Ex 1 : Etudier la nature (CV ou DV) des intégrales (et les calculs quand CV)

a. $I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt$

la limite de $\underbrace{\int_0^A e^{-t}\, dt}$

$t \mapsto e^{-t}$ continue sur $[0; A]$
bien défini (au sens de Riemann)

quand $A \to \infty$ existe-t-elle ?

soit $A \geq 0$

$$\int_0^A e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^A$$

$$= 1 - e^{-A} \underset{A \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est CV (i.e la limite qd $A \to \infty$ existe)

et $\int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-t}\, dt = 1$

2. $I_2 = \int_0^1 \ln t \, dt \quad \neq$ du cas $\int_a^b f(t)\,dt$

avec $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ car ln pas définie en 0

$\ln t \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$

la limite de $\underbrace{\int_\varepsilon^1 \ln t \, dt}_{\substack{\text{bien définie} \\ \ln \in \mathcal{C}^1([\varepsilon,1])}} \quad (\varepsilon > 0)$

quand $\varepsilon \to 0^+$, existe-t-elle ?

$$\int_\varepsilon^1 \ln t \, dt = [t \ln t]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 1 \, dt$$

$$= -\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon$$

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$ (croissance comparée)

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \ln t \, dt = -1$$

Rq : ex d'intégrale impropre DV :

$$\int_0^\infty \cos t \, dt \ : \text{ n'existe pas}$$

$$\int_0^A \cos t \, dt = [\sin t]_0^A = \sin A$$: pas de lim quand $A \to \infty$

3. $$I_3 = \int_2^\infty \frac{dt}{t \ln t}$$

$$\int_2^A \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(|\ln t|)]_2^A$$

$$= \ln(|\ln A|) - \ln(|\ln 2|)$$

$\lim_{A \to \infty} \ln(|\ln A|) = \infty$ DV (limite existe mais n'est pas finie)

Rq : 1. $\int_2^{\infty} \frac{dr}{r \ln r} = \infty \in \bar{\mathbb{R}}$

2. <u>intégrale de Bertrand :</u>

• $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{r^{\alpha} \ln^{\beta} r}$ CV ssi $\begin{cases} \cdot\ \alpha < 1 \\ \cdot\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

(α et $\beta > 0$)

• $\int_2^{\infty} \frac{dr}{r^{\alpha} \ln^{\beta} r}$ CV ssi $\begin{cases} \cdot\ \alpha > 1 \\ \cdot\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

Ex 2 : Discuter le caractère CV des intégrales ci-dessous :

1. $J_1 = \int_0^{\infty} \frac{dr}{(1+r^2)\sqrt{r}}$

Il s'agit de vérifier que la quantité

$$\int_{\varepsilon}^{A} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}}$$ a une limite quand $\varepsilon \to 0^+$ et $A \to \infty$

$$= \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}} + \int_{1}^{A} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}}$$

d'une part, $\dfrac{(1+t^2)\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \underset{\substack{t\to 0\\ >}}{\longrightarrow} 1$

(i.e. $(1+t^2)\sqrt{t} \sim \sqrt{t}$ quand $t \to 0_+$)

$\Rightarrow \exists\, \eta > 0$ tel que $\forall t \in]0, \eta]$,

$$\frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)\sqrt{t}} \leq 2$$

$$\Rightarrow \left(\forall t \in]0,\eta]\right) : \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{2(1+t^2)\sqrt{t}} > 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{dt}{2(1+t^2)dt} \leq \underbrace{\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{dt}{\sqrt{t}}}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} \ CV}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{dt}{2(1+t^2)\sqrt{t}} \quad CV$$

aussi quand $\varepsilon \to 0_+$

(donc $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{2(1+t^2)\sqrt{t}}$ aussi)

d'autre part, $\displaystyle\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}} \underset{t \to \infty}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{5}{2}}}$

Riemann

$\Rightarrow$ CV

2. $J_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

Existence de la limite qd $A \to \infty$ de

$$\int_{-A}^{A} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \underset{f \text{ paire}}{=} 2\int_{0}^{A} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

On a, $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \underset{t \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$

donc critère Riemann $\Rightarrow$ DV

$$\left(\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \infty \right)$$

3. $J_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt$

$$\exists \lim_{A \to \infty} \underbrace{\int_{-A}^{A} e^{-t^2}\, dt}$$

$$2\int_0^A e^{-t^2}\,dt \quad (\text{pair})$$

on, $e^{-t^2} t^2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \exists B \geq 0,\ \forall t \geq B,$

$0 \leq e^{-t^2} t^2 \leq 1$

donc $(\forall t \geq B > 0)$: $e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

$\Rightarrow$ pour tout $A \geq B$,

$$\int_B^A e^{-t^2}\,dt \leq \underbrace{\int_B^A \frac{1}{t^2}\,dt}_{\substack{\text{CV qd } A\to\infty \\ \text{(critère de Riemann)}}}$$

$\Rightarrow \int_B^A e^{-t^2}\,dt$ CV aussi qd $A \to \infty$

donc $\lim\limits_{A\to\infty} \displaystyle\int_{-A}^{A} e^{-t^2}\,dt$ existe (et est finie) : CV

Ex 3 : Soit

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$\operatorname{sinc} t = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

"sinus cardinal"

fonction $\mathcal{C}^0$ (et même $\mathcal{C}^\infty$)

$\Downarrow$

continue en 0, pas de caractère impropre en 0

$\Rightarrow \exists \lim A \to \infty$ de $\displaystyle\int_{-A}^{A} \frac{\sin t}{t}\,dt$

$$= 2 \int_0^A \frac{\sin t}{t}\, dt$$

$$\int_0^A = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt$$

or,

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_1^A \frac{1}{t} \sin t \, dt$$

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[- \frac{\cos t}{t} \right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

$$= \underbrace{- \frac{\cos A}{A}}_{\xrightarrow[A \to +\infty]{} 0} + \cos 1 - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

de plus: $\displaystyle\int_1^A \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| dt \leq \int_1^A \frac{1}{t^2}\, dt$ CV

$$\Rightarrow \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,dt \quad \text{CV aussi}$$

dans la limite de $\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,dt$ qd $A \to \infty$ existe

donc $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est bien CV

2. Montrer de même que

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2t}{t}\,dt \quad \text{CV}$$

En effet, on peut refaire le même calcul (ipp)

$$\int_1^A \frac{\cos 2t}{t}\,dt = \underbrace{\left[\frac{1}{t}\,\frac{\sin(2t)}{2}\right]_1^A}_{\underbrace{\frac{\sin 2A}{2A} - \frac{\sin 2}{2}}_{\xrightarrow[A\to\infty]{} -\frac{\sin 2}{2}}} - \underbrace{\int_1^A \left(-\frac{1}{t^2}\right)\frac{\sin 2t}{2}\,dt}_{\underbrace{\int_1^A \frac{\sin 2t}{2t^2}\,dt}_{(*)}}$$

et (*) possède une limite (qd $A \to \infty$)

puisque $\displaystyle\int_1^A \underbrace{\left|\frac{\sin 2t}{2t^2}\right|}_{\geq 0} dt$

$$\leq \int_1^A \frac{dt}{2t^2} \underset{\substack{\text{critère de Riemann}}}{<} \infty \quad CV$$

$\left(\text{si } \displaystyle\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin 2t}{2t^2}\right| dt \ CV, \int_1^{\infty} \frac{\sin 2t}{2t^2} dt \ CV \text{ aussi}\right)$

3. Montrons finalement que, par contre,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left|\frac{\sin t}{t}\right|}_{\geq 0} dt \quad DV \ (= \infty)$$

$$\int_{-A}^{A} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \underset{\text{parité}}{=} 2 \int_0^A \frac{|\sin t|}{t} dt$$

On, $|\sin t| \in [0,1]$

$$\Rightarrow |\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^A \frac{|\sin t|}{t}\, dt \geq \int_1^A \frac{1-\cos 2t}{2t}\, dt$$

Mais, $$\int_1^A \frac{1-\cos 2t}{2t}\, dt = \underbrace{\int_1^A \frac{dt}{2t}}_{\substack{\longrightarrow \infty \\ A\to\infty}\ \text{Riemann}} - \underbrace{\int_1^A \frac{\cos 2t}{2t}\, dt}_{\text{lim existe et est finie}}$$

$$\xrightarrow[A\to\infty]{} \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{|\sin t|}{t}\, dt = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to\infty} 2\int_0^A \frac{|\sin t|}{t}\, dt = \infty$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$ CV alors que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty$$

$\Rightarrow$ intégrale "semi - CV"