KTH Engineering Sciences

Laboration 2

Hela labben måste vara redovisad och godkänd senast 11 december för att generera bonuspoäng till tentan. Kom väl förberedd och med välordnade papper till redovisningen. Numeriska resultat ska finnas noterade. Båda i laborationsgruppen ska kunna redogöra för teori och algoritmer!

1. Interpolation och minstakvadratanpassning

I almanackan kan man hitta tider för solens upp- och nedgång för några orter i Sverige. Tabellen nedan är uträknad ur almanackan och anger dagens längd i Stockholm den första dagen i varje månad under sommarhalvåret (tiden är angiven decimalt):

Månad:	1 april	1 maj	1 juni	1 juli	1 aug	1 sep
Dagnr :	91	121	152	182	213	244
Solen uppe:	13.18	15.78	17.97	18.38	15.53	14.07

a) Interpolera punkterna med ett femtegradspolynom. Rita de sex givna punkterna och polynomkurvan med fin diskretisering (dagligen från dag 91 till dag 244). Hur länge är solen uppe på nationaldagen den 6 juni? Hur länge är den uppe 15 augusti?

b) Anpassa ett andragradspolynom i minstakvadratmening till den givna datan. Plotta på samma sätt som ovan och ange soltiden 6 juni och 15 augusti enligt denna modell?

c) Tabellen kompletteras med vinterhalvårets värden:

Månad:	1 jan	1 feb	1 mars	1 okt	1 nov	1 dec
Dagnr :	1	32	60	274	305	335
Solen uppe:	6.13	8.02	10.42	11.43	8.73	6.55

Använd det trigonometriska uttryck $c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t$ där $\omega = 2\pi/365$, som modellfunktion. Varför bör detta kunna ge god anpassning? Rita resultatet i en tvårutors subplot med de tolv punkterna och kurvresultatet (dagligen från dag 1 till dag 365) i första rutan. I andra rutan ritas residualvektorns tolv komponenter mot de tolv givna dagnumren. Beräkna felkvadratsumman samt nationaldagens soltid enligt denna modell.

Godkänd av ....

2. Numerisk derivering och noggrannhetsordning

Betrakta funktionen $f(x) = \sin(x)$.

1. Approximera $f'(1)$ med hjälp av framåtdifferens och (liten) parameter h. Plotta felet i approximationen som funktion av h med `loglog`-kommandot i Matlab. Hur bör felet bero på h i detta fall? Hur kan du använda din plot för att bekräfta detta?
2. För riktigt stora och små värden på h får man dåliga resultat. Vad beror det på? Hur litet fel kan du som bäst uppnå?
3. Gör uppgifterna a-b även för centraldifferenser. Hur ändras resultaten?
4. Läs Sektion 5.1.2 i Sauer och använd detta för att förklara hur stort det minimala felet bör vara teoretiskt för centraldifferensr. Kan du härleda motsvarande formel för framåtdifferenser?

Godkänd av ....

3. Numerisk integration

Konturen för en rotationssymmetrisk lur definieras av funktionskurvan

$$y(x) = \frac{1 - \frac{1}{\pi}\arctan[p(x-1)]}{2 - \cos(\pi x)}, \quad 0 \leq x \leq L,$$

där p är en formparameter och L är lurens längd. Luren uppstår genom att kurvan roteras kring x-axeln och rotationsvolymen är

$$V = \pi \int_0^L y^2 \, dx.$$

Vi önskar beräkna volymen för en lur med längden $L = 2.6$ och $p = 1$.

a) Implementera de sammansatta versionerna av trapetsregeln och Simpsons formel. Beräkna integralen med steglängderna $h = 0.1$ och $h = 0.05$. Hur många siffror verkar tillförlitliga i resultaten för de två metoderna?

b) Undersök hur approximationsfelet E_h för metoderna beror på steglängden h. (Notera att antal punkter måste vara udda i Simpson-fallet.) Plotta E_h som funktion av h och uppskatta från dem metodernas noggrannhetsordning. Jämför resultatet med de teoretiska noggrannhetsordningarna. Använd MATLABs kommando `loglog` för plottarna, gärna tillsammans med `grid`-kommandot. (För att beräkna felet kan ni först göra en mycket noggrann referenslösning med Simpsons metod, på liknande sätt som i Lab 1.)

Prova också att uppskatta noggrannhetsordningen genom att för små h studera kvoten

$$\frac{I_h - I_{h/2}}{I_{h/2} - I_{h/4}},$$

där I_h är integralapproximationen med steglängd h. Se föreläsningsanteckningarna om noggrannhetsordning.

c) Lös integralen med MATLAB-kommandot `quad` som använder en adaptiv version av Simpson. (Gör `help quad` för mer info.) Använd toleransen `tol`$=10^{-6}$. Notera hur många funktionsevalueringar `quad` gör. (Detta ges av andra returargumentet.) Beräkna sedan integralen igen med din Simpson-implementation och använd lika många funktionsevalueringar, dvs punkter (som måste vara udda!). Jämför felen i de två uträknade värdena genom att använda en referenslösning (som lämpligen också beräknas med `quad`, men med mycket hög tolerans, tex `tol`$=10^{-14}$). Vilken metod är effektivast, dvs vilken ger minst fel/funktionsevaluering?

Ändra nu formparametern till $p = 1000$ och gör samma jämförelse. (Notera att en ny referenslösning behövs.) Hur ändras den relativa effektiviteten hos metoderna? Varför?
Tips: Plotta integranden för de två olika p-värdena.

Extrauppgift: En fin tredimensionell lurbild gör man så här: Låt `x` och `f` vara kolumnvektorer för konturkurvan $y(x)$. Skapa en radvektor för rotationsvinkeln $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ med lagom steg, tex $2\pi/30$. Bilda matriser `X`, `Y` och `Z`:

```
X=x*ones(size(fi)); Y=f*cos(fi); Z=f*sin(fi);
```

Skriv `mesh(X,Y,Z)` som ger en nätfigur eller välj `surf(X,Y,Z)` eller `surfl(X,Y,Z)` som ger en fylld 3D-figur (gör gärna `help surfl`). Testa andra möjligheter: `axis equal`, `axis off`, `shading interp`, etc.

Godkänd av ....

4. Ordinära differentialekvationer

Vi studerar den dämpade linjära oscillatorn

$$mz'' + \alpha z' + kz = 0, \qquad z(0) = 1, \quad z'(0) = 0.$$

Ekvationen modellerar till exempel den dämpade svängningen av en massa på en fjäder om fjädern följer Hookes lag och friktionen är proportionell mot hastigheten. Här är z avvikelsen från jämvikt, m massan, α friktionskoefficienten och k fjäderkonstanten. (Detta följer från Newtons andra lag $F = mz''$ och $F = -kz - \alpha z'$.) I uppgiften ska du använda $m = k = 1$.

a) Skriv om differentialekvationen till ett system av första ordningens ekvationer. Välj $\alpha = 10$. För detta stora värde på koefficienten α är systemet överdämpat. Lös problemet med Framåt Euler-metoden och tidssteget $h = 0.1$ fram till $t = 20$. Plotta lösningen $z(t)$.

Bestäm teoretisk hur litet tidssteget h måste vara för att Framåt Euler ska vara absolutstabil. (Se föreläsningsanteckningarna.) Verifiera gränsen experimentellt. Plotta ett exempel på en instabil lösning.

b) Välj nu istället det mindre värdet $\alpha = 0.2$, som ger ett underdämpat system. Lös problemet igen med Framåt Euler till $t = 20$. Halvera tidssteget och lös igen. Upprepa flera gånger. Plotta dina numeriska approximationer av $z(t)$ för de olika tidsstegen i samma figur med hjälpa av `hold on`. Förklara hur man kan se från bilden att Framåt Euler är en första ordnings metod.

Gör nu samma körning med Runge-Kutta 4-metoden. Försök uppskatta hur mycket längre tidssteg du kan använda med denna metod jämfört med Framåt Euler och fortfarande få (ungefär) samma noggrannhet.

Plotta även lösningen i fasplanet, dvs plotta kurvan $(x(t), y(t))$ med $x(t) = z(t)$, $y(t) = z'(t)$. Visualisera rörelsen med kommandot `comet(z,zp)` där vektorn `z` innehåller z-värdena och `zp` innehåller värdena på z'.

c) Slutligen studerar vi Duffings ekvation som är en lite mer komplicerad version av oscillatorn ovan,

$$mz'' + \alpha z' + kz + z^3 = 6\cos(t/2), \qquad z(0) = 0, \quad z'(0) = 0.$$

Här är kraften $F = -kz - \alpha z' - z^3$ relativt sett större ju mer fjädern töjs ut; problemet är olinjärt. Vi har också lagt till ett högerled $6\cos(t/2)$ som motsvarar en yttre kraft som forcerar oscillationen.

Lös Duffings ekvation med $\alpha = 0.2$ fram till $t = 20$ med MATLABs inbyggda kommando `ode45` som använder en adaptiv metod baserad på inbäddade Runge-Kutta-metoder av hög ordning. Plotta lösningen som funktion av tiden och även lösningen i fasrummet. Visualisera med `comet(z,zp)`.

Efter lång tid konvergerar lösningen mot en periodisk bana. Finn banan genom att lösa differentialekvationen numeriskt och plotta den i fasrummet. (Beräkna tex lösningen över lång tid $t \in [0, 100]$ och plotta bara slutet av banan.)

Experimentera gärna också med mindre värden på α och hitta liknande lösningar. Mer komplicerade periodiska banor och även helt kaotiska banor existerar. Allmänt kan olinjära differentialekvationer ge mycket komplicerade lösningar. Duffings ekvation är ett bra exempel på detta.

Godkänd av ....

BE3002/3 – Numeriska metoder

Laboration 2 redovisad och godkänd! Datum: ....

Namn:.. Godkänd av ....