MAM3

Mathématiques de l’ingénieur.e 1

2025-26

Exam CC no. 1

Durée 2H00. Documents non autorisés. Tous les exercices sont indépendants.
Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice.

Rendre sur des copies séparées les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part.

Exercice 1 (4 points)

1.1

Montrer que l'intégrale impropre ci-dessous est convergente et déterminer sa valeur :

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

1.2

En déduire que l'intégrale impropre ci-dessous est également convergente et déterminer sa valeur :

$$\int_0^\infty \frac{e^t \,\mathrm{d}t}{1+e^{2t}}.$$

Exercice 2 (4 points)

Calculer

$$\int_D \frac{xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+y^2}$$

où $D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 3 (6 points)

3.1

Calculer la dérivée (la matrice jacobienne) de la fonction associée au changement de coordonnées sphériques :

$$\varphi(r,\theta,\varphi) := (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi).$$

3.2

En déduire la valeur de

$$\int_D \frac{(x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

où $D := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.

Exercice 4 (6 points)

On considère la famille de parties de $[0,2]$ suivante :

$$\mathscr{A} := \{[0,1],[1,2[\}.$$

4.1

Montrer que les tribus engendrées sur $[0,2]$ par $\mathscr{A}$ et

$$\tilde{\mathscr{A}} := \{[0,1[, B,]1,2[\}$$

où $B \subset [0,2]$ est une partie que l'on précisera, sont égales.

4.2

Donner, sans le justifier, le cardinal de la tribu $\mathscr{B}(\mathscr{A})$ engendrée par $\mathscr{A}$ sur $[0,2]$.

4.3

Soit $(X,\mathscr{B})$ un espace mesurable, et soit $f : X \to [0,2]$ telle que $f^{-1}([0,1])$ et $f^{-1}([1,2[)$ appartiennent tous deux à $\mathscr{B}$. Que peut-on dire de f ?