Equation d'advection (-diffusion)

Quel schéma utiliser et comment l'implémenter ?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \; x \in (0, L), \; t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u(0, t) = u(L, t) \quad \text{CL périodicité} \end{cases}$$

ep transport ⇝ sol connue $u(x,t) = u_0(x - Vt)$

Schémas explicites

1. Euler décentré amont

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{si } V > 0$$

- conditionnellement stable ($\frac{V \Delta t}{\Delta x} \leq 1$)
- ordre 1 en espace et temps
- Dissipatif

2. Lax - Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \Delta x} - \frac{V^2 \Delta t}{2} \cdot \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

- conditionnellement stable (?)
- ordre 2 en espace
- Non-dissipatif (centré + partie diffusive)

Stabilité de Lax-Wendroff $\quad u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi k j \Delta x}$

$$\frac{A(k)-1}{\Delta t} + \frac{V\overbrace{\left(e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k \Delta x}\right)}^{2i\sin(2\pi k\Delta x)}}{2\Delta x} - \frac{V^2\Delta t}{2\Delta x^2}\big(\underbrace{e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}}_{-4\sin^2(k\pi\Delta x)}\big) = 0$$

$$A(k) = 1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x} i \sin(2\pi k\Delta x) - \underbrace{\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2}_{\alpha} \cdot 2\sin^2(k\pi\Delta x)$$

$$S_k = \sin(k\pi\Delta x), \quad C_k = \cos(k\pi\Delta x)$$

$$\sin(2\pi k\Delta x) = 2 S_k C_k$$

$$|A(k)|^2 = (1 - 2\alpha^2 S_k^2)^2 + (2\alpha S_k C_k)^2 \overset{?}{\leq} 1$$

$$-4\alpha^2 S_k^2 + 4\alpha^4 S_k^4 + 4\alpha^2 S_k^2 C_k^2 \overset{?}{\leq} 0$$

$$-4\alpha^2 S_k^4 + 4\alpha^4 S_k^4 \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq 1$$

Lax-Wendroff : même condition de stabilité que Euler explicite décentré amont !

Lax-Wendroff est un meilleur schéma car on gagne en précision !

Lax Wendroff n'est pas un schéma diffusif et l'erreur de troncature est

$$\varepsilon_j^n = \frac{V\Delta x^2}{6}\left(1 - V^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta t^3) + O(\Delta x^3) + O(\Delta t\,\Delta x^3)$$

$\Rightarrow$ la dispersion numérique est d'autant plus grande que le terme dominant est grand.

Une façon de réduire la dispersion numérique est de rendre le terme

$$1 - V^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \longrightarrow \text{petit}$$

$\Rightarrow 1-\alpha^2 \to 0$ Mais $\alpha \leq 1$ condition de stabilité numérique $\Rightarrow$

si $\boxed{\alpha = 1}$ $\longrightarrow$ pas de dispersion numérique et le schéma devient d'ordre 3 en espace et en temps !

Schémas implicites

En "implicitant" les schémas d'Euler décentrés $\rightsquigarrow$ schémas inconditionnellement stables mais "dissipatifs" (car d'ordre 1).

On va donc préférer les schémas d'ordre 2. Est-ce que ces schémas sont non-dissipatifs ?

1 Euler centré

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + V \cdot \frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

- inconditionnellement stable
- Dissipatif ?
- ordre 1 en temps

2. Crank Nicolson

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{4\Delta x} + V \cdot \frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{4\Delta x} = 0$$

- inconditionnellement stable
- non dissipatif, ordre 2 en temps

- On a déjà étudié la dispersion numérique de Crank-Nicolson.

- Quelle est la dispersion numérique du schéma d'Euler centré ?

$$\varepsilon_j^n = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^{n+1})} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^{n}) + O(\Delta t^2)$$

$$+ V\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^{n})} + \frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t^{n}) + O(\Delta x^4)\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -V\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_j^n = \underbrace{-\frac{V^2\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^{n})}_{\text{dissipation numerique}} + \underbrace{\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t^{n})}_{\text{dispersion}} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4)$$

$\Rightarrow$ le schéma Euler implicite centré est dissipatif $\leadsto$ on peut l'améliorer à l'aide d'une équation équivalente.

$\Rightarrow$ l'équation equivalente du schéma d'Euler implicite est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v^2 \Delta t}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

si on discrétise cette equation equivalente (discrétisation centrée de la dérivée première)

$\rightsquigarrow$ schéma de Lax-Wendroff

<u>Remarque</u>: on n'est pas obligés de discretiser d'une façon implicite dans un premier temps.

<u>Conclusion</u>: Le schéma de Lax-Wendroff améliore en principe le schéma d'Euler et il est obtenu à l'aide d'une éq. équivalente.

3. Lax Wendroff "implicite"

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+v\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}-\frac{v^2\Delta t}{2}\cdot\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}=0$$

(on implicite seulement le terme de diffusion)

Est-ce que cela suffit pour la stabilité ?

Vérifions: $u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi k\Delta x}$

$$\frac{A(k)-1}{\Delta t}+\frac{iv\sin(2\pi k\Delta x)}{\Delta x}-A(k)\frac{v^2\Delta t}{2\Delta x^2}(2\cos(2\pi k\Delta x)-2)=0$$

$$\Leftrightarrow A(k)(1+2\alpha^2\sin^2(k\pi\Delta x))=i\alpha\sin(2\pi k\Delta x)$$

$\alpha=\frac{v\Delta t}{\Delta x}$ (nombre de CFL)

$$\Leftrightarrow \quad A(k)=\frac{2i\alpha s_k c_k}{1+2\alpha^2 s_k^2}$$

$$|A(k)|^2=\frac{4\alpha^2 s_k^2 c_k^2}{(1+2\alpha^2 s_k^2)^2}\overset{?}{\leq}1$$

$$4\alpha^2 s_k^2 c_k^2 \leq 1+4\alpha^2 s_k^2+4\alpha^4 s_k^4$$

$$0\leq 1-4\alpha^2 s_k^4+4\alpha^4 s_k^4$$

$$\Leftrightarrow 4s_k^2\alpha^2(1-\alpha^2)\leq 1$$

tjrs vrai