MAM3

Mathématiques de l'ingénieur.e 1

2025-26

Exam CC no. 2

Durée 2H00. Documents non autorisés. Tous les exercices sont indépendants.
Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice.

Rendre sur des copies séparées les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part.

Exo 1 (6 points)

Pour chacune des expressions ci-dessous (où $n \geq 1$) dire si la limite quand $n \to \infty$ existe et, le cas échéant, déterminer cette limite.

1.1

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n + e^x}\,\mathrm{d}x$$

1.2

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x/n)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

1.3

$$\int_0^n \frac{nx}{1+e^{x/n}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2 (5 points)

Soit

$$F(t) := \int_1^\infty \frac{\cos(tx)}{x} e^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad t \in \mathbf{R}.$$

2.1

Montrer que l'on définit bien ainsi une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

2.2

Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.

2.3

En déduire une nouvelle expression de F.

Exercice 3 (4 points)

3.1

Montrer que la fonction ci-dessous appartient à $L^1([0,\infty])$:

$$f(x) := \frac{1}{x(1 + |\ln x|)^2}\,, \quad x > 0.$$

3.2

Montrer que la fonction ci-dessous appartient à $L^{3/2}([0,\infty])$:

$$g(x) := \frac{\sin x}{x(1+x)}\,, \quad x > 0.$$

3.3

En déduire que $f^{1/3} g$ appartient à $L^1([0,\infty])$.

Exercice 4 (5 points)

4.1

On considère une suite d'applications mesurables $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. À l'aide du théorème de convergence monotone, montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n(x)| \,\mathrm{d}x.$$

Indication. Considérer la suite d'applications $\left(\sum_{n=0}^{N} |f_n|\right)_N$ définie par les sommes partielles.

4.2

À l'aide du théorème de convergence dominée, en déduire que, sous l'hypothèse

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n(x)| \,\mathrm{d}x < \infty,$$

on a

$$\int_{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x) \,\mathrm{d}x.$$

4.3

Déterminer

$$\int_{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+(n+1)^4 x^2} \,\mathrm{d}x.$$