

MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2025-26

TD 10 - Équation de la chaleur

Exo 1

Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ dérivable et telle que $f' \in L^1(\mathbf{R})$.

1.1

Montrer que

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(s) \, ds$$

et que $f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow -\infty$.

1.2

Montrer également que $f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

1.3

En déduire finalement que

$$\widehat{f'}(\xi) = 2i\pi\xi\hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Exo 2

Soit

$$G_\sigma : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

et soit \widehat{G}_σ sa transformée de Fourier.

2.1

Montrer que \widehat{G}_σ est dérivable sur \mathbf{R} .

2.2

En déduire que \widehat{G}_σ est solution d'une équation différentielle linéaire et la résoudre en s'appuyant sur le problème de Cauchy de condition initiale $\widehat{G}_\sigma(0)$ (que l'on calculera).

Exo 3

On considère une fonction qui à tout $(t, x) \in [0, \infty[\times \mathbf{R}$, associe $u(t, x) \in \mathbf{R}$. On suppose que pour $t \geq 0$, $u(t, \cdot)$, $u_x(t, \cdot)$, $u_{xx}(t, \cdot)$ sont toutes dans $L^1(\mathbf{R})$. On cherche à décrire un tel u vérifiant l'équation de la chaleur unidimensionnelle

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$u(0, x) = u_0(x).$$

3.1

Pour tout $t > 0$ fixé, exprimer $\widehat{u_{xx}(t, \cdot)}$ en fonction de $\widehat{u(t, \cdot)}$.

3.2

Montrer que pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, $t \mapsto \widehat{u}(t, \xi)$ satisfait une équation différentielle linéaire. En déduire la valeur de $\widehat{u}(t, \xi)$ en fonction de $\widehat{u}_0(\xi)$.

3.3

En déduire $u(t, x)$ pour $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$. (Indication : on rappelle la formule $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ quand $f, g \in L^1(\mathbf{R})$.)