

Projet du Cour EDP

DAI Changjun, ZHENG Yannan, WU Tianyao

November 2020

1 Cas stationnaire

1.1 Introduction

Objectif: Étude de distribution de la température dans une chambre. On va résoudre l'équation en 2D en implémentant du schéma au 5 points. On doit utiliser le Laplacien et l'équation de Poisson : $-\Delta u = f$

En suite, on va obtenir l'équation: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$

Après utilisant le développement de Taylor, on obtient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}$$

On peut y déduire $f = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}$

$$f = \frac{u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2}$$

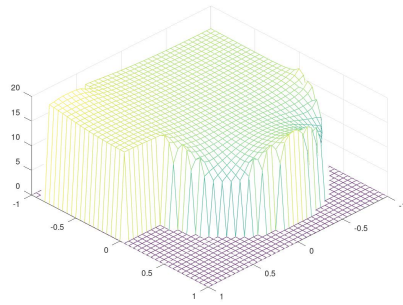
Avec les conditions aux limites:

$$\begin{cases} u(x, 0) = p(x) \\ u(0, y) = q(y) \\ u(x, 1) = r(x) \\ u(1, y) = s(y) \end{cases} \quad (1)$$

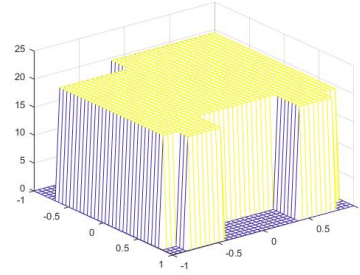
Il nous donne n^2 équations que l'on peut représenter sous forme matricielle $Au=f$.

1.2 Les tests

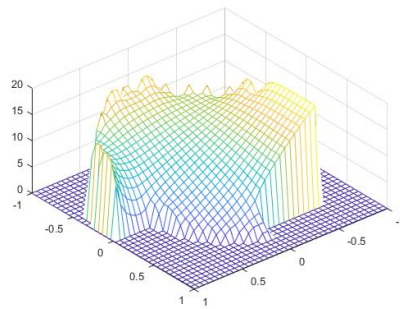
1) D'abord, on suppose que l'on est en été, donc la température ambiante est 20C, les portes et les fenêtres sont à 20C. Les résultats sont dans le Figure 5.



(a) chambre 1



(b) chambre 2

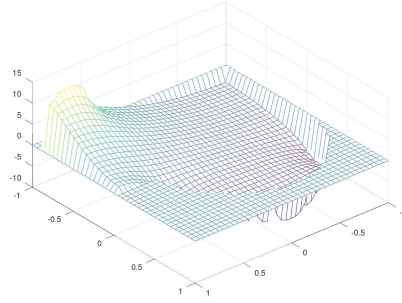


(c) chambre 3

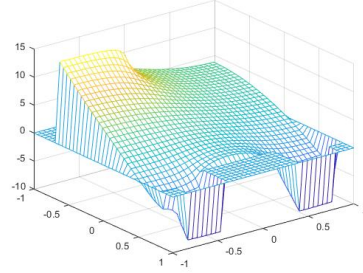
Figure 1: situation 1

On peut facilement voir que la simulation de la chambre 1 et chambre 2, dans l'été, la température de la chambre va finalement devenir identique à la température de l'environnement. Ils sont de 20°C. Mais pour le chambre 3, on trouve que la résultat est différent.

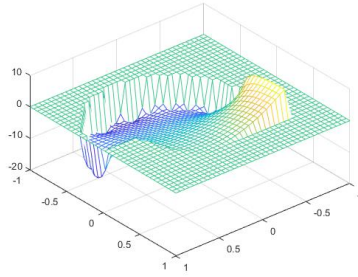
2) En suite, on suppose que l'on est en hiver, donc la température ambiante est -10°C, sans chauffage, la température de la porte est 15°C. Les résultats sont dans le Figure 1 .



(a) chambre1



(b) chambre2

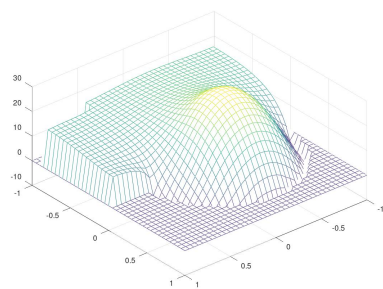


(c) chambre3

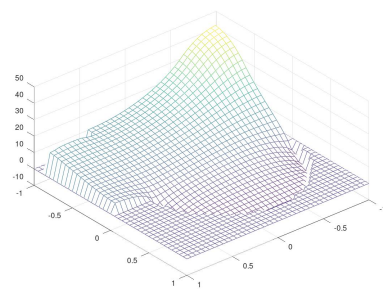
Figure 2: situation 2

Dans ce cas, on peut voir que la température plus élevée de la chambre est à côté de la porte. Par contre, la température plus basse est près de la fenêtre. En comparant les différentes chambres, on peut facilement voir que la chambre (Figure 2(a)) qui a les plus fenêtres a la température plus basse, approximativement à 0°C, même si la température près de la porte où la température plus élevée dans la chambre est moins de 10°C. La température moyenne d'autre chambre est 5°C plus que la chambre1. En bref, le plus la chambre avait de fenêtres, le moins la température moyenne de la chambre.

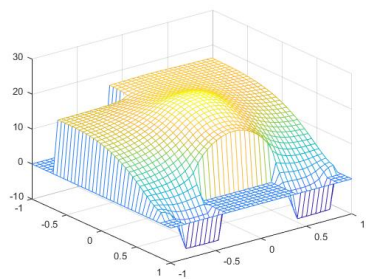
3) Après, on met le radiateur allumé à 100°C et situe le chauffage dans les lieux différents. On utilise la méthode de Poisson pour obtenir les figures (Figure 5) qui ont en un état d'équilibre.



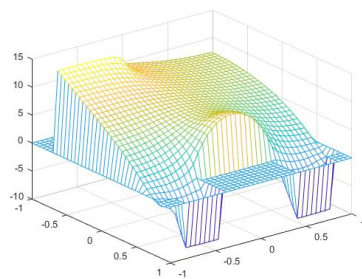
(a) chambre1.1



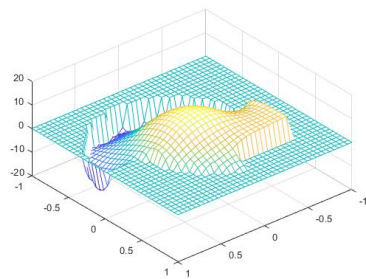
(b) chambre1.2



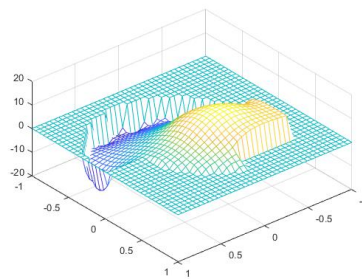
(c) chambre2.1



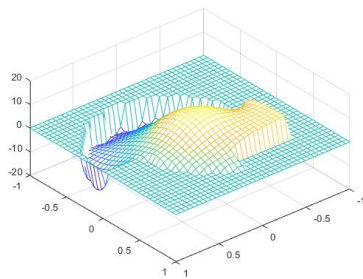
(d) chambre2.2



(e) chambre3.1



(f) chambre3.2



(g) chambre3.3

Figure 3: situation 3

Dans ce cas, on peut voir que la situation de la chauffage est de la température moyenne de la chambre. Et on trouve que pour nos chambres, le mieux lieu pour situer le chauffage est dans la centre de la chambre. Par exemple, la chambre 1, si on situait le chauffage près de la mur (Figure 3(b)), la répartition de la température ne peut pas devenir équilibre. La température de la chambre est bas. Par contre, on situe la chauffage dans la centre et la température est confortable. C'est pareil pour la chambre 2.

Mais pour le chambre 3, on ne peut pas trouver une bonne place pour la chauffage. Parce que la température de l'espace près de la fenêtre est très basse. Alors, il y a peu d'espace qui pour augmenter température dans la chambre. Dans le même temps, à cause de la première partie et la deuxième partie de la chambre 3, on pense que il n'est pas convient pour habiter.

2 Simulation stationnaire

2.1 Théorique

Objectif: on va utiliser des méthodes Euler explicites ou Euler implicite pour simuler le processus de transmission du chaleur dans la chambre.

Les schéma explicites: $\frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^n}{\Delta t} + v \frac{-u_{j-1,l}^n + 2u_{j,l}^n - u_{j+1,l}^n}{(\Delta x)^2} + v \frac{-u_{j,l-1}^n + 2u_{j,l}^n - u_{j,l+1}^n}{(\Delta y)^2} = 0$

Les schéma implicites: $\frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^n}{\Delta t} + v \frac{-u_{j-1,l}^{n+1} + 2u_{j,l}^{n+1} - u_{j+1,l}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + v \frac{-u_{j,l-1}^{n+1} + 2u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = 0$

explicite: $U^{n+1} = (I + v\Delta t A)U^n$

implicite: $U^n = (I - v\Delta t A)U^{n+1}$

Ici A est la matrice obtenue par la discretisation de l'opérateur Laplacien.

En remplaçant le mode de Fourier dans le schéma et en simplifiant par

$$A(k, m)^n e^{2i\pi(kj\Delta x + ml\Delta y)}$$

Schéma explicite:

$$\begin{aligned} A(k, m) &= (1 - \frac{2v\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{2v\Delta t}{(\Delta y)^2}) + \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} (e^{2i\pi k\Delta x} + e^{-2i\pi k\Delta x}) + \frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} (e^{2i\pi m\Delta y} + e^{-2i\pi m\Delta y}) \\ &= 1 - 4\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \pi k\Delta x - 4\frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2 \pi m\Delta y. \end{aligned}$$

On voit que $|A(k, m)| \leq 1$ pour toutes les valeurs de $k, m \in \mathbf{Z}$, si et seulement si

$$-1 \leq 1 - 4\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \pi k\Delta x - 4\frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2 \pi m\Delta y \leq 1$$

Ceci est vrai si la condition CFL suivante est vérifiée:

$$\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2}$$

Donc il est **conditionnellement stable**.

Schéma implicite:

$$\begin{aligned} A(k, m) &= (1 + \frac{2v\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{2v\Delta t}{(\Delta y)^2} - \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} (e^{2i\pi k\Delta x} + e^{-2i\pi k\Delta x}) - \frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} (e^{2i\pi m\Delta y} + e^{-2i\pi m\Delta y})) = 1; \end{aligned}$$

$$A(k, m) = (1 + 4\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \pi k\Delta x + 4\frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2 \pi m\Delta y)^{-1} \leq 1$$

Le schéma implicite est donc **inconditionnellement stable**.

2.2 Numérique

On peut aussi voir les différences par les figures.

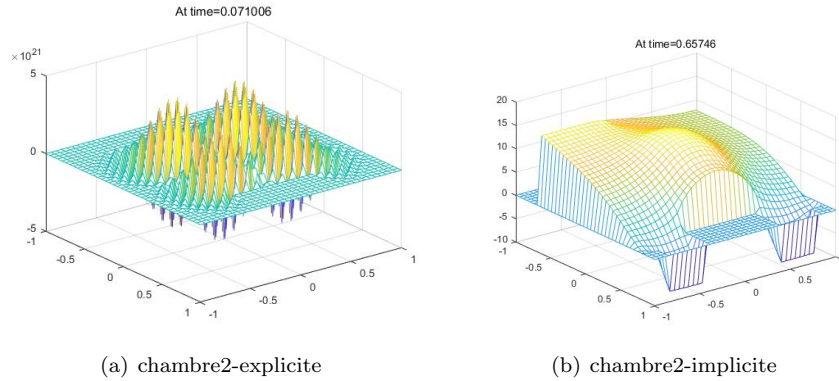


Figure 4: comparaison la stabilité

On choisit le chambre2. Dans le code, on change la valeur d' α de 0,5 à 1, le schéma implicite est stable(Figure 4(b)), mais le schéma explicite n'est pas stable(Figure 4(a)).

Dans le même temps, le temps de fonctionnement de deux schémas sont différents. On commençons par la condition d'allumer le chauffage progressif une fois que le radiateur est allumé à mon retour. On peut voir la figure suivante.

```
>> Room2_partie2
148.0950

>> Room2_partie2
124.7400
```

Figure 5: le temps

La première résultat est la schéma implicite. La deuxième résultat est la schéma explicite. On peut obtenir la résultat que la vitesse d'exécution du programme est différente. La vitesse de schéma explicite est plus vite que la vitesse de schéma implicite.

3 Conclusion

Dans ce projet, on a simulé 3 situations dans la première partie. Et après, on a prouvé que la méthode implicite est plus stable que la méthode explicite. On a

aussi prouvé ça par les codes. En bref, on a mieux comprendre la méthode des différences finies appliquée à un cas test réaliste, et savons comment faire une simulation numérique dans une chambre.