(COURS 1) EDP MA114 12/09/2012

Le but du cours EDP + Méthodes numériques (2e sem)
- Introduction à la modélisation mathématique et
- la simulation numérique

Modélisation : science de représenter une réalité physique en utilisant des modèles abstraits mathématiques qu'on peut ensuite étudier en utilisant l'analyse. (caractériser).

Simulation numérique : processus qui permet de calculer les solutions de ces modèles sur ordinateur
→ simulation de la réalité physique.

- Familiarisation avec les principaux modèles ce qui permet d'en dériver des nouveaux.
- Le plan du cours : Introductions aux modèles classiques
Méthodes des différences finies
Approche "variationnelle" de modèles stationnaires → ouvre la voie vers la méthode des éléments finis (2e sem).

<u>Note</u> : examen final + exercices TD + contrôle intermédiaire
$= \frac{1}{3}(EX + TD + CC)$.

1 <u>Un exemple de modélisation</u>

Part considérable du travail qui requiert des compétences transverses (mathématiques + de la discipline à laquelle on applique les maths.

On considère pour illustration le modèle le plus simple d'équation aux dérivées partielles : l'équation de la chaleur (la plupart des modèles mathématiques ...

On considère le domaine de l'espace $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $N=1,2,3$ occupé par un matériau homogène et conducteur.

- Source de chaleur $f(x,t)$ (uniforme ou pas) connue.

$$f(\underset{\substack{\swarrow \\ \text{variable d'espace}}}{x},\ \underset{\searrow\ \text{temps}}{t})$$

- on veut la distribution de température $u(x,t)$.

Par où on commence ?

- la quantité de chaleur est proportionnelle à u : cu

(c – chaleur spécifique).

- <u>lois de conservation :</u>

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\int_V c\,u\,dx\right)}_{\substack{\text{variation en temps} \\ \text{de la quantité de chaleur} \\ \text{à travers le volume } V}} = \underbrace{\int_V f\,dx}_{\substack{\text{chaleur} \\ \text{produite par} \\ \text{les sources}}} - \underbrace{\int_{\partial V} q\cdot n\,ds}_{\substack{\text{flux de chaleur} \\ \text{qui sort ou qui} \\ \text{entre par les parois}}}$$

V – volume, ∂V – le bord du volume, dx – élément de volume
ds – élément de surface.

- <u>théorème de Gauss</u> (divergence)

$$\int_{\partial V} q\cdot n\,ds = \int_V \operatorname{div} q\,dx. \qquad q=(q_1,\dots,q_N)$$

$$\operatorname{div} q = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad \nabla\cdot q \quad \text{(divergence)}$$

On remplace et on tient compte que le volume V est quelconque $\Rightarrow$

$$c\,\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} q = f.$$

- <u>loi constitutive</u> $\quad q = -k\nabla u$ (loi de Fourier)

le flux de chaleur est proportionnel à la var de la temp.

k – conductivité thermique $\quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$

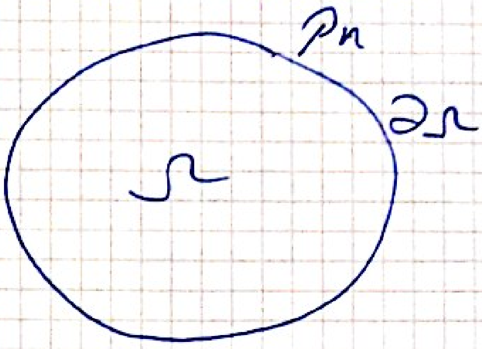
Donc on obtient,

$$c\,\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f \qquad \text{(équation de la chaleur)}$$

$\Delta = \operatorname{div}\nabla$ – laplacien $\quad \Delta u = \sum \dots$

MAIS, ceci ne suffit pas pour déterminer la solution.

On a besoin de :



- conditions aux limites
  (ce qui se passe au bord du domaine)
- conditions initiales
  (la configuration à l'instant initial) : $u(x,0) = u_0(x)$.

  $u_0(x)$: distribution de temp à l'instant initial.

Conditions aux limites :

- Dirichlet (le domaine "baigne" dans un thermostat → on maintient la température fixée)

$$u(x,t) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, \ t > 0.$$

- Neumann (domaine isolé → le flux de chaleur à travers les parois est nul).

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) := \nabla u(x,t) \cdot \underbrace{n(x)}_{\text{normale ext. unitaire du domaine } \Omega} = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, t > 0.$$

- cond. de Fourier ou Robin (flux de chaleur proportionnel au saut de température)

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) + \alpha u(x,t) = 0, \ \forall x \in \partial\Omega, t > 0. \ \alpha > 0.$$

Donc le problème de la chaleur :

$$\begin{cases} c\dfrac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f, & \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+_* \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+_* \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

- problème aux limites (présence des conditions aux limites)
- problème de Cauchy (présence des conditions initiales).

Remarques : équations linéaires (solution dépend linéairement des données.) Imp !

On peut mélanger les CL sur différentes parties de $\partial\Omega$

Le modèle n'est pas uniquement la propagation de la chaleur (!) = <u>équation de diffusion</u> :

- modélise la diffusion de la concentration d'un polluant ou une espèce chimique dans un domaine Ω.
  (u - concentration, q flux de masse, k diffusivité, c - densité volumique de l'espèce).
  Loi de Fourier remplacée par la loi de Fick.
- problème issu de la finance : modèle Black-Scholes : trouver le prix d'option d'achat (ou call) d'une action qui vaut initialement x et qu'on pourra acheter au prix k à un temps ultérieur T.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - ru + \dfrac{1}{2} r x \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(x,T) = \max(x-k, 0) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$u(x,0)$ prix au temps initial de l'option d'achat ayant le prix d'exercice k, à l'échéance $T>0$ et d'actif x.
σ - volatilité de l'action, r taux d'intérêt. (pour cond finale!)

<u>Variantes de l'équation de la chaleur</u>

- on peut supposer que la chaleur se propage dans un milieu qui bouge à une vitesse V. $\Rightarrow$ pblme de <u>convection diffusion</u> :

$$\begin{cases} c\dfrac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{cV\cdot\nabla u} - \underbrace{k\Delta u} = f, & \Omega\times\mathbb{R}_*^+ \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega\times\mathbb{R}_*^+ \quad (CL) \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega. \quad (CI) \end{cases}$$

terme de convection $\Rightarrow$ terme de diffusion

$Pe = \dfrac{cVL}{k}$ nombre de Peclet

(l'importance du terme de convection par rapport à la diffusion).

(- [illegible]

On peut en déduire que si

- $Pe \ll 1$ on peut négliger le terme de convection $\Rightarrow$ on revient à l'équation de diffusion.
- $Pe \gg 1$ on peut négliger le terme de diffusion. $\Rightarrow$ équation de convection (ou advection)

$$\begin{cases} c\dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,V\cdot\nabla u = f, & \Omega\times\mathbb{R}_*^+ \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega\times\mathbb{R}_*^+ \text{ si } V(x)\cdot n(x)<0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases}$$

(on impose la température uniquement où la vitesse est "entrante"). Si $Pe \approx 1$ on garde le modèle complet.

$\Rightarrow$ 3 modèles. dont le domaine de validité dépend de Pe.

Pour analyser considérons un modèle simplifié $\Omega=\mathbb{R}$.

On peut montrer que sous l'hypothèse que u_0 est continue et unif bornée la fonction

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\chi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\,\overbrace{\exp\left(-\frac{(x-Vt-y)^2}{4\chi t}\right)}^{G(x,y,t)}dy$$

est solution de $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} - \chi\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+ \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$

On montrera que l'affirmation est vraie en remplaçant u.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \chi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\chi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\left(-\frac{1}{2t} + \frac{\partial G}{\partial t} + V\frac{\partial G}{\partial x} - \chi\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)$$

(on peut permuter l'intégrale et la dérivée grâce aux hypothèses de départ ...)

Il suffit donc de calculer $\dfrac{\partial G}{\partial t}, \dfrac{\partial G}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}$

puis que $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = u_0(x)$.

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{(x+vt-y)(x-vt-y)}{4\gamma t^2} G(x,y,t)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{x-vt-y}{4\gamma t} G(x,y,t)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{2\gamma t} + \frac{(x-vt-y)^2}{4\gamma^2 t^2}\right) G(x,y,t).$$

En faisant les calculs ceci conduit à la conclusion. Pour la deuxième partie on note

$$f(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\gamma t}} \exp\left(-\frac{(x-vt-y)^2}{4\gamma t}\right)$$

On remarque que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,t)\,dy = 1 \quad \left(\text{car} \int_{-\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \right)$$

donc on fait un changement de variable

et puis $\lim_{t\to\infty} f(x,y,t) = \begin{cases} \infty & , \text{si } y = x \\ 0 & , \text{si } y \neq 0. \end{cases}$

Donc $\lim_{t\to 0} f(x,y,t)$ est en fait une distribution de Dirac $\delta(x-y)$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\gamma t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) \exp\left(-\frac{(x-vt-y)^2}{4\gamma t}\right) dy$$

$$= \lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) f(x,y,t)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\,\delta(x-y)\,dy$$

$$= u_0(x)$$ (on dit que la fonction se "concentre" en x)

Que se passe-t-il si $\gamma \to 0$? (Autrement dit si on passe à l'équation d'advection). En suivant le même raisonnement

$$\lim_{\gamma\to 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\gamma t}} \int^{\infty} u_0(y) \exp\left(-\frac{(x-vt-y)^2}{\ldots}\right) dy = \int^{\infty} u_0(y)\,\delta(x-vt-y) = u_0(x-vt).$$

Propriétés qualitatives.

Supposons que $f=0$.

1. L'équation de la chaleur est "irréversible en temps" tandis que l'équation de l'advection est "réversible" (si on change le sens du temps t devient $-t$ il suffit de changer le signe de v pour obtenir la même solution. ceci n'est pas le cas pour l'éq de la chaleur).

2. Invariance par rapport au changement d'échelle :

- supp $u(x,t)$ sol de l'éq de la chaleur ; alors $u(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2})$ est également solution. en effet.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2}\right) \qquad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2}\right)$$

Donc. $$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2}\right) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2}\right)\right) =$$

- supp que $u(x,t)$ sol de l'éq d'advection ; alors $u(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda})$ est également solution.

3. Propagation à vitesse "infinie" (éq chaleur) et finie (éq d'advection.

. $\forall t>0$ aussi petit qu'il soit la solution $u(x,t)$ est "instantanément positive sur tout $\mathbb{R}$ (défaut du modèle !)

• pour l'équation d'advection il y a propagation à la vitesse v

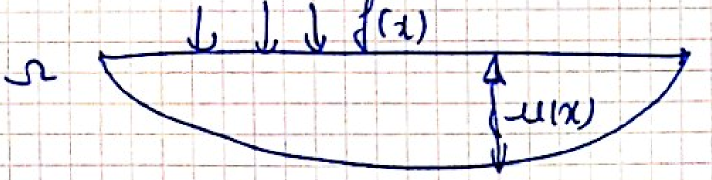
4. Principe du maximum

$$\min_{x\in\mathbb{R}} u_0(x) \leq u(x,t) \leq \max_{x\in\mathbb{R}} u_0(x) \quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

(la solution n'excède pas les limites de la solution "initiale"

Autres modèles.

I Équation des ondes



Modélise les phénomènes de vibration. (membrane élastique tendue ou cordes vibrantes)

- f force normale, $u(x)$ déplacement.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & , \Omega \times \mathbb{R}^+_* \\ u = 0 & , \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+_* \\ u(x,0) = u_0 & , \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1 & , \Omega \end{cases}$$

(C.I. déplacement et vitesse initiales imposées).

Propriétés : (*) propagation à vitesse finie.

(**) domaine de dépendance ou "cône de lumière".

(*) Soit $f=0$ et u_0, u_1 régulières, $\Omega = \mathbb{R}$. Alors

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(U_1(x+t) - U_1(x-t)\right)$$

est solution de l'équation des ondes (U_1 primitive de u_1)

(**) La solution au point (x,t) ne dépend que des valeurs dans l'intervalle $[x-t, x+t]$.

II Conservation de l'énergie (***)

- vrai pour l'équation des ondes
- décroissance pour la chaleur