Équations aux dérivées partielles – TD 3

Considérons l'équation de la chaleur en une dimension d'espace dans le domaine borné $(0,1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \ \forall x \in (0,1). \end{cases}$$

On discrétise le domaine en utilisant un maillage régulier $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$, $\forall n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N+1\}$ où $\Delta x = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$.

Les conditions aux limites sont des conditions de Dirichlet homogènes: $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $\forall t$.

Le but de cette série d'exercices est d'illuster dans un premier temps la propriété de consistance d'évaluer la précision de quelques schémas. Ceci se fera en calculant l'erreur de troncature à l'aide de développements de Taylor.

Ensuite on va travailler sur la propriété de stabilité en norme L^2. On va évaluer le facteur d'amplification de chaque schéma en y injectant un mode de Fourier et on établira sous quelles conditions ce facteur d'amplification est inferieur à un en module.

On se propose d'étudier les schémas suivants:

1. *Schéma de Crank-Nicolson*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} = 0.$$

2. *Le θ schéma*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta\nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - (1-\theta)\nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0.$$

   On va remarquer que les développement faits pour ce schéma permettront de déduire les conclusions pour les schémas d'Euler implicite et explicite (fait en cours) et Crank-Nicolson qui sont des cas particuliers de θ schéma.

3. *Schéma de DuFort-Frankel*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

Consistance et ordre d'approximation
Montrer que:

- le θ schéma est précis à l'ordre 1 en temps et l'ordre 2 en espace.
- le schéma de Crank-Nicolson est précis à l'ordre 2 en temps et l'ordre 2 en espace
- Que peut-on dire du schéma de DuFort- Frankel?

Quelques règles à suivre

- Il faudra développer tous les termes du schéma *au même point*; le choix de ce dernier n'a pas d'importance et n'a aucune influence sur le résultat final, mais peut influencer la longueur et la difficulté du calcul.
- Il est recommandé de diviser le calcul en plusieurs étapes, les résultats intermediaires pouvant être utils par la suite.
- Il faut *absolument* utiliser à un certain moment l'équation vérifiée par la solution, qui simplifiera les calculs et permettera de trouver le résultat optimal.
- Il faut éviter de manipuler les termes non-significatifs, ceci conduisant à des calculs inutiles.

Stabilité en norme L^2
Montrer que:

- le θ- schéma est *inconditionnellement stable* en norme L^2 si $\theta \leq 1/2$ et que si $1/2 < \theta \leq 1$ alors il est stable sous la condition

$$2(2\theta - 1)\frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq 1.$$

- le schéma de DuFort-Frankel est inconditionnellement stable en norme L^2.
- si on fait tendre Δt et Δx simultanement vers 0 de manière que le rapport $\Delta t/\Delta x$ tende aussi vers 0, alors le schéma de DuFort-Frankel est convergent (on dit qu'il est "conditionnellement" convergent).