maintenant, pour $y = 0$ on peut appliquer la condition initiale :

$$G(0) = c_3 + F(0) = c_3 + c_1 + \frac{1}{2}u_0(0)$$

et, d'un autre coté :

$$G(0) = c_2 + \frac{1}{2}u_0(0)$$

ce qui entraîne :

$$c_3 + c_1 = c_2$$

en prenant en compte le fait que $c_1 + c_2 = 0$ on conclut :

$$c_3 = 2c_2 = -2c_1$$

et la solution pour $x - ct \leq 0$ est alors donnée par :

(3.9)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F(x+ct) + G(x-ct) \\ &= F(x+ct) - F(ct-x) + c_3 \\ &= \frac{1}{2}\left(u_0(ct-x) + u_0(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} u_1(y)\,dy + \frac{1}{2c}\int_0^{ct-x} u_1(y)\,dy. \end{aligned}$$

On vient d'obtenir une expression pour la solution dans le cas de la demi-droite avec condition de frontière de Neumann homogène. Il s'agit d'une généralisation de la formule de d'Alembert. On peut procéder de la même façon pour un domaine spatial borné, mais les calculs sont beaucoup plus lourds. Cette expression de la solution a l'avantage de mettre bien en évidence le comportement des ondes réfléchies par la frontière.

3.3 Solutions à variables séparées

On cherche maintenant les solutions de l'équation des ondes à variables séparées. On suppose qu'il existent des fonctions (inconnues) F et G, d'une variable réelle telles que

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

On calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = FG''$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = F''G$$

on a alors

$$FG'' = c^2 F'' G$$

comme, par hypothèse $FG \neq 0$ on peut écrire

$$c^2 \frac{F''}{F}(x) = \frac{G''}{G}(t)$$

la fonction de gauche dépend uniquement de x et celle de droite uniquement de t, on peut alors dire qu'il existe un réel λ tel que

$$\begin{cases} c^2 \frac{F''}{F}(x) = \lambda \\ \frac{G''}{G}(t) = \lambda \end{cases}$$

si $\lambda = 0$ on a $F'' = G'' = 0$ et donc

$$F(x) = ax + b$$
$$G(x) = \alpha t + \beta$$

si $\lambda > 0$ on a des solutions exponentielles réelles

$$F(x) = ae^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + be^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}$$
$$G(t) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}t} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}t}$$

si $\lambda < 0$ on a des solutions oscillantes

$$F(x) = a\cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) + b\sin\left(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right)$$
$$G(t) = \alpha\cos\left(\sqrt{-\lambda}t\right) + \beta\sin\left(-\sqrt{\lambda}t\right)$$

en prenant en compte les conditions initiales et les conditions aux limites on peut déterminer les solutions.

alors f admet un développement en série de Fourier. Dans certains cas (qu'on n'abordera pas ici) l'expression de la série de Fourier n'a pas de sens mais on peut lui donner un sens comme limite de séries de fonctions pour lesquelles l'expression de la série a un sens.

On se contentera de remarquer que l'espace des fonctions de carré intégrable qu'on nomme $L^2(0, L)$ est un espace vectoriel qu'on peut munir d'un produit scalaire de fonctions. Si f et g sont des éléments de $L^2(0, 1)$ alors le produit scalaire de f et g est défini par

$$(f|g) = \int f(x)g(x)\, dx. \tag{4.7}$$

Le fait qu'on puisse calculer cette intégrale est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz

Proposition 12. *Si f et g sont deux fonctions de L^2 de $]0, L[$ alors*

$$\int_0^L |f(x)||g(x)|\, dx \leq c \left(\int_0^L |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sur cet espace vectoriel les fonctions $e^{in\frac{2\pi}{L}x}$ forment une base orthogonale. Les coefficients de Fourier sont les coordonnées dans cette base, et on retrouve leur expression comme les projections sur les éléments de la base.

Théorème 7 (Parseval). *Si f est une fonction de $L^2(0, L)$ de série de Fourier*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

alors

$$\frac{1}{L}\int_0^L |f(x)|^2\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

4.5 Application à l'équation des ondes

On s'intéresse aux solutions périodiques de l'équation des ondes.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ u(x, t) = u(x + L, t) \end{cases} \tag{4.8}$$

c est la vitesse, L la périodicité qui est une donnée. Les conditions initiales u_0 et u_1 sont supposées périodiques et admettent un développement en série de Fourier

$$u_0(x) = \frac{a_{0,0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{0,n} \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{0,n} \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$$
$$u_1(x) = \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{1,n} \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$$

Supposons que la solution de (4.8) admet un développement en série de Fourier en x

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$$

supposons aussi que on peut dériver cette série terme à terme, on a alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t) \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\left(n\frac{2\pi}{L}\right)^2 \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\left(n\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$$

la proposition 11 et l´équation entraîne que les coefficients de Fourier de la solution vérifient

$$\begin{cases} a_0''(t) = 0 \\ a_0(0) = a_{0,0} \\ a_0'(0) = a_{1,0} \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\begin{cases} a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0 \\ a_n(0) = a_{0,n} \\ a_n'(0) = a_{1,n} \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0 \\ b_n(0) = b_{0,n} \\ b_n'(0) = b_{1,n} \end{cases} \tag{4.11}$$

où

$$\lambda_n = cn\frac{2\pi}{L}.$$

Les coefficients de Fourier sont alors donnés par

$$a_0(t) = a_{1,0}t + a_{0,0}$$
$$a_n(t) = a_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{a_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t)$$
$$b_n(t) = b_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{b_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t)$$

et donc

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}(a_{0,0} + a_{1,0}t) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{a_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t)\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{b_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t)\right)\sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Exemple 14. *Calculons les solutions* 2*-périodiques de l'équation des ondes, avec*

$$u_0(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1[\\ 2-x & x \in [1,2[\end{cases}$$

et $u_1(x) = 0$*. Par application directe de la formule précédente on a*

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}\cos(cn\pi t)\cos(n\pi x) \tag{4.13}$$