Méthode des différences finies

1 Différences finies pour l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & , x \in (0,1) \end{cases}$$

On discrétise le domaine :

- pas d'espace $\Delta x = \dfrac{1}{N+1}$ $\quad (x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$.
- pas de temps $\Delta t \geq 0$

$u_j^n \sim u(x_j, t_n)$ et $u_j^0 = u_0(x_j)$ $\quad j \in \{0, 1, \dots N+1\}$.

Conditions aux limites : par exemple Dirichlet $u(0,t) = u(1,t) = 0$

$\iff$ au niveau discret $u_0^n = u_{N+1}^n = 0 \quad \forall n > 0$.

$\Rightarrow$ À chaque pas de temps on calcule $(u_j^n)_{1 \leq j \leq n} =: U^n$ vecteur des valeurs inconnues.

Quelques exemples de schémas :

- Explicite :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad n \geq 0 \quad j \in \{1, \dots N\}$$

- Implicite :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0$$

- Combinaison convexe de implicite et explicite $\Rightarrow$ θ schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu\theta \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} - \nu(1-\theta) \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

$\theta = 0 \Rightarrow$ explicite, $\theta = 1$ implicite, $\theta = \frac{1}{2}$ Crank-Nicolson.

R. Tous les schémas précédents s'appellent "à deux niveaux" (ils font intervenir seulement 2 pas de temps)

Il existe des schémas à plusieurs niveaux (duFort-Frankel, Gear) et plein d'autres.

Comment les comparer ? N[illegible] [illegible], stabilité

Remarques : On peut ajouter un second membre

Le nombre des valeurs $u_{j'}^{n'}$ qu'un schéma fait intervenir s'appelle <u>stencil</u> (support en français)

On peut également discrétiser les CL de Neumann.

<u>Notion de consistance et précision</u>

Soit $F(u)$ l'éq aux dérivées partielles à approcher. Le schéma aux différences finies est donnée par la formule.

$$F_{\Delta t, \Delta x}\left(\{u_{j+k}^{n+m}\}\ m^- \leq m \leq m^+,\ k^- \leq k \leq k^+\right) = 0 . \quad (*)$$

où m^-, m^+, k^-, k^+ définissent la largeur du stencil.

<u>Définition</u>: Le schéma aux différences finies (*) est dit consistant avec l'équation $F(u)=0$ si pour toute solution $u(t,x)$ suffisamment régulière, l'erreur de troncature du schéma vérifie

$$F_{\Delta t, \Delta x}\left(\{u(t+m\Delta t, k+\Delta x)\}\ m^+ \leq m \leq m^+,\ k^- \leq k \leq k^+\right)$$

tend vers 0 uniformément par rapport à (t,x) lorsque Δt et Δx tendent vers 0 indépendamment. Le schéma est dit précis à l'ordre p en espace et q en temps si l'erreur de troncature tend vers zéro comme $O((\Delta x)^p + O(\Delta t)^q)$ pour $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$.

<u>En pratique</u>, on remplace u_{j+k}^{n+m} dans le schéma par $u(t+m\Delta t, x+k\Delta x)$. On peut aussi montrer que le schéma explicite est $O((\Delta x)^2 + \Delta t)$. En plus si $\frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{6} \Rightarrow$ il devient $O((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$.

Développement de Taylor.

$$\frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} - \nu \frac{u(x_{j-1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j+1}, t_n)}{\Delta x^2}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \cancel{\frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j, t_n)}\ O(\Delta t^2)$$

$$-\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + O(\Delta x^4)\right)$$

$$= \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) - \nu\frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4)$$