Méthodes itératives

14 mars 2006

Exercice 1.
Méthode de Jacobi
Programmer l'algorithme de Jacobi pour résoudre un système linéaire. On écrira une fonction `[x,iter] = Jacobi(A,b,tol,iterMax,x0)`. Les arguments d'appel sont :

- la matrice A et le vecteur b.
- `x0` est le vecteur initial x^0.
- `tol` est la valeur de ε du test d'arrêt.
- `iterMax` est le nombre maximal d'itérations.

Les arguments de sortie sont :

- la solution approchée x.
- `iter` est le nombre d'itérations effectuées.

Dans l'écriture de la fonction `Jacobi` utiliser la commande `argn` pour déterminer le nombre d'arguments d'entrée au moment de l'appel de la fonction.

- Si ce nombre est égal à 4, poser `x0=zeros(b) ;`
- Si ce nombre est égal à 3, poser `x0=zeros(b) ;iterMax=200 ;`
- Si ce nombre est égal à 3, poser `x0=zeros(b) ;iterMax=200 ;tol=1.e-4 ;`

Pour $n = 20$ on définit `A=laplaceD(n) ;xx=(1 :n)'/(n+1) ;b=xx.*sin(xx) ;` et `sol=A\b`. Pour différentes valeurs du paramètre `tol=`10^{-s}, $s = 2, 3, ...$ calculer la solution approchée `x=Jacobi(A,b,tol,1000)`. Comparer les valeurs `norm(x-sol)` et `norm(inv(A))*tol`. Commenter.

Exercice 2.
Méthode de relaxation
Écrire une fonction `[x,iter]=Relax(A,b,w,tol,iterMax,x0)` programmant la méthode de relaxation. Pour la même matrice que l'exercice précédent et le même vecteur b, tracer la courbe qui à $\omega = i/10(i = 1, ..., 20)$ associe le nombre d'itérations effectuées par la méthode de relaxation. On fixera `iterMax` à 1000, `tol` à 10^{-6} et `x0` au vecteur nul. Déterminer la valeur de ω qui permet de calculer la solution en un nombre minimal d'itérations. Comparer avec la valeur théorique.

Exercice 3.
Algorithme du gradient à pas constant

1. Écrire un programme `Gradient` calculant la solution du système $Ax = b$ par la méthode du gradient.
2. On fixe $n = 10$,`A=laplaceD(n) ;xx=(1 :n)'/(n+1) ;b=xx.*sin(xx)`. Calculer la solution x_G du problème obtenue par cet algorithme. On prendra $\alpha = 10^{-4}$ et on limitera le nombre d'itérations à $N_{iter} = 10000$, le test d'arrêt portera sur la norme du résidu qui doit être inférieure à $\varepsilon = 10^{-4}$. Noter le nombre d'itérations effectuées. Comprarer cette solution par la solution donnée par `Scilab`.
3. Pour α variant de $\alpha_{min} = 32 \cdot 10^{-4}$ à $\alpha_{max} = 42 \cdot 10^{-4}$, par pas de 10^{-5}, tracer une courbe représentant le nombre d'itérations nécessaires pour calculer x_G. On fixera $N_{iter} = 2000$ et $\varepsilon = 10^{-10}$. Déterminer numériquement la valeur α conduisant à un nombre d'itérations minimal. Comparer avec la valeur donnée par la théorie.

Exercice 4.
Algorithme du gradient à pas variable
Pour améliorer la convergence de l'algorithme du gradient, on propose de faire varier α. À chaque itération, on prend pour α_k la valeur α qui minimise la norme du résidu $r_{k+1} = b - Ax_{k+1}$.

1. Calculer α_k.

2. Écrire un programme `GradientV` calculant la solution du système par la méthode du gradient à pas variable.
3. Comparer les deux algorithmes (à pas fixe et à pas variable) et notamment le nombre d'itérations et le temps de calcul pour une même précision. On prendra les données de l'exercice précédent avec, pour le gradient à pas fixe, α égal à la valeur optimale.

Exercice 5.
Algorithme du gradient conjugué

1. Écrire un programme `GradientC` calculant la solution du système linéaire $Ax = b$ par la méthode du gradient conjugué.
2. Comparer cet algorithme et l'algorithme du gradient à pas variable pour la même matrice que celle définie auparavant.
3. On ne suppose plus que la matrice A soit définie positive, ni même symétrique, mais seulement qu'elle est inversible. Comment appliquer la méthode du gradient conjugué ?