Test Équations aux Dérivées Partielles. Durée : 1H30

NOM & Prénom : .... **Groupe TD** :

Documents autorisés: uniquement les documents cours et TD distribués. Réponses à rédiger sur la feuille d'énoncé (il n'en sera distribué qu'une), après avoir fait vos exercices/essais au brouillon. Justifier vos reponses et commenter les programmes Scilab d'une façon concise et claire.
On pourra considérer comme acquis les développements déjà faits ailleurs à condition de bien situer la source (cours, no. série exercices, no. exercice)

En absence de précisions supplémentaires, on discrétise toujours le domaine en utilisant un maillage régulier $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$, $\forall n \geq 0$, $j \in \{0, 1, ..., N+1\}$, $\Delta x = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$.

Problème 1. Considérons l'équation d'advection dans la domaine borné $(0, 1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \end{cases}$$

avec $u(x, 0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1.

1. Montrer que le schéma de *Lax-Friedrichs*

$$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

est stable en norme L^2 si $|V|\Delta x \leq \Delta x$. (**2 POINTS**)

Calculer l'erreur de troncature du schéma. En déduire que si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est gardé constant quand Δt et Δx tendent vers 0, alors le schéma est consistant avec l'équation d'advection et précis à l'ordre 1 et espace et en temps. (**2 POINTS**)

2. Montrer que le schéma de *Lax-Wendroff* ne préserve pas le principe du maximum discret

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+V\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}-\frac{V^2\Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}=0.$$

sauf si le rapport $V\Delta t/\Delta x$ vaut -1, 0 ou 1. (**2 POINTS**)

Montrer que ce schéma est L^2-stable sous la condition CFL $|V|\Delta t \leq \Delta x$. (**3 POINTS**)

Montrer également qu'il est consistant avec l'équation d'advection et précis à l'ordre 2 et espace et en temps. (**2 POINTS**)

Problème 2. Considérons l'équation d'advection-diffusion dans la domaine borné $(0,1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \end{cases}$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1. Considérons le schéma décentré amont suivant:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \nu\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

1. Déterminer l'ordre du schéma. (**2 POINTS**)

2. On veut déterminer les conditions des stabilité L^2 du schéema lorsque $V > 0$ et $V < 0$. Pour cela on procédera en plusieurs étapes. Écrire d'abord le facteur d'amplification $G(k)$ sous la forme
$$G(k) = \alpha e^{2i\pi k\Delta x} + \beta + \gamma e^{-2i\pi k\Delta x}, \ \alpha + \beta + \gamma = 1.$$
avec des α, β, γ que l'on précisera. (**2 POINTS**)

Calculer le module complexe de $G(k)$ et montrer qu'il peut se mettre sous la forme

$$|G(k)|^2 = (1 - 2(\alpha + \gamma)s_k)^2 + 4(\alpha - \gamma)^2 s_k(1 - s_k),\ s_k = \sin^2(k\pi\Delta x)$$

(sans remplacer pour le moment les valeurs de coefficients). (**2 POINTS**)

En déduire que la condition de stabilité $|G(k)|^2 \leq 1$ est satisfaite si $(\alpha - \gamma)^2 \leq (\alpha + \gamma)$. Remplacer maintenant les coefficients α et γ et donner la condition de stabilité en fonction des paramètres du problème. Dans le cas où $V < 0$ que se passe-t-il si $\nu \to 0$? (**2 POINTS**)

Problème 3. On veut implementer numériquement à l'aide du logiciel `Scilab` le θ schéma

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta\nu \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - (1-\theta)\nu \dfrac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = \theta f_j^n + (1-\theta) f_j^{n+1}, 1 \leq j \leq N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \\ u_j^0 = u_0(x_j),\ f_j^n = f(x_j^n),\ 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

où u_0 est la condition initiale et f est le second membre connu à priori.
Pour cela on procédera par étapes. On notera le vecteur de inconnues par $U^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq n}$, celui qui donnera le second membre par $F^n = (f_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ et le nombre de CFL par $\sigma = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}$.

1. Montrer que le schéma peut s'écrire sous forme matricielle ou l'on précisera A.

$$(I + (1-\theta)\sigma A)U^{n+1} = (I - \theta\sigma A)U^n + \theta F^n + (1-\theta)F^{n+1}.$$

Écrire une fonction `Scilab` qui a l'en-tête `function Un=heattheta(xspan,tspan,nu,u0,f,theta)` qui calculera la solution de l'équation de la chaleur par le θ-schéma. Ses paramètres sont: `xspan` (le vecteur des x_j), `tspan` (le vecteur des t_n), `nu` (le coefficient de diffusion ν), la condition initiale `u0` (u_0) et le second membre f. (remarquons que le nombre d'inconnues en espace, N peut s'obtenir comme `length(xspan)-2`). (**3 POINTS**)

2. Considérons maintenant le cas concret du schéma de Crank-Nicolson où $(a, b) = (0, \pi)$, $\nu = 1$, $f(x, t) = -\sin(x)\sin(t) + \sin(x)\cos(t)$, condition initiale $u(x, 0) = \sin(x)$. Dans ce cas, la solution exacte est $u(x, t) = \sin(x)\cos(t)$. Écrire un programme qui résout ce problème sur l'intervalle en temps $[0, 1]$ et tracer la solution exacte au temps final sur le même graphique que celle approchée. (**3 POINTS**)