Implementation numérique des schémas

· **Explicite**

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$$

$\alpha = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ → le nombre de CFL

$$\Leftrightarrow \quad u_j^{n+1} = \alpha u_{j+1}^n + (1-2\alpha) u_j^n + \alpha u_{j-1}^n$$

Ecriture matricielle

$$\boxed{u^{n+1} = B\, u^n} \qquad u^n = (u_j^n)_{1 \le j \le N}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-2\alpha & \alpha & & \\ \alpha & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha \\ & & \alpha & 1-2\alpha \end{pmatrix}$$ Matrice tridiag

· **Implicite**:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0$$

$$-\frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} u_{j+1}^{n+1} + \left(1 + \frac{2\nu \Delta t}{\Delta x^2}\right) u_j^{n+1} - \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} u_{j-1}^{n+1} = u_j^n$$

$$\Leftrightarrow \quad -\alpha u_{j+1}^{n+1} + (1+2\alpha) u_j^{n+1} - \alpha u_{j-1}^{n+1} = u_j^n$$

$$\boxed{A u^{n+1} = u^n} \qquad A = \begin{pmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & & \\ -\alpha & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\alpha \\ & & -\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix}$$

(il faut résoudre le syst)

- Crank - Nicolson $\quad \alpha = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} = 0$$

$\Leftrightarrow$ On groupe les termes en "n+1" du côté gauche et les termes en "n" à droite

$$-\frac{\alpha}{2} u_{j-1}^{n+1} + (1+\alpha) u_j^{n+1} - \frac{\alpha}{2} u_{j+1}^{n+1} =$$

$$= \frac{\alpha}{2} u_{j-1}^n + (1-\alpha) u_j^n + \frac{\alpha}{2} u_{j+1}^n$$

On peut écrire de nouveau sous forme matricielle : $\boxed{AU^{n+1} = BU^n}$

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha/2 & & 0 \\ -\alpha/2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\alpha/2 & 1+\alpha \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha/2 & & 0 \\ \alpha/2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha/2 \\ 0 & & \alpha/2 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Il faut résoudre de nouveau le système $AU^{n+1} = BU^n$ ...

· Le theta-schéma

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \nu\theta\,\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \nu(1-\theta)\,\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$-\alpha(1-\theta)u_{j+1}^{n+1} + \left(1+2\alpha(1-\theta)\right)u_j^{n+1} - \alpha(1-\theta)\,u_{j-1}^{n+1}$$

$$= \alpha\theta\, u_{j+1}^n + (1-2\alpha\theta)\,u_j^n + \alpha\theta\, u_{j-1}^n$$

$\rightsquigarrow$ écriture matricielle $\boxed{AU^{n+1} = BU^n}$

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\alpha(1-\theta) & -\alpha(1-\theta) & & 0 \\ -\alpha(1-\theta) & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\alpha(1-\theta) \\ 0 & & -\alpha(1-\theta) & 1+2\alpha(1-\theta) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-2\alpha\theta & \alpha\theta & & 0 \\ \alpha\theta & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha\theta \\ 0 & & \alpha\theta & 1-2\alpha\theta \end{pmatrix}$$

· Solution exacte éq chaleur:

(var séparées)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(x,t) = f(x)\, g(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x)\, g'(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x)\, g(t)$$

$$(=) \qquad f(x)\, g'(t) - \nu f''(x)\, g(t) = 0$$

$$\frac{\nu f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = -\lambda \in \mathbb{R}$$

$$g'(t) + \lambda g(t) = 0 \qquad g(t) = c\, e^{-\lambda t}$$

$\lambda > 0$

$$\nu f''(x) + \lambda f(x) = 0 \qquad \text{sinon exp } \nearrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}\, x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}\, x\right)$$

Consid l'intervalle $[0, L]$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \Rightarrow f(0) = f(L) = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = 0 \qquad c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}\, L\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}\, L = k\pi$$

$$\lambda = \nu \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \qquad \Rightarrow f(x) = c_2 \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

- Sol exacte :

$$u(x,t) = C\, e^{-\nu\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

- Prenons une solution initiale

$$u_0(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \Rightarrow k=2$$

$$\boxed{u(x,t) = e^{-\nu\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)}$$

solution exacte

À utiliser pour l'étude de convergence....