

# Differences finies pour l'équation de la chaleur

Theoreme de Lax, cas bi-dimensionnel

# Convergence : théoreme de Lax

Un de plus importants théorèmes de l'analyse numérique!

Tout schéma linéaire, à deux niveaux qui est *consistant* et *stable* est aussi *convergent*. (on a supposé la solution suffisamment régulière avec des conditions aux limites données).

De plus, l'erreur d'approximation est bornée par l'erreur de troncature (multipliée par une constante) et la convergence vers la solution est d'autant plus rapide que le schéma est précis.

Preuve: a suivre...

# Theoreme de Lax

Soit  $u(t,x)$  la solution suffisamment régulière de l'équation de la chaleur. Soit  $u_j^n$  la solution numérique discrete obtenue par le schéma aux différence finies avec la donnée initiale  $u_j^0 = u_0(x_j)$ . On suppose que le schéma linéaire à deux niveau est stable et consistant. Alors il est convergent au sens où:

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left( \sup_{t_n \leq T} \|e^n\| \right) = 0, \quad e^n = (e_j^n)_{\{1 \leq j \leq N\}}, e_j^n = u_j^n - u(t^n, x_j)$$

De plus, si le schéma est précis à l'ordre  $p$  en espace et  $q$  en temps, alors pour tout temps  $T, \exists C_T > 0$

$$\sup_{t_n \leq T} \|e^n\| \leq C_T \left( (\Delta x)^p + (\Delta t)^q \right).$$

# Preuve du thm de Lax - I

Pour simplifier on considère des conditions de Dirichlet. Tout schéma linéaire à deux niveaux s'écrit:

$$u^{n+1} = A u^n$$

où  $A$  est une matrice et  $u^n$  le vecteur des valeurs discrètes données par le schéma.

Si on note par  $\tilde{u}^n = \left( u(t^n, x_j) \right)_{1 \leq j \leq N}$  le vecteur avec la solution exacte dans les points du maillage, alors selon la définition de la consistance on a

$$\tilde{u}^{n+1} = A \tilde{u}^n + \Delta t \epsilon^n \quad \text{with} \quad \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \|\epsilon^n\| = 0,$$

En plus si le schéma est précis à l'ordre  $p$  en espace et  $q$  en temps, alors

$$\|\epsilon^n\| \leq C((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$$

## Preuve du thm de Lax - II

En définissant l'erreur  $e^n = (e_j^n)_{\{1 \leq j \leq N\}}$ ,  $e_j^n = u_j^n - u(t^n, x_j)$  et en utilisant le schéma et la définition de la consistance on obtient

$$e^{n+1} = A e^n - \Delta t \epsilon^n$$

Rekursivement on obtient

$$e^n = A^n e^0 - \Delta t \sum_{k=1}^n A^{n-k} \epsilon^{k-1}.$$

Le schéma est stable donc  $\|u^n\| = \|A^n u^0\| \leq K \|u^0\| \Rightarrow \|A^n\| \leq K, \forall n$

$$\|e^n\| \leq \Delta t \sum_{k=1}^n \|A^{n-k}\| \|\epsilon^{k-1}\| \leq \Delta t n K C \left( (\Delta x)^p + (\Delta t)^q \right),$$

# Le cas multidimensionnel

Constat: on ne peut pas “simuler” la physique d’une façon réaliste en une seule dimension!

Equation de la chaleur en 2d avec des conditions de Dirichlet homogènes et conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{for } (x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0, x, y) = u_0(x, y) & \text{for } (x, y) \in \Omega \\ u(t, x, y) = 0 & \text{for } t \in \mathbb{R}_*^+, (x, y) \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

# Grille bi-dimensionnelle

Discretisation en espace et en temps: on a une grille bi-dimensionnelle en espace + celle en temps

$$(t_n, x_j, y_k) = (n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \quad \text{for } n \geq 0, 0 \leq j \leq N_x + 1, 0 \leq k \leq N_y + 1.$$

$$u_{0,k}^n = u_{N_x+1,k}^n = 0, \quad \forall k, \quad \text{and} \quad u_{j,0}^n = u_{j,N_y+1}^n = 0, \quad \forall j.$$



# Schéma d'Euler explicite

Le principe de construction reste le même qu'en une dimension d'espace: on approche la dérivée en temps et ensuite les dérivées spatiales indépendamment

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j+1,k}^n}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j,k+1}^n}{(\Delta y)^2} = 0$$

Le schéma est consistant (d'ordre 1 en temps et 2 en espace) et conditionnellement stable

$$\frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2}.$$



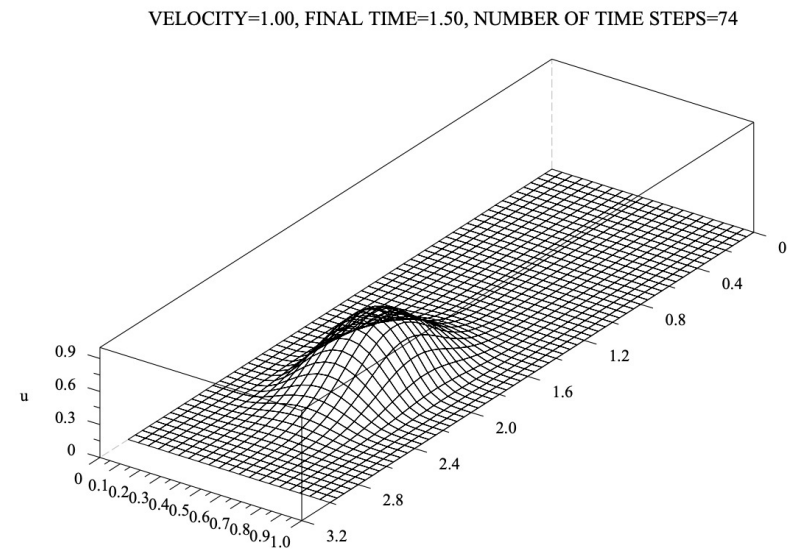
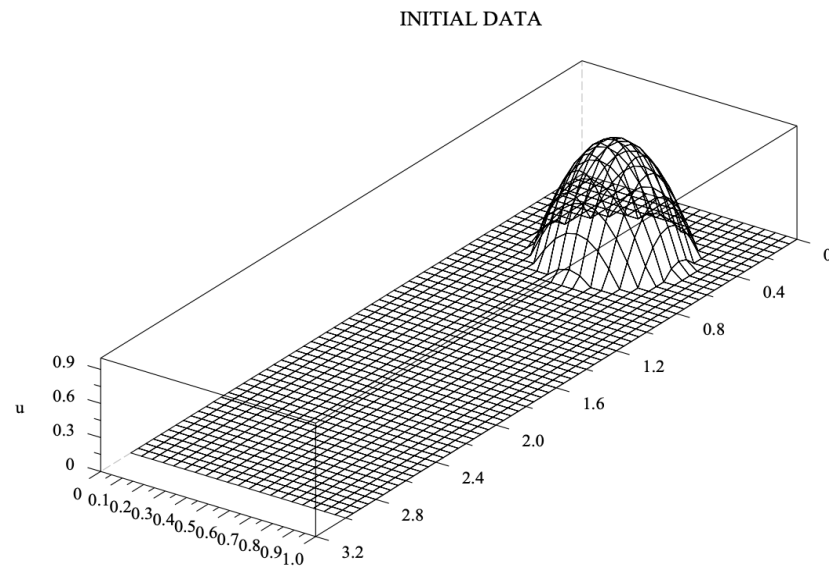
# Schéma d'Euler implicite

Principe similaire pour le schéma implicite:

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j+1,k}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = 0.$$

Tout comme dans le cas unidimensionnel le schéma est consistant (d'ordre 1 en temps et 2 en espace) et in conditionnellement stable

# Exemple de simulation (convection-diffusion)



# Forme matricielle du schéma implicite

Le schéma s'écrit sous forme matricielle:  $Mu^{n+1} = u^n$

$$u^n = (u_{1,1}^n, \dots, u_{1,N_y}^n, u_{2,1}^n, \dots, u_{2,N_y}^n, \dots, u_{N_x,1}^n, \dots, u_{N_x,N_y}^n).$$

$$M = \begin{pmatrix} D_1 & E_1 & & & 0 \\ E_1 & D_2 & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & E_{N_x-2} & D_{N_x-1} & E_{N_x-1} \\ 0 & & & E_{N_x-1} & D_{N_x} \end{pmatrix}$$

# Blocs matriciels – schéma implicite

Blocs diagonaux

$$D_j = \begin{pmatrix} 1 + 2(c_y + c_x) & -c_y & & & 0 \\ -c_y & 1 + 2(c_y + c_x) & -c_y & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -c_y & 1 + 2(c_y + c_x) & -c_y \\ 0 & & & -c_y & 1 + 2(c_y + c_x) \end{pmatrix}$$

Blocs extra-diagonaux

$$E_j = \begin{pmatrix} -c_x & 0 & & & 0 \\ 0 & -c_x & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -c_x & 0 \\ 0 & & & 0 & -c_x \end{pmatrix}.$$

# Schémas semi-implicites

- Le cout d'un schéma implicite est important (résolution d'un système linéaire) et augmente en trois dimensions!
- En 3d avec 50 points de discretisation dans une dimension spatiale  $\Rightarrow$  système de 125000 équationa avec autant d'inconnues
- Solution: "impliciter" seulement une partie du schéma (e.g. dans une des directions à la fois)
- Exemples: Peachman-Rachford ou schéma de directions alternés

# Schéma de Peachman-Rachford

On “implicite” alternativement les deux directions

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j,k+1}^n}{2(\Delta y)^2} = 0$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{2(\Delta y)^2} = 0.$$

Le schéma est d'ordre deux en espace et en temps et inconditionnellement stable!

# Schéma ADI (directions alternées)

On peut "impliciter" différemment, en résolvant successivement des équations uni-dimensionnelles

$$\frac{u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j+1,k}^{n+1/2}}{2(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j+1,k}^n}{2(\Delta x)^2} = 0$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{2(\Delta y)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1/2} + 2u_{j,k}^{n+1/2} - u_{j,k+1}^{n+1/2}}{2(\Delta y)^2} = 0$$

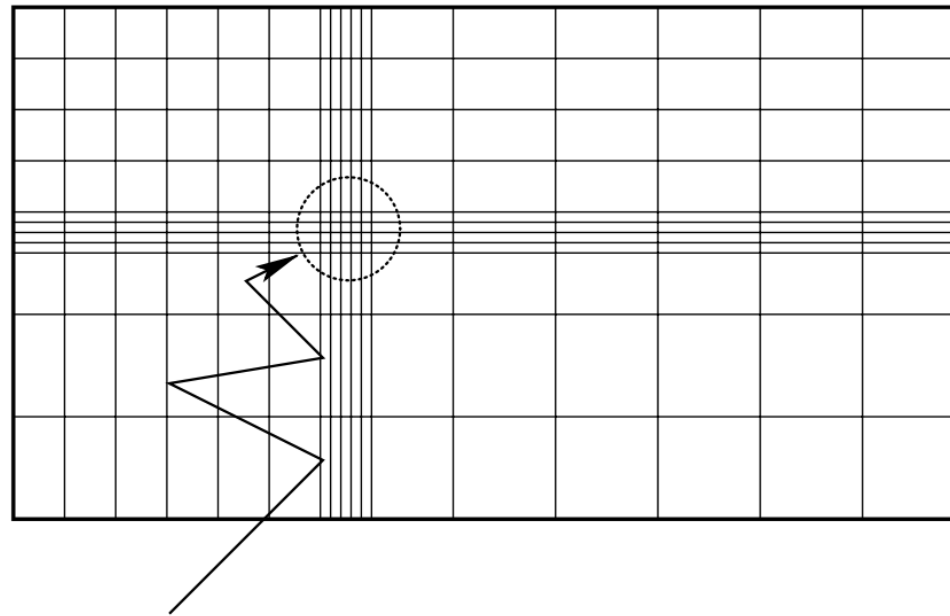
Le schéma est d'ordre deux en espace et en temps et inconditionnellement stable!

# Limitations de la méthodes des différences finies

- Avantages: simplicité et mise en oeuvre pour des problèmes simples
- Inconvénients: ça marche pour des maillages réguliers ou rectangulaires.
- Il n'est pas possible de “raffiner” localement le maillage, sauf dans des directions perpendiculaires.
- Le raffinement de maillage devient compliqué, tout comme l'implémentation dans des cas à coefficients variables.



# Exemple de raffinement de maillage



Cette méthode a des limitations et dans des cas complexes on va passer aux éléments finis!

# Prochaine séance

- Implementation numérique en deux dimension du laplacien (building-block de l'implementation de l'équation de la chaleur).
- Présentation du travail à faire en mini-projet: simulation numérique de la distribution de temperature de votre chambre dans des différentes conditions de chauffage et temperature exterieure.
- But du projet: Utilisation de la méthode des différence finies dans un domaine simple mais non trivial (pas forcément rectangulaire); Implementation de différents types de conditions aux limites; Interpretation des résultats obtenus avec différents schémas (Euler explicite/implicite ou Crank-Nicolson)