Exercice 3.2.2 En dimension $N = 3$ on définit le rotationnel d'une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^3$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, comme la fonction de Ω dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathrm{rot}\phi = \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right).$$

Pour ϕ et ψ, fonctions à valeurs vectorielles de $C^1(\overline{\Omega})$, à supports bornés dans le fermé $\overline{\Omega}$, déduire de la formule de Green (3.5)

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\phi \cdot \psi \, dx - \int_\Omega \phi \cdot \mathrm{rot}\psi \, dx = - \int_{\partial\Omega} (\phi \times n) \cdot \psi \, ds.$$

3.2.2 Formulation variationnelle

Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'ouvert Ω est borné et régulier, et que le second membre f de (3.1) est continu sur $\overline{\Omega}$. Le résultat principal de cette sous-section est la proposition suivante.

Proposition 3.2.7 *Soit u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$. Soit X l'espace défini par*

$$X = \left\{ \phi \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Alors u est une solution du problème aux limites (3.1) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx \text{ pour toute fonction } v \in X. \tag{3.8}$$

L'égalité (3.8) est appelée la **formulation variationnelle** *du problème aux limites (3.1).*

Remarque 3.2.8 Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle (3.8) est qu'elle a un sens si la solution u est seulement une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$, contrairement à la formulation "classique" (3.1) qui requiert que u appartienne à $C^2(\overline{\Omega})$. On pressent donc déjà qu'il est plus simple de résoudre (3.8) que (3.1) puisqu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution.

Dans la formulation variationnelle (3.8), la fonction v est appelée **fonction test.** La formulation variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites (3.1). En mécanique, la formulation variationnelle est connue sous le nom de "principe des travaux virtuels". En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité.

Lorsqu'on prend $v = u$ dans (3.8), on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une **égalité d'énergie**, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine Ω (le terme de gauche de (3.8)) et une énergie potentielle associée à f (le terme de droite de (3.8)). •

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Démonstration. Si u est solution du problème aux limites (3.1), on multiplie l'équation par $v \in X$ et on utilise la formule d'intégrations par parties du Corollaire 3.2.4

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x)\, ds.$$

Or $v = 0$ sur $\partial\Omega$ puisque $v \in X$, donc

$$\int_\Omega f(x) v(x)\, dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx,$$

qui n'est rien d'autre que la formule (3.8). Réciproquement, si $u \in X$ vérifie (3.8), en utilisant "à l'envers" la formule d'intégration par partie précédente on obtient

$$\int_\Omega \Big(\Delta u(x) + f(x)\Big) v(x)\, dx = 0 \text{ pour toute fonction } v \in X.$$

Comme $(\Delta u + f)$ est une fonction continue, grâce au Lemme 3.2.9 on conclut que $-\Delta u(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Par ailleurs, comme $u \in X$, on retrouve la condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$, c'est-à-dire que u est solution du problème aux limites (3.1). $\square$

Lemme 3.2.9 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit $g(x)$ une fonction continue dans Ω. Si pour toute fonction ϕ de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω, on a*

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)\, dx = 0,$$

alors la fonction g est nulle dans Ω.

Démonstration. Supposons qu'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $g(x_0) > 0$ (sinon on prend $-g$). Par continuité, il existe un petit voisinage ouvert $\omega \subset \Omega$ de x_0 tel que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \omega$. Soit alors une fonction test positive, non nulle, ϕ à support inclus dans ω. On a

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)\, dx = \int_\omega g(x)\phi(x)\, dx = 0,$$

qui est une contradiction avec l'hypothèse sur g. Donc $g(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. $\square$

Remarque 3.2.10 En notation compacte on peut réécrire la formulation variationnelle (3.8) sous la forme : trouver $u \in X$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in X,$$

avec

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$$

et
$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx,$$
où $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire sur X et $L(\cdot)$ est une forme linéaire sur X. C'est sous cette forme abstraite que nous résoudrons (avec quelques hypothèses) la formulation variationnelle dans la prochaine section. •

L'idée principale de **l'approche variationnelle** est de montrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (3.8), ce qui entraînera le même résultat pour l'équation (3.1) à cause de la Proposition 3.2.7. En effet, nous allons voir qu'il existe une théorie à la fois simple et puissante pour analyser les formulations variationnelles. Néanmoins cette théorie ne fonctionne que si l'espace dans lequel on cherche la solution et dans lequel on prend les fonctions tests (dans les notations précédentes, l'espace X) est un espace de Hilbert, ce qui n'est pas le cas pour $X = \{v \in C^1(\overline{\Omega}),\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ muni du produit scalaire "naturel" pour ce problème. La principale difficulté dans l'application de l'approche variationnelle sera donc qu'il faudra utiliser un autre espace que X, à savoir l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ qui est bien un espace de Hilbert (voir le Chapitre 4).

Exercice 3.2.3 On considère le Laplacien avec condition aux limites de Neumann
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$
Soit u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$. Montrer que u est une solution du problème aux limites (3.9) si et seulement si u appartient à $C^1(\overline{\Omega})$ et vérifie l'égalité
$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \text{ pour toute fonction } v \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{3.10}$$
En déduire qu'une condition nécessaire d'existence d'une solution dans $C^2(\overline{\Omega})$ de (3.9) est que $\int_\Omega f(x)dx = 0$.

Exercice 3.2.4 On considère l'équation des plaques
$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.11}$$
On note X l'espace des fonctions v de $C^2(\overline{\Omega})$ telles que v et $\frac{\partial v}{\partial n}$ s'annulent sur $\partial\Omega$. Soit u une fonction de $C^4(\overline{\Omega})$. Montrer que u est une solution du problème aux limites (3.11) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité
$$\int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \text{ pour toute fonction } v \in X. \tag{3.12}$$

3.3 Théorie de Lax-Milgram

3.3.1 Cadre abstrait

Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert. On note V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $\langle , \rangle$ et de norme $\| \;\|$. Suivant la Remarque 3.2.10 nous considérons une formulation variationnelle du type :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in V. \tag{3.13}$$

Les hypothèses sur a et L sont

1. $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V, c'est-à-dire que $v \to L(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que
$$|L(v)| \leq C\|v\| \text{ pour tout } v \in V;$$
2. $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire sur V, c'est-à-dire que $w \to a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in V$, et $v \to a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $w \in V$;
3. $a(\cdot,\cdot)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que
$$|a(w,v)| \leq M\|w\|\,\|v\| \text{ pour tout } w,v \in V; \tag{3.14}$$
4. $a(\cdot,\cdot)$ est **coercive** (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $\nu > 0$ tel que
$$a(v,v) \geq \nu\|v\|^2 \text{ pour tout } v \in V. \tag{3.15}$$

Comme nous le verrons au cours de cette sous-section, toutes les hypothèses ci-dessus sont nécessaires pour pouvoir résoudre (3.13). En particulier, la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ est essentielle.

Théorème 3.3.1 (Lax-Milgram) *Soit V un espace de Hilbert réel, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V, $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V. Alors la formulation variationnelle (3.13) admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L.*

Démonstration. Pour tout $w \in V$, l'application $v \to a(w,v)$ et une forme linéaire continue sur V : par conséquent, le Théorème 12.1.18 de représentation de Riesz entraîne qu'il existe un élément de V, noté $A(w)$, tel que

$$a(w,v) = \langle A(w), v\rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Par ailleurs, la bilinéarité de $a(w,v)$ implique évidemment la linéarité de l'application $w \to A(w)$. De plus, en prenant $v = A(w)$, la continuité (3.14) de $a(w,v)$ montre que

$$\|A(w)\|^2 = a(w, A(w)) \leq M\|w\|\|A(w)\|,$$

c'est-à-dire que $\|A(w)\| \leq M\|w\|$ et donc $w \rightarrow A(w)$ est continue. Une autre application du Théorème 12.1.18 de représentation de Riesz implique qu'il existe un élément de V, noté f, tel que $\|f\|_V = \|L\|_{V'}$ et

$$L(v) = \langle f, v\rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Finalement, le problème variationnel (3.13) est équivalent à :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } A(u) = f. \tag{3.16}$$

Pour démontrer le théorème il nous faut donc montrer que l'opérateur A est bijectif de V dans V (ce qui implique l'existence et l'unicité de u) et que son inverse est continu (ce qui prouve la dépendance continue de u par rapport à L).

La coercivité (3.15) de $a(w, v)$ montre que

$$\nu\|w\|^2 \leq a(w, w) = \langle A(w), w\rangle \leq \|A(w)\|\|w\|,$$

ce qui donne

$$\nu\|w\| \leq \|A(w)\| \text{ pour tout } w \in V, \tag{3.17}$$

c'est-à-dire que A est injectif. Pour montrer que A est surjectif, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(A) = V$ (ce qui n'est pas évident si V est de dimension infinie), il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(A)$ est fermé dans V et que $\mathrm{Im}(A)^\perp = \{0\}$. En effet, dans ce cas on voit que $V = \{0\}^\perp = (\mathrm{Im}(A)^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A)} = \mathrm{Im}(A)$, ce qui prouve bien que A est surjectif. Soit $A(w_n)$ une suite dans $\mathrm{Im}(A)$ qui converge vers b dans V. En vertu de (3.17) on a

$$\nu\|w_n - w_p\| \leq \|A(w_n) - A(w_p)\|$$

qui tend vers zéro quand n et p tendent vers l'infini. Donc w_n est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert V, c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite $w \in V$. Alors, par continuité de A on en déduit que $A(w_n)$ converge vers $A(w) = b$, c'est-à-dire que $b \in \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ est donc fermé. D'autre part, soit $v \in \mathrm{Im}(A)^\perp$; la coercivité (3.15) de $a(w, v)$ implique que

$$\nu\|v\|^2 \leq a(v, v) = \langle A(v), v\rangle = 0,$$

c'est-à-dire que $v = 0$ et $\mathrm{Im}(A)^\perp = \{0\}$, ce qui prouve que A est bijectif. Soit A^{-1} son inverse : l'inégalité (3.17) avec $w = A^{-1}(v)$ prouve que A^{-1} est continu, donc la solution u dépend continûment de f. □

Remarque 3.3.2 Si l'espace de Hilbert V est de dimension finie (ce qui n'est cependant jamais le cas pour les applications que nous visons), la démonstration du Théorème 3.3.1 de Lax-Milgram se simplifie considérablement. En effet, en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues et l'injectivité (3.17) de A est équivalent à son inversibilité. On voit bien dans ce cas (comme dans le cas général) que l'hypothèse de coercivité de la forme bilinéaire $a(w, v)$ est indispensable puisque c'est elle qui donne l'injectivité de A. Remarquons pour finir que, si $V = \mathbb{R}^N$, une formulation variationnelle n'est que l'écriture, $\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle$ pour tout $v \in \mathbb{R}^N$, d'un simple système linéaire $Au = f$. •

Remarque 3.3.3 Une autre démonstration (un peu moins technique mais qui camoufle un peu les arguments essentiels) du Théorème 3.3.1 de Lax-Milgram est la suivante. On démarre comme précédemment jusqu'à la formulation (3.16) du problème. Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution u de (3.16), on introduit une application affine T de V dans V, définie par

$$T(w) = w - \mu\Big(A(w) - f\Big) \text{ avec } \mu = \frac{\nu}{M^2},$$

dont on va montrer qu'elle est strictement contractante, ce qui prouve l'existence et l'unicité de $u \in V$ tel que $T(u) = u$ (d'où le résultat). En effet, on a

$$\begin{aligned}
\|T(v) - T(w)\|^2 &= \|v - w - \mu A(v-w)\|^2 \\
&= \|v-w\|^2 - 2\mu\langle A(v-w), v-w\rangle + \mu^2\|A(v-w)\|^2 \\
&= \|v-w\|^2 - 2\mu a(v-w, v-w) + \mu^2\|A(v-w)\|^2 \\
&\leq (1 - 2\mu\nu + \mu^2 M^2)\|v-w\|^2 \\
&\leq (1 - \nu^2/M^2)\|v-w\|^2.
\end{aligned}$$

•

Une formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique, en particulier si la forme bilinéaire est symétrique. En effet dans ce cas, la solution de la formulation variationnelle (3.13) réalise le **minimum d'une énergie** (très naturelle en physique ou en mécanique).

Proposition 3.3.4 *On se place sous les hypothèses du Théorème 3.3.1 de Lax-Milgram. On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique $a(w, v) = a(v, w)$ pour tout $v, w \in V$. Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in V$ par*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v). \tag{3.18}$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle (3.13). Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Réciproquement, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (3.13).

Démonstration. Si u est solution de la formulation variationnelle (3.13), on développe (grâce à la symétrie de a)

$$J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) + a(u, v) - L(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) \geq J(u).$$

Comme $u+v$ est quelconque dans V, u minimise bien l'énergie J dans V. Réciproquement, soit $u \in V$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Pour $v \in V$ on définit une fonction $j(t) = J(u+tv)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit d'un polynôme du deuxième degré en t). Comme $t = 0$ est un minimum de j, on en déduit que $j'(0) = 0$ qui, par un calcul simple, est exactement la formulation variationnelle (3.13). □

Remarque 3.3.5 Nous verrons plus loin au Chapitre 9 que, lorsque la forme bilinéaire a est symétrique, il existe un autre argument que le Théorème 3.3.1 de Lax-Milgram pour conclure à l'existence et l'unicité d'une solution de (3.13). En effet, on démontrera directement l'existence d'un unique point de minimum de l'énergie $J(v)$. En vertu de la Proposition 3.3.4, cela démontre l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle. •

3.3.2 Application au Laplacien

Essayons d'appliquer le Théorème 3.3.1 de Lax-Milgram à la formulation variationnelle (3.8) du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet. Celle-ci s'écrit bien sous la forme (3.13) avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx,$$

où clairement $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire, et $L(\cdot)$ une forme linéaire. L'espace V (noté précédemment X) est

$$V = \left\{ v \in C^1(\overline{\Omega}),\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \tag{3.19}$$

Comme produit scalaire sur V nous choisissons

$$\langle w, v \rangle = \int_\Omega \nabla w(x) \cdot \nabla v(x)\, dx, \tag{3.20}$$

qui a pour norme associée

$$\|v\| = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

On vérifie aisément que (3.20) définit un produit scalaire sur V : le seul point qui mérite de s'y attarder est la propriété $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$. En effet, de l'égalité

$$\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx = 0$$

on déduit que v est une constante dans Ω, et comme $v = 0$ sur $\partial\Omega$ on a bien $v = 0$. La motivation du choix de (3.20) comme produit scalaire est bien sûr le fait que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est **automatiquement coercive** pour (3.20). On vérifie par ailleurs aisément que a est continue. Pour montrer que L est continue, il faut faire appel à l'inégalité de Poincaré du Lemme 3.3.6 : on a alors

$$\left| \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \right| \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \|v\|,$$

où C est une constante qui dépend de f mais pas de v. Donc L est continue sur V. Toutes les hypothèses du Théorème 3.3.1 de Lax-Milgram semblent vérifiées, et pourtant il en manque une qui empêche son application : l'espace V n'est pas un espace de Hilbert car il n'est pas complet pour la norme induite par (3.20) ! L'obstruction ne vient pas tant du choix du produit scalaire que de l'exigence de régularité C^1 des fonctions de l'espace V. Une façon immédiate, quoique peu explicite, de résoudre la difficulté est de remplacer V par $\overline{V}$, sa fermeture pour le produit scalaire (3.20). Évidemment, on n'a fait que déplacer la difficulté : à quoi peut bien ressembler l'espace $\overline{V}$? La réponse sera apporté au Chapitre 4 : $\overline{V}$ est l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ dont les éléments ne sont plus des fonctions régulières mais seulement mesurables. Une autre difficulté sera de voir en quel sens la Proposition 3.2.7 (qui exprime l'équivalence entre le problème aux limites (3.1) et sa formulation variationnelle (3.8)) reste vrai lorsque on remplace l'espace V par $\overline{V}$.

Nous espérons avoir ainsi convaincu le lecteur du **caractère naturel et inéluctable des espaces de Sobolev dans la résolution des formulations variationnelles** d'équations aux dérivées partielles elliptiques. Terminons ce chapitre par un lemme technique, appelé inégalité de Poincaré, que nous avons utilisé un peu plus haut.

Lemme 3.3.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in C^1(\overline{\Omega})$ qui s'annule sur le bord $\partial\Omega$,*

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Démonstration. L'hypothèse sur le caractère borné de Ω dit (après une éventuelle rotation) que pour tout $x \in \Omega$ la première composante x_1 est bornée, $-\infty < a \leq x_1 \leq b < +\infty$. Soit v une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ qui est nulle sur $\partial\Omega$. On peut l'étendre par continuité par zéro en dehors de Ω (v est alors une fonction continue de classe C^1 par morceaux dans $\mathbb{R}^N$) et écrire, pour $x \in \Omega$,

$$v(x) = \int_a^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N)\, dt,$$

d'où l'on déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|v(x)|^2 \leq (x_1 - a) \int_a^{x_1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) \right|^2 dt \leq (b - a) \int_a^b \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) \right|^2 dt.$$

Intégrant sur Ω on obtient

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq (b-a) \int_\Omega \int_a^b \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) \right|^2 dt\, dx,$$

et permutant les deux intégrations par rapport à t et x_1, on conclut

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

□

Exercice 3.3.1 Le but de cet exercice est de montrer que l'espace V, défini par (3.19) et muni du produit scalaire (3.20), n'est pas complet. Soit Ω la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$. Si $N = 1$, on définit la suite

$$u_n(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } -1 < x < -n^{-1}, \\ (n/2)x^2 - 1 + 1/(2n) & \text{si } -n^{-1} \leq x \leq n^{-1}, \\ x - 1 & \text{si } n^{-1} < x < 1. \end{cases}$$

Si $N = 2$, pour $0 < \alpha < 1/2$, on définit la suite

$$u_n(x) = |\log(|x|^2 + n^{-1})|^{\alpha/2} - |\log(1 + n^{-1})|^{\alpha/2}.$$

Si $N \geq 3$, pour $0 < \beta < (N-2)/2$, on définit la suite

$$u_n(x) = \frac{1}{(|x|^2 + n^{-1})^{\beta/2}} - \frac{1}{(1 + n^{-1})^{\beta/2}}.$$

Montrer que la suite u_n est de Cauchy dans V mais qu'elle ne converge pas dans V lorsque n tend vers l'infini.