(1)

COURS 2 EDP MAM4 19/09/2012

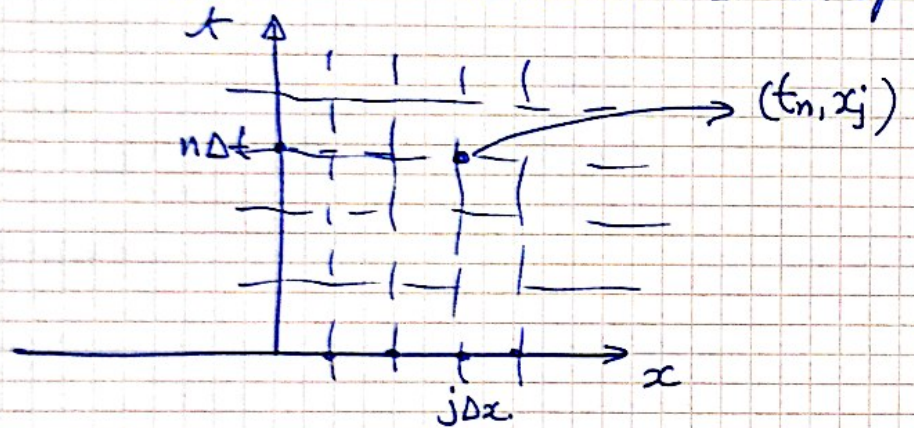
Calcul numérique - Introduction aux différences finies

- Il est en général impossible de calculer explicitement les solutions des équations aux dérivées partielles.
- On a donc besoin d'approximation des solutions.

Remarque : On calcule des sol approchées et on calcule un nombre fini de valeurs (passage du continu au discret).

La plus simple méthode d'approximation = différences finies.

On se limite à la dimension 1 en espace.



Δx - pas d'espace

Δt - pas de temps

Not: $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$ $n \geq 0$ et $j \in \mathbb{Z}$

$u_j^n \sim u(x_j, t_n)$ l'approximation de la solution u en (x_j, t_n)

Le principe de la méthode : remplacer les dérivées par des "différences" en se basant sur la formule de Taylor

Exemple :
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) \approx + \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \qquad (1)$$

Pourquoi ? On voit que $u(x-\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x+\Delta x, t)$
$$= \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\Delta x^4}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) + O(\Delta x^6) \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ pour Δx petit en divisant par Δx^2 la formule (2)

on voit que
$$\frac{u(x-\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x+\Delta x, t)}{\Delta x^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Q1 s'appelle approximation "centrée" de la dérivée.

Si on veut discrétiser l'équation de convection diffusion

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{dérivée pure en temps}} + V \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{dérivée pure en espace.}} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Ici il y a plusieurs choix : $V \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) \approx V \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$.

tout comme pour la dérivée en temps $\Rightarrow$ plusieurs schémas numériques.

1. Schéma centré en temps et espace (Richardson).

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

$\Rightarrow$ ce schéma ne peut pas calculer les solutions (instabilité.

2. Schéma décentré amont (en temps) $\rightarrow$ schéma d'Euler rétrograde ou implicite.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

3. Schéma décentré aval $\rightarrow$ schéma d'Euler progressif ou explicite.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

Rem
$\rightarrow$ Schéma implicite vs explicite : il faut résoudre un système linéaire pour trouver les valeurs

$\rightarrow$ Pour démarrer les itérations on a besoin d'une solution initiale $(u_j^0)_{j \in \mathbb{Z}} = u_0(j\Delta x)$