Université Côte d'Azur Polytech'Nice
MAM4 - Équations aux Dérivées Partielles 28 Janvier 2021

Examen Équations aux Dérivées Partielles - Sujet a. Durée : 1,5h

---

Les documents de cours sont autorisés. Justifier vos reponses d'une façon concise et claire.

Problème 1

Considérons l'équation d'advection dans le domaine borné $(0,1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 3\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \; \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \end{cases}$$

avec $u(x,0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1.

1. Construire un schéma décentré explicite stable en norme L^2 et en norme L^∞ et donner sa condition de stabilité. Avec une petite modification le schéma devient inconditionnellement instable. Donner ce nouveau schéma et montrer son instabilité.

2. Calculer l'erreur de troncature dans les deux cas, quel est l'ordre d'approximation?

3. On souhaite améliorer la stabilité, l'ordre d'approximation et la dissipation du schéma.

   Construire un schéma (i) inconditionnellement stable sans changer l'ordre d'approximation. (ii) inconditionnellement stable mais avec ordre 2 en temps et espace, (iii) non-dissipatif en passant par l'equation equivalente.

Problème 2

Montrer que la fonction $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x \leq 1/2, \\ 1, & 1/2 < x < 1 \end{cases} \tag{1}$$

est à carré integrable mais pas continue sur $(0,1)$. Considérons le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -u''(x) &= f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 1, \end{cases} \tag{2}$$

où $f(x)$ est donné par (1). Montrer que la fonction suivante est une solution faible du problème aux limites (2)

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + 1, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{4} + \frac{3}{4}, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases} \tag{3}$$

Problème 3

Considérons le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -(x^2 u'(x))' + u(x) &= f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(0) &= 0, \\ u'(1) + 2u(1) &= 1, \end{cases} \tag{4}$$

où f est une fonction à carré integrable .

En multipliant l'équation (4) par une fonction test v, en integrant par parties et en prenant en compte les conditions aux limites, écrire la formulation variationnelle du problème (4) sous la forme

$$\text{Trouver } u \in V_E, \text{tel que } a(u,v) = (f,v), \; \forall v \in V_E.$$

Identifier clairement la forme bilinéaire a et l'espace fonctionnel V_E .