1D : (explicite)

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \gamma \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \gamma \Delta t \cdot \underbrace{\left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}\right)}$$

$$u^{n+1} = (I + \gamma \Delta t A) \cdot u^n$$

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A tridiagonale : discrétisation de $\partial_{xx} u$

ou bien la matrice de discrétisation du laplacien en 1D.

Implicite

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \gamma \underbrace{\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}}_{n+1} = 0$$

On multiplie par Δt

$$\underbrace{\left(u_j^{n+1} - r\Delta t \cdot \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right)}_{} = u_j^n$$

forme matricielle

$$(I - r\Delta t\, A)\, u^{n+1} = u^n$$

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -2 \end{pmatrix} (*)$$

Si on veut "juste" discrétiser le laplacien $u'' = f$

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} = f_j$$

$\Rightarrow \quad AU = F \quad A(A)$

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f_j$$

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = 0 \quad (\text{Neu. hom} \qquad \longleftrightarrow \quad u_0 = u_1$$

$$j=1 \qquad \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{h^2} = f_1$$

$$\frac{u_2 - u_1}{h^2} = f_1$$

$\rightsquigarrow$ si u_1 est voisin d'un point sur la frontière "Neumann" sur la diagonale on a "-1" à la place de "-2")

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ \vdots \\ f_{1n} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{nn} \end{pmatrix}$$