**Équations aux dérivées partielles – TD 4**
**SOLUTIONS**

- Schéma explicite: on peut l'écrire comme

$$u_{j,l}^{n+1} = u_{j,l}^n \left(1 - \frac{2\nu\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2\nu\Delta t}{\Delta y^2}\right) + u_{j+1,l}^n \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} + u_{j-1,l}^n \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} + +u_{j,l+1}^n \frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2} + u_{j,l-1}^n \frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}$$

On en déduit que $u_{j,l}^{n+1}$ est une combinaison convexe de $u_{j,l}^n, u_{j+1,l}^n\, u_{j-1,l}^n, u_{j,l+1}^n, u_{j,l-1}^n$ (et par conséquent le principe du maximum discret est vérifié) si

$$\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Ceci sera aussi la condition de stabilité $L^\infty$.
Pour montrer la stabilité en norme $L^2$ on applique la méthode de Von Neumann. En remplaçant le mode de Fourier dans le schéma et en simplifiant par $A(k,m)^n e^{2i\pi(kj\Delta x + ml\Delta y)}$ on obtient

$$\begin{aligned} A(k,m) &= \left(1 - \frac{2\nu\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2\nu\Delta t}{\Delta y^2}\right) + \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}(e^{2i\pi k\Delta x} + e^{-2i\pi k\Delta x}) + \frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}(e^{2i\pi m\Delta y} + e^{-2i\pi m\Delta y}) \\ &= 1 - 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x) - 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\pi m\Delta y) \end{aligned}$$

On voit que $|A(k,m)| \leq 1$ pour toutes les valeurs de $k, m \in \mathbb{Z}$ ssi

$$-1 \leq 1 - 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x) - 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\pi m\Delta y) \leq 1$$

ou alors ssi

$$2\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x) + 2\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\pi m\Delta y) \leq 1.$$

Ceci est vrai si la condition CFL suivante est vérifiée:

$$\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

- Schéma implicite. On remarque que le schéma peut se ré-écrire comme:

$$u_{j,l}^{n+1}\left(1 + \frac{2\nu\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{2\nu\Delta t}{\Delta y^2}\right) - u_{j+1,l}^{n+1}\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} - u_{j-1,l}^{n+1}\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} - u_{j,l+1}^{n+1}\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2} - u_{j,l-1}^{n+1}\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2} = u_{j,l}^n$$

Pour montrer la stabilité en norme $L^2$ on applique la méthode de Von Neumann. En remplaçant le mode de Fourier dans le schéma et en simplifiant par $A(k,m)^n e^{2i\pi(kj\Delta x + ml\Delta y)}$ on obtient

$$\begin{aligned} &A(k,m)\left(1 + \frac{2\nu\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{2\nu\Delta t}{\Delta y^2} - \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}(e^{2i\pi k\Delta x} + e^{-2i\pi k\Delta x}) - \frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}(e^{2i\pi m\Delta y} + e^{-2i\pi m\Delta y})\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow A(k,m) = \left(1 + 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\pi k\Delta x) + 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\pi m\Delta y)\right)^{-1} \leq 1 \end{aligned}$$

le schéma implicite est donc inconditionnellement stable.

- Schéma de Peaceman-Rashford. En remplaçant $u_{j,l}^n$ dans le schéma par $\hat{u}_{k,m}^n e^{2i\pi(kj\Delta x+ml\Delta y)}$ et en simplifiant par $e^{2i\pi(kj\Delta x+ml\Delta y)}$ on obtient

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{k,m}^{n+1/2} &= \frac{\left(1-\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}+\frac{\nu\Delta t}{2\Delta y^2}\left(e^{2i\pi m\Delta y}+e^{-2i\pi m\Delta y}\right)\right)}{\left(1+\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{\nu\Delta t}{2\Delta x^2}\left(e^{2i\pi k\Delta x}+e^{-2i\pi k\Delta x}\right)\right)}\hat{u}_{k,m}^n \\
\hat{u}_{k,m}^{n+1} &= \frac{\left(1-\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{\nu\Delta t}{2\Delta x^2}\left(e^{2i\pi k\Delta x}+e^{-2i\pi k\Delta x}\right)\right)}{\left(1+\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}-\frac{\nu\Delta t}{2\Delta y^2}\left(e^{2i\pi m\Delta y}+e^{-2i\pi m\Delta y}\right)\right)}\hat{u}_{k,m}^{n+1/2}
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\hat{u}_{k,m}^{n+1} = A(k,m)\hat{u}_{k,m}^n$ avec

$$
\begin{aligned}
A(k,m) &= \frac{\left(1-\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}+\frac{\nu\Delta t}{2\Delta y^2}\left(e^{2i\pi m\Delta y}+e^{-2i\pi m\Delta y}\right)\right)}{\left(1+\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{\nu\Delta t}{2\Delta x^2}\left(e^{2i\pi k\Delta x}+e^{-2i\pi k\Delta x}\right)\right)}\cdot\frac{\left(1-\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{\nu\Delta t}{2\Delta x^2}\left(e^{2i\pi k\Delta x}+e^{-2i\pi k\Delta x}\right)\right)}{\left(1+\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}-\frac{\nu\Delta t}{2\Delta y^2}\left(e^{2i\pi m\Delta y}+e^{-2i\pi m\Delta y}\right)\right)}. \\
A(k,m) &= \frac{1-2\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(m\pi\Delta y)}{1+2\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(m\pi\Delta y)}\cdot\frac{1-2\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}{1+2\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}.
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que $|A(k,m)| \leq 1$ donc le schéma est inconditionnellement stable car pour tout $x$ positif on a que $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \leq 1$.

- Schéma des directions alternées. On procédant de la même façon que dans le cas du schéma de Peacema-Rashford on obtient:

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{k,m}^{n+1/2} &= \frac{\left(1-\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}+\frac{\nu\Delta t}{2\Delta y^2}\left(e^{2i\pi m\Delta y}+e^{-2i\pi m\Delta y}\right)\right)}{\left(1+\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{\nu\Delta t}{2\Delta x^2}\left(e^{2i\pi k\Delta x}+e^{-2i\pi k\Delta x}\right)\right)}\hat{u}^n(k,m) \\
\hat{u}^{n+1}(k,m) &= \frac{\left(1-\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{\nu\Delta t}{2\Delta x^2}\left(e^{2i\pi k\Delta x}+e^{-2i\pi k\Delta x}\right)\right)}{\left(1+\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}-\frac{\nu\Delta t}{2\Delta y^2}\left(e^{2i\pi m\Delta y}+e^{-2i\pi m\Delta y}\right)\right)}\hat{u}^{n+1/2}(k,m)
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\hat{u}_{k,m}^{n+1} = A(k,m)\hat{u}_{k,m}^{n+1/2}$ avec

$$
\begin{aligned}
A(k,m) &= \frac{\left(1-\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}+\frac{\nu\Delta t}{2\Delta y^2}\left(e^{2i\pi m\Delta y}+e^{-2i\pi m\Delta y}\right)\right)}{\left(1+\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{\nu\Delta t}{2\Delta x^2}\left(e^{2i\pi k\Delta x}+e^{-2i\pi k\Delta x}\right)\right)}\cdot\frac{\left(1-\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{\nu\Delta t}{2\Delta x^2}\left(e^{2i\pi k\Delta x}+e^{-2i\pi k\Delta x}\right)\right)}{\left(1+\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}-\frac{\nu\Delta t}{2\Delta y^2}\left(e^{2i\pi m\Delta y}+e^{-2i\pi m\Delta y}\right)\right)} \\
A(k,m) &= \frac{1-2\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(m\pi\Delta y)}{1+2\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}\cdot\frac{1-2\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}{1+2\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(m\pi\Delta y)}.
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que $|A(k,m)| \leq 1$ donc le schéma est inconditionnellement stable car pour tout $x$ positif on a que $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \leq 1$.