Sprawozdanie z Zadania Numerycznego 5

Paweł Nykiel

Listopad 2024

1 Wprowadzenie

Cel zadania to przybliżone rozwiązanie układu równań liniowych używając dwóch metod iteracyjnych – Jacobiego oraz Gaussa-Seidela. Dla zadanej macierzy o rozmiarze $N = 200$ analizujemy dokładność i zbieżność obu metod dla różnych wartości d na diagonali i losowych wektorów startowych. Na wykresie rysujemy różnicę poniędzy dokładnym rozwiązaniem i przybliżeniem w kolejnych iteracjach dla obu metod.

2 Struktura Macierzy

Macierz A jest zdefiniowana jako:

$$A = \begin{pmatrix} d & 0.5 & 0.1 & & & \\ 0.5 & d & 0.5 & 0.1 & & \\ 0.1 & 0.5 & d & 0.5 & 0.1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0.1 & 0.5 & d & 0.5 \\ & & & 0.1 & 0.5 & d \end{pmatrix}$$

gdzie d jest elementem diagonalnym. Wektor prawej strony b jest określony przez:

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix}$$

dla $N = 200$.

3 Metody

3.1 Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego to iteracyjny algorytm, w którym każdy element wektora rozwiązania jest aktualizowany niezależnie na podstawie wartości z poprzedniej iteracji. Wzór iteracyjny zadany jest przez:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

gdzie $x_i^{(k+1)}$ to zaktualizowana wartość x_i w kolejnej iteracji.

3.2 Metoda Gaussa-Seidla

Metoda Gaussa-Seidla jest bardzo podobna do metody Jacobiego, jednakże aktualizacje każdego elementu zachodzą sekwencyjnie w ramach tej samej iteracji, natychmiast korzystając z nowo obliczonych wartości. Wzór iteracyjny zadany jest przez:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

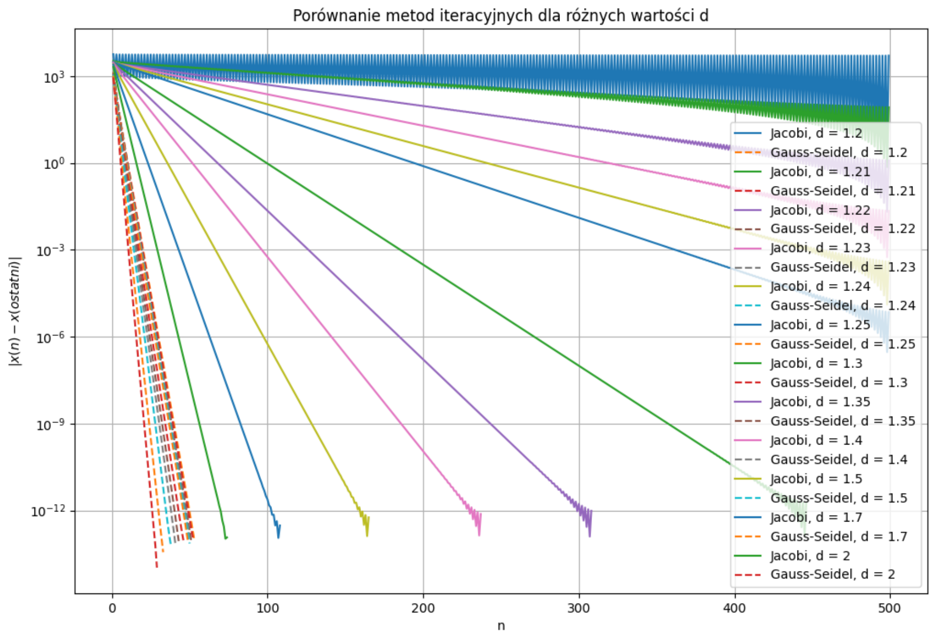
4 Implementacja

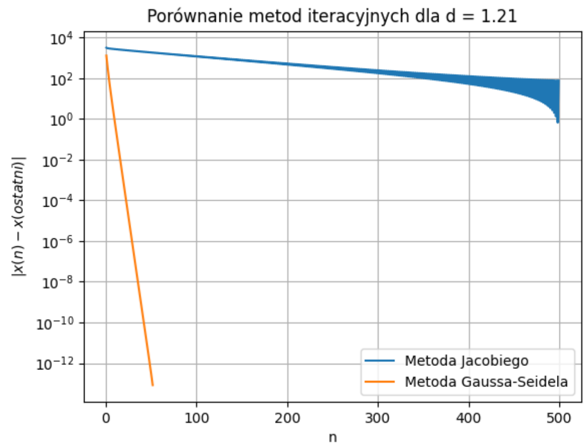
Zaimplementowano skrypt w Pythonie (‘num5.py‘), który wykorzystuje biblioteki ‘numpy‘ do operacji algebraicznych oraz ‘matplotlib‘ do tworzenia wykresów. Macierz A została zbudowana w taki sposób, aby generować tylko niezerowe elementy, optymalizując zużycie pamięci dla dużych wartości N.

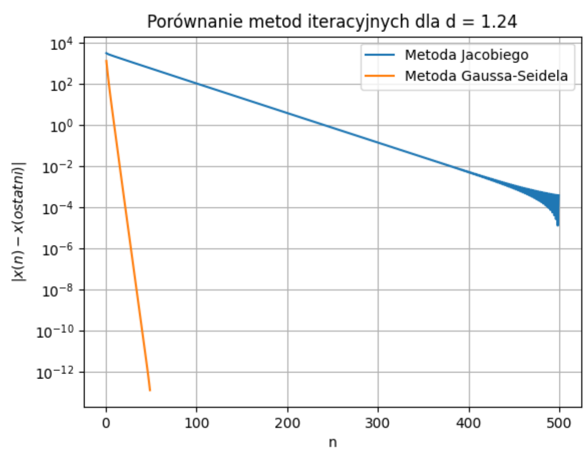
4.1 Kryterium Zbieżności

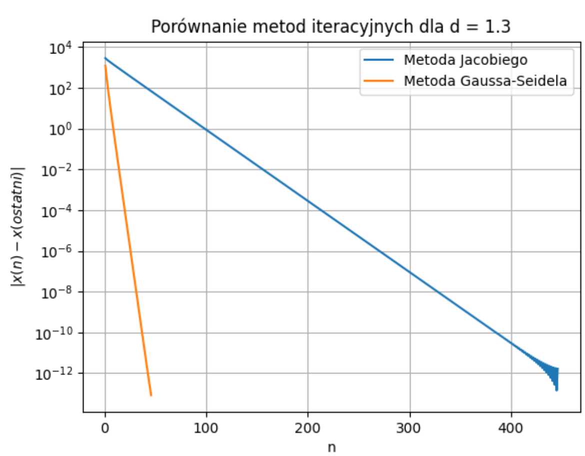
Dla obu metod zakładamy zbieżność, gdy różnica norm między wektorem rozwiązania kolejnych iteracji spada poniżej progu 10^{-13}.

5 Wyniki


Porównanie metod iteracyjnych dla różnych wartości d
10^{3}
10^{0}
10^{-3}
10^{-6}
10^{-9}
10^{-12}
$|x(n) - x(ostatni)|$
0
100
200
300
400
500
n
Jacobi, d = 1.2
Gauss-Seidel, d = 1.2
Jacobi, d = 1.21
Gauss-Seidel, d = 1.21
Jacobi, d = 1.22
Gauss-Seidel, d = 1.22
Jacobi, d = 1.23
Gauss-Seidel, d = 1.23
Jacobi, d = 1.24
Gauss-Seidel, d = 1.24
Jacobi, d = 1.25
Gauss-Seidel, d = 1.25
Jacobi, d = 1.3
Gauss-Seidel, d = 1.3
Jacobi, d = 1.35
Gauss-Seidel, d = 1.35
Jacobi, d = 1.4
Gauss-Seidel, d = 1.4
Jacobi, d = 1.5
Gauss-Seidel, d = 1.5
Jacobi, d = 1.7
Gauss-Seidel, d = 1.7
Jacobi, d = 2
Gauss-Seidel, d = 2


Porównanie metod iteracyjnych dla d = 1.21
Metoda Jacobiego
Metoda Gaussa-Seidela
|x(n) − x(ostatni)|
n


Porównanie metod iteracyjnych dla d = 1.24
Metoda Jacobiego
Metoda Gaussa-Seidela
|x(n) − x(ostatni)|
n


Porównanie metod iteracyjnych dla d = 1.3
Metoda Jacobiego
Metoda Gaussa-Seidela
|x(n) − x(ostatni)|
n

- **Warunki początkowe**: Dla zadanych wartości elementów diagonalnych d metoda była uruchamiana z losowym wektorem startowym, niezależnie generowanym dla każdego przypadku testowego. W ten sposób zbadaliśmy wpływ wartości początkowych na zbieżność metod iteracyjnych.
- **Graficzna Reprezentacja**: Wykresy przedstawiają normę różnicy między bieżącym przybliżeniem a dokładnym rozwiązaniem dla każdej iteracji oraz dla różnych wartości elementu d na diagonali. Umożliwia to wizualne porównanie tempa zbieżności metod Jacobiego i Gaussa-Seidla.
-
- **Zbieżność i Porównanie**:
  - **Metoda Jacobiego**: Zazwyczaj wymaga więcej iteracji niż metoda Gaussa-Seidla, aby osiągnąć zbieżność. Wizualizacje pokazują stopniowe, liniowe zmniejszanie się błędu wraz z kolejnymi iteracjami.
  - **Metoda Gaussa-Seidla**: Zbiega szybciej dzięki natychmiastowej aktualizacji elementów wektora, często wymagaja mniej iteracji niż metoda Jacobiego.
- **Wpływ Parametru d**: Wartość d wpływa na tempo zbieżności. Gdy d jest zbyt małe, a w szczególności gdy zbliża się do 1.2, metoda Jacobiego napotyka trudności ze zbieżnością. W ogólności jednak, obie metody zbiegają szybciej dla większych wartości d.

6 Dyskusja

Metoda Gaussa-Seidla zazwyczaj zbiega szybciej niż metoda Jacobiego, co nie znaczy, że metoda Jacobiego jest nieskuteczna. Dla określonych struktur macierzy i punktów startowych metoda Jacobiego może być dobrą alternatywą. Dla obu metod zbieżność jest gwarantowana przy odpowiednio dobranym parametrze d.

7 Wnioski

Dokument przedstawia metody iteracyhne oraz ich skuteczność w rozwiązywaniu układów równań. Metoda Gaussa-Seidla zazwyczaj osiąga zbieżność przy mniejszej liczbie iteracji niż metoda Jacobiego. Zatem w sytuacjach, gdy zależy nam na szybkości zbieżności oraz efektywności obliczeniowej, metoda Gaussa-Seidla jest lepszym wyborem. Jednakże, dla podanej struktury macierzy obie metody zbiegają, pod warunkiem, że macierz jest przekątniowo dominująca.