Contrôle Équations aux Dérivées Partielles. Durée : 50 minutes

Les documents de cours ne sont pas autorisés. Justifier vos reponses d'une façon concise et claire.

Questions théoriques:

- Définir la notion de problème bien posé au sens de Hadamard. Pourquoi cette notion est importante?
- Décrire brièvement les différences principales (en terme de propriétés qualitatives) de l'équation de la chaleur et celle d'advection.
- Définir la notion de consistance et donner un exemple d'erreur de consistance (appelée aussi erreur de troncature) pour un schéma de votre choix.
- Définir la notion de stabilité pour une norme vectorielle générique.

On considère le problème de la chaleur en une dimension d'espace

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & 0,\ (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, & \text{Équation à l'intérieur du domaine} \\ u(0,t) & = & u(1,t) = 0,\ t \in \mathbb{R}_*^+ & \text{CL Dirichlet} \\ u(x,0) & = & u_0(x),\ x \in (0,1) & \text{Condition initiale.} \end{array}\right. \tag{1}$$

Exercice

On discrétise le domaine en utilisant un maillage régulier $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$, $\forall n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ où $\Delta x = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$.

- Montrer que le schéma suivant

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{2\nu}{3} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{\nu}{3} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0. \tag{2}$$

  est consistant, d'ordre 1 en temps et 2 en espace et conditionnellement stable en norme L_2 (donner cette condition de stabilité).

- En faisant un petit changement on peut améliorer à la fois la stabilité et la précision en temps du schéma. De quel changement s'agit-il? Justifier votre réponse.

`Indication`: Pour étudier la consistance on va écrire d'abord l'erreur de troncature. On va faire des développements de Taylor en espace et en temps de la solution jusqu'à un ordre suffisant permettant de déterminer la précision et simplifier les termes de l'erreur de troncature (e.g. 4 en espace, 2 ou 3 en temps dépendant du schéma)