Contrôle Équations aux Dérivées Partielles. Durée : 2h

Les documents de cours ne sont pas autorisés. Justifier vos reponses d'une façon concise et claire.

Problème 1

On considère le problème de la chaleur en une dimension d'espace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & 0,\ (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+_*, & \text{Équation à l'intérieur du domaine} \\ u(0,t) & = & 0,\ t \in \mathbb{R}^+_* & \text{CL Dirichlet à gauche} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) & = & 0,\ t \in \mathbb{R}^+_* & \text{CL Neumann à droite} \\ u(x,0) & = & u_0(x),\ x \in (0,1) & \text{Condition initiale.} \end{cases} \tag{1}$$

On admettra (sans demonstration) l'inégalité de Poincaré: toute fonction $v(x)$ continûment dérivable sur $[0,1]$ t.q. $v(0) = 0$, vérifie

$$\int_0^1 v^2(x)dx \leq \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx. \tag{2}$$

On notera dans ce qui suit l'énergie à l'instant t de la solution de l'équation (1) par

$$E(t) = \int_0^1 u^2(x,t)dx.$$

a) En multipliant l'équation de la chaleur par u et en intégrant par rapport à x, établir l'égalité vérifiée l'énergie:

$$\frac{1}{2}\frac{dE(t)}{dt} = -\nu \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

b) En appliquant l'inégalité de Poincaré (2) à $v(x) = u(x,t)$ et en utilisant le résultat du point précédent déduire que l'énergie *décroît exponentiellement en temps*

$$E(t) \leq E(0)e^{-2\nu t}. \tag{3}$$

c) Calculer la solution à variables séparées de l'équation (1) dans le cas où $\nu = 1$ et $u_0(x) = \sin(\frac{3\pi}{2}x)$. Pour ce faire on va écrire la solution sous la forme

$$u(x,t) = f(x)g(t),$$

et on va l'introduire dans l'équation (1) et puis on va en déduire les équations vérifiées par f et g. On tiendra compte des conditions aux limites et des conditions initiales.

d) Évaluer l'énergie $E(t)$ de la solution calculée précédemment et vérifier l'inégalité (3) en calculant explicitement le membre de gauche et de droite de cette inégalité. Pourrait-on donner une condition systématique à vérifier pour que cette inégalité soit vraie dans le cas des solutions à variables séparées?

Problème 2

Considérons de nouveau l'équation de la chaleur en une dimension d'espace dans le domaine borné $(0,1)$ avec des conditions de Dirichlet homogènes. On discrétise le domaine en utilisant un maillage régulier $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$, $\forall n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ où $\Delta x = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$.

a) On se propose d'étudier pour commencer le *schéma d'Euler explicite*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

Montrer que ce schéma est consistant, d'ordre 1 en temps et 2 en espace et conditionnellement stable en norme L_2. Trouver cette condition de stabilité (appelée condition CFL) en utilisant la méthode de von Neumann.

b) Est-ce que ce schéma est stable en norme L^∞? Si le cas, sous quelle condition de stabilité?

c) On propose maintenant deux améliorations possibles de ce schéma:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{2\nu}{3} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{\nu}{3} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0. \tag{4}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\nu}{3} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{2\nu}{3} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0. \tag{5}$$

Montrer que ces deux schémas ont la même précision en temps et en espace que le schéma d'Euler et que le schéma (4) est conditionnellement stable mais avec une condition CFL moins restrictive que le schéma d'Euler explicite alors que le schéma (5) est inconditionnellement stable.

Comment peut-on améliorer la précision en temps de ces schémas?

d) Ecrire ces schémas sous forme matricielle

$$A_1 \mathbf{U}^{n+1} = A_2 \mathbf{U}^n,$$

où $\mathbf{U}^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq N}$ est le vecteur des valeurs approchées à l'instant n, en donnant explicitement la forme des matrices A_1 et A_2 qui apparaissent dans l'itération en temps.

Montrer que ces matrices sont tridiagonales et peuvent s'exprimer facilement à l'aide de la matrice de discrétisation du Laplacien.