Université de Nice-Sophia Antipolis — EPU

MAM4/SI4 - Équations aux Dérivées Partielles — 28 Novembre, 2012

Test Équations aux Dérivées Partielles. Durée : 1H30

NOM & Prénom : .... **Groupe TD** :

Documents autorisés: uniquement les documents cours et TD distribués. Réponses à rédiger sur la feuille d'énoncé (il n'en sera distribué qu'une), après avoir fait vos exercices/essais au brouillon. Justifier vos reponses et commenter les programmes Scilab d'une façon concise et claire.
On pourra considérer comme acquis les développements déjà faits ailleurs à condition de bien situer la source (cours, no. série exercices, no. exercice)

En absence de précisions supplémentaires, on discrétise toujours le domaine en utilisant un maillage régulier $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$, $\forall n \geq 0$, $j \in \{0, 1, ..., N+1\}$, $\Delta x = 1/(N+1)$ et $\Delta t > 0$.
Problème 1. On considère l'équation de la chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & 0 & \forall\, (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & u^0(x) & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{1}$$

et on se propose de la résoudre en utilisant le schéma numérique explicite suivant

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2\,u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \qquad (j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

ainsi que sa version implicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2\,u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \qquad (j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

1. Calculer l'ordre des schémas (2) et (3). (**3 POINTS**)

2. Montrer que le schéma explicite est instable, tandis que l'implicite est inconditionnellement stable. (**4 POINTS**)

Problème 2. On considère l'équation de la chaleur (1), qu'on se propose de résoudre en utilisant le schéma numérique suivant (où $\theta \geq 0$ est un nombre réel positif) :

$$(1+\theta)\,\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta\,\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \nu\,\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2\,u_j^{n+1} + u_j^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \qquad (j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*. \qquad (4)$$

1. Montrer, en calculant avec l'erreur de troncature, que le schéma est en général d'ordre 1 en temps et 2 en espace. Calculer la valeur de $\theta \geq 0$ pour laquelle le schéma soit d'ordre 2 en temps. (**2 POINTS**)

2. Montrer que le schéma (4) est inconditionnellement stable. (**3 POINTS**)

Problème 3 - On considère l'équation d'advection :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) & = & u^0(x) & x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{5}$$

1. Donner le schéma explicite décentré amont dans le cas où $c < 0$ et $c > 0$. (**1 POINT**)

2. En calculant le facteur d'amplification du schéma dans ses deux versions, dire sous quelle condition il est L^2-stable. (**4 POINTS**)

3. On suppose maintenant que $c > 0$ et que la condition de stabilité ci-dessus est vérifiée. Montrer que dans ce cas, on a aussi:

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left| u_j^{n+1} \right| \leq \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left| u_j^n \right| \tag{6}$$

Comment interpréter l'inégalité (6) ? (**2 POINTS**)

Problème 4. On veut implementer numériquement à l'aide du logiciel `Scilab` le schéma de Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2} - \nu \dfrac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} = \dfrac{1}{2}(f_j^n + f_j^{n+1}), 1 \leq j \leq N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0,\ u_j^0 = u_0(x_j), f_j^n = f(x_j^n),\ 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

où u_0 est la condition initiale et f est le second membre. On notera le vecteur de inconnues par $U^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq n}$, celui qui donnera le second membre par $F^n = (f_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ et le nombre de CFL par $\sigma = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}$.

1. Montrer que le schéma peut s'écrire sous forme matricielle ou l'on précisera A. (**1 POINT**)

$$(I + \sigma/2A)U^{n+1} = (I - \sigma/2A)U^n + 1/2F^n + 1/2F^{n+1}.$$

Écrire une fonction `Scilab` qui a l'en-tête `function Un=heat(xspan,tspan,nu,u0,f)` qui calculera la solution de l'équation de la chaleur par le schéma de Crank-Nicolson. Ses paramètres sont: `xspan` (le vecteur des x_j), `tspan` (le vecteur des t_n), `nu` (le coefficient de diffusion ν), la condition initiale `u0` (u_0) et le second membre f. (remarquons que le nombre d'inconnues en espace, N peut s'obtenir comme `length(xspan)-2`). (**3 POINTS**)

2. Considérons maintenant le cas concret où $(a, b) = (0, \pi)$, $\nu = 1$, $f(x, t) = -\sin(x)\sin(t) + \sin(x)\cos(t)$, condition initiale $u(x, 0) = \sin(x)$. Dans ce cas, la solution exacte est $u(x, t) = \sin(x)\cos(t)$. Écrire un programme qui résout ce problème sur l'intervalle en temps $[0, 1]$ et tracer la solution exacte au temps final sur le même graphique que celle approchée. (**3 POINTS**)