FORMULATION VARIATIONNELLE DES PBMES ELLIPTIQUES

Rappel des définitions :

- Problème aux limites : une EDP munie des CL sur la frontière

Ex : $\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$ (Poisson)

- Problème de Cauchy : une EDP où pour au moins une des variables la cond au bord = CI

Ex : l'ép de la chaleur = pbme aux limites + pbme de Cauchy

- Problème bien posé : On dit que le problème aux limites + pbme de Cauchy $\mathcal{A}(u) = f$ est bien posé si la solution est unique et dépend continûment des données.

· Classification des EDP :

elliptique (Poisson), parabolique (chaleur)
hyperbolique (advection)

Remarque : la notion de problème bien posé est à adapter par rapport au caractère de l'équation)

*

On veut analyser les problèmes elliptiques, donner des résultats pour qu'un problème soit bien posé.

Quelle approche ? Variationnelle ⇝

ceci n'est pas propre aux éq. elliptiques. mais on commence toujours par lè (c'est le plus simple)

On considère le problème modèle suivant :

second membre

$$(1) \begin{cases} -\Delta u = f \ , \Omega \\ u = 0 \ , \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(CL Dirichlet homogène)

Formulation classique vs. formulation variationnelle

Formulation classique.

- il faut supposer suffisamment de régularité pour le solution u afin que l'equation (1) ait un sens
- la solution "classique" vérifie (1) en chaque point. Elle s'appelle aussi solution "forte" et $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (deux fois continûment différentiable è l'intérieur et continu sur le bord)

Pourquoi la formulation classique ne convient pas?

Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \Rightarrow f \in C(\bar{\Omega})$

(si on connaît à l'avance la régularité de la solution alors f est continue.)

. Par contre si $f \in C(\bar{\Omega})$ on ne peut pas montrer en général qu'il $\exists$ une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$! On peut pas montrer que le problème est bien posé!

$\rightsquigarrow$ On doit changer d'optique et remplacer la formulation forte!

Remarque: le cas uni-dimensionnel est différent. ? Si on prend $N=1$, $\Omega = (0,1)$ alors le problème aux limites

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} = f, \quad 0<x<1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique $\rightsquigarrow$ formule explicite (voir exercice en TD)

Approche variationnelle

On admettra la formule de Green :

- Soit $w \in C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans $\bar{\Omega}$. Alors,

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} w\, n_i(x)\, ds}$$

où $\underline{n}$ normale extérieure à la frontière du domaine $\partial\Omega$ et $n_i(x)$ est la i-ème composante de la normale.

Corolaire. Formule d'intégration par parties qui généralise la formule connue en 1d.

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} u(x) v(x)\, n_i(x)\, ds$$

- $\left(\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \right.$

$$\left. - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx \right)$$

· Une autre version utile (preuve en TD)

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, ds$$

où $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ (dérivée normale de la solution u)

Propriété. Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$ et X l'espace défini par

$$X = \{ \varphi \in C^1(\bar{\Omega}) \, , \, \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

Alors u est solution du problème (1) ssi

$$(2) \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx \, , \forall v \in X$$

L'égalité (2) s'appelle formulation variationnelle

Remarques : • si $u \in C^2(\Omega)$ alors (1) $\Leftrightarrow$ (2)

• Par contre, si $u \notin C^2(\Omega)$ on voit que la formulation (2) a un sens mais pas la formulation (1).

Preuve (equivalence de (1) et (2))

"$\Rightarrow$" On multiplie l'équation (1) par v et on intègre par parties

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, ds}_{=0,\ v \in X}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx \quad \forall v \in X.$$

"$\Leftarrow$" Si (2) est vérifié, alors par IPP

$$\Rightarrow \int_\Omega (\Delta u + f) v \, dx = 0 \quad \forall v \in C^2(\Omega)$$

$\Rightarrow -\Delta u = f$ (ceci est vrai uniquement si $g = \Delta u + f \in C(\Omega)$ donc si $u \in C^2(\Omega)$)

Exemple de solution "faible"

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

On cherche une solution $C^1(0,1) \cap C([0,1])$ en integrant sur chaque intervalle

. $x \in [0, 1/2)$ $\quad -u''(x) = 1$

$$u'(x) = -x + c_1$$

$$u(x) = -\frac{x^2}{2} + c_1 x + d_1$$

$u(0) = 0 \Rightarrow u(x) = -\frac{x^2}{2} + c_1 x$

. $x \in (1/2, 1]$, $\quad -u''(x) = 0$ $\quad u(1) = 0$

$$u(x) = c_2 x + d_2 = c_2(x-1)$$

. u et u' continues en $x = 1/2$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} + c_1 = c_2 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + c_1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{c_2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 1/2 \\ c_1 + c_2 = 1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 3/8 \\ c_2 = -1/8 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow u(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x, & 0 \leq x < 1/2 \\ -\frac{x}{8} + \frac{1}{8}, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

$u \notin C^2$ mais u est solution au sens faible.