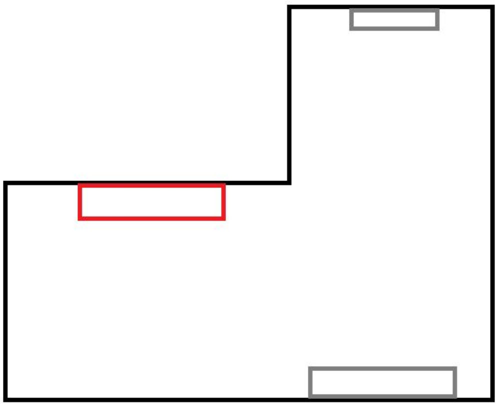
<u>Rapport de projet d'EDP</u>

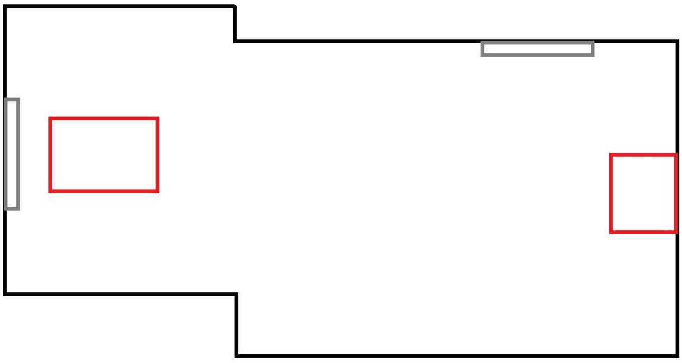
Par Sacha Psalmon et Baptiste Schall

Introduction

Le but de ce projet est de mettre en pratique ce que nous avons appris sur la méthode des différences finies. Pour ce faire, nous l'appliquerons dans une simulation de la température d'une chambre à coucher. Nous allons commencer par une simulation statique de la chaleur (en utilisant l'équation de Poisson). Ensuite, nous réaliserons une simulation dynamique à l'aide des méthodes d'Euler implicite et explicite.
Ces simulations seront réalisés dans les modèles de chambres ci dessous :



Chambre 1



Chambre 2

Les chauffages à l'intérieur des chambres sont représentés en rouge, les portes et les fenêtres en gris.
Note : La chambre 2 étant bien plus grande en superficie que la chambre 1, la présence de deux chauffages est nécessaire pour pouvoir y vivre.

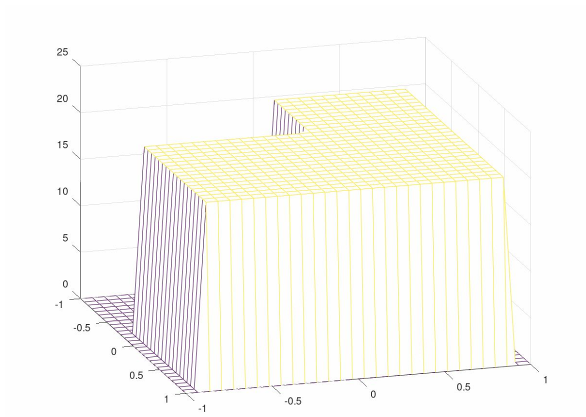
$1^{\text{ère}}$ Partie

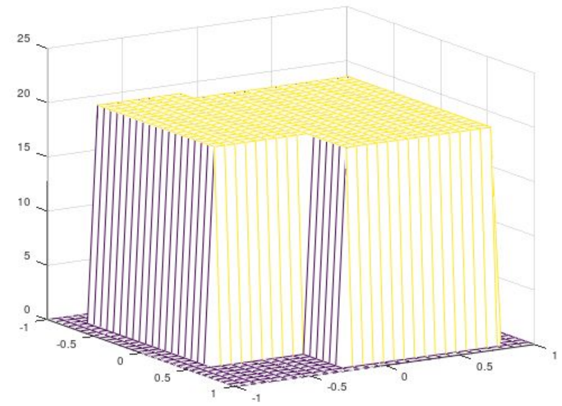
Nous utiliserons donc l’équation de la chaleur stationnaire, à savoir :

$$-\Delta u = f$$

Pour ce qui est est des conditions aux limites, nous imposons des conditions de Neumann aux murs de la pièce (c'est-à-dire qu’ils sont parfaitement isolants). Pour les portes et fenêtres, on leur impose des conditions de Dirichlet (c'est-à-dire qu’elles n’ont aucune isolation et ont une température fixé).

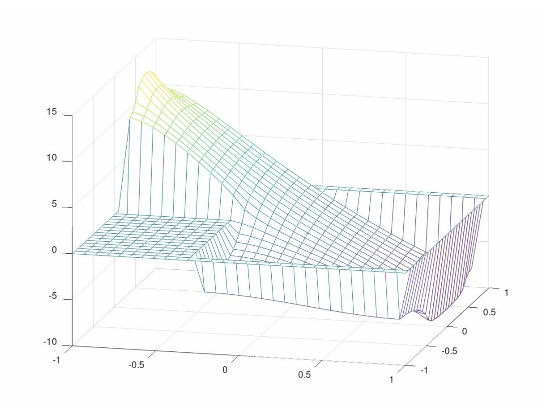
Pour notre premier test, nous allons fixer une température des portes et fenêtres de 20 °C sans chauffage. Nous obtenons les résultats suivants :

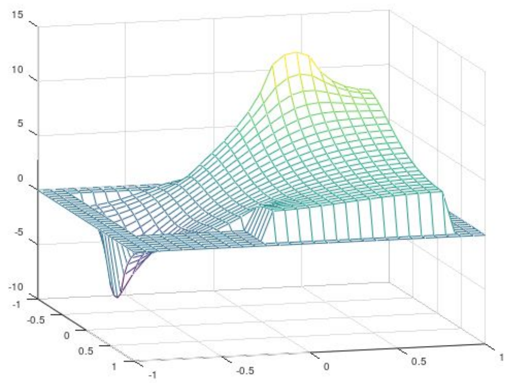




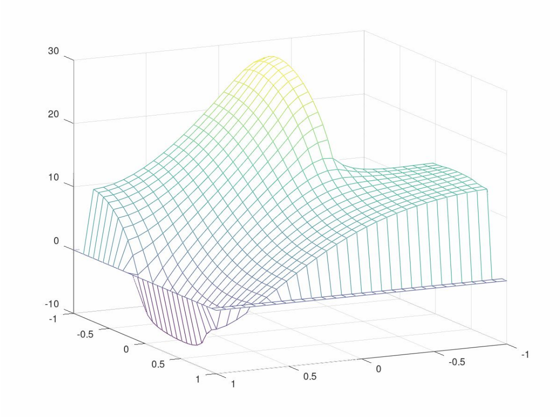
A savoir, une température constante égale à 20 °C partout dans la pièce. Ce résultat est tout à fait normal, les murs étant totalement isolants et les portes et fenêtres étant ici les seules sources de chaleur, la température s’équilibre à 20 °C.

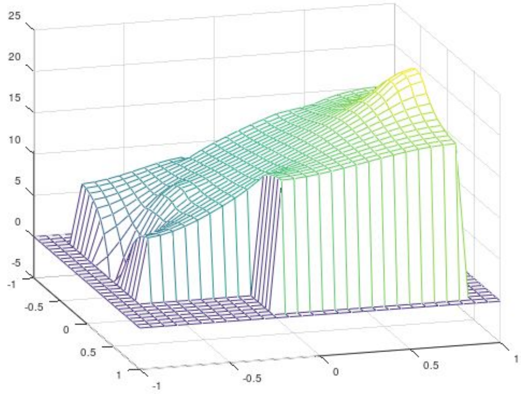
Nous allons maintenant calculer la température ambiante sans chauffage en hiver. La porte, reliée à un couloir, est à 15 °C, la fenêtre quant à elle est à -10 °C.





La température de la porte et de la fenêtre a légèrement varié, ce qui était attendu (la porte ayant réchauffé la fenêtre). On voit bien que dans la majorité des pièces, il fait bien trop froid pour vivre. Essayons maintenant avec du chauffage.





Dans ce premier cas, nous avons réglé la température du chauffage à 180 °C, sinon la température au niveau de la zone directement chauffée est bien trop élevée. Pourtant, dans la chambre 1, on voit qu'il y a toujours une bonne portion de la pièce où il fait moins de 10 °C. Le chauffage de cette chambre est très mal placé. Placer le chauffage dans un coin semble être une mauvaise idée. Les deux chauffages de la chambre 2 permettent une meilleure diffusion de la chaleur, cependant étant donné la taille de la chambre, la température reste assez faible aux alentours de la fenêtre .

$2^{ème}$ Partie

Nous utiliserons donc l'équation de la chaleur instationnaire, à savoir :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$$

Dans cette deuxième partie nous allons réaliser des tests instationnaires pour observer l'évolution de la température au sein des chambres. Au même moment, nous allons comparer les performances des deux méthodes utilisées, à savoir les méthodes d'Euler implicite et explicite. Nous comparerons principalement ces deux méthodes par rapport à leurs stabilités et leurs vitesses d'exécution . Dans la fenêtre de nos tests, en haut vous retrouverez les solutions stationnaires et en bas les instationnaires.

Dans ce premier test, la chambre est initialement froide, le chauffage est éteint. Dans notre expérience, la porte est à 15 °C et la fenêtre à -10 °C. On allume le chauffage à 180 °C.

Test du chauffage des chambres

Dans notre deuxième expérience, la température est de base très élevée (35 °C) et on tente de refroidir la chambre à l'aide d'un radiateur en mode climatiseur (réglé à -100 °C). La température de la porte est ici de 35 °C.

Test du refroidissement des chambres

D'après cette expérience, il faut environ 5 secondes pour que la température dans la chambre soit "idéale". Pour trouver cette valeur, nous avons incrémenter une variable à chaque itération de la boucle, en l'incrémentant à chaque fois du pas de temps et nous l'avons relevée quand la température semblait s'être parfaitement stabilisé (nous avons aussi joué légèrement avec le nombre d'itérations, pour ne pas incrémenter la valeur après que la température soit stable).

Analyse des différences entre le schéma implicite et explicite :

Au niveau de la stabilité, comme vu en cours, le schéma implicite est inconditionnellement stable tandis que le schéma explicite est stable sous condition (CFL ≤ 1/4) .

Par rapport aux calculs, la méthode d'Euler implicite a un inconvénient, à savoir qu'elle demande la résolution de systèmes linéaires afin de calculer la solution. Le temps de calcul dépend donc aussi de la méthode de résolution de système linéaire choisie. Toutefois, le fait que la méthode implicite est inconditionnellement stable est un avantage non négligeable.

Voici un test réalisé en utilisant la méthode explicite avec un nombre CFL supérieur à 1/4.

Test en question

Pour ce qui est de la vitesse d'exécution, à paramètres égaux, avec un nombre raisonnable (30) de points de discrétisation, les temps d'exécution sont relativement similaires. Néanmoins, quand on augmente leur nombre (nous avons testé avec 300 points de discrétisation), la méthode explicite est très clairement plus rapide. On passe d'environ 45s pour la méthode explicite à plus de 1m30 avec la méthode implicite.

Conclusion

Nos résultats semblent cohérents. Cependant, nous pensons qu'ils manquent de réalisme. La température devrait selon nous être plus homogène au sein des chambres. Nous touchons sûrement là aux limites du modèle "simple" en deux dimensions. Les murs parfaitement isolants et les fenêtres et portes n'apportant quant à eux aucune isolation jouent aussi dans le non réalisme du modèle. De plus ce modèle est limité à une géométrie cartésienne, on ne peut que simuler la chaleur dans une chambre qui est une union de rectangles.

Les précisions des méthodes implicite et explicite sont de l'ordre de :

$$O(\delta t + \delta x^2)$$

Ce qui impose un pas de temps δt très petit si on veut garantir une certaine précision de la solution.
Ce qui pourrait être intéressant serait d'implémenter le schéma de Crank-Nicholson. Celui ci étant plus précis, l'erreur sur la dérivée temporelle étant en $O(\delta t^2)$, au lieu de $O(\delta t)$. De plus, l'implémenter serait relativement simple, le schéma de Crank-Nicholson étant une moyenne du schéma d'Euler explicite et du schéma d'Euler implicite. Cependant, la résolution de l'EDP par méthode de Crank-Nicholson serait plus longue, dû à l'augmentation du nombre de calculs.