Projet : Equation aux dérivées partielles

Etudiants
CLAUDE Inès
CULLERON Marie
TORES Julie

Professeur
DOLEAN V.

Octobre 2020

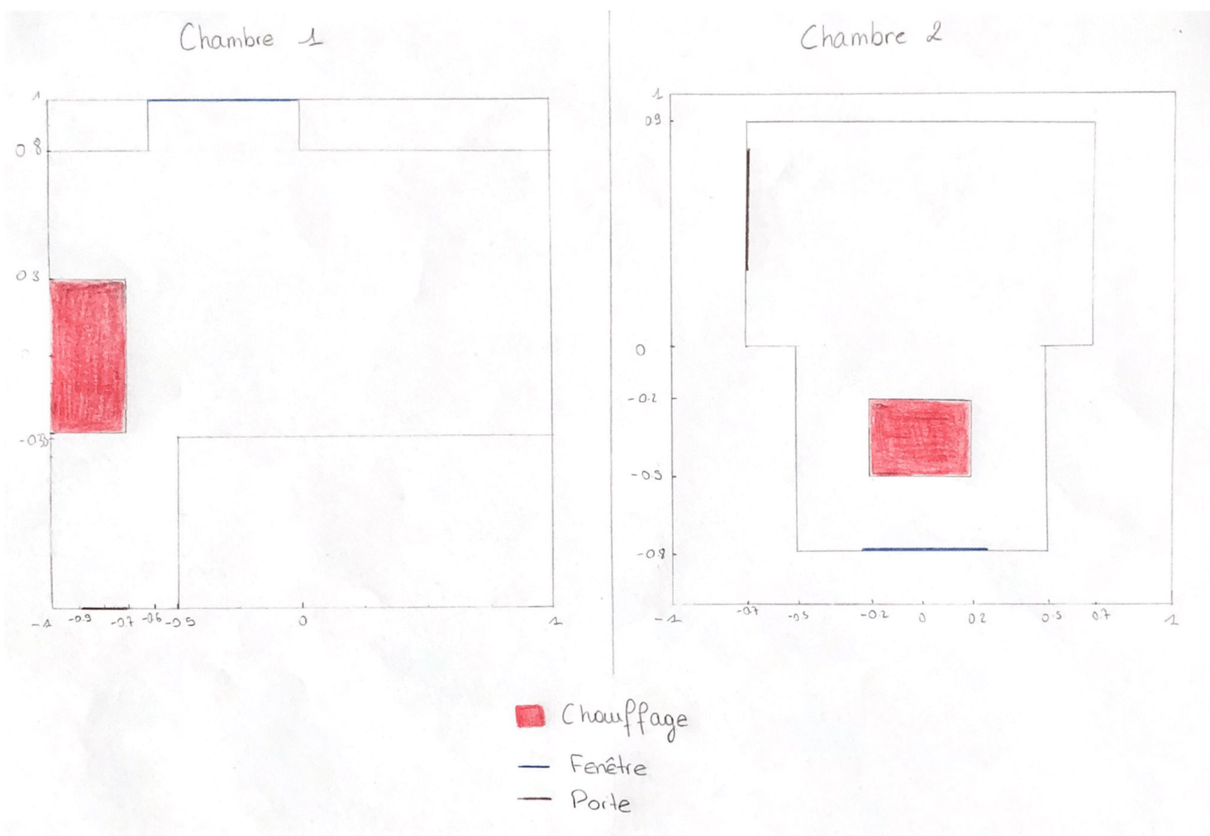
Contents

1 Introduction

Le but de ce projet est de mieux comprendre la méthode des différences finies. Pour cela nous allons modéliser la température dans deux chambres différentes. Dans un premier temps la modélisation sera stationnaire, dans un second temps elle variera au cours du temps. Nous utiliserons les méthodes d'Euler Explicite et d'Euler Implicite.

2 Schémas de nos chambres

Nous avons choisi deux géométries de chambres différentes, elles diffèrent notamment sur la position du chauffage. Le chauffage de la première chambre est placé proche de la porte, tandis que le chauffage de la deuxième chambre est placé proche de la fenêtre comme le montre le schéma suivant.



On peut également regarder les schémas de nos chambres discrétisées avec Matlab:

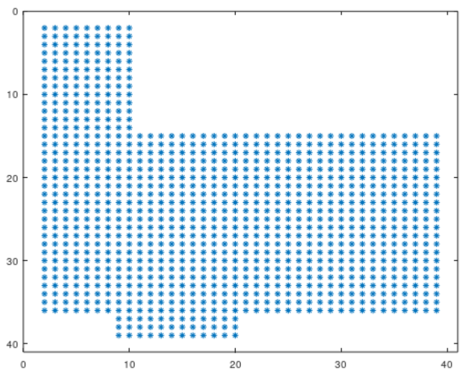


Figure 1: Schéma de la chambre 1 avec Matlab

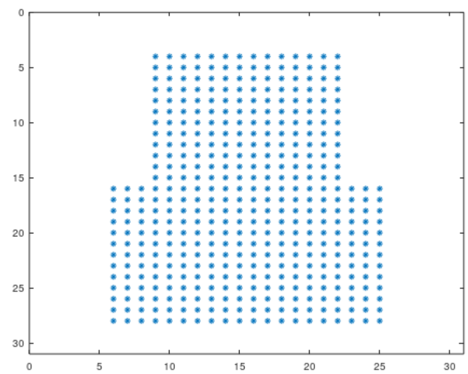


Figure 2: Schéma de la chambre 2 avec Matlab

3 Simulation statique de la chaleur

Pour cette partie nous allons utiliser l'équation de Poisson : $-\Delta u = f$.
Nous avons choisi $n_x = n_y = n$ Nous avons 2 types de conditions : -des conditions de Dirichlet pour la porte et la fenêtre -des conditions de Neumann car les murs sont isolants.
Pour effectuer cette simulation nous avons besoin d'obtenir le Laplacien (appelé A dans notre programme). La fonction delsq nous permet de l'obtenir facilement. Cependant nous devons changer un peu ce dernier pour pouvoir respecter les conditions de Neumann, il faut aussi le multiplier par $\frac{(n-1)^2}{4}$.
Concernant la fonction second membre, nous l'appelons b dans notre programme. Ce vecteur contient les conditions de Dirichlet et le chauffage.
Ensuite il suffit de résoudre le système $Au = b$.
Nous allons maintenant effectuer quelques test à l'aide de ce modèle.

3.1 Température ambiante en été

Pour ce test nous avons pris 20 degrés pour la température de la porte et de la fenêtre, 0 pour le chauffage et un pas de discrétisation de 30.

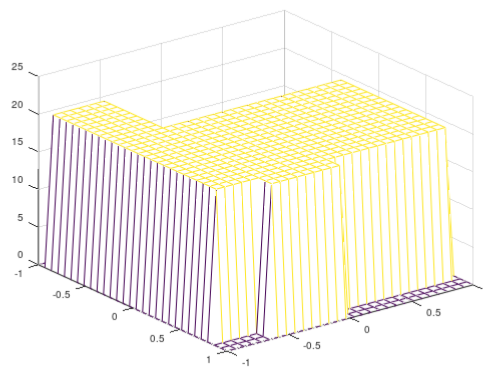


Figure 3: Chambre 1

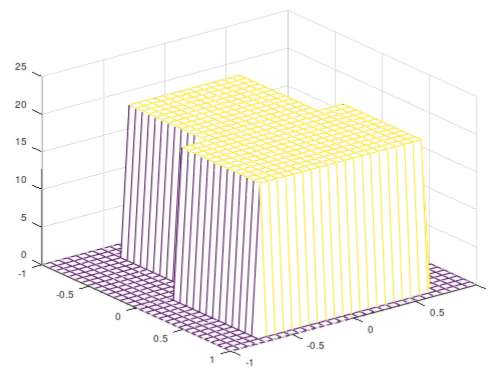


Figure 4: Chambre 2

On constate que la température ambiante dans les deux chambres est de 20 degrés.

3.2 Température ambiante en hiver sans chauffage

Pour ce second test les paramètres sont : -10 pour la fenêtre, 15 pour la porte, 0 pour le chauffage et un pas de discrétisation de 30.

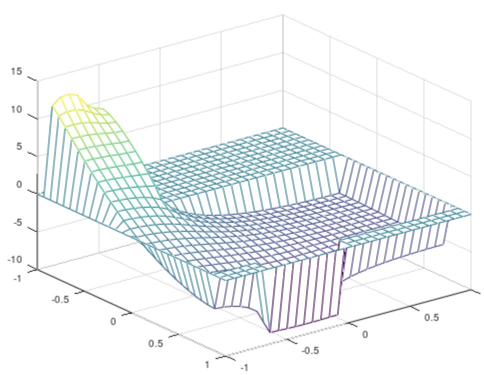


Figure 5: Chambre 1

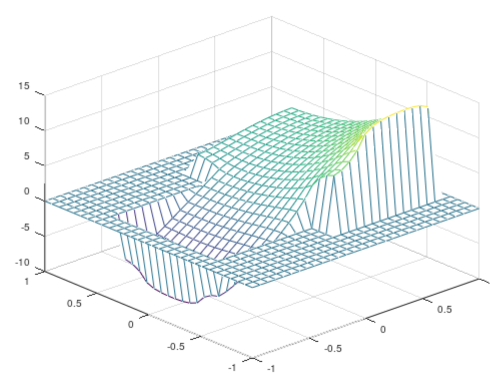


Figure 6: Chambre 2

On constate que la température de la chambre n'est pas du tout idéale. Pour le prochain test nous allons donc ajouter du chauffage.

3.3 Température ambiante en hiver avec chauffage

Pour ce dernier test nous allons mettre $ht = 300$ ce qui correspond au chauffage. Les paramètres sont donc : -10 pour la fenêtre, 15 pour la porte, 300 pour le chauffage et 30 pour le pas de discrétisation.

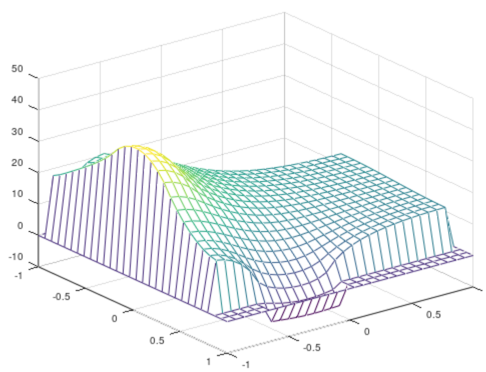


Figure 7: Chambre 1

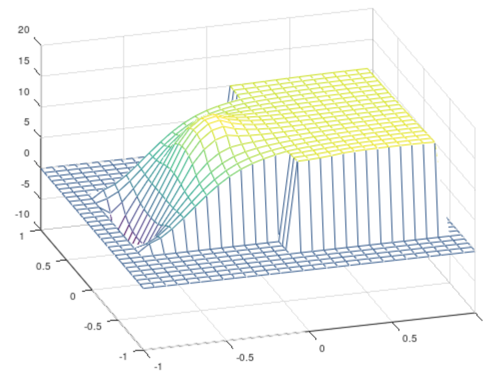


Figure 8: Chambre 2

Le chauffage est mieux placé dans la deuxième chambre car il est plus proche de la fenêtre. Dans la première chambre, le chauffage aurait dû être plus proche de la fenêtre.

3.4 Amélioration de la position du chauffage

Nous avons déplacé le chauffage de la première chambre (uniquement pour ce test) vers la fenêtre pour voir si nous avons amélioré le chauffage de la chambre.

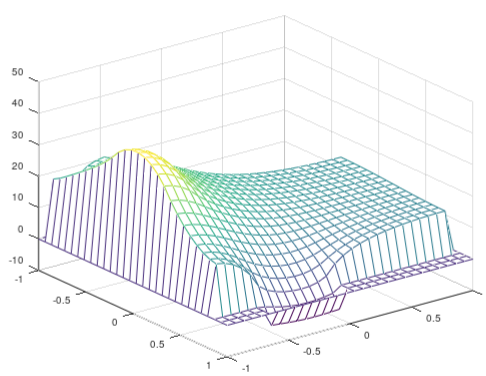


Figure 9: Ancien placement

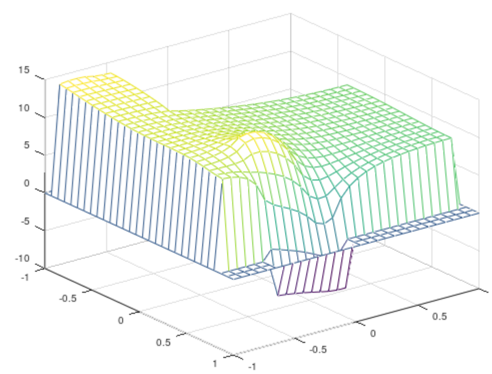


Figure 10: Nouveau placement

Le nouveau placement est bien meilleur que le précédent. En effet on voit que la température est plus uniforme.

4 Simulation instationnaire par la méthode d'Euler explicite et implicite.

Pour cette simulation nous allons utiliser les géométries de la première partie.

4.1 Euler Explicite vs Euler Implicite

4.1.1 Stabilité

Nous savons que la méthode d'Euler Explicite n'est pas inconditionnellement stable. Pour s'assurer que notre schéma allait être stable, nous avons choisi de définir notre pas de temps, en fonction des pas d'espace, de ν et de la condition CFL.
Ce pas de temps est donc très petit et limitant: 0.0011891 quand la condition CFL vaut $\frac{1}{2}$ et les pas d'espace 30.
La convergence de la solution est donc très longue.
Si nous ne respectons pas la condition CFL nous obtenons le résultat suivant :

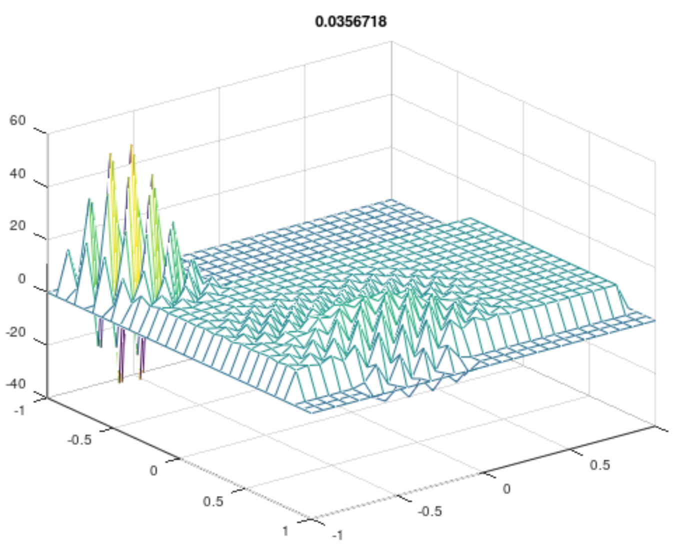


Figure 11: Instabilité d'Euler Explicite

Contrairement à Euler Explicite, Euler Implicite est inconditionnellement stable. Nous pouvons donc choisir le pas de temps que nous souhaitons.

4.1.2 Temps de calcul

L'inconvénient d'Euler Implicite est qu'il nécessite la résolution d'un système linéaire contrairement à Euler Explicite qui se contente d'un produit matriciel. Nous avons donc souhaité connaitre le temps pris par les deux méthodes pour réaliser 100 et 300 pas de temps. Pour ne pas fausser le résultat nous n'allons pas faire d'affichage et prendre le même modèle pour les deux schémas (également le même pas de temps). Nous résumons les résultats obtenus dans le tableau suivant.

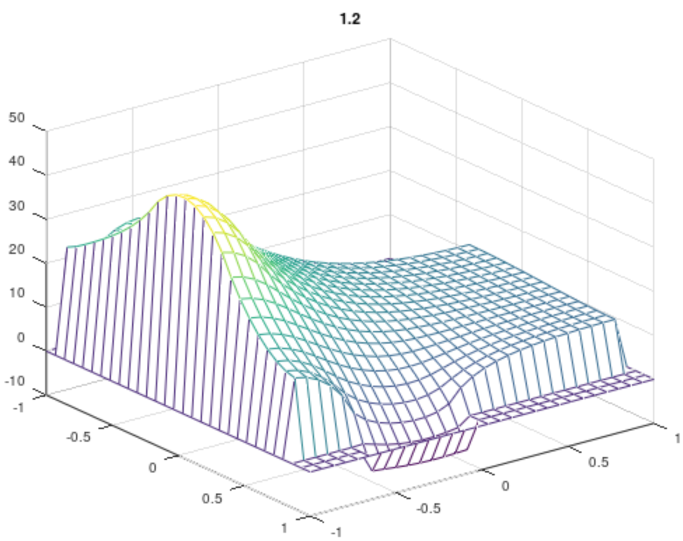
	100	300
Euler Explicite	0.0081151	0.023131
Euler Implicite	0.080806	0.20496

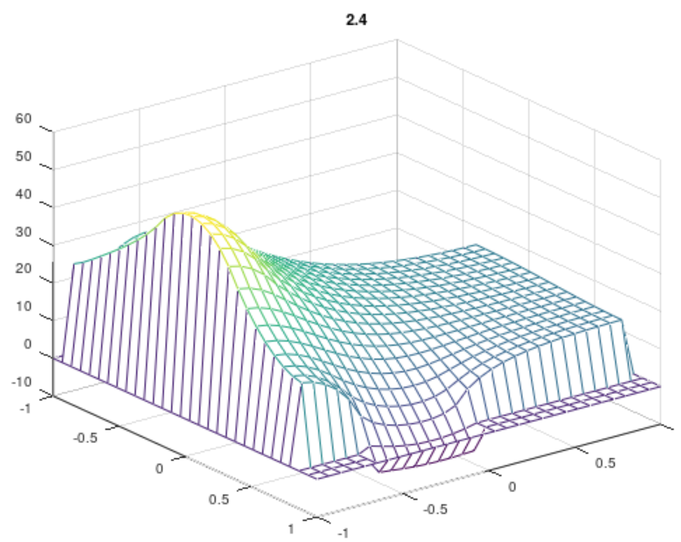
Euler implicite est plus lent mais ce n'est pas réellement un problème car comme dit plus haut il est inconditionnellement stable, on peut donc prendre un pas de temps plus grand et donc avoir une résolution plus rapide.

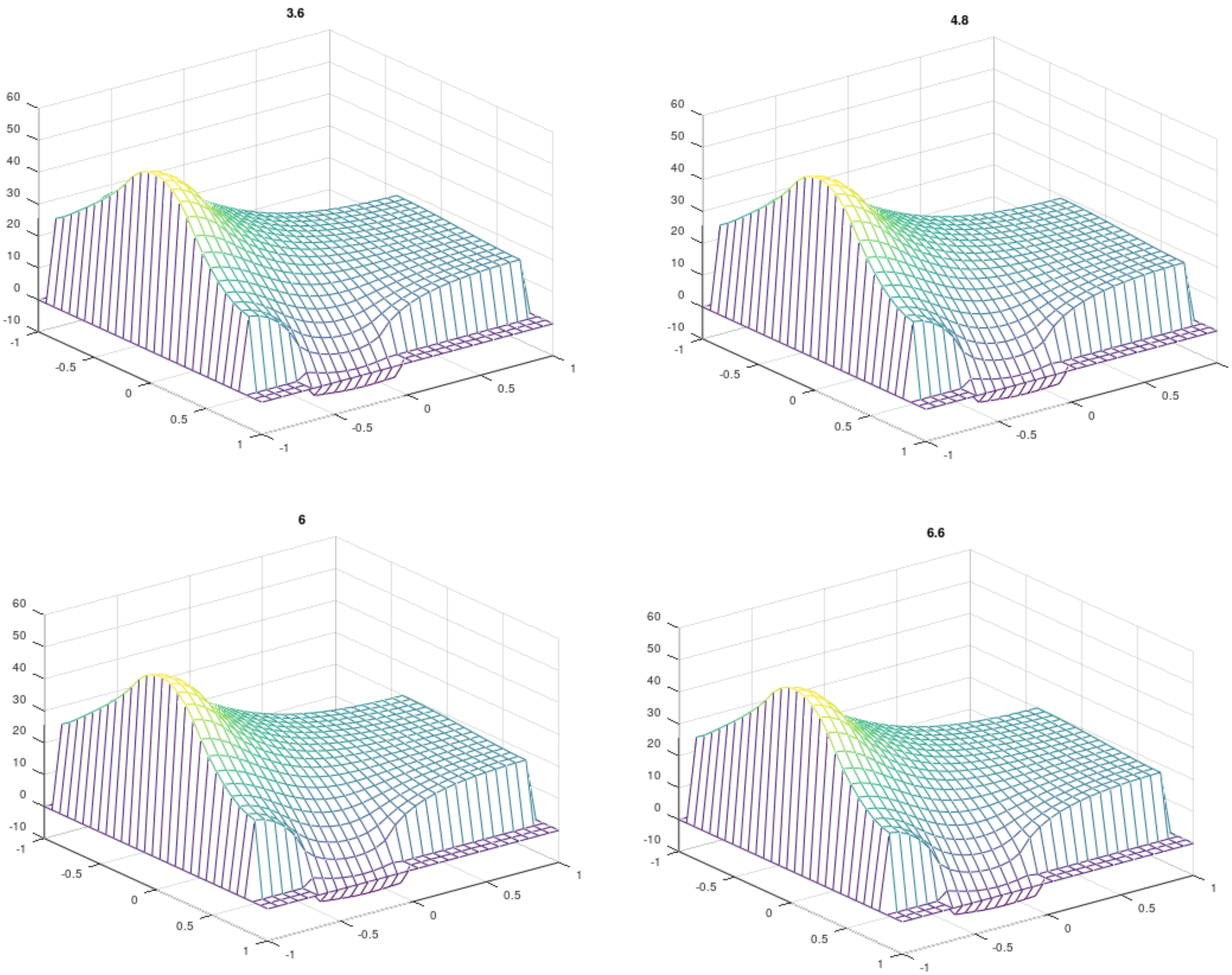
5 Quelques test avec Euler Implicite

5.1 En revenant du ski

Pour ce premier test, on considère que notre chambre est initialement à 10 degrés car nous sommes en hiver, il fait froid dehors donc la fenêtre est à -10 degrés et la porte est à 20 degrés. On prend $ht = 400$ et $\Delta t = 0.6$. Pour ce programme nous avons effectué la boucle en temps avec un while. Utiliser le while nous permet de nous arrêter lorsque l'on considère que notre chambre a atteint un température correcte. Une chambre est a température correcte si elle est à 19 degrés. On considère que si moins de 100 points de la discrétisation sont inférieurs 19 degré c'est que la chambre est à 19 degrés. On trouve que la chambre est a bonne température au bout de 11 itérations.

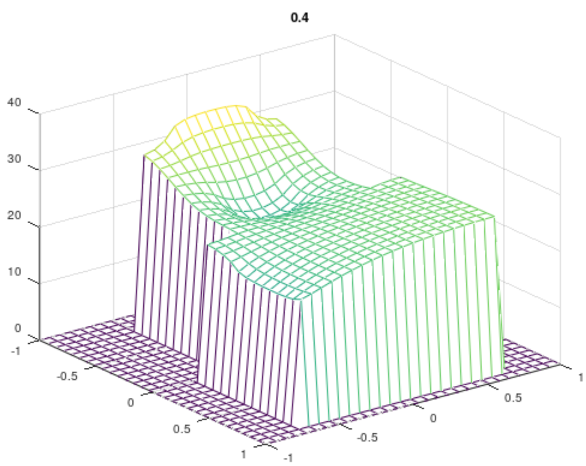


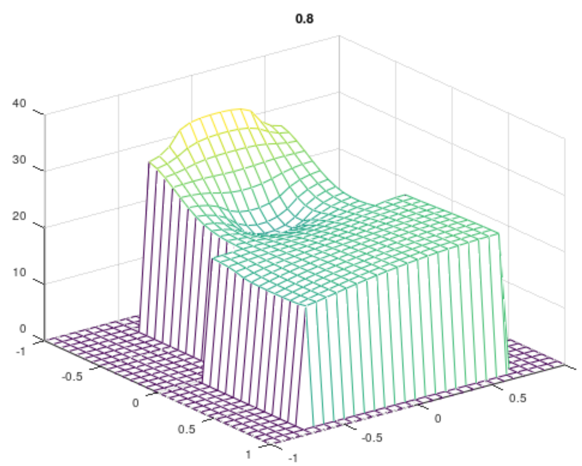


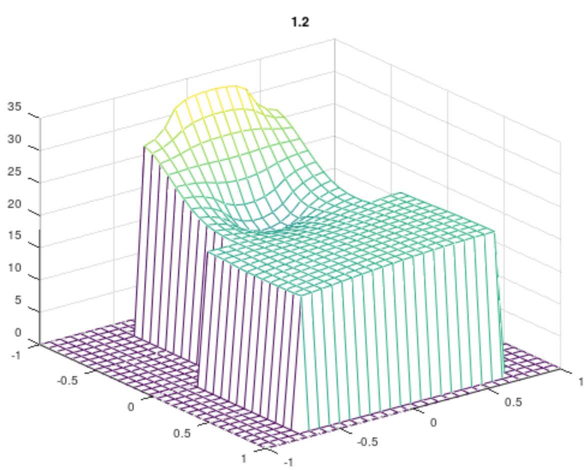

3.6
4.8
6
6.6

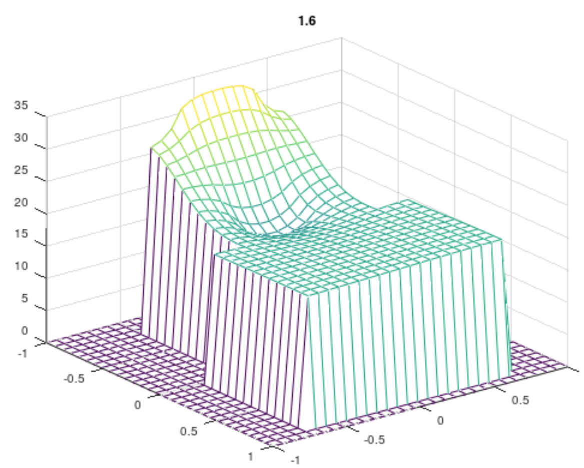
5.2 Refroidir sa chambre en plein été

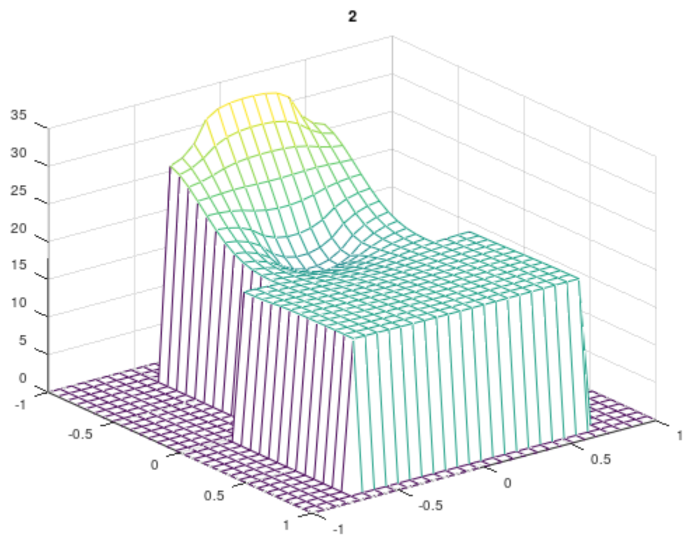
Nous allons réaliser ce second test dans la deuxième chambre. C'est l'été, il fait 30 degrés au départ dans la chambre, 38 degrés dehors, la porte est à 20 degrés et $ht = -300$. Cette fois on va considérer que la température idéale est atteinte si la moyenne de température de la chambre est comprise entre 19 et 21 degrés. Pour cette chambre nous utilisons cette condition car nous savons que le chauffage (ici la climatisation) est mieux placé et donc que la température de la chambre sera plus uniforme
On obtient une moyenne de 20.7 degrés en 5 itérations.











6 Crank-Nicolson

Les schémas d'Euler Explicite et d'Euler Implicite sont tous les deux d'ordre 1 en temps. Or, on sait que le schéma de Crank-Nicolson est en $O(\Delta t^2)$, c'est donc un meilleur schéma que les deux précédents. Nous aurions donc pu choisir de l'implémenter. En effet on peut suivre le même raisonnement que pour les deux premiers schémas :

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} - \theta\nu A U^n - (1-\theta)\nu A U^{n+1} &= f \\ U^{n+1} - \Delta t(1-\theta)\nu A U^{n+1} &= f\Delta t + \Delta t\theta\nu A U^n + U^n \\ (I - \Delta t(1-\theta)\nu A)U^{n+1} &= f\Delta t + (I + \Delta t\theta\nu A) \end{aligned} \tag{1}$$

Avec $\theta = \frac{1}{2}$ dans le cas du schéma de Crank-Nicolson. Il n'y aurait pas eu d'intérets de prendre un autre θ car nous n'aurions rien gagné comparé aux deux premiers schémas.

7 Conclusion

Ce projet nous a permis de mettre en pratique nos connaissances sur un cas concret : notre chambre. Lors de ce projet nous avons rencontré des difficultés, nous avons notamment eu du mal à comprendre comment intégrer les conditions de Dirichlet et de Neumann mais nous avons finalement réussi à surmonter ce problème. Lors de ce projet nous avons également pu voir que les résultats appris en cours s'appliquaient parfaitement à la réalité, comme l'instabilité d'Euler Explicite. Dans le cadre de ce projet nous avons utilisé un modèle plutôt simple pour représenter la température de notre chambre. Pour améliorer ce modèle il faudrait prendre en compte que les murs ne sont pas forcement totalement isolants par exemple.