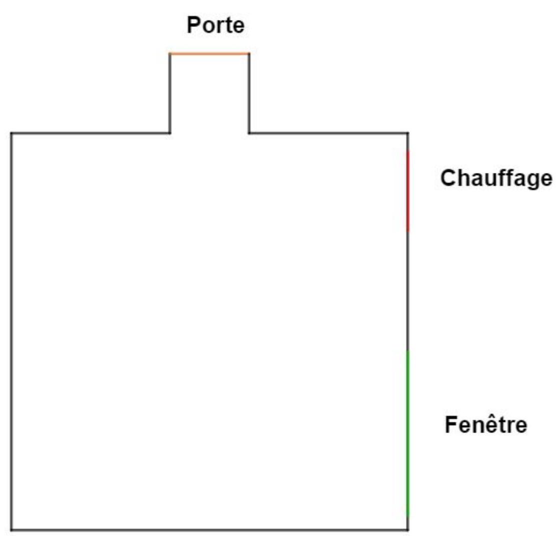
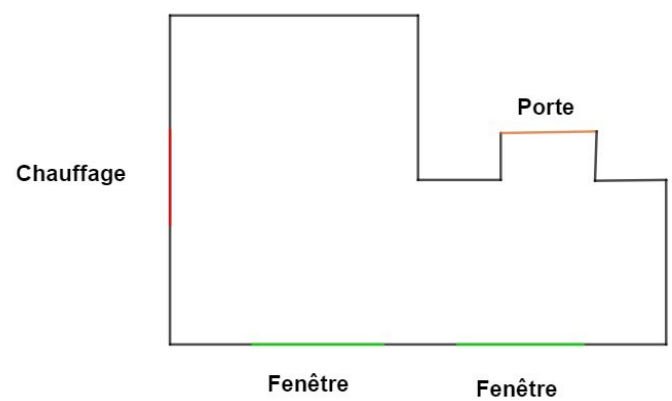
Enzo ISNARD
Guillaume GROS
MAM4 G2

# Rapport Projet EDP:

## Partie 1: Equation de la chaleur stationnaire

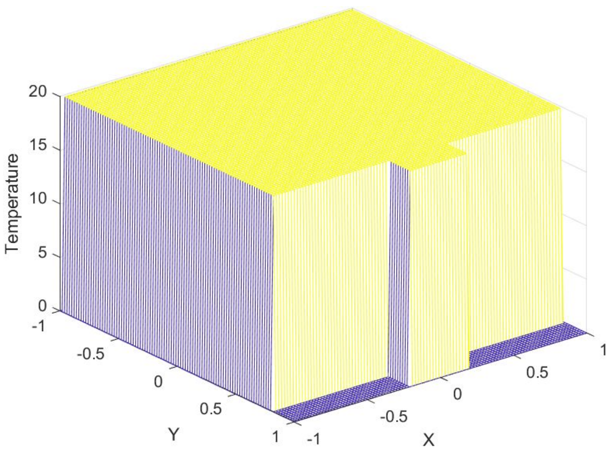
Cette partie consiste à modéliser l'équation stationnaire de la chaleur en 2D, qui est en fait l'équation de Poisson, dans une géométrie non-rectangulaire. Pour résoudre ce problème on utilise la fonction *deslq* de Matlab qui discrétise le laplacien avec une méthode à 5 points. On passe donc de l'équation $-\Delta u = f$ au système linéaire $Au = f$ où A est une matrice tridiagonale. On simule l'équation dans deux géométries que voici:

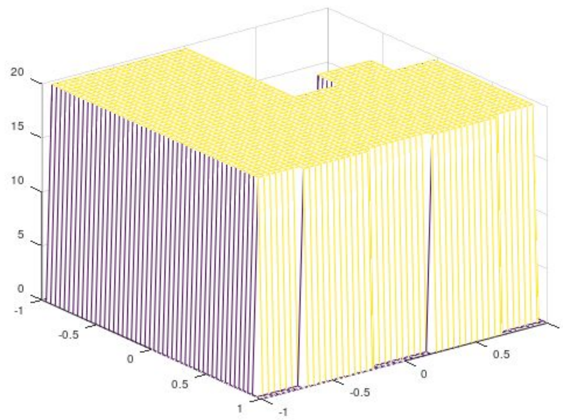


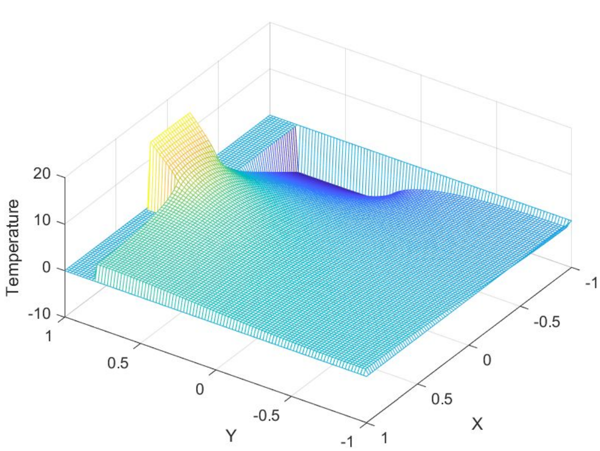

La porte et les fenêtres sont à une température constante et sans condition de flux particulière. Le chauffage est la localisation de la source de chaleur (le second membre de l'équation).Les murs sont quant à eux parfaitement isolés.
Les résultats des simulations sont les suivants:

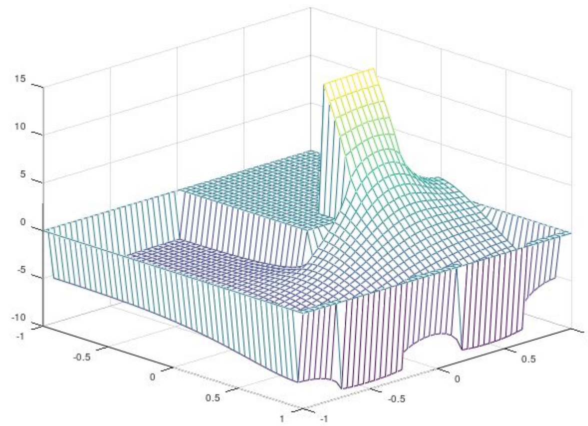
Enzo ISNARD
Guillaume GROS
MAM4 G2



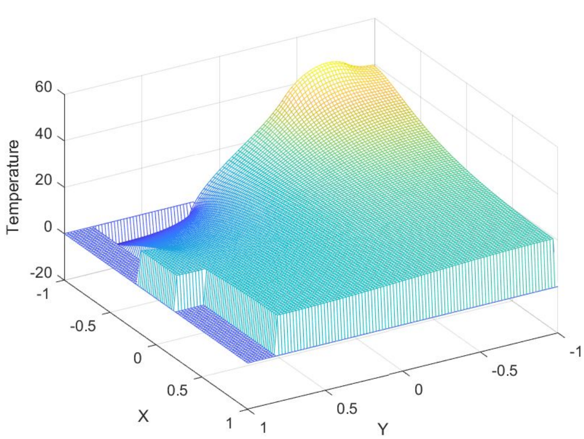



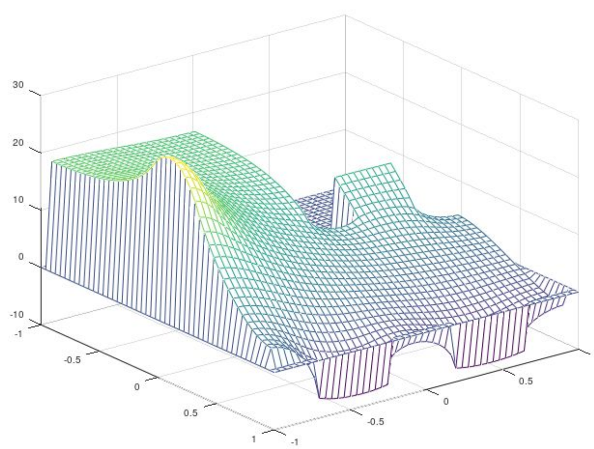
Quand les portes et les fenêtres sont à 20°C, on observe que la température de la pièce est homogène.



En hiver et sans chauffage, on observe que la pièce est chauffée par la porte et refroidie par les fenêtres. Le reste de la pièce dépend alors de la proximité des 2 sources de chaleur.

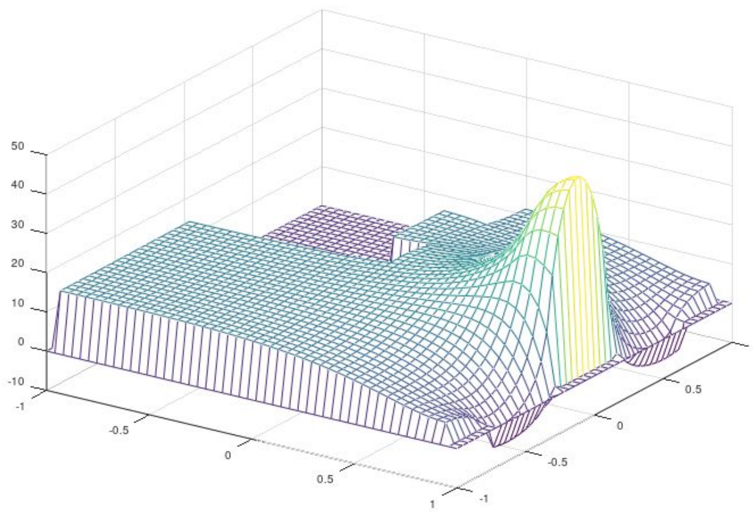


Enzo ISNARD
Guillaume GROS
MAM4 G2

Quand le chauffage est activé, on observe une température supérieure partout sauf aux fenêtres et portes, ce qui est normal d'après les conditions au limites. On voit bien que les murs sont isolants car loin des objets thermiques ils font une “moyenne” au lieu de dissiper la chaleur ( comme c'est le cas en vrai ). Pour ce qui est des positions des chauffages, dans la première chambre on voit qu'il y a un coin très chaud et un coin très froid ( respectivement le chauffage et la fenêtre ). On pourrait se dire que le chauffage donne une température plutôt homogène pour le reste de la pièce mais il y a quand même un fort gradient de température. Pour la deuxième chambre, la température est plutôt faible dans la moitié de la pièce mais derrière le chauffage la température est constante autour de 20 °C.

Autre position de chauffage pour la deuxième chambre:




Dans cette configuration on peut voir que la température du chauffage doit être bien plus grande pour une température à peu près égale à 16°C mais que la pièce a une température plus homogène que dans la première configuration.

Enzo ISNARD
Guillaume GROS
MAM4 G2

# Partie 2: Instationnaire

On souhaite dans cette partie l'équation de la chaleur instationnaire, ie l'équation:
$\partial t\, u - \Delta u = f$

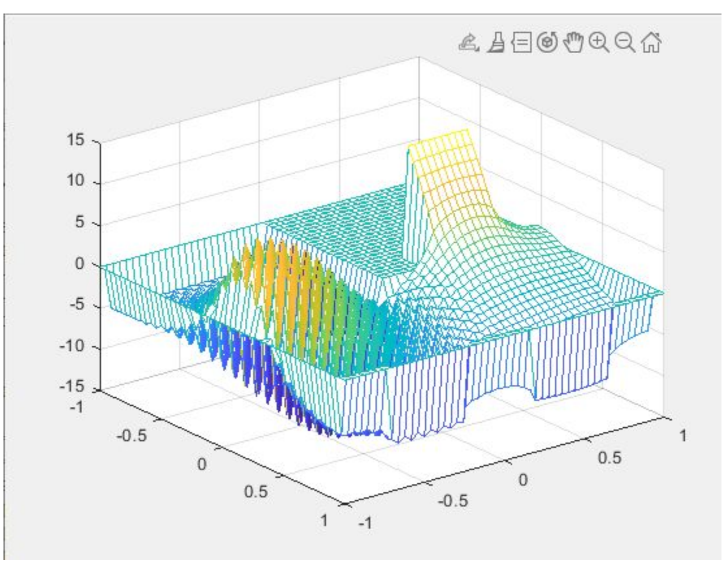
## I/Explicite

En discrétisant le laplacien et l'opérateur $\partial t$ on obtient:
$u^{n+1} = -dt\, A\, u^n + u^n + dt\, f = (I - dt\, A)u^n + dt\, f$
Où A est la matrice de discrétisation de $-\Delta$.
D'après le cours on sait qu'on doit avoir $\frac{dt}{h^2} < 0.25$ pour que le schéma soit stable.Si on veut avoir une précision correcte et ne pas avoir des temps de calcul trop longs on est obligés d'avoir un pas de temps assez petit, ce qui fait qu'on ne peut pas beaucoup avancé dans la simulation. Avec 50 pas de discrétisation pour x et y,un cfl à 0.25 et 1000 étapes on a un temps de calcul de 0.25s avec cette méthode.
Test: lancement du chauffage dans la chambre

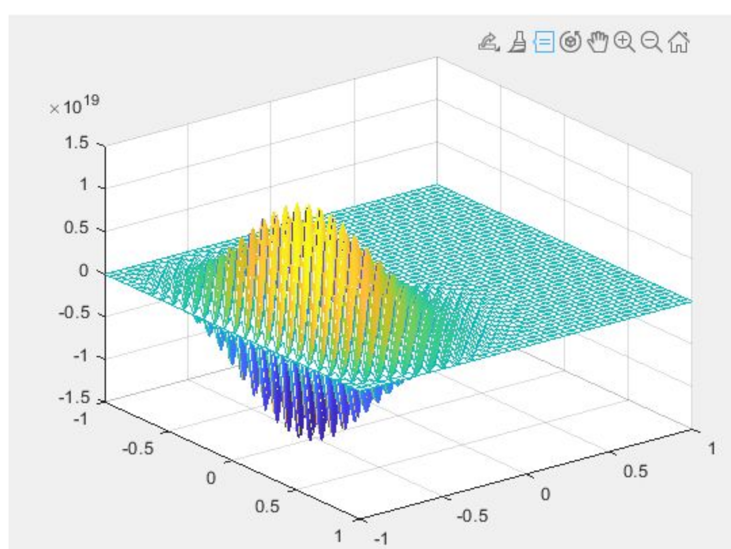
explicite1.mov explicite2.mov

Données pour les vidéos : nt=160
cfl=0.25

Pour un cfl=0.26 on a:



Quand le cfl=0.3 on observe:



Enzo ISNARD
Guillaume GROS
MAM4 G2

## II/Implicite

En évaluant le laplacien discret en $u^{n+1}$ plutôt qu'en $u^n$ on obtient comme schéma:
$u^{n+1} - u^n = -Adt\, u^{n+1} + dt\, f \Leftrightarrow (dtA + I)u^{n+1} = u^n + dt\, f$
On remarque que la matrice $dtA + I$ est une matrice symétrique définie positive, ce qui fait qu'on peut résoudre le système linéaire à l'aide de la décomposition de Cholesky.Cette méthode est inconditionnellement stable ce qui fait qu'on peut mettre un cfl de l'ordre de 40 pour que la simulation avance plus vite.Elle est cependant bien plus lente, en effet avec les même paramètres que la méthode explicite on a un temps d'exécution de 6.4s.

implicite1.mov implicite2.mov

Données pour les vidéos : nt =160 et cfl=10

## Conclusion:

Les résultats nous semblent plutôt cohérents même s'ils ne sont pas totalement réalistes. On pense que la température devrait être plus homogène dans la réalité, peut être que cela dû au fait qu'on ait mis $\nu = 1$ dans l'équation,qu'on se se soit réduit qu'à deux dimensions ou bien que le modèle soit trop simple.La convection de l'air est totalement négligé dans notre modèle.
Le schéma implicite nous semble aussi être le meilleur schéma pour l'équation de la chaleur instationnaire car malgré ses temps de calcul plus longs il nous permet d'aller plus loin dans la simulation alors qu'on se retrouve assez limité avec l'explicite à cause de sa condition de stabilité.
Les méthodes que nous utilisons ne nous permettent aussi que de traiter des géométries formées d'unions de rectangles, ce qui est une assez grande limitation.