Contrôle Équations aux Dérivées Partielles. Durée : 50 minutes

Les documents de cours ne sont pas autorisés. Justifier vos reponses d'une façon concise et claire.

Questions théoriques:

- Quelles sont les classes principales d'EDP? Donner un exemple de chaque classe.
- Quels sont les avantages des schémas explicites et implicites? Donner un exemple de chaque catégorie.
- Définir la notion de stabilité pour une norme vectorielle générique.
- Décrire brièvement la méthode de von Neumann pour étudier la stabilité en norme L^2.

On considère le problème de la chaleur en une dimension d'espace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & 0,\ (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, & \text{Équation à l'intérieur du domaine} \\ u(0,t) & = & u(1,t) = 0,\ t \in \mathbb{R}_*^+ & \text{CL Dirichlet} \\ u(x,0) & = & u_0(x),\ x \in (0,1) & \text{Condition initiale.} \end{cases} \tag{1}$$

Exercice

On discrétise le domaine en utilisant un maillage régulier $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$, $\forall n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ où $\Delta x = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$.

- Montrer que le schéma suivant

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{\nu}{2}\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0. \tag{2}$$

  est consistant, d'ordre 2 en temps et en espace et inconditionnellement stable en norme L_2.

- Écrire ce schéma sous forme matricielle et expliquer exactement quel système linéaire il faut résoudre à chaque pas de temps.

`Indication`: Pour étudier la consistance on va écrire d'abord l'erreur de troncature. On va faire des développements de Taylor en espace et en temps de la solution jusqu'à un ordre suffisant permettant de déterminer la précision et simplifier les termes de l'erreur de troncature (e.g. 4 en espace, 2 ou 3 en temps dépendant du schéma)