



MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2025-26

TD 7 - Fubini

Exercice 1

Soient a et b deux réels, $a < b$. Soit $f \in L^1([a, b]^2)$.

1.1

Montrer que les deux intégrales ci-dessous sont bien définies et égales :

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x, y) dx \right) dy =: I.$$

1.2

On suppose de plus que, presque pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, on a $f(y, x) = f(x, y)$. Montrer que

$$I = \frac{1}{2} \int_{[a,b]^2} f(x, y) dxdy.$$

Exercice 2

Calculer de deux façons différentes

$$\int_{\mathbf{R}_+^2} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{x^2 - 1}.$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable et possédant des dérivées partielles croisées $\partial^2 f / \partial x \partial y$ et $\partial^2 f / \partial y \partial x$ continues.

3.1

Soient $a \leq b$ et $c \leq d$, calculer

$$\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) dx \right) dy \quad \text{et} \quad \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) dy \right) dx.$$

3.2

À l'aide du théorème de Fubini, montrer que

$$\int_c^d \left(\int_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \right) dx \right) dy = 0.$$

Conclure.

Exercice 4

4.1

Soit $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une suite d'applications mesurables définies sur (X, \mathcal{B}, μ) , espace mesuré σ -fini, telle que

$$\sum_n \int_X |f_n(x)| \, dx < \infty.$$

Montrer qu'on a

$$\int_X \sum_n f_n(x) \, dx = \sum_n \int_X f_n(x) \, dx.$$

4.2

Déterminer, si elle existe, la valeur de

$$\int_0^\infty \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} e^{-n^2 x} \, dx.$$