Contrôle EDP (Sujet B) Durée : 90 minutes

Les documents de cours ne sont pas autorisés. Justifier vos réponses d'une façon concise et claire.

Questions théoriques:

- Définir la notion de stabilité en norme L^2 et expliquer brièvement comment on peut prouver qu'un schéma est stable par rapport à cette norme.
- Écrire le schéma d'Euler implicite centré pour l'équation d'advection.
- Donner l'expression de l'erreur de consistance pour le schéma d'Euler implicite décentré amont appliqué à l'équation d'advection.

Exercice 1
On considère l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall\, (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

et on se propose de la résoudre en utilisant le schéma numérique implicite suivant

$$\frac{2u_j^{n+1} - 3u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2\,u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \qquad (j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

1. Montrer que le schéma (2) est consistant et donner son ordre d'approximation.
2. Montrer que ce schéma implicite est inconditionnellement stable.

`Indication`: Si le facteur d'amplification vérifie une équation quadratique, le schéma est stable si les deux solutions sont inférieures à 1 en module. Il est instable si au moins une des solutions est strictement supérieure à 1 en module.

Exercice 2
On considère l'équation d'advection dans le domaine borné $(0,1)$ avec $V > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \; \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \end{cases}$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1.

1. Montrer que le schéma de *Lax-Friedrichs* implicite
$$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0.$$
est inconditionnellement stable en norme L^2.

2. Calculer l'erreur de troncature du schéma. En déduire que si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est gardé constant quand Δt et Δx tendent vers 0, alors le schéma est consistant avec l'équation d'advection. Quelle est sa précision?