COURS 6

Équation d'advection

Eq d'advection en une dimension d'espace, $\Omega = (0,1)$, $V>0$, CL périodicité

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t, x+1) = u(x,t) & ,(x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \quad \text{CL.} \\ u(x,0) = u_0(x) & ,x \in (0,1) \quad \text{CI} \end{cases}$$

On discrétise de nouveau avec un pas d'espace $\Delta x = \frac{1}{N}$ (N entier positif) $\Delta t > 0$ pas de temps.

Soit $u_j^n \sim u(x_j, t_n)$ $\quad x_j = j\Delta x$, $j = 0, 1, \dots N$
$t_n = n\Delta t$.

CL périodicité $\Rightarrow$ $u_0^n = u_N^n$ ou $u_j^n = u_{N+j}^n$.

Quelques schémas:

1 Explicite centré : $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$

Ce schéma est consistant (ordre 1 en temps et 2 en espace) mais inconditionnellement instable.

Consistance: $\varepsilon_j^n = \dfrac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} + V \dfrac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2\Delta x}$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + O(\Delta t) + V \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2) \right)$$

$$= O(\Delta t) + O(\Delta x^2) \quad \text{car} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ (u vérifie l'ép.)}$$

Stabilité L^2. On calcule le facteur d'amplification $G(k)$ où

$u_j^n = G(k)^n e^{2i\pi k j \Delta x}$.

Ceci conduit à $\dfrac{G(k) - 1}{\Delta t} + V \cdot \dfrac{e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x}}{2\Delta x} = 0.$

$$G(k) = 1 + i V \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2\pi k \Delta x)$$

On voit bien que $|G(k)|^2 = 1 + \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(2\pi k\Delta x) \geq 1$

Ce schéma est donc inutilisable. On peut, par contre considérer sa version implicite.

2. $$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + V\cdot \frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0.$$

La consistance se vérifie facilement.

Pour la stabilité on calcule de nouveau le facteur $G(k)$:

$$\frac{G(k)-1}{\Delta t} + V\frac{G(k)}{2\Delta x}\cdot 2i\sin(2\pi k\Delta x) = 0.$$

$$G(k)\left(1 + i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right) = 1$$

$$G(k) = \frac{1}{1+i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)} \Rightarrow |G(k)| = \frac{1}{1+\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2(2\pi k\Delta x)}$$

$\Rightarrow$ le schéma est inconditionnellement stable.

y'a-t-il des schémas explicites qui sont stables (même sous une condition)?

<u>OUI</u>, mais ce sont des schémas décentrés.

(ceci tient compte du sens de propagation de l'information)

<u>Décentré amont:</u> $$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \text{ si } V>0$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x} = 0 \text{ si } V<0$$

Ce schéma sera stable en norme L^∞ (déjà démontré) et en norme L^2 sous la condition $|V|\Delta t \leq \Delta x$.

Consistant et précis à l'ordre 1 en temps et en espace