CORRECTION TD 8

1) a) On multiplie l'équation vérifiée par u dans Ω par une fonction test $v \in X$, puis on intègre par parties

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v \, dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

(FV)

Grâce aux CL on a $\frac{\partial u}{\partial n} = g \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma + \int_\Omega f v$

$v \in X = C^1(\bar{\Omega})$.

Réciproquement, on suppose que $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma + \int_\Omega f v \, dx \;\forall v$ et que $u \in C^2(\bar{\Omega})$. On intègre de nouveau par parties:

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma + \int_\Omega f v \, dx \Leftrightarrow$$

(1) $\int_\Omega -(\Delta u + f) v \, dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v \, d\sigma = 0$

On choisit maintenant $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ à support compact dans Ω
$\Rightarrow v$ nulle sur le bord $\partial\Omega \Rightarrow -\int_\Omega (\Delta u + f) v \cdot dx = 0 \;\forall v \in C^\infty(\bar{\Omega})$
$-(\Delta u + f)$ étant continue on en déduit (en appliquant le résultat du cours) que $+\Delta u = f$ dans Ω. En remplaçant maintenant cela dans (1) $\Rightarrow \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v \, d\sigma = 0$ et par les mêmes arguments de continuité on voit que $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur $\partial\Omega$.

b) En choisissant $v = 1$ dans la formulation variationnelle (FV)
$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma + \int_\Omega f \, dx = 0$

c) $E(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma - \int_\Omega f v \, dx$

$$E(u+v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla(u+v)|^2 dx - \int_{\partial\Omega} g(u+v) \, d\sigma - \int_\Omega f(u+v) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial\Omega} g u \, d\sigma - \int_\Omega f u \, dx + \underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_\Omega g v \, d\sigma - \int_\Omega f v}_{F_{v}}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = E(u) + F_{v\Omega} + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

$\Rightarrow$ " Si " u est solution de FV $\Rightarrow$ $F_{var} = 0$ donc (2) implique ②

$E(u+v) \geq E(u)$ $\forall v$ $\Rightarrow$ u min de E.

$\Leftarrow$ " si u min de E $\Rightarrow$ $t=0$ min de $J(t)$:

$J(t) = E(u+tv) = E(u) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + t F_{var}$

$J'(t) = t\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + F_{var}$, $J'(0) = \underline{F_{var} = 0}$ $\Rightarrow$

u sol du problème variationnel.

② a) On multiplie par v puis on intègre par parties.

$\int_\Omega \Delta(\Delta u)\, v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \Leftrightarrow$

$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v\, d\sigma - \int_\Omega \nabla(\Delta u)\cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v\, d\sigma - \underbrace{\int_\Omega \nabla\cdot(\Delta u \cdot \nabla v)\, dx}_{= \int_{\partial\Omega} \Delta u \cdot \nabla v \cdot n\, d\sigma} + \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v\, dx = \int_\Omega f v\, dx.$ (formule de la divergence

$\Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} v\, d\sigma - \int_{\partial\Omega} \Delta u \cdot \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma + \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$

On choisit $v = 0$, $\partial\Omega$ et $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ $\partial\Omega$ $\Rightarrow$ (FV) $\int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$

$\forall v \in X = \{v \in C^4(\bar\Omega) \mid v = 0, \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

Inversement si (FV) a lieu : $\int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$

on intègre de nouveau par parties en sens inverse et

en choisissant de nouveau des fonctions test à support compact

on en déduit par continuité que $\Delta(\Delta u) = f$.

b) $E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta v)^2 dx - \int_\Omega f v\, dx$

on montre de la même façon que si u est min de E alors

u solution de (FV).

⑤ a) $\int_\Omega (-\Delta u + V\cdot\nabla u)\, v = \int_\Omega f v\, dx.$

On intègre par parties $\underbrace{\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx + \int_\Omega V\cdot\nabla u\cdot v\, dx}_{a(u,v)} = \int_\Omega f v$

b) La forme bilinéaire $a(u,v)$ n'est pas symétrique donc on ne pourra pas montrer l'équivalence avec un problème de minimisation. En effet, soit

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega V\nabla v\cdot v\, dx - \int_\Omega f v\, dx$$

on voit que $\int_\Omega V\nabla v\cdot v\, dx = -\int_\Omega (V\nabla v)\, v\, dx - \int_\Omega (\nabla\cdot V)\cdot v^2 dx$ (IPP (3))

Mais $\nabla\cdot V = 0$ donc $\int_\Omega V\cdot\nabla v\cdot v\, dx = 0.$ ⇒

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f v\, dx.$$

On obtient donc la même fonctionnelle que celle découlant de l'étude du laplacien avec des conditions aux bords de Dirichlet. Minimiser $E(v)$ revient donc à la résolution de ce dernier et pas du problème de ~~de~~ diffusion.

c). Pour démontrer l'unicité, soit u_1 et u_2 2 solutions du problème variationnel. $\forall v\in X$ ⇒

$$\int_\Omega \nabla(u_1-u_2)\nabla v\, dx + \int_\Omega V\nabla(u_1-u_2)\, v\, dx = 0.$$

On applique cela à $v = u_1-u_2$ ⇒

$$\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \nabla\cdot V\, (u_1-u_2)^2 dx = 0 \quad (\text{de } (3))$$

Comme $\nabla\cdot V = 0$ ⇒ $\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^2 dx = 0$ ⇒ $u_1-u_2 =$ cou

Mais comme $u_1 = u_2 = 0$ sur $\partial\Omega$ on en déduit que $u_1 = u$

Si ~~div~~ $\nabla\cdot V \neq 0$ le raisonnement précédent ne peut plus s'appliq