Équations aux dérivées partielles – TD 2
SOLUTIONS

1. **a)** On remarque que le schéma peut se ré-écrire comme

$$u_j^{n+1} = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} u_{j-1}^n + \left(1 - 2\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_j^n + \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} u_{j+1}^n. \tag{1}$$

Dans le cas où $\sigma = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$ on voit bien que ceci se transcrit comme une combinaison convexe de u_{j-1}^n, u_j^n et u_{j+1}^n:

$$u_j^{n+1} = \sigma u_{j-1}^n + (1-2\sigma)\, u_j^n + \sigma u_{j+1}^n. \tag{2}$$

En raisonnant par réccurence, on suppose que $m \leq u_j^N \leq M$, $\forall j \in \mathbb{Z}, \forall N \leq n$. L'équation (2) montre que $m \leq u_j^{n+1} \leq M$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, donc ces inegalités restent vraies pour tout n et donc le principe du maximum discret est vérifié.

b) On remplace $u_j^0 = (-1)^j$ dans (1) et on obtient de proche en proche que

$$u_j^1 = (-1)^j \left(1 - 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\right), \ldots, u_j^n = (-1)^j \left(1 - 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\right)^n = (-1)^j (1-4\sigma)^n. \tag{3}$$

Mais comme $\sigma > \frac{1}{2}$, on a que $1 - 4\sigma < -1$, ce qui montre bien la divergence vers infini (en module) de la suite u_j^n et donc l'instabilité du schéma.

`Remarque`: Cet éxercice montre que si la condition de stabilité n'est pas respectée, il existe toujours une solution initiale pour laquelle il y aura divergence (même si dans certains cas cela peut accidentellement marcher).

2. **a)** On remarque que le schéma peut se ré-écrire comme

$$-\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} u_{j-1}^n + \left(1 + 2\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_j^n - \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} u_{j+1}^n = u_j^{n-1},\ j = 1, \ldots, J-1. \tag{4}$$

En notant comme avant $\sigma = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}$, on voit que U^n et U^{n-1} vérifient la relation

$$AU^n = U^{n-1}$$

avec A la matrice tridiagonale symetrique suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\sigma & -\sigma & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ -\sigma & 1+2\sigma & -\sigma & 0 & & & \vdots \\ 0 & -\sigma & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -\sigma & 0 \\ \vdots & & & 0 & -\sigma & 1+2\sigma & -\sigma \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -\sigma & 1+2\sigma \end{pmatrix} \tag{5}$$

Le fait que U^n est déterminé d'une façon unique découle de l'inversibilité de la matrice A. Cette dernière propriété est vraie car A est définie positive. En effet, soit $X \in \mathbb{R}^J$

$$\begin{aligned} X^T A X &= \sum_{j=1}^{J-1} X_j^2 + \sigma \left(2 \sum_{j=1}^{J-1} X_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{J-2} X_j X_{j+1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{J-1} X_j^2 + \sigma (X_1^2 + X_{J-1}^2) + \sigma \sum_{j=1}^{J-2} (X_j - X_{j+1})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

l'égalité avec 0 ayant lieu ssi $X_j = 0$ et par conséquent $X = 0$.
b) On va raisonner de nouveau par réccurence. Soit k t.q. $u_k^n = \max\{u_j^n, \, j = 1, ..., J-1\}$. Pour $j = k$ le schéma s'écrit

$$(1+2\sigma) u_k^n = u_k^{n-1} + \sigma(u_{k-1}^n + u_{k+1}^n) \leq u_k^{n-1} + 2\sigma u_k^n \Rightarrow u_k^n \leq u_k^{n-1} \leq \max\{u_j^{n-1}, \, j = 1, ..., J-1\}.$$

Comme le maximum à l'instant n sera toujours inferieur au maximum de l'instant précédent on peut ainsi remonter à la condition initiale et la conclusion suit.

3. **a)** On remarque que le schéma peut se ré-écrire comme

$$u_j^{n+1} = \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n + \frac{V\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^n. \tag{6}$$

Dans le cas où $\sigma = \frac{V\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ on voit bien que u_j^{n+1} sécrit comme une combinaison convexe de u_{j-1}^n et u_j^n

$$u_j^{n+1} = \sigma u_{j-1}^n + (1-\sigma) u_j^n. \tag{7}$$

En raisonnant par réccurence, on suppose que $m \leq u_j^N \leq M$, $\forall j \in \mathbb{Z}, \forall N \leq n$. L'équation (7) montre que $m \leq u_j^{n+1} \leq M$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, donc ces inegalités restent vraies pour tout n et donc le principe du maximum discret est vérifié.
b) On remplace $u_j^0 = (-1)^j$ dans (6) et on obtient de proche en proche que

$$u_j^1 = (-1)^j \left(1 - 2\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right), \ldots, u_j^n = (-1)^j \left(1 - 2\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^n = (-1)^j (1-2\sigma)^n. \tag{8}$$

Mais comme $\sigma > 1$, on a que $1 - 2\sigma < -1$, ce qui montre bien la divergence vers infini (en module) de la suite u_j^n et donc l'instabilité du schéma.

4. **a)** On voit facilement par calcul direct des dérivées que la fonction donnée est bien solution du problème de Cauchy.

5. **b)** Il est évident que la solution explose exponentiellement quand $x > 0$ et n tend vers l'infini à cause de la présence de la fonction sinh. La même chose se passe pour les dérivées partielles,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -n e^{-\sqrt{n}} \sin(ny) \cosh(nx), \; \frac{\partial u}{\partial y} = -n e^{-\sqrt{n}} \cos(ny) \sinh(nx),$$

on en conclut que la solution explose indépendamment des données et donc le problème est mal posé.