PROJET - Équations aux Dérivées Partielles

BAVOIL Antonin, SOTO Coraly

Dans ce projet, nous avons appliqué la méthode des différences finies à la simulation numérique de la température d'une pièce munie d'une fenêtre et d'une porte chacune à température constante, de murs isolants et d'un chauffage. Nous devrons donc utiliser les conditions de Dirichlet et de Von Neumann, en plus d'un second membre non nul.

Pour cela, nous avons commencé par modéliser la température de notre pièce en utilisant l'équation de la chaleur stationnaire (équation de Poisson). Ensuite, nous avons fait une simulation instationnaire en utilisant la discrétisation de l'équation de la chaleur par les méthodes d'Euler explicite et implicite.

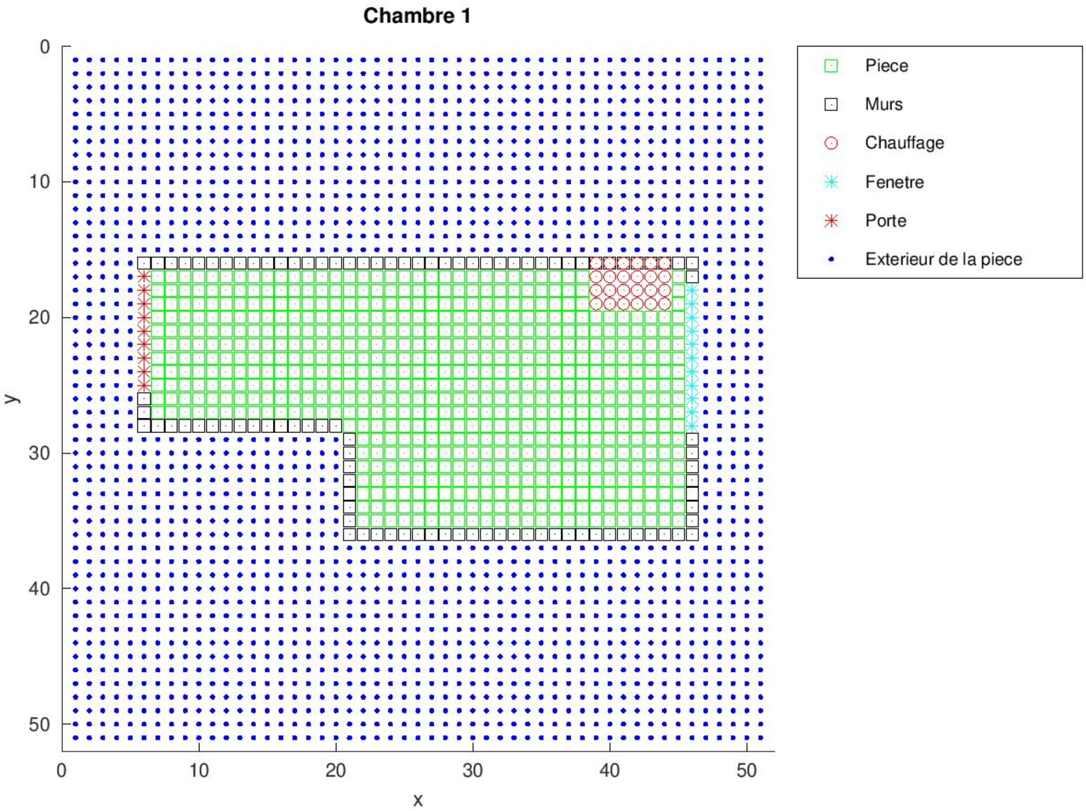
Le nombre de points de discrétisation spatiale (nx) est fixé à 51 pour l'ensemble du projet, sauf indication contraire.

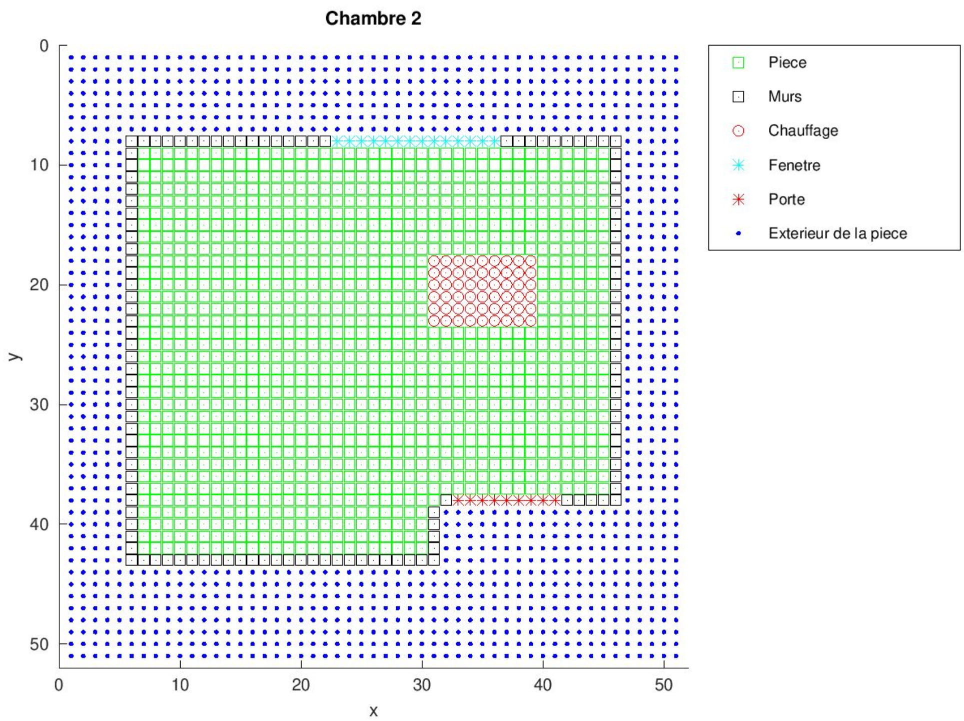
Nous avons utilisé le notebook lors de nos calculs, et une grande partie de notre code est consacrée à l'affichage des figures et à leur enregistrement.

Table des matières :

Partie 1 : équation de Poisson

1/ Géométries des chambres



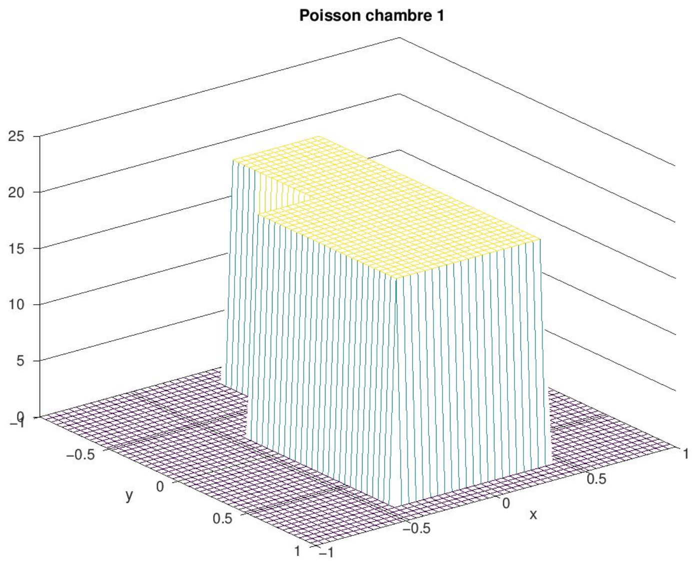


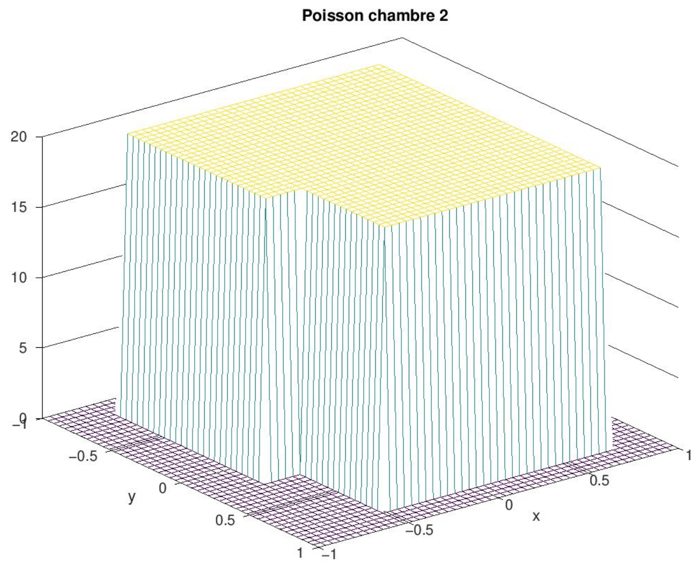
Les deux chambres n’ont pas la même configuration. Elles n’ont pas la même aire, ni la même aire de chauffage. De plus, la première a un chauffage proche de la fenêtre contrairement à la deuxième, où le chauffage est au milieu de la pièce.

Le but est de voir comment ces différences vont influencer la température de la pièce.

2/ Tests statiques pour différentes configurations

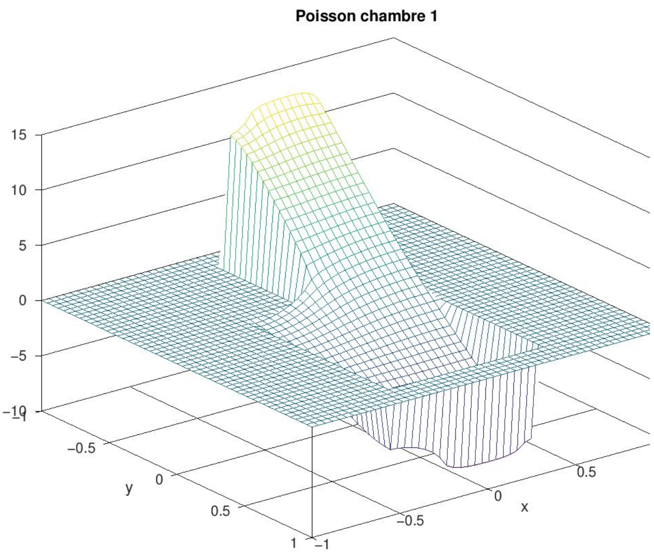
a. Été : porte et fenêtre à 20°C, sans chauffage

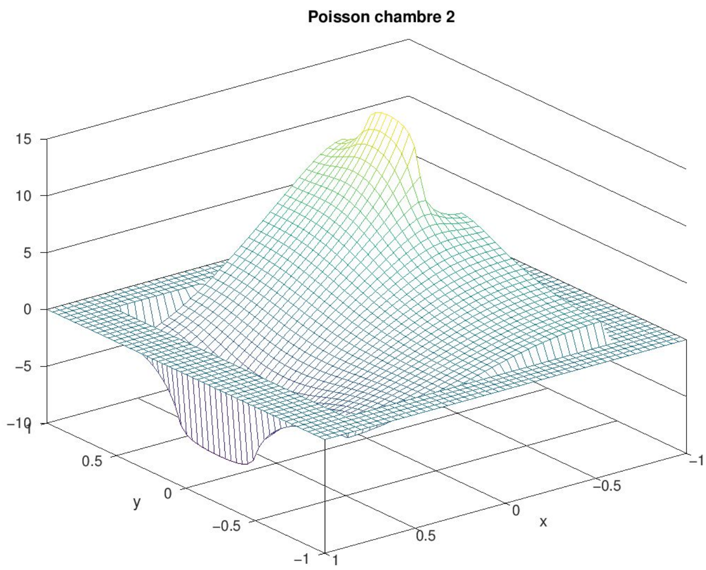




La température dans la pièce est constante et égale à 20°C. En effet, comme les murs sont parfaitement isolés, la pièce va s’adapter à la température de la fenêtre et de la porte.

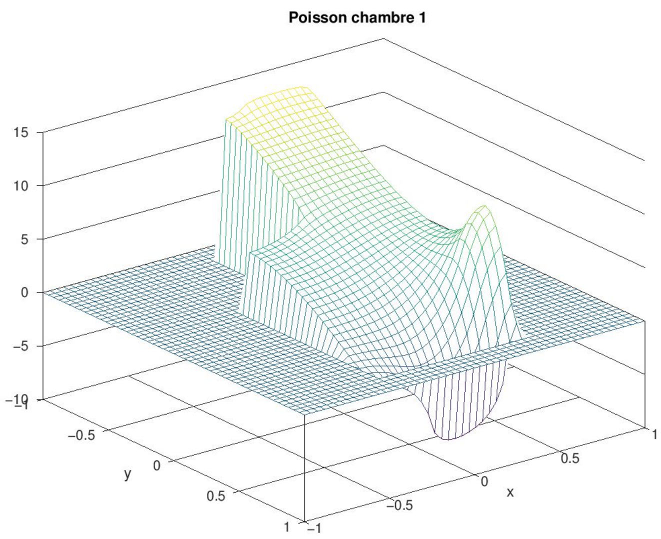
b. <u>Hiver</u> : porte à 15°C et fenêtre à -10°C, sans chauffage

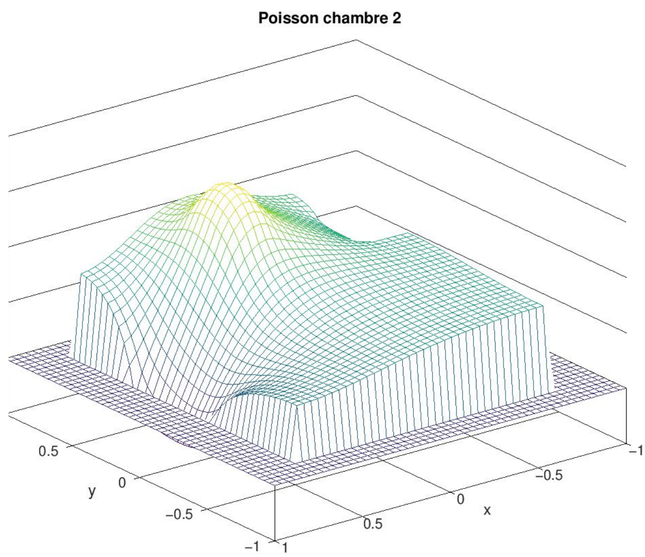




La porte est à 15°C, la fenêtre est à 10°C. Le graph de la température forme une pente de la porte vers la fenêtre dans les deux cas : la chaleur va de la porte vers la fenêtre.

c. <u>Hiver</u> : porte à 15°C et fenêtre à -10°C, avec chauffage (heatPower=750°C/s)





A première vue, un chauffage au milieu de la pièce est plus efficace. Cependant, la chambre 2 possède un plus grand chauffage, et surtout cette simulation ne prend pas en compte les mouvements de convection contre la fenêtre.

En réalité, il est plutôt conseillé de placer son chauffage sous les surfaces froides (fenêtres ou murs extérieurs) pour contrer ces mouvements de convection.

Partie 2 : équation de la chaleur

A noter que les temps en secondes ne sont pas réalistes : avec un cfl de 0.5 et des conditions initiales à 0°C on est déjà à l'équilibre à la fin des itérations, à t = 0.04 s.

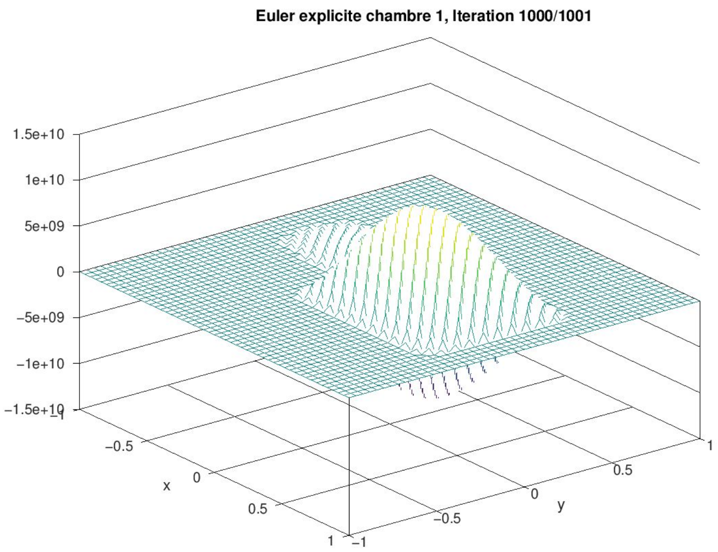
1/ Comparaison de la stabilité (stabilité vs cfl)

Nous avons fait varier le nombre de Courant–Friedrichs–Lewy (cfl) pour étudier la stabilité des schémas en fixant nx = 51 et pour 1000 pas de temps. On affiche le temps final de la simulation pour montrer qu'un grand cfl fait passer le temps plus vite.

cfl	**0.005**	**0.05**	**0.5**	**0.51**	**10**	**1000**
Tfinal	0.004	0.04	0.4	0.408	8	800
explicite	1	1	1	0	0	0
implicite	1	1	1	1	1	1

1 : stable, 0 : instable

On voit qu'une solution est instable lorsque ses températures sont dans de trop grands ordres de grandeurs : voir le graph sur la page suivante.



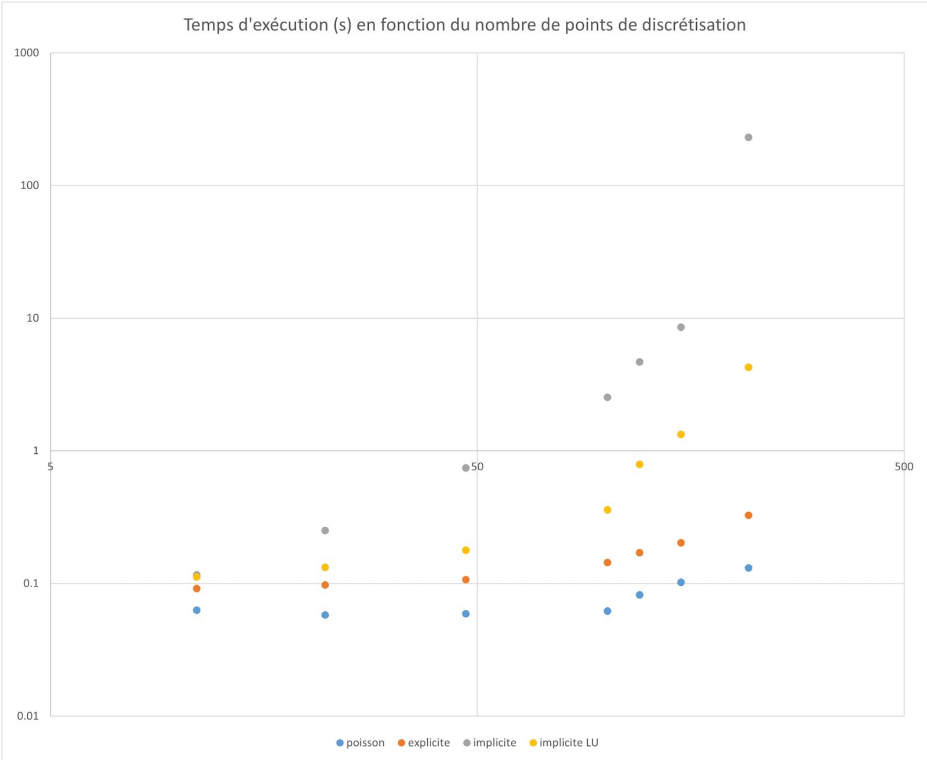
Nos résultats confirment la théorie : Euler explicite est stable uniquement pour un cfl≤0.5, alors que Euler implicite est inconditionnellement stable.

2/ Comparaison des temps d'exécution

Nous avons fait varier le nombre de points de discrétisation spatiale (nx) pour étudier les temps d'exécution pour chaque méthode.

Temps d'exécution pour un cfl=0.5 et 1000 pas de temps :

nx	**11**	**22**	**47**	**101**	**120**	**150**	**216**
poisson	0.063	0.0579	0.059	0.062	0.082	0.102	0.131
explicite	0.0914	0.0975	0.107	0.144	0.171	0.203	0.327
implicite	0.116	0.251	0.743	2.54	4.68	8.53	231
implicite LU	0.112	0.132	0.178	0.359	0.79	1.33	4.26



Le graphique montre que le calcul de la solution à l'équation de Poisson et Euler explicite ont la même complexité. Euler implicite a une plus mauvaise complexité, et utiliser la décomposition LU ne réduit pas la complexité en nx mais divise par ~6 le temps de calcul. On ne réduit pas l'ordre de la complexité temporelle car le calcul de la décomposition LU a la même complexité que la résolution d'une système linéaire de même dimension.

3/ Comparaison numérique et visuelle des différentes méthodes

a. Chambre initialement froide (-10°C) avec chauffage

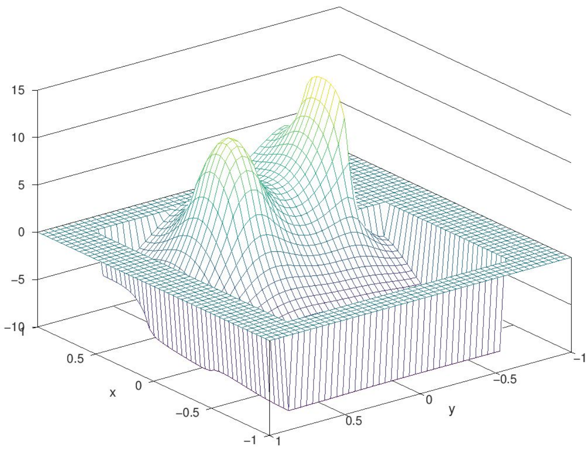
Nous avons mis la fenêtre et la porte à -10°C. Nous lançons le chauffage à 750°C/s et nous calculons le temps pour qu'un point atteigne 20°C. Nous obtenons les résultats suivants :

Euler explicite : 931 itérations pour un temps de 0.3728 secondes.
Euler implicite : 932 itérations pour un temps de 0.3724 secondes.

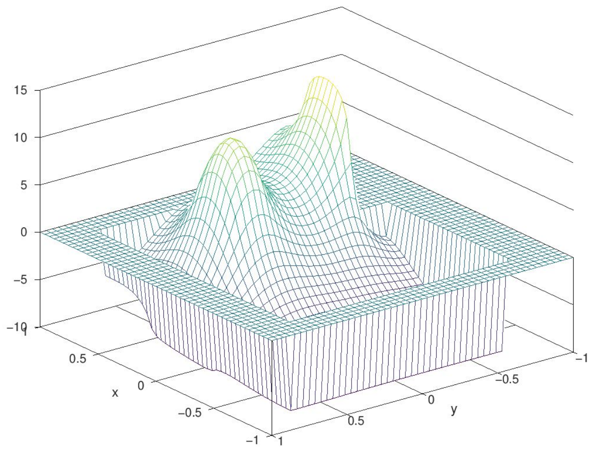
On voit que les deux méthodes donnent numériquement des résultats très similaires.

Voici une comparaison visuelle :

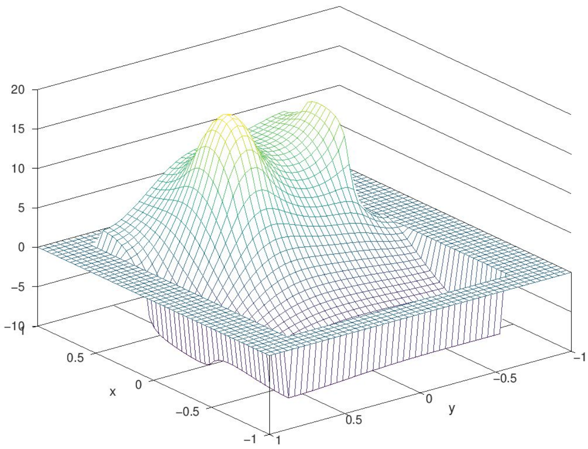
Euler explicite chambre 2, Iteration 334/1001



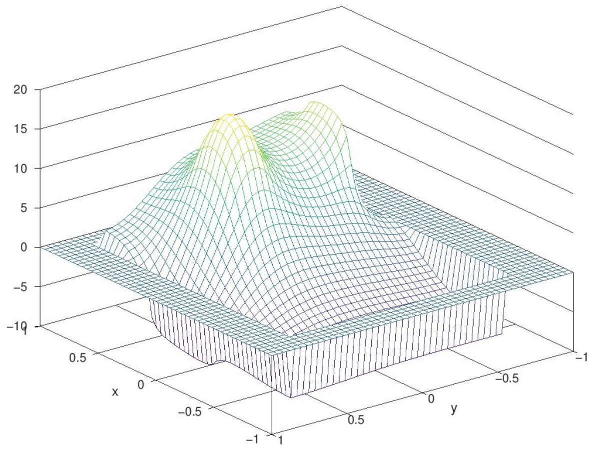
Euler implicite LU chambre 2, Iteration 334/1001



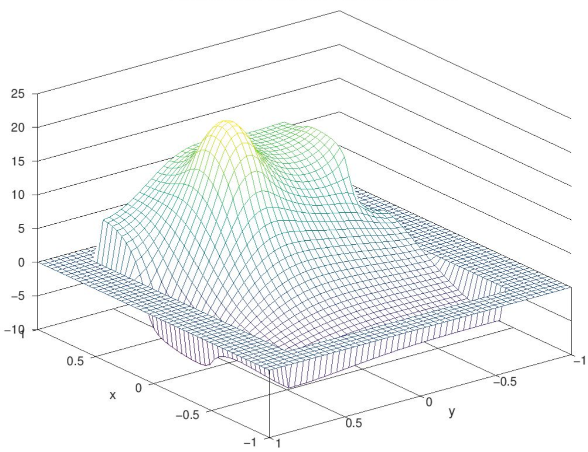
Euler explicite chambre 2, Iteration 667/1001



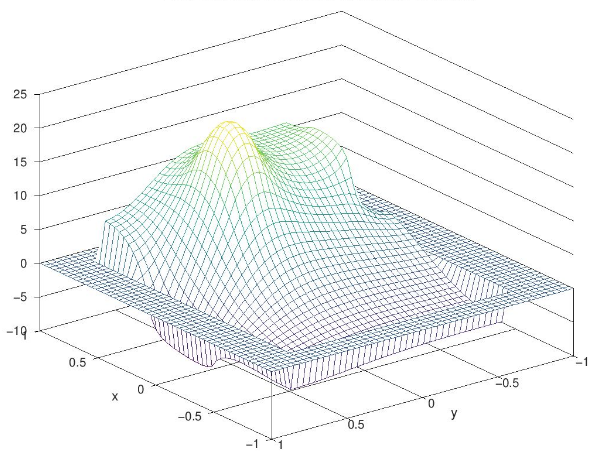
Euler implicite LU chambre 2, Iteration 667/1001



Euler explicite chambre 2, Iteration 1000/1001



Euler implicite LU chambre 2, Iteration 1000/1001



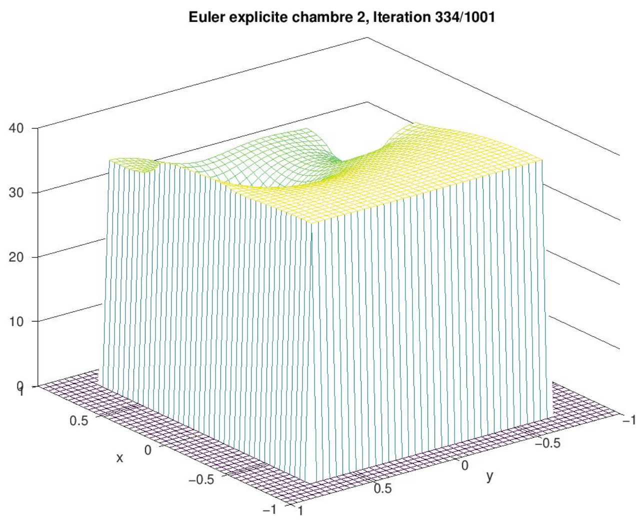
b. Chambre initialement chaude (40°C) avec climatisation

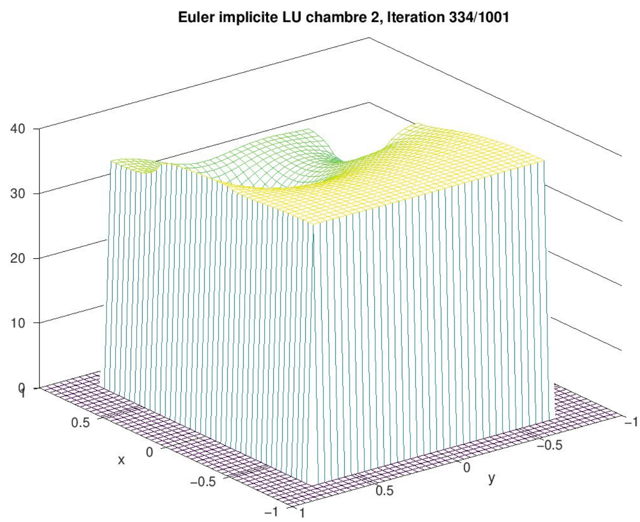
Nous avons mis la fenêtre à 40°C et la porte à 28°C. Nous lançons la climatisation à -750°C/s et nous calculons le temps pour qu'un point atteigne 25°C. Nous obtenons les résultats suivants :

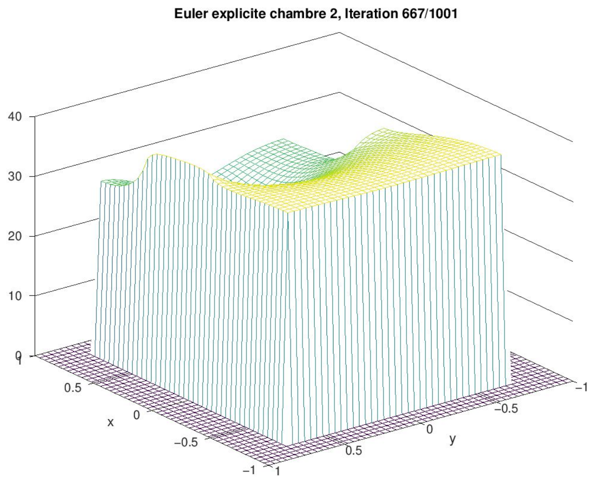
Euler explicite : 190 itérations pour un temps de 0.0760 secondes.
Euler implicite : 191 itérations pour un temps de 0.0764 secondes.

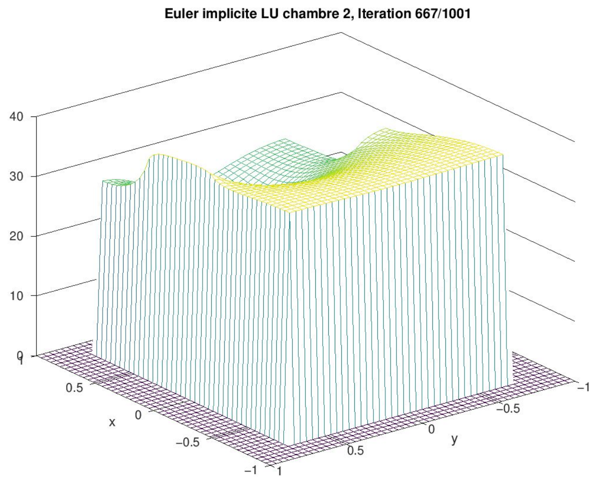
Les deux méthodes donnent encore des résultats numériques très similaires.

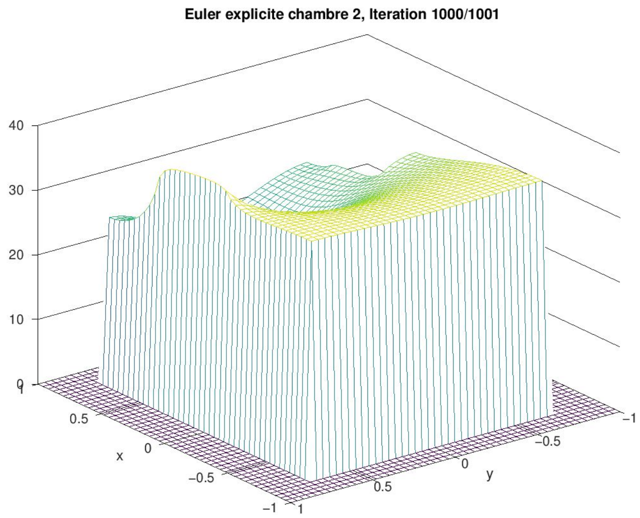
Voici à nouveau une comparaison visuelle :

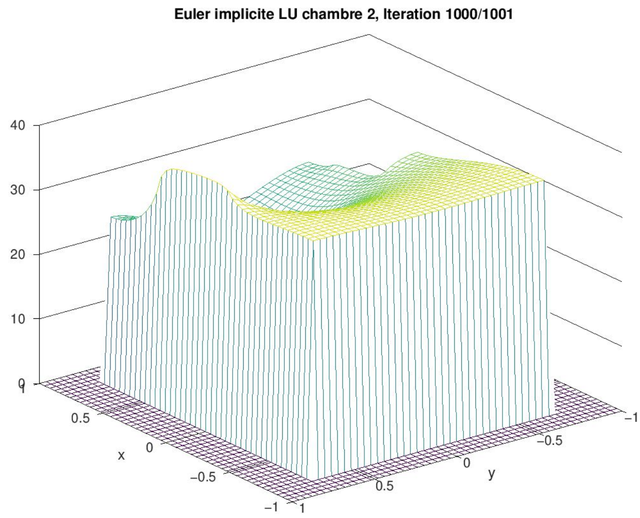












Conclusion

La résolution de l'équation de Poisson donne une bonne idée du comportement asymptotique de la température dans la pièce pour notre modèle en deux dimensions. C'est la méthode la plus rapide.
Pour voir l'évolution de la température, le plus simple est d'utiliser Euler explicite, mais on ne peut pas avoir de pas de temps trop grands. Pour pallier ce problème, on peut utiliser Euler implicite : on peut alors avoir un pas de temps aussi grand que l'on veut sans avoir d'instabilité. On se heurte alors à un nouveau problème : le temps de calcul est beaucoup plus élevé, alors que l'on est en deux dimensions. Une nouvelle amélioration est l'utilisation de la décomposition LU, qui divise par 6 le temps d'exécution dans notre cas.

On a donc vu que chaque méthode était adaptée à un besoin, et qu'il fallait trouver le juste milieu entre complexité du programme et temps de calcul.