

Équations aux dérivées partielles – TD 3 SOLUTIONS

Par la suite on va utiliser les relations suivantes basées sur des développements en série de Taylor et on va tenir compte du fait que $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (car u est solution de l'équation)

$$\begin{aligned}
 \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2), \\
 \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta x^4), \\
 \frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t_{n+1}))}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta x^4) \\
 &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + \Delta t \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}(x_j, t_n) \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^4) \\
 &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \left(\nu \Delta t + \frac{\Delta x^2}{12} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + \frac{\nu \Delta t \Delta x^2}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^4).
 \end{aligned} \tag{1}$$

1. On regardera d'abord la consistance du θ -schéma et on obtiendra comme cas particulier le schéma de Crank-Nicolson. On évalue dans ce cas l'erreur de troncature

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_j^n &= \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} - \nu \theta \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{\Delta x^2} \\
 &\quad - \nu(1 - \theta) \frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t_{n+1}))}{\Delta x^2} \\
 &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) - \nu \theta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta x^4) \right) \\
 &\quad - \nu(1 - \theta) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \left(\nu \Delta t + \frac{\Delta x^2}{12} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + \frac{\nu \Delta t \Delta x^2}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^4) \right).
 \end{aligned} \tag{2}$$

On tiendra de nouveau compte du fait que $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et par conséquent que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$. En groupant les termes du même ordre de (2) on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_j^n &= (1 - \theta - (1 - \theta)) \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) \\
 &\quad + \left(\frac{\nu \Delta t}{2} - \theta \frac{\Delta x^2}{12} - (1 - \theta) \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \nu \Delta t \right) \right) \nu \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^4) \\
 &= \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \Delta t \nu \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) - \frac{\Delta x^2}{12} \nu \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) \\
 &\quad + (\theta - 1) \frac{\nu \Delta t \Delta x^2}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^4).
 \end{aligned}$$

On voit bien que pour $\theta = 0$ (implicite) ou $\theta = 1$ (explicite) le schéma est d'ordre 1 en temps et 2 espace et il devient d'ordre 2 en temps pour $\theta = 1/2$ (Crank-Nicolson).

2. *Schéma de DuFort-Frankel*. En faisant des développement de Taylor autour du point (x_j, t_n) on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_j^n &= \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1}))}{2\Delta t} - \nu \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1}) + u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) - \nu \left(2 \frac{u(t_n, x_j)}{\Delta x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \right) + \nu \frac{u(x_j, t_{n+1}) + u(x_j, t_{n-1}))}{\Delta x^2} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \nu \frac{u(x_j, t_{n+1}) + u(x_j, t_{n-1})) - 2u(x_j, t_n)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ &= \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2)\end{aligned}$$

On voit que le schéma est consistant uniquement si $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ tend vers 0. Dans ce cas on aurait l'ordre 2 en temps et en espace.

Stabilité en norme L^2

1. Le θ -schéma. On injecte un mode de Fourier $u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ dans le schéma, afin de calculer son facteur d'amplification

$$\begin{aligned}& \frac{A(k)^{n+1} e^{2i\pi jk\Delta x} - A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}}{\Delta t} \\ & - (1 - \theta) \nu \frac{A(k)^{n+1} e^{2i\pi(j+1)k\Delta x} - 2A(k)^{n+1} e^{2i\pi jk\Delta x} + A(k)^{n+1} e^{2i\pi(j-1)k\Delta x}}{\Delta x^2} \\ & - \theta \nu \frac{A(k)^n e^{2i\pi(j+1)k\Delta x} - 2A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x} + A(k)^n e^{2i\pi(j-1)k\Delta x}}{\Delta x^2} = 0\end{aligned}$$

En simplifiant le facteur $A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ on obtient

$$A(k) - 1 - (1 - \theta) \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} A(k) (e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}) - \theta \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} (e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}) = 0.$$

ce qui conduit à

$$A(k) \left(1 + 4(1 - \theta) \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x) \right) = 1 - 4\theta \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x).$$

La condition $A(k) \leq 1$ sera donc équivalente à

$$-1 \leq \frac{1 - 4\theta \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x)}{1 + 4(1 - \theta) \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x)} \leq 1 \Leftrightarrow 2(2\theta - 1) \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x) \leq 1.$$

On en déduit que si $\theta \leq 1/2$, le schéma est *inconditionnellement stable* et que si $1/2 < \theta \leq 1$ alors il est stable sous la condition

$$2(2\theta - 1) \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq 1.$$

En particulier le schéma de Crank-Nicolson est inconditionnellement stable.

2. Schéma de DuFort-Frankel. On injecte un mode de Fourier $u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ dans le schéma, afin de calculer son facteur d'amplification et on simplifiera ensuite $A(k)^{n-1} e^{2i\pi jk\Delta x}$

$$\begin{aligned}A(k)^2 - 1 - c(2A(k) \cos(k\pi \Delta x) - A(k)^2 - 1) &= 0, \quad c = \frac{2\nu \Delta t}{\Delta x^2} \\ \Rightarrow A(k)^2(1 + c) - 2cA(k) \cos(k\pi \Delta x) + c - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Il s'agit d'une equation de second degre, possedant 2 racines $A_{1,2}(k)$. Si le determinant de cette equation est negatif, les deux racines sont conjuguees complexes, de meme module et

$$|A_1(k)|^2 = |A_2(k)|^2 = |A_1(k)A_2(k)| = \left| \frac{c-1}{c+1} \right| < 1.$$

on en deduit que le schema est inconditionnellement stable. Si le determinant est positif, les deux racines sont reelles

$$A_{1,2}(k) = \frac{c \cos(k\pi\Delta x) \pm \sqrt{c^2 \cos^2(k\pi\Delta x) - c^2 + 1}}{c + 1}.$$

et on pourra montrer facilement par simple calcul que $\max\{A_1(k), A_2(k)\} = A_1(k) \leq 1$ et que $\min\{A_1(k), A_2(k)\} = A_2(k) \geq -1$.