Contrôle Équations aux Dérivées Partielles. Durée : 50 minutes

Les documents de cours ne sont pas autorisés. Justifier vos reponses d'une façon concise et claire.

Questions théoriques:

- De quelle classe d'EDP fait partie l'équation d'advection?
- Définir la diffusion numérique et donner un exemple de schéma diffusif et un non-diffusif. Pourquoi cette notion est importante dans l'étude des schémas appliqués à l'equation d'advection?
- La plupart des schémas diffusifs sont d'ordre 1 en espace. Pourriez-vous donner un exemple d'un schéma d'ordre 2 en espace qui est diffusif?
- Expliquer quelques différences fondamentales entre le schéma décentré Euler explicite et Lax-Wendroff.

On considère l'équation d'advection dans le domaine borné $(0, 1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \forall (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+, \end{cases}$$

avec $u(x, 0) = u_0$, u et u_0 périodiques de période 1.

Afin de simplifier le raisonnement et fixer les idées on supposera que la vitesse d'advection V est positive. (si V est négatif on pourra faire un raisonnement symétrique).

Exercice
On va discrétiser l'équation par le schéma de *Lax-Wendroff*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{V^2\Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

a) En utilisant la méthode de von Neumann montrer que ce schéma est L^2-stable sous la même condition CFL que le schéma explicite décentré $V\Delta t \leq \Delta x$.

b) En calculant l'erreur de troncature et en effectuant les développements de Taylor autour des points bien choisis, montrer également qu'il est consistant avec l'équation d'advection et précis à l'ordre 2 et espace et en temps.