Équations aux dérivées partielles – TD 7

On rappellera la définition des principaux opérateurs différentiels (ici u est un champs scalaire et $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ un champs vectoriel). Par convention, on notera en caractère gras les champs vectoriels et en caractère simple les champs scalaires. On supposera toutes les fonctions suffisamment régulières afin de pouvoir effectuer les opérations d'intégration indiquées, au sens classique.

$$\begin{aligned}
\nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)^T \text{ (Gradient)},\\
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ (Laplacien)},\\
\nabla \cdot \mathbf{w} &= \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \text{ (Divergence)},\\
\nabla \times \mathbf{w} &= \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}, \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}, \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^T \text{ (Rotationnel)}.
\end{aligned}$$

Étant donné un domaine (volume) Ω, on admettra par la suite la formule de Green

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u n_i \, d\sigma.$$

où $\partial\Omega$ représente la frontière de Ω et $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à cette frontière, n_i la i-ème composante de cette normale et x_i la i-ème coordonnée de $\mathbf{x}$.

On cherchera à prouver une série de relations utiles

1. Pour les champs u et $\mathbf{v}$ vérifier formellement les relations

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u, \quad \nabla \cdot (u\mathbf{v}) = u(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla u, \quad \nabla \times (u\mathbf{v}) = u(\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla u \times \mathbf{v}.$$

En déduire que pour deux fonctions u et ϕ on a :

$$\nabla \cdot (u \nabla \phi) = u \, \Delta\phi + \nabla u \cdot \nabla \phi$$

2. Montrer que si u et v sont des champs scalaires définis sur $\mathbb{R}^n$, alors on a la formule suivante d'integration par parties :

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, d\mathbf{x} = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma.$$

où la *dérivée normale* est définie par $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$. On montrera d'abord que

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\mathbf{x} = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u v n_i \, d\sigma.$$

qui est une consequence directe de la formule de Green.

3. A partir de la formule de Green, montrer la formule de Stokes:

$$\int_{\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{w})\phi\,d\mathbf{x} = -\int_{\Omega}\mathbf{w}\cdot\nabla\phi\,d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})\phi\,d\sigma.$$

   et en déduire la formule de la divergence ou la formule de Gauss:

$$\int_{\Omega}\nabla\cdot\mathbf{w}\,d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega}\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$

4. A partir de la formule de Green, montrer la formule

$$\int_{\Omega}(\nabla\times\mathbf{w})\,\phi d\mathbf{x} = \int_{\Omega}\mathbf{w}\times\nabla\phi\,d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega}(\mathbf{w}\times\mathbf{n})\phi\,d\sigma.$$

   et en déduire la formule du rotationnel:

$$\int_{\Omega}\nabla\times\mathbf{w}\,d\mathbf{x} = -\int_{\partial\Omega}\mathbf{w}\times\mathbf{n}\,d\sigma.$$

5. Si f est une fonction continue sur $[0;1]$, montrer que le problème de Laplace en une dimension d'espace a une solution unique dans $C^2([0;1])$ donnée par la formule

$$u(x) = x\int_0^1 f(s)(1-s)ds - \int_0^x f(s)(x-s)ds, x\in[0,1].$$

6. Montrer que le Laplacien en deux dimensions d'espace peut s'écrire en coordonnées polaires de la façon suivante:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

   On rappelle que la relation entre les coordonnées polaires (r,θ) et cartesiennes (x,y) est

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta).$$