

## Chapitre 3

# FORMULATION VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

### 3.1 Généralités

#### 3.1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'analyse mathématique des **équations aux dérivées partielles de type elliptique** (voir la Définition 1.5.5). En règle générale ces équations elliptiques correspondent à des modèles physiques stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps. Nous allons montrer que les problèmes aux limites sont bien posés pour ces e.d.p. elliptiques, c'est-à-dire qu'elles admettent une solution, unique, et dépendant continûment des données. L'approche que nous allons suivre est appelée **approche variationnelle**. Disons tout de suite que l'intérêt de cette approche dépasse, et de loin, le cadre des e.d.p. elliptiques et même le cadre d'analyse mathématique “pure” auquel nous nous restreignons pour l'instant. En effet, nous reprendrons cette approche variationnelle pour les problèmes d'évolution en temps (e.d.p. de type parabolique ou hyperbolique), et elle sera cruciale pour comprendre la méthode numérique des éléments finis que nous développerons au Chapitre 6. Par ailleurs, cette approche admet une interprétation physique ou mécanique très naturelle. Autant dire que le lecteur ne peut pas faire l'économie de la présentation qui suit de cette approche variationnelle !

Au cours de ce chapitre et des suivants, l'exemple prototype d'équation aux dérivées partielles de type elliptique sera le Laplacien pour lequel nous étudierons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où nous imposons des conditions aux limites de Dirichlet (nous renvoyons à la Sous-section 1.3.3 pour une présentation de ce modèle). Dans (3.1),  $\Omega$  est un ouvert de l'espace  $\mathbb{R}^N$ ,  $\partial\Omega$  est son bord (ou frontière),  $f$  est un second membre (une donnée du problème), et  $u$  est l'inconnue. Bien sûr, nous donnerons au Chapitre 5 de nombreux autres exemples d'équations aux dérivées partielles de type elliptique qui peuvent s'étudier grâce à l'approche variationnelle.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la Section 3.2 nous rappelons quelques formules d'intégration par partie, dites **formules de Green**, puis nous définissons ce qu'est une **formulation variationnelle**. La Section 3.3 est consacrée au **théorème de Lax-Milgram** qui sera l'outil essentiel permettant de démontrer des résultats d'existence et d'unicité de solutions de formulation variationnelle. Nous verrons que pour pouvoir appliquer ce théorème il est inéluctable de devoir abandonner l'espace  $C^1(\bar{\Omega})$  des fonctions continûment différentiables au profit de sa "généralisation", l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ .

Concluons cette introduction en mentionnant l'existence d'autres méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles mais qui sont moins puissantes ou plus compliquées que l'approche variationnelle (nous renvoyons à l'encyclopédie [17] le lecteur curieux... et courageux).

### 3.1.2 Formulation classique

La formulation "classique" de (3.1), qui pourrait paraître "naturelle" à première vue, est de supposer suffisamment de régularité pour la solution  $u$  afin que les équations de (3.1) aient un sens en tout point de  $\Omega$  ou de  $\partial\Omega$ . Rappelons tout d'abord quelques notations d'espaces de fonctions régulières.

**Définition 3.1.1** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\bar{\Omega}$  sa fermeture. On note  $C(\Omega)$  (respectivement,  $C(\bar{\Omega})$ ) l'espace des fonctions continues dans  $\Omega$  (respectivement, dans  $\bar{\Omega}$ ). Soit un entier  $k \geq 0$ . On note  $C^k(\Omega)$  (respectivement,  $C^k(\bar{\Omega})$ ) l'espace des fonctions  $k$  fois continûment dérивables dans  $\Omega$  (respectivement, dans  $\bar{\Omega}$ ).

Une **solution classique** (on parle aussi de **solution forte**) de (3.1) est une solution  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , ce qui implique que le second membre  $f$  doit appartenir à  $C(\bar{\Omega})$ . Cette formulation classique pose malheureusement un certain nombre de problèmes ! Sans rentrer dans le détail, signalons que, sous la seule hypothèse  $f \in C(\bar{\Omega})$ , il n'existe en général pas de solution de classe  $C^2$  pour (3.1) si la dimension d'espace est plus grande que deux ( $N \geq 2$ ). En fait, il existe bien une solution, comme nous le verrons plus loin, mais elle n'est pas de classe  $C^2$  (elle est un peu moins régulière sauf si la donnée  $f$  est plus régulière que  $C(\bar{\Omega})$ ). Le cas de la dimension un d'espace ( $N = 1$ ) est particulier puisqu'il est facile de trouver des solutions classiques (voir l'Exercice 3.1.1), mais nous verrons néanmoins que, même dans ce cas favorable, cette formulation classique est peu commode.

Dans la suite, pour étudier (3.1), nous remplacerons sa formulation classique par une formulation, dite variationnelle, beaucoup plus avantageuse.

### 3.1.3 Le cas de la dimension un d'espace

En une dimension d'espace ( $N = 1$ ), si  $\Omega = (0, 1)$ , le problème aux limites (3.1) devient

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Ce problème est tellement simple qu'il admet une solution explicite !

**Exercice 3.1.1** Si  $f$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$ , montrer que (3.2) a une solution unique dans  $C^2([0, 1])$  donnée par la formule

$$u(x) = x \int_0^1 f(s)(1-s)ds - \int_0^x f(s)(x-s)ds \text{ pour } x \in [0, 1]. \quad (3.3)$$

Pour le reste de cette sous-section nous allons oublier la formule explicite (3.3) qui n'a pas toujours d'équivalent pour des problèmes plus compliqués.

En une dimension d'espace, l'appellation “équation aux dérivées partielles” perd de sa justesse puisque, comme il n'y a plus qu'une seule variable, on peut plus simplement parler “d'équation différentielle ordinaire”. Cependant, l'équation (3.2) n'est pas une équation différentielle “usuelle” au sens où la solution doit satisfaire des conditions “aux deux bouts” plutôt qu'une condition initiale en une seule extrémité de l'intervalle  $[0, 1]$ . C'est là précisément la différence entre un problème aux limites (avec des conditions “aux deux bouts”) et un problème de Cauchy (avec une condition initiale en “un seul bout”).

Il est intéressant cependant de voir pourquoi, même en dimension un, les méthodes classiques d'équations différentielles ordinaires ne sont pas très commodes pour étudier (3.2) (et sont totalement inopérantes en dimension supérieure). Pour un paramètre  $m \in \mathbb{R}$ , on considère le problème de Cauchy pour le Laplacien avec donnée initiale en 0

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx}(0) = m. \end{cases} \quad (3.4)$$

De façon évidente il existe une unique solution de (3.4) : il suffit d'intégrer cette équation linéaire (ou plus généralement d'utiliser le théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz). Il n'est pas du tout clair, par contre, que la solution de (3.4) coïncide avec celle de (3.2) (si elle existe). La question qui se pose est de savoir s'il existe un paramètre  $m$  tel que la solution de (3.4) vérifie aussi  $u(1) = 0$  et soit donc une solution de (3.2). C'est le principe de la **méthode du tir** qui permet de résoudre, aussi bien d'un point de vue théorique que numérique, le problème aux limites (3.2). Itérativement, on prédit une valeur de  $m$  (on tire du point 0), on intègre le problème de Cauchy (3.4) (on calcule la trajectoire du tir), puis selon le résultat  $u(1)$  on corrige la valeur de  $m$ . En pratique c'est une méthode peu efficace qui a l'inconvénient majeur de ne pas se généraliser en dimension supérieure.

La conclusion est qu'il faut des méthodes propres aux problèmes aux limites qui n'ont rien à voir avec celles attachées aux problèmes de Cauchy.

## 3.2 Approche variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par partie dans l'établissement de la formulation variationnelle, nous commençons par donner quelques résultats essentiels à ce sujet.

### 3.2.1 Formules de Green

Dans toute cette sous-section  $\Omega$  est un ouvert de l'espace  $\mathbb{R}^N$  (borné ou non), dont le bord (ou la frontière) est noté  $\partial\Omega$ . Nous supposons aussi que  $\Omega$  est un ouvert **régulier** de classe  $C^1$ . La définition précise d'un ouvert régulier est donné plus bas dans la Définition 3.2.5, mais sa connaissance n'est absolument pas nécessaire pour la bonne compréhension de la suite de ce cours. Il suffit juste de savoir qu'un ouvert régulier est *grosso modo* un ouvert dont le bord est une hypersurface (une variété de dimension  $N - 1$ ) régulière, et que cet ouvert est localement situé d'un seul côté de sa frontière. On définit alors la **normale extérieure** au bord  $\partial\Omega$  comme étant le vecteur unité  $n = (n_i)_{1 \leq i \leq N}$  normal en tout point au plan tangent de  $\Omega$  et pointant vers l'extérieur de  $\Omega$  (voir la Figure 1.1). Dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  on note  $dx$  la mesure volumique, ou mesure de Lebesgue de dimension  $N$ . Sur  $\partial\Omega$ , on note  $ds$  la mesure surfacique, ou mesure de Lebesgue de dimension  $N - 1$  sur la variété  $\partial\Omega$ . Le résultat principal de cette sous-section est le théorème suivant que nous admettrons (voir le théorème 7.6.2 dans [27] pour une démonstration qui fait appel à des arguments de géométrie différentielle, ou le théorème 5.4.9 dans [6]).

**Théorème 3.2.1 (Formule de Green)** *Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$ . Soit  $w$  une fonction de  $C^1(\overline{\Omega})$  à support borné dans le fermé  $\overline{\Omega}$ . Alors elle vérifie la formule de Green*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(x) n_i(x) ds, \quad (3.5)$$

où  $n_i$  est la  $i$ -ème composante de la normale extérieure unité de  $\Omega$ .

**Remarque 3.2.2** Dire qu'une fonction régulière  $w$  a son support borné dans le fermé  $\overline{\Omega}$  veut dire qu'elle s'annule à l'infini si le fermé n'est pas borné. On dit aussi que la fonction  $w$  a un support compact dans  $\overline{\Omega}$  (attention : cela n'implique pas que  $w$  s'annule sur le bord  $\partial\Omega$ ). En particulier, l'hypothèse du Théorème 3.2.1 à propos du support borné de la fonction  $w$  dans  $\overline{\Omega}$  est inutile si l'ouvert  $\Omega$  est borné. Si  $\Omega$  n'est pas borné, cette hypothèse assure que les intégrales dans (3.5) sont finies. •

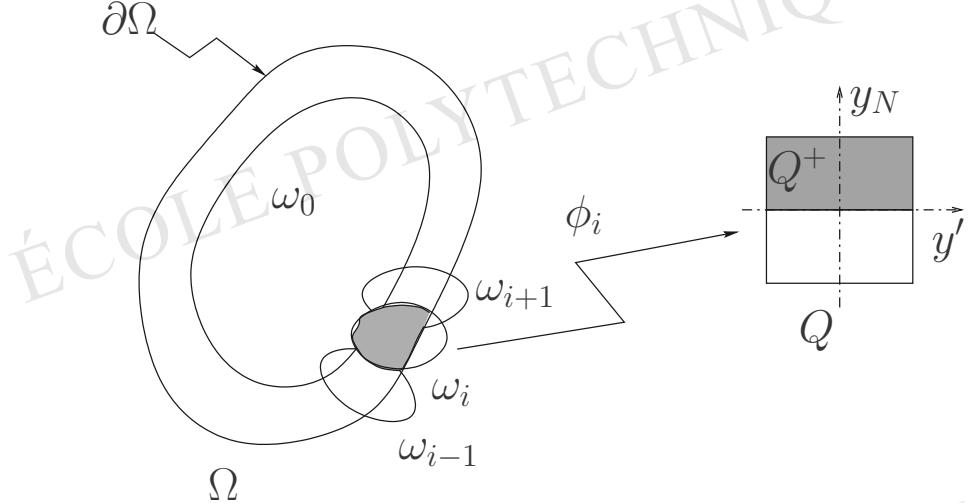


FIG. 3.1 – Définition de la régularité d'un ouvert.

Le Théorème 3.2.1 a de nombreux corollaires qui sont tous des conséquences immédiates de la formule de Green (3.5). Le lecteur qui voudra économiser sa mémoire ne retiendra donc que la formule de Green (3.5) !

**Corollaire 3.2.3 (Formule d'intégration par partie)** *Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$ . Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $C^1(\overline{\Omega})$  à support borné dans le fermé  $\overline{\Omega}$ . Alors elles vérifient la formule d'intégration par partie*

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x) ds. \quad (3.6)$$

**Démonstration.** Il suffit de prendre  $w = uv$  dans le Théorème 3.2.1.  $\square$

**Corollaire 3.2.4** *Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$ . Soit  $u$  une fonction de  $C^2(\overline{\Omega})$  et  $v$  une fonction de  $C^1(\overline{\Omega})$ , toutes deux à support borné dans le fermé  $\overline{\Omega}$ . Alors elles vérifient la formule d'intégration par partie*

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) ds, \quad (3.7)$$

où  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq N}$  est le vecteur gradient de  $u$ , et  $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ .

**Démonstration.** On applique le Corollaire 3.2.3 à  $v$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  et on somme en  $i$ .  $\square$

**Définition 3.2.5** On dit qu'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  est régulier de classe  $C^k$  (avec un entier  $k \geq 1$ ) s'il existe un nombre fini d'ouverts  $(\omega_i)_{0 \leq i \leq I}$  tels que

$$\overline{\omega_0} \subset \Omega, \quad \overline{\Omega} \subset \cup_{i=0}^I \omega_i, \quad \partial\Omega \subset \cup_{i=1}^I \omega_i,$$

et que, pour chaque  $i \in \{1, \dots, I\}$  (voir la Figure 3.1), il existe une application bijective  $\phi_i$  de classe  $C^k$ , de  $\omega_i$  dans l'ensemble

$$Q = \{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}, |y'| < 1, |y_N| < 1\},$$

dont l'inverse est aussi de classe  $C^k$ , et telle que

$$\begin{aligned} \phi_i(\omega_i \cap \Omega) &= Q \cap \{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}, y_N > 0\} = Q^+, \\ \phi_i(\omega_i \cap \partial\Omega) &= Q \cap \{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}, y_N = 0\}. \end{aligned}$$

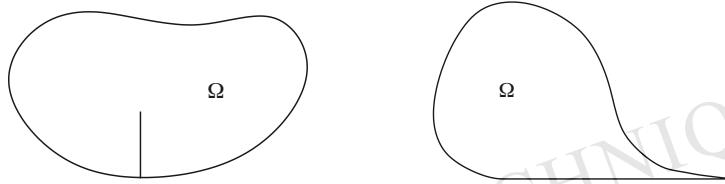


FIG. 3.2 – Deux exemples d'ouvert non régulier : ouvert fissuré à gauche, ouvert avec un point de rebroussement à droite.

**Remarque 3.2.6** Bien que la Figure 3.1 représente un ouvert régulier qui est borné, la Définition 3.2.5 s'applique aussi à des ouverts non bornés. La Définition 3.2.5 n'exclut pas seulement les ouverts dont le bord n'est pas une surface régulière, mais elle exclut aussi les ouverts qui ne sont pas localement situé d'un seul côté de leur frontière. La Figure 3.2 contient deux exemples typiques d'ouvert non régulier qui présentent une singularité irrémédiable, soit en bout de fissure, soit en un point de rebroussement. Ces exemples ne sont pas des "inventions mathématiques" : l'ouvert fissuré est typiquement utilisé pour étudier les problèmes de fissures en mécanique des structures. On peut néanmoins généraliser un peu la classe des ouverts réguliers aux ouverts "réguliers par morceaux", à condition que ces morceaux de frontières se "recollent" en formant des angles différents de 0 (cas d'un point de rebroussement) ou de  $2\pi$  (cas d'une fissure). Tous ces détails dépassent largement le cadre de ce cours, et nous renvoyons le lecteur à la Remarque 4.3.7 pour une autre explication sur ces problèmes de régularité.

**Exercice 3.2.1** Déduire de la formule de Green (3.5) la formule de Stokes

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(x) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \phi(x) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) \cdot n(x) \phi(x) ds,$$

où  $\phi$  est une fonction scalaire de  $C^1(\overline{\Omega})$  et  $\sigma$  une fonction à valeurs vectorielles de  $C^1(\overline{\Omega})$ , à supports bornés dans le fermé  $\overline{\Omega}$ .

**Exercice 3.2.2** En dimension  $N = 3$  on définit le rotationnel d'une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , comme la fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$\text{rot}\phi = \left( \frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\phi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} \right).$$

Pour  $\phi$  et  $\psi$ , fonctions à valeurs vectorielles de  $C^1(\overline{\Omega})$ , à supports bornés dans le fermé  $\overline{\Omega}$ , déduire de la formule de Green (3.5)

$$\int_{\Omega} \text{rot}\phi \cdot \psi \, dx - \int_{\Omega} \phi \cdot \text{rot}\psi \, dx = - \int_{\partial\Omega} (\phi \times n) \cdot \psi \, ds.$$

### 3.2.2 Formulation variationnelle

Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'ouvert  $\Omega$  est borné et régulier, et que le second membre  $f$  de (3.1) est continu sur  $\overline{\Omega}$ . Le résultat principal de cette sous-section est la proposition suivante.

**Proposition 3.2.7** Soit  $u$  une fonction de  $C^2(\overline{\Omega})$ . Soit  $X$  l'espace défini par

$$X = \{ \phi \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

Alors  $u$  est une solution du problème aux limites (3.1) si et seulement si  $u$  appartient à  $X$  et vérifie l'égalité

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx \text{ pour toute fonction } v \in X. \quad (3.8)$$

L'égalité (3.8) est appelée la **formulation variationnelle** du problème aux limites (3.1).

**Remarque 3.2.8** Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle (3.8) est qu'elle a un sens si la solution  $u$  est seulement une fonction de  $C^1(\overline{\Omega})$ , contrairement à la formulation "classique" (3.1) qui requiert que  $u$  appartienne à  $C^2(\overline{\Omega})$ . On pressent donc déjà qu'il est plus simple de résoudre (3.8) que (3.1) puisqu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution.

Dans la formulation variationnelle (3.8), la fonction  $v$  est appelée **fonction test**. La formulation variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites (3.1). En mécanique, la formulation variationnelle est connue sous le nom de "principe des travaux virtuels". En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité.

Lorsqu'on prend  $v = u$  dans (3.8), on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une **égalité d'énergie**, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine  $\Omega$  (le terme de gauche de (3.8)) et une énergie potentielle associée à  $f$  (le terme de droite de (3.8)).