MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2025-26

Exam CC no. 3

Durée 2H00. Documents non autorisés. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice.
Rendre sur des copies séparées les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part.

Exercice 1 (4 points)

Soient f et g dans $L^1(\mathbf{R})$.

1.1

Montrer que $\hat{f}g$ et $f\hat{g}$ sont encore dans $L^1(\mathbf{R})$.

Réponse. Pour $f \in L^1(\mathbf{R})$, sa transformée de Fourier $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R})$, donc $\hat{f}$ est bornée. Comme $g \in L^1(\mathbf{R})$, on en déduit $\hat{f}g \in L^1(\mathbf{R})$. De même, $f\hat{g} \in L^1(\mathbf{R})$.

1.2

À l'aide du théorème de Fubini, montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{f} g \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f \hat{g} \, \mathrm{d}x.$$

Réponse. Par définition, $\hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y) e^{-2i\pi xy} \, \mathrm{d}y$. Donc :

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(x) g(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(y) e^{-2i\pi xy} \, \mathrm{d}y \right) g(x) \, \mathrm{d}x$$

Pour appliquer Fubini, vérifions l'intégrabilité de $|f(y) g(x) e^{-2i\pi xy}| = |f(y)||g(x)|$ sur $\mathbf{R}^2$:

$$\int_{\mathbf{R}^2} |f(y)||g(x)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(y)| \, \mathrm{d}y \right) \left(\int_{\mathbf{R}} |g(x)| \, \mathrm{d}x \right) = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty$$

Le théorème de Fubini permet donc d'intervertir les intégrations :

$$\int_{\mathbf{R}} f(y) \left(\int_{\mathbf{R}} g(x) e^{-2i\pi xy} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}} f(y) \hat{g}(y) \, \mathrm{d}y$$

Exercice 2 (6 points)

2.1

Soit $f_n(x) := (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \geq 0$. Montrer que

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n(x)| \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Réponse. On calcule :

$$\int_0^1 |f_n(x)| \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Donc :

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n(x)| \, \mathrm{d}x = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty$$

2.2

En déduire que l'intégrale ci-dessous est bien définie :

$$\int_0^1 \sum_{n\geq 0} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Réponse. D'après la question 2.1, $\sum_{n\geq 0}\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Par le théorème de Tonelli, on peut intervertir somme et intégrale, ce qui garantit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ est intégrable sur $[0,1]$, donc que $\int_0^1 \sum_{n\geq 0} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie.

2.3

Déterminer la valeur de cette intégrale.

Réponse. Par interversion somme-intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{n\geq 0} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0}\int_0^1 (-1)^n \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

2.4

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Réponse. Pour $|x|<1$, la série de terme général $\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ converge simplement vers $\ln(1+x)$, de sorte que $\sum_{n\geq 0} f_n(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ sur $]0,1]$. Par conséquent :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n\geq 0} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 3 (4 points)

3.1

Soit $a > 0$. Déterminer la transformée de Fourier de $h_a(x) := e^{-a|x|}$, $x \in \mathbf{R}$.

Réponse. La fonction h_a étant paire, sa transformée de Fourier vaut :

$$\hat{h}_a(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-a|x|} e^{-2i\pi\xi x} \,\mathrm{d}x = 2 \int_0^\infty e^{-ax} \cos(2\pi\xi x) \,\mathrm{d}x$$

Comme $\cos(2\pi\xi x) = \mathrm{Re}(e^{2i\pi\xi x})$, on a :

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(2\pi\xi x) \,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^\infty e^{-(a-2i\pi\xi)x} \,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{a - 2i\pi\xi}\right)$$

$$= \frac{a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}.$$

3.2

Soit $\beta \in \mathbf{R}$. À l'aide de la question précédente, montrer que

$$e^{-|\beta|} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\beta y)}{1 + y^2} \mathrm{d}y.$$

Réponse. Par la formule d'inversion de Fourier, pour $a = 1$:

$$e^{-|\beta|} = h_1(\beta) = \int_{\mathbf{R}} \hat{h}_1(\xi) e^{2i\pi\xi\beta} \,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbf{R}} \frac{2}{1 + 4\pi^2\xi^2} e^{2i\pi\xi\beta} \,\mathrm{d}\xi$$

Par parité :

$$= 2 \int_0^\infty \frac{2}{1 + 4\pi^2\xi^2} \cos(2\pi\xi\beta) \,\mathrm{d}\xi$$

En posant $y = 2\pi\xi$, on a :

$$= 2\int_0^\infty \frac{2}{1+y^2}\cos(\beta y)\frac{\mathrm{d}y}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\beta y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

Exercice 4 (6 points)

4.1

Soit $\lambda > 0$ et soit

$$f_\lambda(x) := \lambda e^{-\lambda x}\chi_{[0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Montrer que $f_\lambda \in L^1(\mathbf{R})$ et que

$$\int_{\mathbf{R}} f_\lambda\,\mathrm{d}x = 1.$$

Réponse. On a :

$$\int_{\mathbf{R}} |f_\lambda(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lambda\left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1 < \infty$$

Donc $f_\lambda \in L^1(\mathbf{R})$ et $\int_{\mathbf{R}} f_\lambda\,\mathrm{d}x = 1$.

4.2

Soient λ et μ strictement positifs, $\lambda \neq \mu$, déterminer le produit de convolution $f_\lambda * f_\mu$.

Réponse. Pour $x < 0$, $f_\lambda * f_\mu(x) = 0$ car les supports ne se chevauchent pas. Pour $x \geq 0$:

$$f_\lambda * f_\mu(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} \cdot \mu e^{-\mu(x-y)}\,\mathrm{d}y = \lambda\mu e^{-\mu x}\int_0^x e^{(\mu-\lambda)y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \lambda\mu e^{-\mu x}\left[\frac{e^{(\mu-\lambda)y}}{\mu-\lambda}\right]_0^x = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}e^{-\mu x}(e^{(\mu-\lambda)x}-1)$$

$$= \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda x}-e^{-\mu x})$$

Donc :

$$f_\lambda * f_\mu(x) = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda x}-e^{-\mu x})\chi_{[0,+\infty[}(x)$$

4.3

Soit $\lambda > 0$, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi, toutes deux de densité f_λ. Déterminer la densité de la loi de $X+Y$.

Réponse. La densité de $X+Y$ est donnée par $f_\lambda * f_\lambda$. Pour $x \geq 0$:

$$f_\lambda * f_\lambda(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\cdot\lambda e^{-\lambda(x-y)}\,\mathrm{d}y = \lambda^2 e^{-\lambda x}\int_0^x \mathrm{d}y = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

Donc :

$$f_\lambda * f_\lambda(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}\chi_{[0,+\infty[}(x)$$