28/11/2012

(COURS 10) FORMULATION VARIATIONNELLE DES PBMES ELLIPTIQUES

On veut analyser les EDPs elliptiques : donner des résultats pour qu'un problème aux limites soit bien posé.
On utilisera pour cela l'approche variationnelle (même si cela n'est pas propre aux ép elliptiques.
Considérons le problème prototype suivant :

$$(1) \begin{cases} -\Delta u = f, \text{ dans } \Omega \\ u = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \rightarrow \text{CL Dirichlet homogène}$$

f second membre donné, u - fonction inconnue

Formulation classique vs formulation variationnelle.

- Formulation classique : supposer suffisamment de régularité pour la solution afin que l'équation (1) ait un sens.
- solution classique ou solution forte : $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (au moins 2 fois continûment différentiable à l'intérieur de Ω et continue sur le bord de Ω)

Pbme : Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \Rightarrow f \in C(\bar{\Omega})$
MAIS si $f \in C(\bar{\Omega})$ on peut pas montrer en général qu'il $\exists\, u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ qui soit solution.
$\Rightarrow$ on doit changer d'optique et remplacer l'éq formulation forte

Le cas de la dimension un d'espace

$N=1$ $\Omega = (0,1)$ $\Rightarrow$ pbme aux limites $\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f, x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

Ce problème admet une sol explicite donnée par la formule

~~$-\frac{du}{dx} = \int_0^x f(t)\,dt + c_1$ ensuite $u(x) =$~~

$$u(x) = x\int_0^1 f(s)(1-s)\,ds - \int_0^x f(s)(x-s)\,ds \qquad x \in [0,1]$$

Pour des problèmes plus compliqués il n'existe pas de formule

Approche variationnelle

On admettra la formule de Green :
$w \in C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans $\bar{\Omega}$. Alors

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} w\, n_i(x)\, ds.$$

n_i est la i-ème composante de la normale extérieure dans Ω.

Corollaire. Formule d'intégration par parties qui généralise la formule de 1d.

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_\Omega v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\, v(x)\, n_i(x)\, d\sigma.$$

(en 1D $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_\Omega f'(x) g(x)\,dx$)

D'ici on déduit que $\displaystyle\int_\Omega \Delta u\cdot v\, dx = -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\cdot v\, d\sigma$

$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u\cdot n.$

Propriété : Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$ et X l'espace défini par $X = \{\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ tq $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega\}$

Alors u est solution du problème (1) ssi

(2) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \quad \forall v \in X.$

L'égalité (2) s'appelle formulation variationnelle.

Remarques. Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) (on va le démontrer)

Par contre on voit que si $u \notin C^2(\bar{\Omega})$, la formulation (2) a un sens tandis que (1) n'en a pas.

Si on prend $v = u$ dans (2) on obtient ce qu'on appelle "égalité de l'énergie"

Preuve : '$\Rightarrow$' On multiplie par v l'eq (1) et on intègre par parties

$$\int \Delta u\cdot v\, dx = -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\cdot v\, d\sigma}_{=0} \quad \text{car } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$$\Rightarrow \int \nabla u\cdot\nabla v\, dx = \int f v\, dx.$$

Inversement si (2) est vérifiée par IPP $\Rightarrow \displaystyle\int_\Omega (\Delta u + f)\, v = 0 \quad \forall v \in V$

$\Rightarrow \quad -\Delta u = f$