# Problème 1

1 On fait explicite décentré amont :

On a $\dfrac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t} - 4\,\dfrac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} = 0$ car $-4<0$

Le schéma est stable en norme $L^2$ :

on remplace $U_j^n$ par $A(k)^n e^{2i\pi j k \Delta x}$ et on factorise :

on obtient :

$$\frac{A(k)-1}{\Delta t} - 4\,\frac{e^{2i\pi k\Delta x}-1}{\Delta x} = 0$$

$$A(k) = 1 + \overbrace{\frac{4\Delta t}{\Delta x}}^{\alpha}\left(e^{2i\pi k\Delta x}-1\right) = 1 + \frac{4\Delta t}{\Delta x}\left(\cos(2\pi k\Delta x) + i\sin(2\pi k \Delta x) - 1\right)$$

$2 s_k c_k$ ; $-2 s_k^2$

on pose $c_k = \cos(\pi k\Delta x)$

$s_k = \sin(\pi k \Delta x)$

$$|A(k)|^2 = (1-\alpha 2 s_k^2)^2 + 4 s_k^2 c_k^2 \alpha^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -4\alpha s_k^2 + 4\alpha^2 s_k^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \leq 1 \qquad \frac{4\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

et en norme $L^\infty$

$$U_j^{n+1} = \frac{4\Delta t}{\Delta x}\left(-2U_j^n + U_{j+1}^n\right)$$

donc la condition est $\dfrac{4\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ qui est la même qu'en norme $L^2$.

Si au lieu de prendre le schéma décentré amont on prend le schéma explicite centré alors il est inconditionnellement instable

On aurait alors

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t} - 4\,\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

En $L^2$ on a : $\dfrac{A(k)-1}{\Delta t} - 4\,\dfrac{e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x}}{2\Delta x} = 0$

$$A(k) = 1 + 4i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)$$

On a alors :

$$|A(k)|^2 = 1 + \left(\frac{-4\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(2\pi k \Delta x) > 1$$

donc le schéma est inconditionnellement instable

De même si dans le décentré amont on change les indices cent :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 4\,\frac{u_j^{n} - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (2)$$

en Norme $L^2$ on tombe sur $|A(k)|^2 = (1 + \alpha 2 s k^2)^{2\alpha} + 4 s k \xi_k^2 \alpha^2 > 1$

donc inconditionnellement instable aussi

2. Pour le premier :

$$u(x, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u(x_j, t)}{\partial t} + O(\Delta t^2)$$

donc $\dfrac{u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n)}{\Delta t} = \dfrac{\partial u(x_j, t^n)}{\partial t} + O(\Delta t)$

de même $-4\,\dfrac{u_{j+1}^{n} - u_j^n}{\Delta x} = -4\dfrac{\partial u(x_j, t^n)}{\partial x} + O(\Delta x)$

donc $\varepsilon = \dfrac{\partial u(x_j, t^n)}{\partial t} - 4\dfrac{\partial u(x_j, t^n)}{\partial x} + O(\Delta t) + O(\Delta x)$

or $u$ est solution donc $\varepsilon = O(\Delta t) + O(\Delta x)$ car $\dfrac{\partial u(x_j, t^n)}{\partial t} - 4\dfrac{\partial u(x_j, t^n)}{\partial x} = 0$

ordre 1 en espace et en temps

Pour le (2) :

on a $\varepsilon = \dfrac{\partial u(x_j, t^n)}{\partial t} + 4\dfrac{\partial u(x_{j-1}, t^n)}{\partial x} + O(\Delta x) + O(\Delta t)$

Non consistant (Ordre 0 en temps et en espace)

3 (i) On peut utiliser un schéma d'Euler implicite centré :

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^{n}}{\Delta t} - 4\,\frac{U_{j+1}^{n}-U_{j-1}^{n}}{2\Delta x} = 0$$

(ii) On peut construire un schéma de Crank-Nicholson :

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^{n}}{\Delta t} - 4\,\frac{U_{j+1}^{n+1}-U_{j-1}^{n+1}}{4\Delta x} - 4\,\frac{U_{j+1}^{n}-U_{j-1}^{n}}{4\Delta x} = 0$$

(iii) On passe par l'équation équivalente :
Si on développe plus lors de l'étude de consistance on obtient un terme supplément, en l'ajoutant au problème afin d'avoir l'équation équivalent on obtient le schéma de Lax-Wendroff qui est inconditionnellement stable :

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^{n}}{\Delta t} - 4\,\frac{U_{j+1}^{n}-U_j^{n}}{\Delta x} - \left(\frac{-4\Delta x}{2} - \frac{16\Delta t}{2}\right)\frac{U_{j+1}^{n}-2U_j^{n}+U_{j-1}^{n}}{\Delta x^2} = 0$$

Problème 2

(1) $\int_0^1 (f(x))^2\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (6x)^2\, dx + \int_{1/2}^1 (2)^2\, dx$

$= [12x^3]_0^{\frac{1}{2}} + [4x]_{\frac{1}{2}}^1$

$= \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$ carré intégrable ✓

$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = 2$

condition suffisante : fonction f non continue en $x = \frac{1}{2}$

(2) $x \in ]0; \frac{1}{2}]$ : $-u''(x) = 6x$ doit être vérifié

$-u''(x) = -\left(\frac{\partial^2(-x^3 + \frac{3x}{4})}{\partial x^2}\right) = -\frac{\partial(-3x^2 + \frac{3}{4})}{\partial x} = -(-6x) = 6x$

$u(0) = -0^3 + \frac{3 \cdot 0}{4} = 0$ u et u' sont continues sur $]0; \frac{1}{2}]$ car polynomiales

$x \in ]\frac{1}{2}; 1]$ : $-u''(x) = 2$ doit être vérifié

$-u''(x) = -\left(\frac{\partial^2(-x^2 + x)}{\partial x^2}\right) = -\frac{\partial\, -2x + 1}{\partial x} = -(-2) = 2$

$u(1) = -(1^2) + 1 = 0$ u et u' sont continues sur $]\frac{1}{2}; 1]$ car polynomiales

La fonction u est donc bien une solution faible du problème aux limites (2)

# Problème 3

On multiplie (1) par v et on a :

$$\begin{cases} -(xu'(x))'v + u(x)v = f(x)v, \quad x \in (0,1) \\ \text{avec } v \in V_e = \{ v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} = 0 \} \end{cases}$$

on intègre et on a :

$$(*) \quad \int_\Omega -(xu')'v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int f v \, dx$$

$$\int_\Omega -(xu')'v \, dx = \underbrace{\int_{\partial\Omega} (-xu')v \, d\sigma}_{=0 \text{ car } v \in V_e} - \int_\Omega -xu'v' \, dx$$

$$= \int_\Omega xu'v' \, dx$$

~~donc~~

donc $(*)$ donne :

$$\int_\Omega xu'v' \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

ici on a alors $a(u,v) = \int_\Omega xu'v' \, dx + \int_\Omega u v \, dx$

Autrement dit : $a(u,v) = (xu', v') + (u,v)$ dans $V_e$