MAM3

# Mathématiques de l'ingénieur.e 1

# 2025-26

# TD 4 - Convergence

## Exercice 1

### 1.1

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x,\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sin\frac{1}{nx}\,\mathrm{d}x\quad (n\geq 1),\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}(n+x)\,\mathrm{d}x.$$

### 1.2

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

### 1.3

Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-x/n)^n\cos x\,\mathrm{d}x\quad (n\geq 1).$$

## Exercice 2

Étant donné un réel $\alpha$, on souhaite déterminer, si elle existe, la limite

$$L_\alpha := \lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-x/n)^n e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x\quad (n\geq 1).$$

### 2.1

Montrer que la limite existe pour $\alpha = 1/2$ et déterminer $L_{1/2}$ à l'aide du théorème de convergence dominée.

### 2.2

On pose

$$h_n(x) := (1-x/n)^n e^{\alpha x}\chi_{[0,n]}(x),\quad x\in\mathbf{R}_+\quad (n\geq 1).$$

En étudiant $\ln(h_{n+1}(x)/h_n(x))$ pour $x\in[0,n[$, montrer que la suite $h_n$ est croissante, puis conclure quant à l'existence de $L_\alpha$ et sa valeur éventuelle à l'aide du théorème de convergence monotone.