

## TD 8 – Formulation variationnelle

1. On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de classe  $\mathcal{C}^1$ . A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et unicité de solution faible du problème aux limites suivant (conditions de Robin) :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$ . On admettra l'inégalité suivante (qui généralise l'inégalité de Poincaré):

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

2. On considère le problème des plaques suivant:

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f, & \text{dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

où  $f$  est continue sur  $\bar{\Omega}$ .

a. Trouver une formulation variationnelle de ce problème sur l'espace  $H = \{v \in H^2(\Omega), v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \partial\Omega\}$ .

b. Montrer que  $u$  est solution faible si et seulement si elle minimise sur  $H$  une fonctionnelle  $E(v)$  que l'on précisera.

3. Soit  $\Omega$  un ouvert régulier. On considère l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u + V \cdot \nabla u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

où  $V$  est un champ de divergence nulle.

a. Proposer une formulation variationnelle.

b. Peut-on associer à ce problème un problème de minimisation ?

c. Montrer que (3) admet au plus une solution.

4. On considère le problème aux limites de Neumann suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

où  $f$  et  $g$  sont continues sur  $\bar{\Omega}$  et  $\Omega$  est un ouvert borné régulier et connexe.

a. Trouver une formulation variationnelle de ce problème sur l'espace  $H^1(\Omega)$ .

b. Montrer qu'une condition nécessaire d'existence de solution de (4) portant sur  $f$  et  $g$  (condition dite de compatibilité) est la suivante:

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma = 0.$$

c. Montrer que  $u$  est solution faible si et seulement si elle minimise sur  $X$  une fonctionnelle  $E(v)$  que l'on précisera.

d. Montrer qu'on n'a pas unicité de solution.