure).

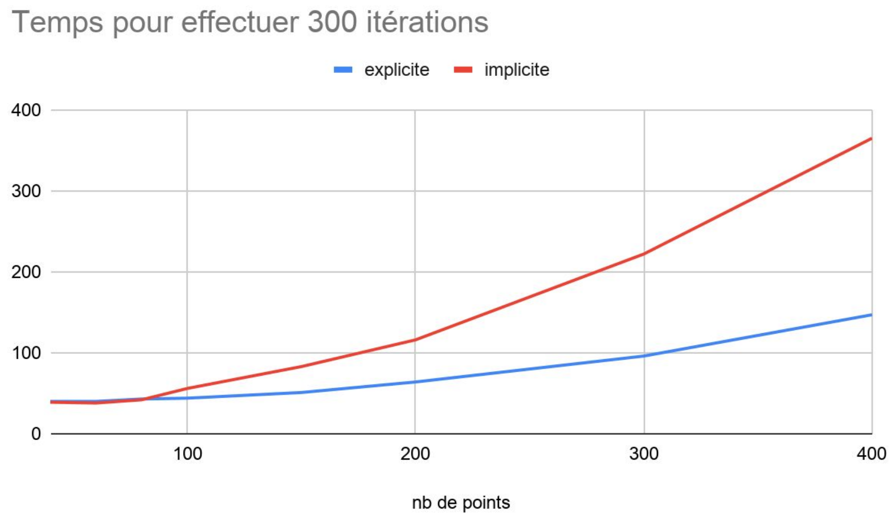


On voit qu'en dessous de `alpha=0.5`, les deux schémas prennent autant de temps pour converger vers la solution exacte (ici nous avons testé le cas 3, avec `n=30`).

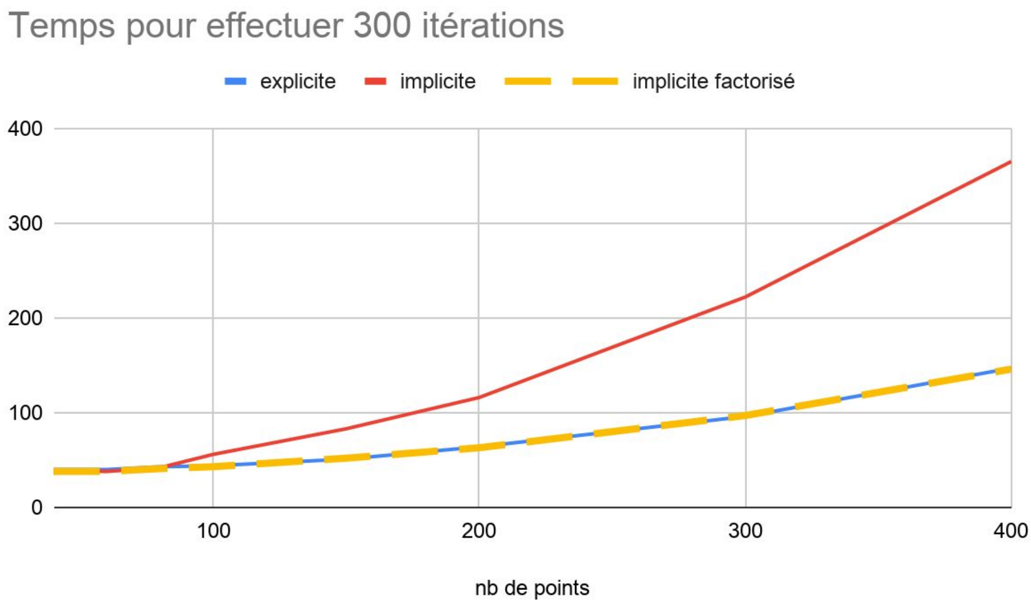
Au-delà de `alpha=0.5`, le schéma explicite diverge, mais le schéma implicite continue de gagner en rapidité de convergence:



Certes, le schéma implicite permet d'accélérer la simulation comme bon nous semble en augmentant la valeur d'alpha, **mais** il nécessite la résolution d'un système linéaire à chaque étape. Ainsi, cela n'apparaît pas sur nos tests précédents (puisque l'on ne travaillait qu'avec 20 points) mais le schéma implicite est très vite très coûteux en temps de calcul:



On peut voir qu'avec l'augmentation du nombre de points, le schéma implicite prend effectivement beaucoup plus de temps que le schéma explicite, à cause de la résolution du système linéaire. Cependant, si l'on effectue une factorisation LU avant la boucle en temps et que l'on s'en sert lors de la résolution (ceci étant couplé à la gestion optimisée des matrices creuses dans matlab/octave) :



Le schéma implicite (re)devient aussi rapide que l'explicite, et ce même pour un grand nombre de points.