

TD 8 – Formulation variationnelle

1. On considère le problème aux limites de Neumann suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

où f et g sont continues sur $\bar{\Omega}$ et Ω est un ouvert borné régulier et connexe.

a. Trouver une formulation variationnelle (V) de ce problème sur l'espace $X = H^1(\Omega)$ et montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ est solution de (1) ssi est solution de (V).

b. Montrer qu'une condition nécessaire d'existence de solution de (1) portant sur f et g (condition dite de compatibilité) est la suivante:

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma = 0.$$

c. Montrer que u est solution de (V) ssi elle minimise sur X une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.

d. Montrer que la solution n'est pas unique à une constante près.

2. On considère le problème des plaques suivant:

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f, & \text{dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

où f est continue sur $\bar{\Omega}$.

a. Trouver une formulation variationnelle (V) de ce problème sur l'espace $X = \{v \in H^2(\Omega), v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \partial\Omega\}$. Montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^4(\bar{\Omega})$ est solution de (2) ssi elle est solution de (V).

b. Montrer que u est solution de (V) ssi elle minimise sur X une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.

3. On suppose que Ω est un ouvert borné régulier de classe \mathcal{C}^1 . A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et unicité de la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

où $f \in L^2(\Omega)$. On admettra l'inégalité suivante (qui généralise l'inégalité de Poincaré):

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

4. Soit Ω un ouvert régulier. On considère l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u + V \cdot \nabla u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

où V est un champ de divergence nulle.

a Reprendre la première question de l'exercice 1.

b Peut-on associer à ce problème un problème de minimisation comme nous l'avons fait à l'exercice 1?

c Montrer que (4) admet au plus une solution.

d Aurait-on obtenu un résultat identique si la divergence de V prenait des valeurs strictement positives?