Équations aux dérivées partielles – TD 3
SOLUTIONS

Par la suite on va utiliser les relations suivantes basées sur des développements en série de Taylor et on va tenir compte du fait que $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (car u est solution de l'équation)

$$\begin{aligned}
\frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2),\\
\frac{u(x_{j+1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j-1},t_n)}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \mathcal{O}(\Delta x^2),\\
\frac{u(x_{j+1},t_{n+1}) - 2u(x_j,t_{n+1}) + u(x_{j-1},t_{n+1})}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta x^2)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \Delta t \underbrace{\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_j,t_n)}_{\text{on va ensuite remplacer } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial u}{\partial t}} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \frac{1}{\nu}\Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2)
\end{aligned} \tag{1}$$

1. On regardera d'abord la consistance du θ-schéma et on obtiendra comme cas particulier le schéma de Crank-Nicolson. On évalue dans ce cas l'erreur de troncature

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_j^n &= \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} - \theta \frac{u(x_{j+1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j-1},t_n)}{\Delta x^2}\\
&-(1-\theta)\frac{u(x_{j+1},t_{n+1}) - 2u(x_j,t_{n+1}) + u(x_{j-1},t_{n+1})}{\Delta x^2}\\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) - \nu\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \mathcal{O}(\Delta x^2)\right)\\
&-\nu(1-\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \frac{1}{\nu}\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2)\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

En groupant les termes du même ordre de (2) on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_j^n &= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n)}_{=0}\\
&+\Delta t \underbrace{\left(\frac{1}{2} - (1-\theta)\right)}_{\text{ce terme s'annule ssi } \theta = 1/2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n)\\
&+\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2)
\end{aligned}$$

On voit bien que pour $\theta = 0$ (implicite) ou $\theta = 1$ (explicite) le schéma est d'ordre 1 en temps et 2 espace et il devient d'ordre 2 en temps pour $\theta = 1/2$ (Crank-Nicolson).

2. *Schéma de DuFort-Frankel.* En faisant des développement de Taylor autour du point (x_j, t_n) on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_j^n &= \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1})}{2\Delta t} - \nu \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1}) + u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x^2} \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) - \nu \left(2\frac{u(t^n, x_j)}{\Delta x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \right) + \nu \frac{u(x_j, t_{n+1}) + u(x_j, t_{n-1})}{\Delta x^2} \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \nu \frac{u(x_j, t_{n+1}) + u(x_j, t_{n-1}) - 2u(x_j, t_n)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\
&= \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2)
\end{aligned}
$$

On voit que le schéma est consistant uniquement si $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ tend vers 0. Dans ce cas on aurait l'ordre 2 en temps et en espace.

Stabilité en norme L^2

1. Le θ-schéma. On injecte un mode de Fourier $u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ dans le schéma, afin de calculer son facteur d'amplification

$$
\begin{aligned}
&\frac{A(k)^{n+1} e^{2i\pi jk\Delta x} - A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}}{\Delta t} \\
&\quad -(1-\theta)\nu \frac{A(k)^{n+1} e^{2i\pi(j+1)k\Delta x} - 2A(k)^{n+1} e^{2i\pi jk\Delta x} + A(k)^{n+1} e^{2i\pi(j-1)k\Delta x}}{\Delta x^2} \\
&\quad -\theta\nu \frac{A(k)^n e^{2i\pi(j+1)k\Delta x} - 2A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x} + A(k)^n e^{2i\pi(j-1)k\Delta x}}{\Delta x^2} = 0
\end{aligned}
$$

En simplifiant le facteur $A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ on obtient

$$
A(k) - 1 - (1-\theta)\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} A(k)(e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}) - \theta \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}(e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}) = 0.
$$

ce qui conduit à

$$
A(k)\left(1 + 4(1-\theta)\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x)\right) = 1 - 4\theta\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x).
$$

La condition $A(k) \leq 1$ sera donc équivalente à

$$
-1 \leq \frac{1 - 4\theta\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x)}{1 + 4(1-\theta)\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x)} \leq 1 \Leftrightarrow 2(2\theta - 1)\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x) \leq 1.
$$

On en déduit que si $\theta \leq 1/2$, le schéma est *inconditionnellement stable* et que si $1/2 < \theta \leq 1$ alors il est stable sous la condition

$$
2(2\theta - 1)\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1.
$$

En particulier le schéma de Crank-Nicolson est inconditionnellement stable.

2. Schéma de DuFort-Frankel. On injecte un mode de Fourier $u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi jk\Delta x}$ dans le schéma, afin de calculer son facteur d'amplification et on simplifiera ensuite $A(k)^{n-1} e^{2i\pi jk\Delta x}$

$$
\begin{gathered}
A(k)^2 - 1 - c\,(2A(k)\cos(k\pi\Delta x) - A(k)^2 - 1) = 0,\ c = \tfrac{2\nu\Delta t}{\Delta x^2} \\
\Rightarrow A(k)^2(1+c) - 2cA(k)\cos(k\pi\Delta x) + c - 1 = 0.
\end{gathered}
$$

Il s'agit d'une equation de second degré, possedant 2 racines $A_{1,2}(k)$. Si le determinant de cette équation est négatif, les deux racines sont conjuguées complexes, de même module et

$$|A_1(k)|^2 = |A_2(k)|^2 = |A_1(k)A_2(k)| = \left|\frac{c-1}{c+1}\right| < 1.$$

on en déduit que le schéma est inconditionnellement stable. Si le determinant est positif, les deux racines sont réelles

$$A_{1,2}(k) = \frac{c\cos(k\pi\Delta x) \pm \sqrt{c^2\cos^2(k\pi\Delta x) - c^2 + 1}}{c+1}.$$

et on pourra montrer facilement par simple calcul que $\max\{A_1(k), A_2(k)\} = A_1(k) \leq 1$ et que $\min\{A_1(k), A_2(k)\} = A_2(k) \geq -1$.