(COURS 7) ①

Équation d'advection - suite (Diffusion et dispersion).

Pour comparer les différents schémas dpdv pratique on introduira le concept d'équation équivalente.

<u>Définition</u> : On appelle équation équivalente d'un schéma l'équation obtenue en ajoutant au modèle étudié, la partie principale (c.c.a.d. le terme d'ordre dominant) de l'erreur de troncature du schéma.

<u>Rem 1</u> : le bénéfice de l'ajout de la partie principale de l'erreur est de rendre le schéma encore plus précis.

1. Montrons que l'équation équivalente du schéma décentré amont est
$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{|V|}{2}(\Delta x - |V|\Delta t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

$$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} + V\frac{u(x_j,t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{\Delta x}.$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + O(\Delta t^2) + V\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + O(\Delta\right.$$

$$= \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + V\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2)$$

On voit bien que le schéma décentré amont est d'ordre 1 en temps et espace. On peut ré-écrire l'erreur de troncature en tenant compte du fait que u vérifie l'équation : $\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_j^n = \left(\frac{V\Delta x}{2} - V^2\frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2)$$

Ceci montre que l'équation équivalente sera :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{V\Delta x}{2} - \frac{V^2\Delta t}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Ce nouveau schéma sera d'ordre 2 en temps et espace.
(celui qui discrétisera cette nouvelle équation équivalente)

Pour : le deuxième bénéfice de l'ajout de terme dominant $\frac{\partial ...}{}$ et construire aussi un nouveau schéma, est d'éliminer la partie "diffusive" de l'ancien. ②

On voit que dans l'erreur de troncature du schéma décentré amont il existe un terme dominant de la forme $\left(\frac{V\Delta x}{2} - \frac{V^2\Delta t}{2}\right)$

La quantité $\tilde{\nu} = \frac{V\Delta x}{2} - \frac{V^2\Delta t}{2}$ s'appelle diffusion numérique

Si $\tilde{\nu}$ est grand on dit que le schéma est diffusif ou dampant.

Un schéma "trop diffusif" n'est pas un bon schéma.

(ils étalent artificiellement les données initiales au cours du temps).

Afin d'éliminer la diffusion numérique du schéma décentré, on peut tout simplement le modifier, en discrétisant son équation équivalente. On obtient ainsi :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\,\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \left(\frac{V\Delta x}{2} - \frac{V^2\Delta t}{2}\right)\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

Q_1: Pourquoi on n'avait pas ce phénomène pour l'éq de la chaleur ?

R_1: Tous les schémas d'ordre 1 sont clairement diffusifs.

(ils "écrasent" la solution).

Q_2 : Qu'en est-il des schémas d'ordre 2 ?

R: Dans ce cas le terme dominant dans l'erreur de troncature sera une dérivée 3^e $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_n)$ (terme de "dispersion")

et le coefficient dominant s'appelle "dispersion numérique"

On a vu en TD que le schéma de Lax-Wendroff est très bon pour le $\sin(x)$ (solution régulière) mais mauvais pour le "créneau" (oscille autour des discontinuités.