

---

CONTRÔLE EDP (SUJET D) DURÉE : 90 MINUTES

---

Les documents de cours ne sont pas autorisés. Justifier vos réponses d'une façon concise et claire.

**Questions théoriques:**

- Définir la notion de dispersion numérique et expliquer brièvement comment on peut montrer qu'un schéma est dispersif.
- Écrire le schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de la chaleur.
- Donner l'expression de l'erreur de consistance pour le schéma d'Euler implicite centré amont appliqué à l'équation d'advection.

**Exercice 1**

On considère l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

et on se propose de la résoudre en utilisant le schéma numérique implicite suivant

$$\frac{2u_j^{n+1} - 3u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (j, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

1. Montrer que le schéma (2) est consistant et donner son ordre d'approximation.
2. Montrer que ce schéma implicite est inconditionnellement stable.

**Indication:** Si le facteur d'amplification vérifie une équation quadratique, le schéma est stable si les deux solutions sont inférieures à 1 en module. Il est instable si au moins une des solutions est strictement supérieure à 1 en module.

**Exercice 2**

On considère l'équation d'advection dans le domaine borné  $(0, 1)$  avec  $V > 0$ :

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_*^+, \right.$$

avec  $u(x, 0) = u_0$ ,  $u$  et  $u_0$  périodiques de période 1.

1. Montrer que le schéma de *Lax-Wendroff* implicite diffusif avec la partie advective explicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{V^2 \Delta t}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0.$$

est inconditionnellement stable en norme  $L^2$ .

2. Calculer l'erreur de troncature du schéma. En déduire que le schéma est consistant avec l'équation d'advection. Quelle est sa précision?