Contrôle EDP (Sujet C) Durée : 90 minutes

Les documents de cours ne sont pas autorisés. Justifier vos réponses d'une façon concise et claire.

Questions théoriques:

- Définir la notion de diffusion numérique et expliquer brièvement comment on peut montrer qu'un schéma est diffusif.
- Écrire le schéma d'Euler implicite pour l'équation de la chaleur.
- Donner l'expression de l'erreur de consistance pour le schéma d'Euler explicite décentré amont appliqué à l'équation d'advection.

Exercice 1

On considère l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

et on se propose de la résoudre en utilisant le schéma numérique implicite suivant

$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2\,u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \qquad (j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

1. Montrer que le schéma (2) est consistant et donner son ordre d'approximation.
2. Montrer que ce schéma implicite est inconditionnellement stable.

`Indication`: Si le facteur d'amplification vérifie une équation quadratique, le schéma est stable si les deux solutions sont inférieures à 1 en module. Il est instable si au moins une des solutions est strictement supérieure à 1 en module.

Exercice 2

On considère l'équation d'advection dans le domaine borné $(0,1)$ avec $V > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \end{cases}$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1.

1. Montrer que le schéma de *Lax-Wendroff* implicite advectif avec la partie diffusive explicite
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \frac{V^2 \Delta t}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$
est stable en norme L^2 si $V\Delta t \leq \Delta x$.

2. Calculer l'erreur de troncature du schéma. En déduire que le schéma est consistant avec l'équation d'advection. Quelle est sa précision?