

Sprawozdanie z zadania numerycznego NUM3

Paweł Nykiel

Listopad 2024

1 Polecenie

7. (zadanie numeryczne NUM3) Wyznacz $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ dla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.01 & \frac{0.2}{1} & \frac{0.15}{1^3} & & & & & & \\ & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{2} & \frac{0.15}{2^3} & & & & \\ & & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{3} & \frac{0.15}{3^3} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{N-2} & \frac{0.15}{(N-2)^3} \\ & & & & & & & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{N-1} \\ & & & & & & & & 0.3 & 1.01 \end{pmatrix}$$

oraz $\mathbf{x} = (1, 2, \dots, N)^T$. Ustalamy $N = 300$. Oblicz również wyznacznik macierzy \mathbf{A} . Zadanie rozwiąż właściwą metodą (uzasadnij wybór) i wykorzystaj strukturę macierzy. Algorytm proszę zaprogramować samodzielnie; wyjątkowo nie należy stosować procedur bibliotecznych z zakresu algebry liniowej ani pakietów algebry komputerowej (chyba, że do sprawdzenia swojego rozwiązania, co zawsze jest mile widziane). Ponadto, potraktuj N jako zmienną i zmierz czas działania swojego programu w funkcji N . Wynik przedstaw na wykresie. Jakiej zależności się spodziewamy?

2 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest efektywne rozwiązanie układu równań postaci $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$, gdzie \mathbf{A} jest macierzą rzadką, posiadającą niezerowe elementy na głównej przekątnej, przekątnej poniżej oraz dwóch przekątnych powyżej głównej przekątnej. Sprawdzimy również efektywność obliczeniową rozkładu LU dla tego rodzaju macierzy.

3 Opis ćwiczenia

1. Wyznaczenie wzorów - algorytm rozkładu LU o złożoności $O(n)$
2. Rozkład LU macierzy \mathbf{A}

3. Podstawienie w prawo
4. Podstawienie w lewo
5. Obliczenie wyznacznika

4 Wstęp teoretyczny

W ramach zadania należy obliczyć rozwiązanie układu równań z macierzą wstęgową i wyznaczyć jej wyznacznik. Macierze wstęgowe charakteryzują się tym, że zawierają tylko kilka niezerowych przekątnych – w przypadku naszej macierzy są to główna przekątna, jedna przekątna pod główną oraz dwie nad główną przekątną. Dzięki tej strukturze obliczenia mogą być zoptymalizowane poprzez wykorzystanie rozkładu LU.

5 Rozkład LU

Rozkład LU polega na przekształceniu macierzy A w iloczyn dwóch macierzy: dolnotrójkątnej L oraz górnortrójkątnej U , tak że $A = LU$. Pozwala to na uproszczenie układu równań $A \cdot y = x$ poprzez rozdzielenie go na dwa etapy:

1. Rozwiązanie $L \cdot t = x$ przy użyciu podstawiania w przód (forward substitution),
2. Rozwiązanie $U \cdot y = t$ za pomocą podstawiania wstecz (backward substitution).

Ze względu na strukturę macierzy, gdzie występują tylko cztery przekątne, obliczenia mogą być zoptymalizowane do złożoności $O(n)$.

6 Algorytm Doolittle’a

Do przeprowadzenia rozkładu LU wykorzystujemy algorytm Doolittle’a, który opiera się na iteracyjnym wyznaczaniu elementów macierzy L i U . W algorytmie Doolittle’a przyjmuje się, że elementy na głównej przekątnej macierzy L są równe 1. Algorytm ten stosowany dla macierzy wstęgowej przyjmuje następujące wzory:

- Elementy na głównej przekątnej macierzy U :

$$U_{ii} = A_{ii} - L_{i,i-1} \cdot U_{i-1,i}$$

- Elementy na przekątnej powyżej głównej o jeden:

$$U_{i,i+1} = A_{i,i+1} - L_{i,i-1} \cdot U_{i-1,i+1}$$

- Elementy na przekątnej powyżej głównej o dwa:

$$U_{i,i+2} = A_{i,i+2} - L_{i,i-1} \cdot U_{i-1,i+2}$$

- Elementy poniżej głównej przekątnej:

$$L_{i+1,i} = \frac{A_{i+1,i} - L_{i+1,i-1} \cdot U_{i-1,i}}{U_{ii}}$$

Dzięki tym wzorom iteracyjnie obliczamy elementy L i U , co pozwala na uzyskanie rozkładu LU i przeprowadzenie dalszych obliczeń.

7 Wyniki

Poniżej znajduje się rozwiązanie wektora y oraz wyznacznik macierzy A . Rozwiązanie wektora y zostało zredukowane do 5 miejsc po przecinku dla czytelności dokumentu

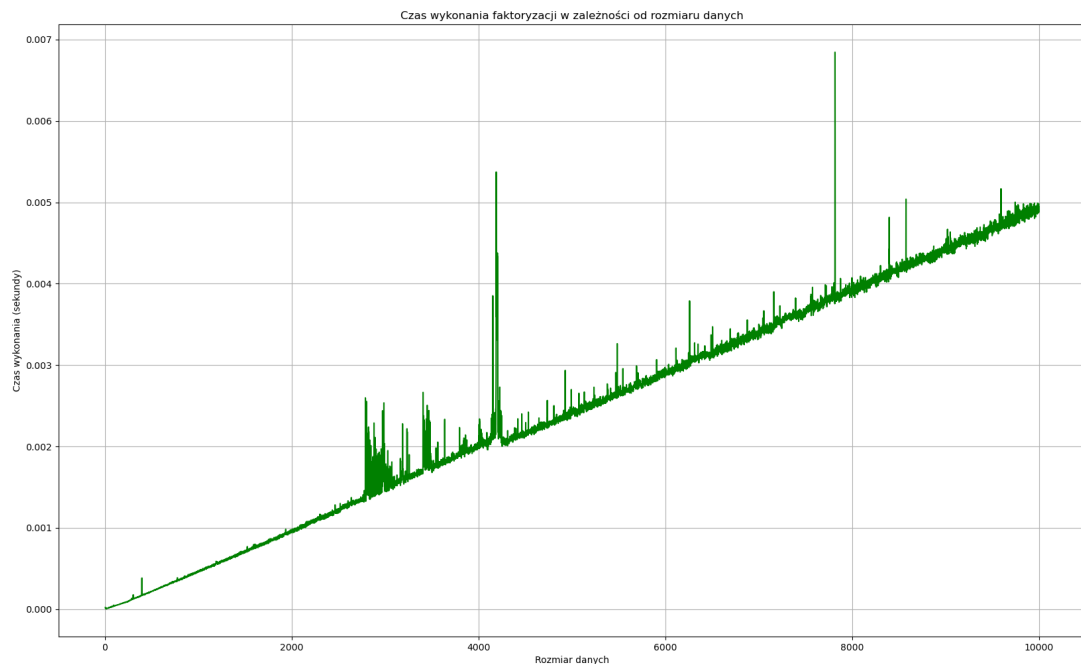
7.1 Rezultaty działania programu

- Rozwiązanie dla $y = A^{-1}x$:

[0.33638, 1.59818, 2.27082, 3.08484, 3.84497, 4.61666, 5.38248, 6.14867, 6.91388, 7.67880, 8.44339, 9.20777, 9.97199, 10.73608, 11.50008, 12.26398, 13.02783, 13.79162, 14.55536, 15.31906, 16.08273, 16.84637, 17.60998, 18.37358, 19.13715, 19.90071, 20.66425, 21.42778, 22.19130, 22.95480, 23.71830, 24.48179, 25.24527, 26.00874, 26.77221, 27.53567, 28.29912, 29.06257, 29.82602, 30.58946, 31.35290, 32.11633, 32.87976, 33.64318, 34.40661, 35.17003, 35.93345, 36.69686, 37.46027, 38.22368, 38.98709, 39.75050, 40.51391, 41.27731, 42.04071, 42.80411, 43.56751, 44.33091, 45.09430, 45.85770, 46.62109, 47.38448, 48.14787, 48.91126, 49.67595, 50.43931, 51.20268, 51.96604, 52.72940, 53.49276, 54.25612, 55.01948, 55.78285, 56.54621, 57.30957, 58.07293, 58.83629, 59.59864, 60.36202, 61.12540, 61.88878, 62.65216, 63.41553, 64.17891, 64.94229, 65.70566, 66.46991, 67.23327, 67.99663, 68.76000, 69.52335, 70.28672, 71.05008, 71.81344, 72.57680, 73.33940, 74.10278, 74.86615, 75.62952, 76.39289, 77.15626, 77.91963, 78.68300, 79.44637, 80.20975, 80.97312, 81.73649, 82.49985, 83.26322, 84.02659, 84.78996, 85.55333, 86.31670, 87.08007, 87.84344, 88.60681, 89.37017, 90.13354, 90.89691, 91.66028, 92.42364, 93.18701, 93.95038, 94.71375, 95.47711, 96.24048, 97.00385, 97.76721, 98.53058, 99.29395, 100.05731, 100.82068, 101.58404, 102.34741, 103.11078, 103.87414, 104.63751, 105.40087, 106.16424, 106.92760, 107.69097, 108.45433, 109.21770, 109.98106, 110.74443, 111.50779, 112.27116, 113.03452, 113.79789, 114.56125, 115.32461, 116.08798, 116.85134, 117.61471, 118.37807, 119.14144, 119.90480, 120.66816, 121.43153, 122.19489, 122.95825, 123.72162, 124.48498, 125.24834, 126.01171, 126.77507, 127.53844, 128.30180, 129.06516, 129.82852, 130.59189, 131.35525, 132.11861, 132.88198, 133.64534, 134.40870, 135.17207, 135.93543, 136.69879, 137.46215, 138.22552, 138.98888, 139.75224, 140.51560, 141.27897, 142.04233, 142.80569, 143.56905, 144.33242, 145.09578, 145.85914, 146.62250, 147.38586, 148.14923, 148.91259, 149.67595, 150.43931, 151.20268, 151.96604, 152.72940, 153.49276, 154.25612, 155.01948, 155.78285, 156.54621, 157.30957, 158.07293, 158.83629, 159.59966, 160.36302, 161.12638, 161.88974, 162.65310, 163.41646, 164.17982, 164.94319, 165.70655, 166.46991, 167.23327, 167.99663, 168.76000, 169.52335, 170.28672, 171.05008, 171.81344, 172.57680, 173.34016, 174.10352, 174.86688, 175.63024, 176.39361, 177.15697, 177.92033, 178.68369, 179.44705, 180.21041, 180.97377, 181.73713, 182.50049, 183.26386, 184.02722, 184.79058, 185.55394, 186.31730, 187.08066, 187.84402, 188.60738, 189.37074, 190.13410, 190.89746, 191.66082, 192.42419, 193.18755, 193.95091, 194.71427, 195.47763, 196.24099, 197.00435, 197.76771, 198.53107, 199.29443, 200.05779, 200.82115, 201.58451, 202.34787, 203.11123, 203.87460, 204.63796, 205.40132, 206.16468, 206.92804, 207.69140, 208.45476, 209.21812, 209.98148, 210.74484, 211.50820, 212.27156, 213.03492, 213.79828, 214.56164, 215.32500, 216.08836, 216.85172, 217.61508, 218.37844, 219.14180, 219.90516, 220.66852, 221.43188, 222.19524, 222.95860, 223.72197, 224.48533, 225.24869, 226.01205, 226.77541, 227.53877, 228.30203, 229.21722]

- Rozwiązanie dla wyznacznika $\det \mathbf{A}$
 $\det \mathbf{A} = 13.82636$

Wykres czasu:



Wykres przedstawia czas wykonania faktoryzacji w zależności od rozmiaru danych. Czas jest podawany w sekundach. Algorytm działa w czasie $O(n)$.

8 Analiza wyników

Otrzymane wyniki potwierdzają poprawność przeprowadzonych obliczeń. Analiza wykresu i rezultatów pokazuje, że dla zadanej macierzy istnieje możliwość przyśpieszenia algorytmu. Zastosowanie rozkładu LU oraz algorytmu Doolittle'a pozwala na optymalizację obliczeń, co przekłada się na lepszą wydajność przy pracy przy użyciu zaawansowanej matematyki na dużych danych.

Dzięki złożoności algorytmu rzędu $O(n)$ możliwe jest znaczące skrócenie czasu przetwarzania danych, co ma istotne znaczenie w kontekście zastosowań nowoczesnych technologii. Efektywne operacje na macierzach umożliwiają osiągnięcie większej sprawności obliczeniowej.

Podsumowując, przeprowadzona analiza wyników wskazuje na możliwość szerokiego zastosowania tych metod optymalizacji w różnych dziedzinach, gdzie liczy się zarówno szybkość, jak i efektywność obliczeń.