# Équations aux dérivées partielles

## Mini projet par groupe

Hanwen Li – Mourad Sadak– Oualid Ben Mohamed

27 novembre 2020

## Présentation du problème

L'objectif est de résoudre l'équation de Poisson en 2D pour calculer la temperature d'une chambre non rectangulaire.

$$\Delta u = -f$$

Le problème possède des conditions de Neumman sur les murs isolants et Dirichlet sur les fenêtres et les portes.

## Étapes à effectuer

- Dessiner un plan de chambre non rectangumaire
- Representer le problème sous forme matricielle Au=b avec A la matrice Laplacienne et b la matrice qui contient les conditions de Dirichlet et la source de chaleur
- Calculer la solution u stationnaire.

# Théorie - Cas stationnaire

## Raisonnement mathématique

- En 2D l'équation de Poisson s'écrit : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f$

Le développement de Taylor nous donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j-1} - u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}$$

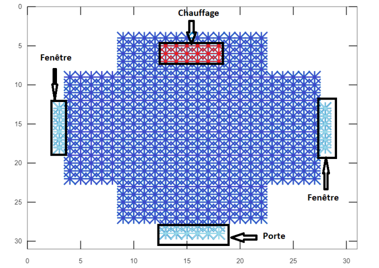
On obtient : $\frac{u_{i,j-1} - 2.u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i-1,j} - 2.u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} = -f$

C'est-à-dire : $\frac{u_{i,j-1} - 4.u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{h^2} = -f$

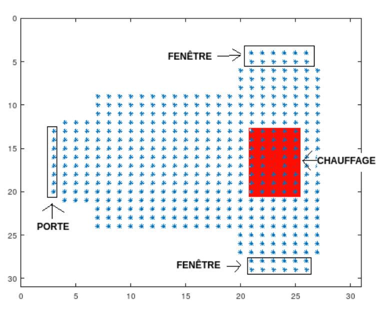
- Un problème donc que l'on peut représenter sous forme matricielle $Au = b$ :

- Avec A la matrice laplacienne, u la solution cherchée (matrice donnant la température dans chaque point de la chambre) et b la matrice colonne contenant les conditions de Dirichlet et la source de chaleur.

## Plan des deux chambres non rectangulaires

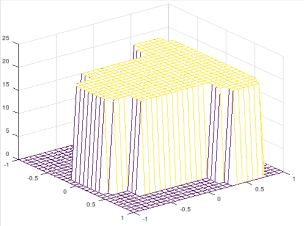



Chambre 1

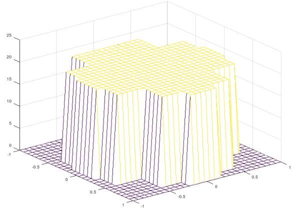



Chambre 2

## Température ambiante en été avec les portes et fenêtres à 20°



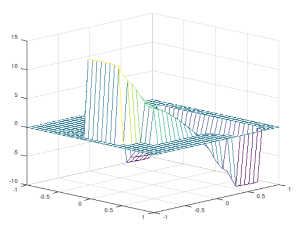

Test1Chambre1.m



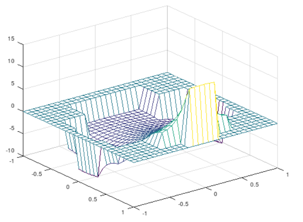
Test1Chambre2.m

On peut constater que dans les deux chambres la temperature ambiante est bien 20°C lorsqu'on a les fenetres et les portes à 20°C, il n'y a pas d'autres sources qui pourrait changer la temperature (on n'utilise pas le chauffage).

### Température ambiante en hiver, sans chauffage, -10° à l'extérieur, et les portes à 15° :



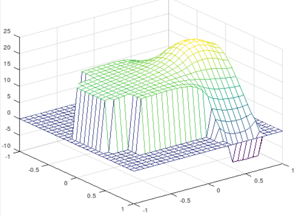

Test2Chambre1.m



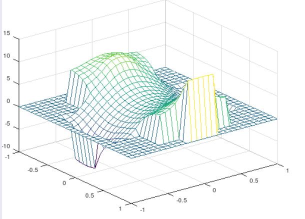

Test2Chambre2.m

Pour la chambre numéro 1 on obtient une température moyenne de 0.35 ° tandis que pour la 2ème elle est de -2.8 °, la chambre numéro 1 a une temperature plus élevée car elle est plus petite et son chauffage est plus grand et mieux positionné.

Température ambiante en hiver, avec chauffage à 200°, -10° à l'extérieur, et les portes à 15° :



Test3Chambre1.m



Test3Chambre2.m

Pour la chambre numéro 1 le chauffage est bien placé (la temperature a augmenté considerablement dans l'ensemble).Tandis que le chauffage de la chambre 2 devrait être plutôt au milieu de la chambre.

## Présentation du problème

Utilisation des méthodes Euler explicites ou implicites pour simuler le processus de transmission de chaleur dans la chambre

## Formules utilisées

- Méthode Euler explicite
$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i-1,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n} - 4u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n} + u_{i+1,j}^{n}}{h^2} = f$$
Méthode Euler implicite
$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} = f$$

## Étapes à effectuer

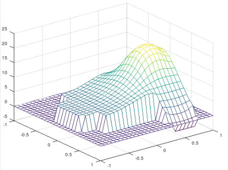
- Soit A la forme matricielle de l'opérateur laplacien, la formule ci-dessus peut être transformée en

  Méthode Euler explicite $U^{n+1} = (I + \nu A)U^n + \frac{\nu \Delta t}{h^2} b$

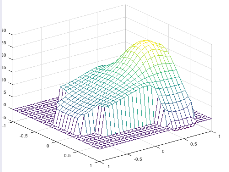
  Méthode Euler implicite $U^{n+1} = \dfrac{I - \nu A}{U^n - \frac{\nu \Delta t}{h^2} b}$
- Ensuite, nous allons définir la condition aux limites de Neumann dans A, et ajouter la température aux limites de la porte et de la fenêtre en b (condition aux limites de Dirichlet)

# Implémentation - Cas instationnaire
## Test 1

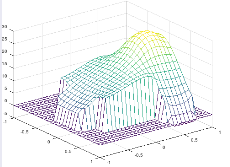
**Chambre initialement froide. Simulation du chauffage progressif en allumant le chauffage (Test1.m) :**



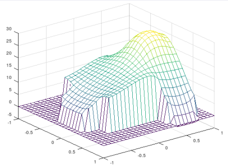
8.6°



13.6°



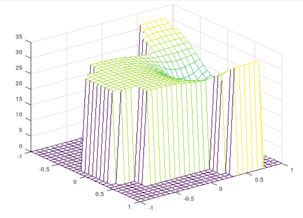
15.5°



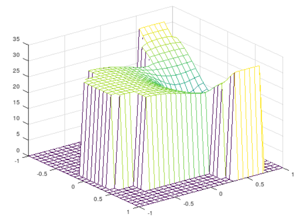
16.2°

Le temps d'exectuion d'Euler Explicite est de 4.8 secondes et celui d'Euler Implicite est de 6.5 secondes

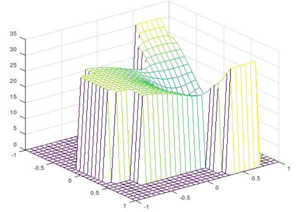
Chambre initialement chaude. Simulation du refroidissement progressif en allumant la clim (Test2.m) :



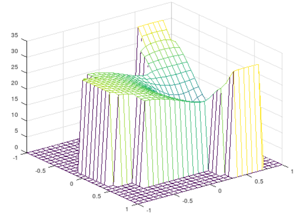
27.5°



25.1°



23.1°



22°

On atteint une temperature idéale (17°- 22°) en 3.6 secondes avec Euler Explicite et en 4 secondes avec Euler Implicite

## Étude de la stabilité d'Euler Explicite (stability.m) :

Nous obtenons que la condition de la stabilité est :

$$\frac{v\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{v\Delta t}{\Delta y^2} < \frac{1}{2}$$

Or on sait que : $\Delta x^2 = \Delta y^2 = h^2$

Donc :

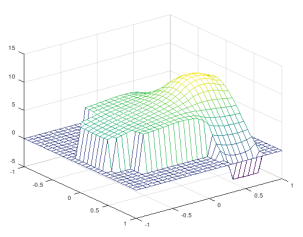
$$cfl = \frac{v\Delta t}{h^2} < \frac{1}{4}$$

Soit

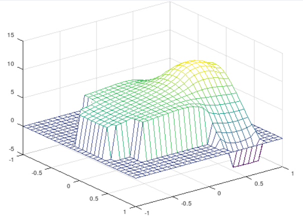
$$\Delta t < \frac{h^2}{4v}$$

En posant $\alpha \in [0; \frac{1}{2}]$ on obtient $\Delta t = \frac{\alpha h^2}{2v}$

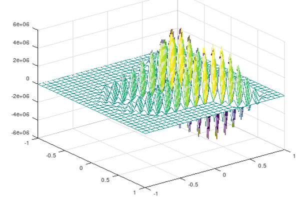
## Étude de la stabilité conditionnelle d'Euler Explicite (stability.m) :



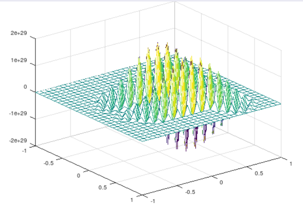
Stabilité : $\alpha = 0.5$



Stabilité : $\alpha = 0.25$

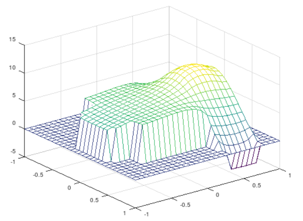


Instabilité : $\alpha = 0.6$

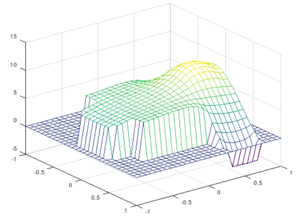


Instabilité : $\alpha = 0.7$

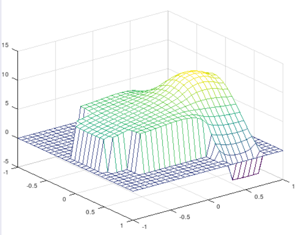
## Étude de la stabilité inconditionnelle d'Euler Implicite (stability.m) :



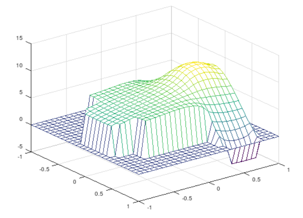
Stabilité : $\alpha = 0.5$



Stabilité : $\alpha = 0.25$



Stabilité : $\alpha = 0.6$



Stabilité : $\alpha = 0.7$

## Comparaison entre explicite et implicite :

Temps d'éxectuion : dans tous nos tests, nous avons constaté qu'Euler Explicite a un temps d'éxecution plus petit qu'Euler Implicite, on en déduit que le coût de calcul de Euler Explicite est mois important.

Stabilité : la méthode explicite est conditionellement stable ($cfl < 0.25 \Rightarrow \alpha < 0.5$), tandis que la méthode implicite est inconditionellement stable.