Глава 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведём вспомогательные сведения из ряда разделов математики, которые используются в подходах и методах, рассматриваемых в последующих главах. Доказательства приводимых в этой главе утверждений можно найти в соответствующей научной литературе [7–10, 13, 17, 18, 21, 22, 26, 32, 46, 60].

§ 1. Сведения из теории линейных пространств

1.1. Нормированные пространства

Пусть X есть линейное множество. Говорят, что на X введена норма $\|\cdot\|_X$, если каждому элементу $f \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|f\|_X$(*норма* f) так, что выполнены следующие три аксиомы: а) $\|f\|_X \geq \geq 0$; $\|f\|_X = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$; б) $\|\lambda f\|_X = = |\lambda|\|f\|_X$, где λ – любое комплексное число; в) $\|f + g\|_X \leq \leq \|f\|_X + \|g\|_X$ (неравенство треугольника). Всякое линейное множество, снабженное нормой, называется *линейным нормированным пространством*.

Пусть X – линейное нормированное пространство. Последовательность $x_n \in X$ называется *фундаментальной* (*сходящейся в себе*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для любого $n > N$ и для всех натуральных p выполняется неравенство $\|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon$. Пространство

X называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым*.

Пусть X – линейное нормированное пространство. Множество $A \subset X$ называется *компактным*, если каждая последовательность его элементов содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из X.

Две нормы $\|f\|_1$ и $\|f\|_2$ в линейном пространстве X называются *эквивалентными*, если существуют такие числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что для любого $f \in X$ выполняется неравенство $\alpha\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \beta\|f\|_1$.

Линейные нормированные пространства X и Y называются *изоморфными*, если на всем X определено отображение $J: \ X \to Y$, являющееся линейным, осуществляющее изоморфизм X и Y как линейных пространств и такое, что существуют такие постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что для любого $f \in X$ выполняется неравенство $\alpha\|f\|_X \leq \|J(f)\|_Y \leq$ $\leq \beta\|f\|_X$. Если $\|J(f)\|_Y = \|f\|_X$, то пространства X и Y называются *изометричными*.

Линейное нормированное пространство X называется *вложенным* в линейное нормированное пространство Y, если на всем X определено отображение $J: \ X \to Y$, являющееся линейным и взаимно однозначным на области значений причем существует такая постоянная $\beta > 0$, что для любого $f \in X$ выполняется неравенство $\|J(f)\|_Y \leq \beta\|f\|_X$.

Банахово пространство $\widehat{X}$ называется *пополнением* линейного нормированного пространства X, если X – линейное многообразие, всюду плотное в пространстве $\widehat{X}$. Каждое линейное нормированное пространство X имеет пополнение, и это пополнение единственно с точностью до изометрического отображения, переводящего X в себя.

Пример 1 (Пространство непрерывных функций $C(\overline{\Omega})$). Пусть Ω есть область из $\mathbf{R}^n$. Множество непрерывных на

$\overline{\Omega} = \partial\Omega \bigcup \Omega$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|,$$

называют *нормированным пространством* $C(\overline{\Omega})$. Известно, что пространство $C(\overline{\Omega})$ банахово. Очевидно, сходимость $f_k \to f$, $k \to \infty$ в $C(\overline{\Omega})$ эквивалентна *равномерной сходимости* последовательности функций f_k, $k = 1, 2, \ldots$, к функции $f(x)$ на множестве $\overline{\Omega}$. ■

1.2. Гильбертовы пространства

Пусть X есть линейное множество (вещественное или комплексное). Каждой паре элементов f, g из X поставим в соответствие комплексное число $(f, g)_X$, удовлетворяющее следующим аксиомам: а) $(f, f)_X \geq 0$; $(f, f)_X = 0$ при $f = 0$ и только в этом случае; б) $(f, g)_X = \overline{(g, f)}_X$ (черта означает комплексное сопряжение); в) $(\lambda f, g)_X = \lambda (f, g)_X$ для любого числа λ; г) $(f + g, h)_X = (f, h)_X + (g, h)_X$. При выполнении а)–г) число $(f, g)_X$ называется *скалярным* произведением элементов f, g из X.

Если $(f, g)_X$ есть скалярное произведение, то на X можно ввести норму, положив $\|f\|_X = (f, f)_X^{1/2}$. Аксиомы нормы а), б) очевидно выполнены, а третья аксиома вытекает из *неравенства Коши-Буняковского*

$$|(f, g)_X| \leq \|f\|_X \|g\|_X,$$

справедливого для произвольного скалярного произведения $(f, g)_X$ и нормы $\|f\|_X = (f, f)_X^{1/2}$, *порожденной скалярным произведением* $(f, g)_X$.

Если линейное пространство X с нормой $\|f\|_X = (f, f)_X^{1/2}$ является полным относительно этой нормы, то X называется *гильбертовым.*

Пусть X – пространство со скалярным произведением $(f, g)_X$. Если $(f, g)_X = 0$, то элементы f, g называются ортогональными и пишут $f \perp g$. Очевидно, что нуль пространства X ортогонален любому элементу из X.

Теорема 1. *Пусть M – замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве X и элемент $f \notin M$. Тогда существует такой единственный элемент $g \in M$, что*

$$\rho(f, M) = \|f - g\| \equiv \inf_{\widetilde{g} \in M} \|f - \widetilde{g}\|_X.$$

Элемент g называется *проекцией* элемента f на M.

Пример 2 (Пространство $L_2(\Omega)$). Совокупность всех функций $f(x)$, для которых функция $|f(x)|^2$ интегрируема по Лебегу на области Ω, обозначается через $L_2(\Omega)$. Скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$ определяются по формулам

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\overline{g}(x)dx, \quad \|f\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = (f, f)^{1/2},$$

после чего $L_2(\Omega)$ превращается в линейное нормированное пространство. *Пространство $L_2(\Omega)$ является гильбертовым пространством.* ■

1.3. Линейные операторы и функционалы

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $D(A)$ – некоторое линейное множество из X, а $R(A)$ – линейное множество из Y. Пусть по некоторому правилу (закону) элементы из $D(A)$ переводятся в элементы $R(A)$. Тогда говорят, что задан оператор A с областью определения $D(A)$ и областью значений $R(A)$, действующий из X в Y, т.е. $A : X \to Y$. Если $Af = f$ при всех $f \in D(A)$, то A называется *тождественным* (*единичным*) оператором и обозначается через I.

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, A: $X \mapsto Y$ – отображение или *оператор*, определенный в окрестности точки $f_0 \in X$. Он называется *непрерывным в точке* f_0, если $Af \to Af_0$ при $f \to f_0$.

Пусть A – оператор с *областью определения* $D(A) \subset X$ и с *областью значений* $R(A) \subset Y$. Он называется *ограниченным*, если переводит любое ограниченное множество из $D(A)$ в множество, ограниченное в пространстве Y.

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, оба вещественные или оба комплексные. Оператор $A : X \to \to Y$ с областью определения $D(A) \subset X$ называется *линейным*, если $D(A)$ – линейное многообразие в X и для любых $f_1, f_2 \in D(A)$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$) выполняется равенство $A(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 A f_1 + \lambda_2 A f_2$.

Множество $N(A) \equiv \ker(A) = \{f \in D(A) : Ax = 0\}$ называется *множеством нулей* или *ядром* оператора A.

Теорема 2. *Линейный оператор $A : X \mapsto Y$, заданный на всем X и непрерывный в точке $0 \in X$, непрерывен в любой точке $f_0 \in X$.*

Линейный оператор $A : X \mapsto Y$ с $D(A) = X$ называется *непрерывным*, если он непрерывен в точке $0 \in X$. Линейный оператор $A : X \to Y$ с $D(A) = X$ называется *ограниченным*, если существует $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$ такое, что для любого $f \in \overline{S}_1(0) \equiv \{f : \ \|f\|_X \le 1\}$ справедливо неравенство $\|Af\| \le c$.

Теорема 3. *Линейный оператор $A : X \mapsto Y$ с $D(A) = X$ ограничен тогда и только тогда, когда для любого $f \in X$ выполняется неравенство $\|Af\| \le c\|f\|$.*

Теорема 4. *Линейный оператор $A : X \mapsto Y$ с $D(A) = X$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Нормой ограниченного линейного оператора $A : X \mapsto Y$ с $D(A) = X$ называется число $\|A\| = \sup\limits_{f \in X, \, \|f\| \le 1} \|Af\|$.

Совокупность операторов из X в Y с конечной нормой образует линейное нормированное пространство ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(X, Y)$. Если $X = Y$, то пишут $\mathcal{L}(X, Y) \equiv \mathcal{L}(X)$.

Линейный оператор из X в Y называется *вполне непрерывным*, если он переводит каждое ограниченное множество из X в компактное множество из Y.

Отметим для дальнейшего следующие свойства вполне непрерывных операторов: 1) *если A — отличный от конечномерного вполне непрерывный оператор, действующий из X в Y, причем X, Y — бесконечномерны, а Y — банахово, то область значений оператора A не является замкнутым множеством, т.е. $R(A) \neq \overline{R(A)}$;* 2) *если A — вполне непрерывный оператор из бесконечномерного пространства X в нормированное пространство Y, причем на $R(A)$ существует A^{-1}, то A^{-1} неограничен на $R(A)$.*

Частным случаем линейных операторов являются линейные функционалы. Если линейный оператор l преобразует множество элементов $M \subset X$ в множество комплексных чисел $lf,\ f \in M$, т.е. $l: X \to \mathbf{C}$, то l называется *линейным функционалом* на множестве M; значение функционала l на элементе f – комплексное число lf – будем обозначать через $(l, f) \equiv l(f) \equiv < f, l >$. Непрерывность линейного функционала l означает следующее: если $f_k \to 0,\ k \to \infty$ в M, то последовательность комплексных чисел $(l, f_k),\ k \to \infty$, стремится к нулю.

Пусть на линейном пространстве всех линейных функционалов на X вводится норма $\|l\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(l, x)|$. Тогда совокупность ограниченных функционалов на X, т.е. таких функционалов, у которых норма конечна, образует банахово пространство, называемое *сопряженным* к X и обозначаемое через X^*.

Будем говорить, что последовательность $l_1, l_2, \ldots$ линейных функционалов на M *слабо сходится* к (линейному) функционалу l на M, если она сходится к l на каждом элементе f из M, т.е. $(l_k, f) \to (l, f),\ k \to \infty$.

Последовательность $\{f_n\}$ элементов из X называется *слабо сходящейся* к $f_0 \in X$, если $\lim\limits_{n\to\infty}(l, f_n) = (l, f_0)$ для любого $l \in X^*$.

Пусть A — линейный оператор, определенный на множестве $D(A) \subset X$ и действующий в Y. Оператор A называется *замкнутым*, если для любой последовательности $\{f_n\}$ элементов $D(A)$, такой, что $f_n \to f_0 \in X$, $Af_n \to g_0 \in Y$, будет $f_0 \in D(A)$ и $Af_0 = g_0$. Оператор A называют *слабо замкнутым*, если для любой последовательности элементов $\{f_n\}$, такой, что f_n слабо сходится к $f_0 \in X$, а Af_n слабо сходится к $g_0 \in Y$, следует, что $f_0 \in D(A)$ и $Af_0 = g_0$.

Имеет место следующее утверждение: *если $D(A) = X$ и A ограничен, т.е. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то A замкнут.*

Если A — незамкнутый, то он может допускать замыкание. Оператор A называется *замыкаемым* (*или допускающим замыкание*), если он имеет замкнутое расширение. Наименьшее замкнутое расширение замыкаемого оператора называется *замыканием* этого оператора и обозначается символом $\bar{A}$. Замыкание $\bar{A}$ ограниченного оператора A с $\overline{D(A)} = \mathbf{X}$ можно осуществить следующим образом: для $u \in \mathbf{X}$ существует последовательность $\{u_n\}$ из $D(A)$ такая, что $u_n \to u$; тогда в силу ограниченности A имеем $Au_n \to g$– некоторый элемент; полагают $\bar{A}u \stackrel{def}{=} g$. Может оказаться, что по этой же процедуре можно строить замыкания для неограниченных операторов.

Отметим также следующий факт: *линейный непрерывный оператор замкнут тогда и только тогда, когда замкнута область его определения.*

Если A незамкнут, но можно построить $\bar{A}$, то решение уравнения $\bar{A}u = f$ нередко называют обобщенным решением уравнения $Au = f$.

Приведем некоторые примеры линейных операторов и функционалов.

Пример 3. Линейный оператор вида

$$Kf = \int\limits_{\Omega} \mathcal{K}(x,y) f(y) dy, \quad x \in \Omega,$$

называется (линейным) *интегральным оператором*, а функция $\mathcal{K}(x,y)$ — его *ядром*. Если ядро $\mathcal{K} \in L_2(\Omega \times \Omega)$, т.е.

$$\int\limits_{\Omega\times\Omega} |\,\mathcal{K}(x,y)|^2 dxdy = C^2 < \infty,$$

то оператор K ограничен (и, следовательно, непрерывен) из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. $\blacksquare$

Пример 4. Линейный оператор вида

$$Af = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha f(x), \qquad \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(x)| \not\equiv 0, \quad m > 0,$$

называется (линейным) *дифференциальным оператором порядка* m, а функция $a_\alpha(x)$ – его *коэффициентами*. Если коэффициенты $a_\alpha(x)$ – непрерывные функции на области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, то оператор A переводит $C^m(\overline{\Omega}) = D(A)$ в $C(\overline{\Omega}) = R(A)$. Однако оператор A не является непрерывным из $C(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$. Отметим также, что оператор A определен не на всем пространстве $C(\overline{\Omega})$, а лишь на его части – на множестве функций $C^m(\overline{\Omega})$. $\blacksquare$

Пример 5. Линейный оператор

$$Af = \sum_{|\alpha|\le m} \left[\int\limits_{\Omega} \mathcal{K}_\alpha(x,y) f(y) dy + a_\alpha(x) D^\alpha f(x) \right]$$

называется (линейным) *интегро-дифференциальным* оператором. $\blacksquare$

Пример 6. Примером линейного непрерывного функционала l на $L_2(\Omega)$ служит скалярное произведение $(l,f) = (f,g)$, где g – фиксированная функция из $L_2(\Omega)$. Линейность этого функционала следует из линейности скалярного произведения по первому аргументу, а в силу неравенства Коши-Буняковского он ограничен: $|(l,f)| = |(f,g)| \leq \|g\| \cdot \|f\|$ и, следовательно, непрерывен. ■

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, A: $X \mapsto Y$ — линейный оператор, отображающий $D(A)$ на $R(A)$ взаимнооднозначно. Тогда существует *обратный оператор* $A^{-1}: Y \to X$, отображающий $R(A)$ на $D(A)$ взаимно однозначно и также являющийся линейным.

Линейный оператор $A: X \to Y$ называется *непрерывно обратимым*, если $R(A) = Y$, A^{-1} существует и ограничен, т.е. $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Теорема 5. *Оператор* A^{-1} *существует и ограничен на* $R(A)$ *тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной* $m > 0$ *и любого* $x \in D(A)$ *выполняется неравенство* $\|Ax\| \geq m\|x\|$.

Теорема 6. *Пусть* X, Y *– банаховы пространства,* $A \in \in \mathcal{L}(Y, X)$, $R(A) = Y$ *и* A *обратим. Тогда* A *непрерывно обратим.*

Следующая теорема является одной из основных теорем функционального анализа, и она находит многочисленные приложения.

Теорема 7 (Ф. Рисса). *Пусть* H *— гильбертово пространство (комплексное или вещественное). Для любого линейного ограниченного функционала* l*, заданного всюду на* H*, существует единственный элемент* $y \in H$ *такой, что для всех* $x \in H$ *имеет место представление:* $l(x) = (x, y)$. *При этом* $\|l\| = \|y\|$.

Замечание. Теорема Рисса указывает на возможность установления взаимнооднозначного соответствия между пространствами H и H^*, сохраняющего норму. В вещественном случае это соответствие линейно. В комплексном случае это соответствие является полулинейным в следующем смысле: если $l_1 \longleftrightarrow y_1$, а $l_2 \longleftrightarrow y_2$, то $\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 \longleftrightarrow \longleftrightarrow \bar{\beta}_1 y_1 + \bar{\beta}_2 y_2$.

С точностью до этого взаимнооднозначного соответствия можно принять $H^* = H$, т.е. пространство, сопряженное к гильбертовому пространству H, совпадает с H. В этом смысле можно говорить о самосопряженности гильбертова пространства. Однако в ряде случае удобно работать с H и H^*, не отождествляя их. В случае, если $H \equiv H^*$, говорят, что гильбертово пространство H является *основным.* ■

Теорема Вишика-Лакса-Мильграма является обобщением теоремы Ф.Рисса о представлении линейного ограниченного функционала.

Теорема 8 (Вишика-Лакса-Мильграма). *Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ и пусть $a(x, y)$ — билинейная форма, заданная на пространстве $H \times H$ и обладающая свойствами:*
1) *полуторалинейности*

$$a(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 a(x_1, y) + \alpha_2 a(x_2, y),$$
$$a(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \bar{\beta}_1 a(x, y_1) + \bar{\beta}_2 a(x, y_2);$$

2) *ограниченности (H–ограниченности)*

$$|a(x, y)| \leq r\|x\| \cdot \|y\|, \quad r = const;$$

3) *положительности (H–эллиптичности, H– положительности)*

$$a(x, x) \geq s\|x\|^2, \quad s = const > 0.$$

Тогда каждый линейный ограниченный на H функционал $f(y)$ представляется единственным образом в виде $f(y) = a(y, u)$ с некоторым $u \in H$. При этом существует определенный единственным образом ограниченный линейный оператор A, обладающий ограниченным обратным оператором A^{-1}, такой, что $(y, Ax) = a(y, x)$ для всех x, y из H и $\|A^{-1}\| \leq s^{-1}$, $\|A\| \leq r$. ■

1.4. Сопряженные, симметричные и самосопряженные операторы

Важным в теории линейных операторных уравнений и их приложений является понятие *сопряженного оператора* A^*. В зависимости от типа рассматриваемых пространств оно может вводиться разными способами.

Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \to H$ есть линейный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H, т.е. $\overline{D(A)} = H$. Рассмотрим линейный (по x) функционал вида $v(x) \equiv (Ax, v)$, где $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_H$, $v \in H$. Может оказаться, что при некоторых v (например, при $v \equiv 0$) этот функционал будет линейным и ограниченным над $D(A)$, т.е. $|(Ax, v)| \le C\|x\|$, где $C = const < \infty$, $\|\cdot\| \equiv \equiv (\cdot,\cdot)^{1/2}$. Тогда в силу плотности $D(A)$ в H и теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала имеем $(Ax, v) = (x, U)$ с некоторым элементом U, единственным для каждого из таких v. Таким образом, на этих элементах v задается оператор, который обозначаем через $A^* : A^*v = U$, называемый оператором, *сопряженным к* A, и имеет место равенство

$$(Ax, v) = (x, A^*v) \tag{1}$$

— соотношение сопряженности. Множество таких элементов v обозначается через $D(A^*)$ и называется областью определения сопряженного оператора A^*. В силу того что $\overline{D(A)} = H$, получаем, что A^* — *единственный*.

Пусть теперь $A : X \to Y$, где X, Y — банаховы пространства и $\overline{D(A)} = X$. Рассмотрим линейный по x функционал $v \in Y^* : v(Ax) \equiv < Ax, v >$. Поскольку $x \in D(A)$, $Ax \in \in R(A) \subseteq Y$, $v \in Y^*$, то значение функционала $v(Ax)$ ограничено. Однако может оказаться, что при некоторых v функционал $v(Ax)$ будет ограниченным над X, т.е. будет иметь место соотношение $| < Ax, v > | \le C\|x\|_X$, где $C = const$, $\forall x \in D(A)$, т.е. $< Ax, v >$ есть линейный ограниченный функционал над $X: < Ax, v > = < x, U >$, где $U \in X^*$. Элемент U единственный для каждого v (т.к. $\overline{D(A)} = X$). Следовательно, каждому элементу v поставлен в соответствие единственный элемент U. Это соответствие задает оператор A^*, *сопряженный к* $A: A^*v = U$, который действует из Y^* в X^*, и имеет место равенство

$$\begin{gathered} < Ax, v > = < x, A^*v >, \quad A: X \to Y, \quad A^*: Y^* \to X^* \\ \forall x \in D(A), \quad \forall v \in D(A^*), \end{gathered} \tag{2}$$

где $D(A^*)$ *есть область определения сопряженного оператора*, состоящая из множества элементов $\{v\}$, для которых это равенство имеет место. Отметим, что в редких случаях можно описать структуру $D(A^*)$ и свойства $D(A^*)$ (плотность в Y^* и т.п.). В связи с этой проблемой могут оказаться полезными следующие утверждения: 1) *если Y рефлексивно, то оператор A^*, сопряженный к замкнутому оператору A с плотной областью определения, имеет также плотную в Y^* область определения;* 2) *если $\overline{D(A)} = X$, то равенство $D(A^*) = Y^*$ имеет место тогда и только тогда, когда A ограничен на $D(A)$* (см. [26], § 5; [60], § 18.4). Далее, нередко можно построить *сужение* $\tilde{A}^*$ оператора A^* на заранее выбранное множество $\tilde{D} \subseteq D(A^*)$, для которых имеет место равенство (2) при $x \in D(A)$, $v \in \tilde{D}$. В этом случае получаем *сужение* $\tilde{A}^*$ оператора A^* на множество $\tilde{D} \equiv D(\tilde{A}^*)$. Оператор $\tilde{A}^*$ часто называют также *формально сопряженным* (*сопряженным по Лагранжу, ассоциированным*).

Теорема 9. *A^* — замкнутый линейный оператор.*

Теорема 10. *Равенство $D(A^*) = Y^*$ имеет место тогда и только тогда, когда A ограничен на $D(A)$. В этом случае $A^* \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$, $\|A^*\| = \|A\|$.*

Важными представителями линейных операторов являются *симметричные* и *самосопряженные* операторы.

Линейный оператор A называется *симметричным*, если $A \subset A^*$ (т.е. $D(A) \subset D(A^*)$ и $A = A^*$ на $D(A)$) и замыкание $D(A)$ совпадает с X, т.е. $\overline{D(A)} = X$. Линейный оператор A с

$\overline{D(A)} = X$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$, т.е. $A = A^*$ на $D(A)$ и $D(A) = D(A^*)$.

Если $A : H \to H$, H – гильбертово пространство, $\overline{D(A)} = H$, то равенство (1) для симметричного оператора принимает вид

$$(Ax, v) = (x, Av) \quad \forall x, v \in D(A), \tag{3}$$

которое часто принимается за определение симметричного оператора.

1.5. Положительные операторы и энергетическое пространство

Симметричный оператор A, действующий в некотором гильбертовом пространстве, называется *положительным*, если для любого элемента из области определения оператора

справедливо неравенство: $(Au, u) \geq 0$, причем знак равенства имеет место только тогда, когда $u = 0$, т.е. когда u – нулевой элемент пространства.

Если A – положительный оператор, то скалярное произведение (Au, u) называется *энергией* элемента u по отношению к A.

Симметричный оператор A называется *положительно определенным*, если существует такая положительная постоянная γ, что для любого элемента u из области определения оператора A справедливо неравенство $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$. Со всяким положительным (в частности, положительно определенным) оператором можно связать особое гильбертово пространство, которое называют *энергетическим пространством.* Пусть A – положительный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве H, и пусть $M = D(A)$ – область определения этого оператора. Введем на M новое скалярное произведение (которое будем обозначать квадратными скобками): если u и v элементы M, то положим $[u, v] = (Au, v)$. Величину $[u, v]$ назовем *энергетическим* *произведением* элементов u и v. Легко проверяется, что энергетическое произведение удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

В общем случае M неполное, по норме $|u| = [u,u]^{1/2}$ пополним его. Построенное таким образом новое гильбертово пространство называют *энергетическим пространством* и обозначают через H_A. Норму в энергетическом пространстве называют *энергетической нормой* и обозначают символом $|u|$. Для элементов области определения M оператора A энергетическая норма определяется формулой: $|u| = \sqrt{(Au,u)}$. Сходимость в энергетическом пространстве называется *сходимостью по энергии*. В случае положительной определенности оператора A имеем: $|u| \geq \gamma\|u\|$ $\forall u \in D(A)$, то предельным переходом доказывается также соотношение $|u| \geq \gamma\|u\|$ $\forall u \in H_A$, т.е. $H_A \hookrightarrow H$: H_A непрерывно и плотно вложено в H. (Если же оператор A является только положительным, то этого вложения в общем случае нет.)

Переход к энергетическому пространству часто осуществляют для доказательства существования обобщенного решения уравнения

$$Au = f \tag{4}$$

с симметричным положительно определенным оператором A с $\overline{D(A)} = H$ (где H считаем для простоты вещественным). При этом обобщенное решение можно ввести следующими двумя эквивалентными определениями.

Определение 1. Элемент $u \in H_A$ называется *обобщенным решением* уравнения (4), если

$$[u,v] = (f,v)\ \forall v \in H_A. \tag{5}$$

Определение 1$'$. Элемент $u \in H_A$ называется *обобщенным решением уравнения* (4), если

$$J(u) = \inf_{v\in H_A} J(v), \quad J(v) = [v,v] - (f,v) - (v,f). \tag{6}$$

Соотношение (5) получаем после скалярного умножения в H уравнения (4) на $v \in H_A$ и последующего предельного перехода от $u \in D(A)$ к $u \in H_A$ в полученном соотношении. Разрешимость (5) легко устанавливается на основе теоремы Рисса при $f \in (H_A)^*$, причем для обобщенного решения справедлива оценка: $\|u\| \leq C\|f\|_{(H_A)^*}$. Это же обобщенное решение $u \in H_A$ является *критической точкой* функционала $J(v): \ J(u) = \inf_{v \in H_A} J(v)$, и на нем имеет место равенство нулю первой вариации функционала $J(v)$:

$$\delta J(u,v) \equiv \frac{dJ(u+\varepsilon v)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 2([u,v]-(f,v)) = 0 \quad \forall v \in H_A, \tag{7}$$

т.е. *уравнение Эйлера* $\delta J(u,v) = 0$ (*в обобщенной форме записи*) *совпадает с уравнением* (5) (с точностью до умножения на ненулевую постоянную).

1.6. Ортогональные дополнения

Пусть $X \equiv H$ — гильбертово пространство, причем $H \equiv \equiv H^*$, а L — линейное многообразие в H. Совокупность всех элементов из H к L называется *ортогональным дополнением к L и обозначается $L^\perp$*. Отметим следующие свойства $L^\perp$: 1) *$L^\perp$ является подпространством в H;* 2) *L плотно в H тогда и только тогда, когда $L^\perp = \{0\}$.*

Пусть теперь X – банахово пространство, M — линейное многообразие в X, а N — линейное многообразие в X^*. Вводят два типа ортогональных дополнений. Через $M^\perp$ обозначается множество элементов из X^*, ортогональных к M:

$$M^\perp = \{f \in X^* : < x, f >= 0 \ \forall x \in M\}.$$

Через ${}^\perp N \subset X$ обозначается множество элементов из X, ортогональных к N:

$${}^\perp N = \{x \in X : < x, f >= 0 \ \forall f \in N\}.$$

Если $X = H(\equiv H^*)$ — гильбертово пространство, то оба типа ортогональных дополнений совпадают с обычным ортогональным дополнением в самосопряженном гильбертовом пространстве.

С помощью ортогональных дополнений можно получить некоторые общие свойства линейных операторов.

Пусть X, Y — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — линейный оператор, причем $\overline{D(A)} = X$, а A^* есть сопряженный оператор.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 11. *Нуль-пространство оператора A^* является ортогональным дополнением к области значений оператора A.*

Доказательство. Пусть $g \in N(A^*)$. Тогда если $u \in \in D(A)$, то $< u, A^*g > = < Au, g > = 0$, т.е. $g \in R(A)^\perp$. Наоборот, если $g \in R(A)^\perp$, то $< Au, g > = 0$ для всех $u \in \in D(A)$. Следовательно, $g \in D(A^*)$ и $A^* = 0$. Таким образом, $N(A^*) = R(A)^\perp$.

Следствие. *Ортогональное дополнение к нуль-пространству $N(A^*)$ оператора A^* совпадает с замыканием области значений оператора A .*

(**Доказательство:** ${}^\perp N(A^*) = {}^\perp(R(A)^\perp) = \overline{R(A)}$.)

Однако отметим, что множества $N(A)$ и $R(A^*)$ могут не являться ортогональными дополнениями друг к другу. Если же A ограниченный, то имеет место соотношение: $N(A) = = {}^\perp R(A^*)$ (откуда еще не вытекает, что $N(A^*)^\perp$ совпадает с $\overline{R(A^*)}$!). Но справедливы следующие утверждения.

Теорема 12 [17, 26]. *Пусть X, Y — самосопряженные гильбертовы пространства, а $A : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор с $D(A) = X$. Тогда:* 1) $R(A)^\perp = N(A^*)$; 2) $R(A^*)^\perp = N(A)$; 3) $N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$; 4) $N(A^*) = \overline{R(A)}$ *и справедливы разложения X и Y в ортогональные суммы:* $X = \overline{R(A^*)} \oplus N(A)$ *и* $Y = \overline{R(A)} \oplus N(A^*)$.

§ 2. Линейные уравнения в банаховых пространствах

2.1. Линейные уравнения

Пусть A – линейный оператор с областью определения $D(A) \subset X$ и областью значений $R(A) \subset Y$. Уравнение

$$Au = f \tag{8}$$

называется *линейным* (неоднородным) уравнением. В уравнении (8) заданный элемент f называется *свободным членом* (или *правой частью*), а неизвестный элемент u из $D(A)$ – *решением* этого уравнения. Если в уравнении (8) свободный член f положить равным нулю, то полученное уравнение

$$Au = 0 \tag{9}$$

называется линейным *однородным уравнением*, соответствующим уравнению (8). В силу линейности оператора A совокупность решений однородного уравнения (9) образует линейное множество; в частности, $u = 0$ всегда является решением этого уравнения.

Всякое решение и линейного неоднородного уравнения (8) *(если оно существует) представляется в виде суммы частного решения u_0 этого уравнения, и общего решения $\widetilde{u}$ соответствующего линейного однородного уравнения* (9): $u = u_0 + \widetilde{u}$. Отсюда непосредственно заключаем: *для того чтобы решение уравнения* (8) *было единственным в $D(A)$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение* (9) *имело только нулевое решение в $D(A)$*.

Пусть однородное уравнение (9) имеет только нулевое решение в $D(A)$. Тогда для любого $f \in R(A)$ уравнение (8) имеет единственное решение $u \in D(A)$ и тем самым задан оператор A^{-1} – оператор, обратный к A, так что $u = A^{-1}f$. Из этого соотношения и из (8) заключаем: $AA^{-1}f = f$; $f \in R(A)$; $A^{-1}Au = u$, $u \in D(A)$, т.е. $AA^{-1} = I$ и $A^{-1}A = I$.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Au = \lambda u, \tag{10}$$

где λ — числовой параметр. Это уравнение имеет нулевое решение при всех λ. Может случиться, что при некоторых λ оно имеет ненулевые решения из $D(A)$. Те комплексные значения λ, при которых уравнение (10) имеет ненулевые решения из $D(A)$, называются *собственными значениями* оператора A, а соответствующие решения – *собственными элементами* (функциями), соответствующими этому собственному значению. Полное число r $(1 \leq r \leq \infty)$ линейно независимых собственных элементов, соответствующих данному собственному значению λ, называется *кратностью* этого собственного значения; если кратность $r = 1$, то λ называется *простым* собственным значением.

Совокупность собственных значений (чисел) оператора A называется его *точечным спектром.*

Корректность или некорректность постановки задачи в виде уравнения (8) является одной из основных характеристик математических моделей, используемых при изучении явлений физики, теории управления и в других науках.

Определение 1. Задача (8) называется *корректно поставленной* по Адамару или просто *корректной* на паре пространств X, Y, если выполнены следующие три условия: 1) при каждом $f \in Y$ существует решение $u \in X$; 2) это решение единственно; 3) решение непрерывно зависит от f: из $f_n \to f$ (по метрике Y) следует сходимость соответствующих решений $u_n \to u$ (по метрике X). Если же нарушается любое из перечисленных трех условий, то задача (8) называется *некорректно поставленной* или просто *некорректной.* (Другими словами, задача (8) поставлена корректно, если оператор A имеет непрерывный обратный $A^{-1} : Y \to X$, и некорректно — в противном случае.)

Замечание. Уравнение (8) с линейным вполне непрерывным оператором A обычно называют *линейным опера-*

торным уравнением 1-го рода, а уравнение $u + Au = f$ — *линейным операторным уравнением 2-го рода.* ■

В приложениях типичны задачи (8), в которых $\dim X = \infty$ и оператор A вполне непрерывен (т.е. (8) есть уравнение 1-го рода). В силу свойств вполне непрерывных операторов (см. п.1.3) можно сделать заключение, что такие задачи некорректны. То же самое можно сказать об уравнении (8) с незамкнутой областью значений $R(A) = AX$ оператора A (нарушены условия 1 и 3). Иногда задача (8) с незамкнутой областью значений $R(A)$ называется *существенно некорректно поставленной.*

2.2. Теория разрешимости линейных операторных уравнений

Рассмотрим уравнение (8), считая X, Y банаховыми, а $D(A)$ плотной в X : $\overline{D(A)} = X$. Различают следующие виды разрешимости этого уравнения.

Определение 2. Уравнение (8): 1) *везде разрешимо*, если $R(A) = Y$; 2) *плотно разрешимо*, если $\overline{R(A)} = Y$; 3) *нормально разрешимо*, если $\overline{R(A)} = R(A)$; 4) *однозначно разрешимо на* $R(A)$, если $N(A) = \{0\}$; 5) *корректно разрешимо на* $R(A)$, если существует постоянная $k > 0$ такая, что $\|u\|_X \leq k\|Au\|$ при всех $u \in D(A)$.

Одновременно с (8) рассмотрим сопряженный оператор $A^* : Y^* \to X^*$ и *сопряженное уравнение*

$$A^* u^* = g, \tag{11}$$

где $u^* \in D(A^*) \subset Y^*$, $g \in X^*$. Для уравнения (11) также можно сформулировать приведенные выше типы разрешимости. Однако здесь (в силу специфики свойств оператора A^*) вводят два, вообще говоря, разных понятия: 1) уравнение (11) *замкнуто разрешимо*, если $R(A^*)$ замкнуто; 2) уравнение (11) *нормально разрешимо*, если оно разрешимо для всех правых частей, ортогональных ко всем решениям однородного уравнения $Au = 0$, т.е. если $R(A^*) = N(A)^{\perp}$. (Конечно, из нормальной разрешимости (11) следует замкнутая разрешимость. Обратное, вообще говоря, не верно.)

Обратимся к уравнению (8). Если оно однозначно разрешимо, то существует $A^{-1} : u = A^{-1}f$ при $f \in R(A)$. Если (8) корректно разрешимо, то оператор A имеет обратный, причем $\|A^{-1}\| \leq k$. Таким образом, из корректной разрешимости следует однозначная разрешимость. Привлекая даже общие свойства операторов, можно установить некоторые типы разрешимости уравнений (8), (11). Так, например, поскольку ${}^{\perp}N(A^*) = \overline{R(A)}$ (см. теорему 11), то заключаем: *для того чтобы уравнение* (8) *было плотно разрешимо* ($\overline{R(A)} = Y$), *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (11) *было однозначно разрешимо* ($N(A^*) = \{0\}$). Существует ряд теорем о разрешимости (8), (11) и связи между различными видами разрешимости этих уравнений. Они доказаны в [26]. Утверждения этих теорем представим здесь в следующей таблице:

Уравнения с плотной областью определения $\mathbf{D}(\mathbf{A})$:

$\mathbf{Au} = \mathbf{f}$		$\mathbf{A}^*\mathbf{u}^* = \mathbf{g}$
однозначно	$\longleftarrow$	плотно
плотно	$\longleftrightarrow$	однозначно
корректно	$\longleftrightarrow$	везде
везде	$\longrightarrow$	корректно
нормально	$\longrightarrow$	замкнуто

Уравнения в случае замкнутого оператора $\mathbf{A}$ с $\overline{\mathbf{D(A)}} = \mathbf{X}$:

$\mathbf{Au = f}$		$\mathbf{A^*u^* = g}$
однозначно	$\longleftarrow$	плотно
плотно	$\longleftrightarrow$	однозначно
корректно	$\longleftrightarrow$	везде
везде	$\longleftrightarrow$	корректно
нормально	$\longleftrightarrow$	замкнуто≡нормально

Если X рефлексивно (в частности, если X гильбертово), а A замкнут и $\overline{D(A)} = X$, то первая стрелка в этих таблицах обратима: *из однозначной разрешимости $Au = f$ следует плотная разрешимость $A^*u^* = g$.*

Из приведенных таблиц (из взаимосвязи корректной разрешимости одного уравнения с везде разрешимостью другого) следует важность априорных оценок вида

$$\begin{aligned} &\|u\|_X \leq C_1\|Au\|_Y, \quad \forall u \in D(A), \\ &\|u^*\|_{Y^*} \leq C_2\|A^*u^*\|_{X^*}\ \forall u^* \in D(A^*),\ C_1, C_2 = const. \end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 13 [26]. *Если A замкнут, то априорные оценки* (12) *являются необходимыми и достаточными условиями везде разрешимости уравнений* (8), (11).

Уравнение (8) можно рассматривать как аналог системы линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Приведем основные свойства такой системы:

1) система уравнений разрешима при любой правой части тогда и только тогда, когда однородная система имеет только тривиальное решение;

2) система разрешима при любой правой части и тогда и только тогда, когда сопряженная система разрешима при любой правой части;

3) однородная и ей сопряженная системы имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Линейное уравнение (8) в общем случае бесконечномерных пространств X и Y не сохраняет эти свойства. Однако интересно выделить те классы операторов и уравнений, которые сохраняют эти свойства в максимальной степени. Такой класс образуют *фредгольмовы* уравнения и операторы. Они вводятся следующим образом.

Будем говорить, что уравнение (8) *n-нормально*, если оператор A замкнут, уравнение (8) нормально разрешимо, а размерность нуль-пространства $N(A)$ конечна: $n(A) \equiv \equiv \dim N(A) < \infty$. Уравнение (8) назовем *d-нормальным*, если оно нормально разрешимо, оператор A замкнут, а размерность $d(A)$ ортогонального дополнения $\overline{R(A)}^{\perp}$ к $\overline{R(A)}$ конечна.

Если оператор A имеет плотную область определения, то существует сопряженный оператор и $d(A) = \dim N(A^*) = = n(A^*)$. В этом случае для d-нормальности уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы (11) было n-нормальным.

Уравнение (8) называется *нетеровым*, если оно n-нормально и d-нормально; в этом случае оператор A называют нетеровым. Величина $æ(A) = n(A) - d(A)$ называется индексом уравнения. Если оператор A нетеров, то и оператор A^* нетеров. При этом $æ(A^*) = n(A^*) - d(A^*) = d(A) - n(A) = = -æ(A)$.

Уравнение (8) называется *фредгольмовым*, если оно нетерово и его индекс равен нулю. Уравнение $Au = f$ с фредгольмовым оператором A является аналогом системы n алгебраических уравнений с n неизвестными. Перечисленные выше свойства 1)–3) разрешимости сохраняются. Напротив, нетерово уравнение является аналогом системы n уравнений с m неизвестными, где $m \neq n$. Так как фредгольмовы и нетеровы уравнения имеют оптимальные по разрешимости свойства, то представляют интерес признаки фредгольмовости и нетеровости. Ограничимся некоторыми простейшими сведениями; подробно этот вопрос рассмотрен в [26, 60].

В случае $X = Y$ примером фредгольмова оператора является оператор $I+T$, где I — тождественный, а T — вполне непрерывный операторы. Этот оператор называется *каноническим фредгольмовым.* Примером уравнений с таким оператором являются интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Именно это обстоятельство объясняет термин "фредгольмов оператор". Теоремы Фредгольма о разрешимости интегральных уравнений второго рода утверждают, что для интегральных уравнений имеют место свойства 1)–3) разрешимости систем линейных алгебраических уравнений.

Уравнение $Au = f$, $A : X \to Y$ можно привести к уравнению с каноническим фредгольмовым оператором. Существуют два способа. Первый состоит в том, что рассматривается уравнение $BAu = Bu$, где оператор $B : Y \to X$ подбирается специально. Если оператор $BA : X \to X$ оказывается каноническим фредгольмовым, то B называется левым *регуляризатором.* Второй способ состоит в том, что u ищут в виде $u = Cs$, где s — элемент некоторого пространства G, а $C : G \to X$. Для s получим уравнение $ACs = f$. Если оператор AC оказывается каноническим фредгольмовым в Y, то C называется правым регуляризатором. Известны теоремы [26] о том, что наличие регуляризатора позволяет судить о нетеровости уравнения.

2.3. Линейные преобразования уравнений

Под линейным преобразованием уравнения (8) мы здесь будем понимать переход от этого уравнения к уравнению

$$CAu = Cf \tag{13}$$

с помощью линейного оператора C, действующего из пространства Y в банахово пространство G. Однако, чтобы при этом не потерять решений уравнения (8) и чтобы не появилось "лишних"решений уравнения (13), надо требовать от этих уравнений (8), (13) *эквивалентности, т.е. чтобы ре-*

шение одного из этих уравнений было решением другого и обратно. Имеет место утверждение [26]: *чтобы* (8),(13) *были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы* $R(A) \subset D(C)$ и $N(C) = \{0\}$. Заметим, что первое условие заведомо выполнено, если C — ограниченный на Y оператор. Кроме того, всегда $N(A) \subseteq N(CA)$. При эквивалентном преобразовании $N(A) = N(CA)$. Однако нужно иметь в виду следующее важное обстоятельство: даже при эквивалентном преобразовании уравнение с замкнутым оператором A может перейти в уравнение с незамкнутым оператором (см. [26]).

2.4. Уравнение $\mathbf{A^*Au = A^*f}$

Частным и важным для дальнейшего случаем уравнения (13) является случай, когда $C = A^*$.

Пусть X, Y есть (самосопряженные) гильбертовы пространства, а A — линейный непрерывный оператор из X в Y, причем $D(A) = X$ (отметим, что не требуется замкнутости области значений $R(A)$ или тривиальности $N(A) \equiv \ker(A)$). Таким образом, задача (8):

$$Au = f, \tag{14}$$

вообще говоря, некорректна. Поскольку при сделанных ограничениях для сопряженного оператора A^* имеем $D(A^*) = Y^* \equiv Y$, то применяя к (14) оператор $A^* : Y \to X$, приходим к уравнению

$$A^*Au = A^*f \tag{15}$$

(–симметризация Гаусса), являющемуся частным случаем уравнения (13). Здесь оператор A^*A симметричен и неотрицателен (если $D(A) = X$, то и самосопряжен).

Пусть Q есть оператор ортогонального проектирования на $\overline{R(A)} \subseteq Y$ (замыкание $R(A)$). Связь решений уравнений (14), (15) устанавливает следующее известное предложение ([9], стр. 16).

Лемма 1. *Множества решений уравнения* (15) *и уравнения*

$$Au = Qf \tag{16}$$

совпадают.

Доказательство. Пусть $A^*Au_* = A^*f$, тогда $< Au_* - -f, Av >= 0 \ \forall v \in D(A)$, т.е. элемент $(Au_* - f)$ ортогонален $R(A)$, а значит, и $\overline{R(A)}$. Поэтому $Q(Au_* - f) = 0$, а поскольку $QA = A$, то $Au_* = Qf$, т.е. u_* — решение уравнения (16).

Обратно, пусть $Au_* = Qf$. Поскольку $A^*Q = A^*$, то применение оператора A^* дает $A^*Au_* = A^*f$, т.е. u_* есть решение уравнения (15). ■

Решения уравнения (15) называют *квазирешениями* или *решениями в смысле наименьших квадратов уравнения* (14). Последнее название связано с тем, что решения уравнения (15) (уравнения (16)) минимизирует функционал (см. § 3)

$$J(u) \equiv \|Au - f\|^2 = \|Au - Qf\|^2 + \|f - Qf\|^2.$$

Из леммы 1 следует, что в случае $f \in R(A)$ множество квазирешений уравнения (14) совпадает с множеством его решений (и здесь $J(u) = 0$). Если $f \notin R(A)$, но $Qf \in R(A)$, то уравнение (14) не имеет решения, но имеет квазирешение. Если $Qf \notin R(A)$, а $Qf \in R(A)^\perp$, то $(Qf, Av)_Y = (A^*Qf, v)_X = (A^*f, v)_X = 0 \ \ \forall v \in D(A)$. Следовательно: $f \in N(A^*)$; уравнение (15) принимает вид $A^*Au = = 0$, а функционал $J(u)$ есть $J(u) = \|Au\|^2 + \|f\|^2$. Последнее означает, что решениями задачи минимизации $J(u)$ и уравнения (15) являются функции из $N(A) = N(A^*A)$.

В случае $f \in R(A)$ особый интерес представляет решение задачи (14) наименьшей нормы, называемое *нормальным решением. Нормальное решение ортогонально* $N(A)$.

Аналогично в случае $Qf \in R(A)$ особый интерес представляет квазирешение уравнения (14) наименьшей нормы;

оно называется *псевдорешением* или *нормальным квазирешением.* Обратим внимание, что поскольку псевдорешение ортогонально $N(A)$, то оно принадлежит $\overline{R(A^*)}$.

Исследование разрешимости уравнения (15) и его свойств нередко осуществляют, используя *сингулярное разложение оператора* A. Введем это разложение.

Предположим, что спектр оператора A^*A содержит собственные значения $\sigma_k^2,\ k = 1, 2, \ldots$, которым соответствуют собственные элементы f_k, т.е. $A^*Af_k = \sigma_k^2 f_k$. Числа $\sigma_k > 0$ называются *сингулярными числами* оператора A. Отмечаем, что возможно присутствие собственного значения $\sigma_0 \equiv \equiv 0$, кратность которого может быть бесконечной. Система $\{f_k\}$ является нормированной ортогональной системой в X. То же самое справедливо для оператора AA^* с собственными элементами $g_k :\ AA^*g_k = \sigma_k^2 g_k$, которые образуют нормированную ортогональную систему в гильбертовом пространстве Y. При этом собственные элементы связаны соотношениями

$$A^*g_k = \sigma_k f_k, \quad Af_k = \sigma_k g_k. \tag{17}$$

Сингулярным разложением оператора A называется его представление

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (u, f_k)_X g_k. \tag{18}$$

Отметим, что *вполне непрерывные операторы всегда допускают сингулярное разложение.*

Лемма 2 [49]. Псевдорешение уравнения (14) имеет вид

$$u^+ = A^+ f = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1} (f, g_k)_Y f_k. \tag{19}$$

Доказательство. Представим f в виде $f = Av + U$, где $U \in R(A)^\perp$, $v \in D(A)$. Тогда

$$(f, g_k)_Y = (Av + U, g_k)_Y = (v, A^*g_k)_X + (U, g_k)_Y,$$

но $g_k \in R(A)$, поэтому $(U, g_k) = 0$. Учитывая (17), имеем: $(f, g_k) = \sigma_k(v, f_k)_X$. Следовательно,

$$u^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1}(f, g_k)_Y f_k = \sum_{k=1}^{\infty}(v, f_k) f_k,$$

откуда получаем сходимость ряда (19). Теперь в результате почленного применения оператора A^*A получаем

$$A^*Au^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1}(f, g_k)_Y A^*Af_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(f, g_k)_Y f_k = A^*f.$$

Поскольку $u^+ \in \overline{R(A^*)}$, заключаем, что $u^+ = A^+f$. ■

Из леммы 2 получаем

Следствие. *Оператор A^+ не ограничен в том и только в том случае, если $\sigma_{k_j} \to 0$ для некоторой последовательности $k_j \to \infty$.* ■

Замечание. К сожалению, во многих интересных прикладных задачах искать псевдорешение u^+ в виде (19) для практических применений невозможно, поскольку не представляется возможным строить необходимое число собственных функций и собственных значений. Однако при изучении многих аспектов теории представление (19) может оказаться полезным. ■

2.5. Уравнение $\alpha \mathbf{u} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}^*\mathbf{f}$

Совместно с уравнением (15) уравнение вида

$$\mathcal{A}_\alpha u \equiv \alpha u + A^*Au = A^*f, \quad \alpha > 0, \tag{20}$$

играет большую роль в связи с задачами, изучаемыми в дальнейшем. Здесь предполагается, что $A : X \to Y$, $\overline{D(A)} = X$, X, Y — вещественные самосопряженные гильбертовы пространства. Уравнение (20) тесно связано с проблемой минимизации функционала вида

$$J(u) = \alpha\|u\|_X^2 + \|Au - f\|_Y^2. \tag{21}$$

Если A^*A является вполне непрерывной, то уравнение (20) относится к классу уравнений 2-го рода (в отличие от (15), являющегося уравнением 1-го рода) и теория разрешимости (20) существенно проще, чем для (15).

Оператор $\mathcal{A}_\alpha$ уравнения (20) является симметричным и положительно определенным. Поэтому можно ввести энергетическое пространство $H_{\mathcal{A}}$ со скалярным произведением $[u,v] = \alpha(u,v)_X + (Au, Av)_Y$ и нормой $[u] = [u,u]^{1/2}$. Задача (20) при $f \in Y$ имеет единственное обобщенное решение $u \equiv u(\alpha) \in H_{\mathcal{A}}$), на котором функционал

$$\tilde{J}(u) = \alpha(u,u)_X + (Au, Au)_Y - (Au, f)_Y - (f, Au)_Y \qquad (22)$$

принимает минимальное значение среди всех функций из $H_{\mathcal{A}}$ (см. п. 1.5) и является обобщенным решением уравнения (20), удовлетворяя равенству

$$[u,v] = (f, Av)_Y \quad \forall v \in H_{\mathcal{A}}. \qquad (23)$$

Поскольку $(f, Av)_Y = (Qf, Av)_Y$, где Q — ортопроектор на $\overline{R(A)}$, то полагая $v = u$ и проводя элементарные оценки правой части из (23), получаем неравенство

$$2\alpha\|u\|_X^2 + \|Au\|_Y^2 \le \|Qf\|_Y^2. \qquad (24)$$

Отсюда, в частности, заключаем, что *если* $\alpha > 0$*, то* $u \in X$ *и* $\|u\|_X \le \|Qf\|_Y/\sqrt{2\alpha}$. Отметим, что функционалы $\tilde{J}(u)$, $J(u)$ отличаются на постоянную. Поэтому обобщенное решение уравнения (20) минимизирует также функционал $J(u)$, т.е. является решением задачи вида

$$J(u) = \inf_{v \in H_{\mathcal{A}}} J(v). \qquad (25)$$

Из (23) также следует: *если* $f \in R(A)^\perp$*, то при* $\alpha > 0$ *уравнение* (20) *имеет только тривиальное решение* $u \equiv 0$.

Предположим, что A^*A допускает сингулярное разложение (см. п. 2.4). Отыскивая u в виде $u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k f_k$ и принимая

$v = f_k$, из (23) находим: $u_k = \sigma_k(f, g_k)_Y/(\alpha + \sigma_k^2)$, при этом имеем $u_0 = 0$. Таким образом, решение уравнения (30) в данном случае задается выражением

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(f, g_k)_Y f_k}{\alpha + \sigma_k^2}. \tag{26}$$

Заметим, что если в (26) формально принять $\alpha = 0$, то получим выражение для псевдорешения u^+ уравнения (14) (см. (19)). Если $f \in (R(A))^{\perp}$, то $u(\alpha) = 0$ $\forall \alpha \geq 0$ и $u^+ = 0$. Поэтому заключаем, что практический интерес в первую очередь представляют решения задач (15), (20) при ограничении $Qf \in R(A)$. В данном случае при некоторых дополнительных ограничениях можно доказать, что $u \equiv u(\alpha)$ сходится к решению уравнения (15) при $\alpha \to +0$.

Лемма 3. *При любой заданной $f \in R(A)$ решения $u = u(\alpha)$ задачи* (20) *сходятся к решению u^+ уравнения* (15) *при $\alpha \to +0$ по норме пространства X.*

Доказательство. Если $f \in R(A)$, то псевдорешение u^+ будет нормальным решением уравнения (14), т.е. обычным решением этого уравнения с наименьшей нормой. Поэтому существует функция $U \in D(A) \subset X$ такая, что $\|U\|_X^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (f, g_k)_Y^2/\sigma_k^2 < \infty$.

Для разности $(u(\alpha) - u^+)$ имеем

$$\begin{aligned} \|u(\alpha) - u^+\|_X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\sigma_k^2(\alpha + \sigma_k^2)^2}(f, g_k)^2 \equiv \\ \equiv \sum_{k=1}^{K} \cdots + \sum_{k=K+1}^{\infty} \cdots . \end{aligned} \tag{27}$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, а K столь большим, чтобы вторая сумма была меньше $\varepsilon/2$ (что можно сделать в силу $\|U\|_X^2 < \infty$ и поскольку $(\alpha^2/(\alpha + \sigma_K^2)^2) < 1$). Фиксируем K и выбираем α столь малым, чтобы первая сумма в (27) была меньше $\varepsilon/2$. Таким образом подобрано $\alpha = \alpha(u)$ такое, что $\|u(\alpha) - u\|_X^2 < \varepsilon$ и справедливо утверждение леммы. ■

Замечание 1. Из (27) легко получить следующее утверждение: если f такова, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f, g_k)^2/\sigma_k^6 < \infty$, то $\|u(\alpha) - - u^+\|_X \leq C\alpha \to 0$ при $\alpha \to +0$. Однако, к сожалению, в практических задачах подобные ограничения на f не выполняются. ■

Замечание 2. Проведенное выше доказательство разрешимости уравнения (23) осуществимо и при $(\alpha = 0) \bigcap \bigcap (N(A^*A) = \{0\})$. Здесь также можно ввести энергетическое пространство $H_{\mathcal{A}_0}$ оператора $\mathcal{A}_0 \equiv A^*A$. Однако пространство $H_{\mathcal{A}_0}$, вообще говоря, уже может не быть вложенным в X (например, когда A — вполне непрерывный оператор и $\dim(X) = \infty$). ■

2.6. Об итерационных методах решения линейных операторных уравнений

Рассмотрим некоторые из известных итерационных методов решения линейного уравнения вида

$$\mathcal{A}u = g$$

с симметричным ограниченным положительно определенным оператором $\mathcal{A}$, действующим в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = = (\cdot, \cdot)^{1/2}$.

Метод 1 (Простейший итерационный метод). Рассмотрим итерационный процесс вида

$$u^{j+1} = u^j - \tau(\mathcal{A}u^j - g), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где u^0 – начальное приближение, τ — параметр итерационного процесса. Известно, что если $0 < \tau < (2/\|\mathcal{A}\|)$, то данный метод сходится: $\|u - u^j\| \to 0,\ j \to \infty$. Если предположить, что спектр оператора $\mathcal{A}$ принадлежит отрезку $[C_0, C_1]$, т.е. $\mathrm{Sp}\,(\mathcal{A}) \subset [C_0, C_1]$, где $C_0, C_1 = const > 0$, а параметр τ выбирается в виде $\tau = \tau_{opt} = 2/(C_0 + C_1)$, то справедлива оценка скорости сходимости вида

$$\|u - u^j\| \le C \left(\frac{C_1 - C_0}{C_1 + C_0}\right)^j \to 0, \quad j \to \infty,$$

где постоянная C не зависит от j (см. [38, 43, 56]).

Метод 2. Пусть B есть симметричный положительный оператор такой, что существует B^{-1} и для оператора $B^{-1}\mathcal{A}$ имеем: $\mathrm{Sp}\,(B^{-1}\mathcal{A}) \subset [C_0, C_1]$, $C_0, C_1 = const \to 0$. Рассмотрим итерационный алгоритм вида

$$B\left(\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau}\right) = g - \mathcal{A}u^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

который можно записать также в форме

$$\xi^j = \mathcal{A}u^j - g, \quad w^j = B^{-1}\xi^j, \quad u^{j+1} = u^j - \tau w^j,$$

где τ — параметр итерационного процесса. Перепишем этот алгоритм для $U^j \equiv B^{1/2}u^j$:

$$U^{j+1} = U^j - \tau(\tilde{\mathcal{A}}U^j - \tilde{g}), \quad j = 0, 1, \ldots,$$

где $\tilde{g} = B^{-1/2}g$, $\tilde{\mathcal{A}} = B^{-1/2}AB^{-1/2}$. Если теперь применить утверждения из метода 1, то заключаем: если выбирать $\tau = \tau_{opt} = 2/(C_0 + C_1)$, то данный итерационный метод сходится и справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$\|u - u^j\|_B \equiv \|B^{1/2}(u - u^j)\| \le C \left(\frac{C_1 - C_0}{C_1 + C_0}\right)^j \to 0, \quad j \to \infty,$$

где постоянная C не зависит от j.

Замечание. Обратим внимание, что в методе 2 операторы B, $\mathcal{A}$ могут быть даже неограниченными. ■

Метод 3 (Метод минимальных невязок). Рассмотрим итерационный процесс, задаваемый уравнением

$$u^{j+1} = u^j - \tau_j(\mathcal{A}u^j - g), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\tau_j = \frac{(\mathcal{A}\xi^j, \xi^j)}{(\mathcal{A}\xi^j, \mathcal{A}\xi^j)}, \quad \xi^j = \mathcal{A}u^j - g.$$

Известно, что если $\mathcal{A}$ — симметричный и положительно определенный и $\mathrm{Sp}\,(\mathcal{A}) \subset C[C_0, C_1]$, $C_0, C_1 = const > 0$, то скорость сходимости этого метода не медленнее, чем скорость сходимости метода 1. Однако отметим, что метод минимальных невязок может применяться для решения уравнения $\mathcal{A}u = g$ с ограниченным положительно определенным оператором (т.е. без требования симметричности для $\mathcal{A}$).

Исследование приведенных здесь итерационных методов читатель может найти в [38, 43, 56], где рассмотрены многие другие алгоритмы современной теории итерационных процессов решения линейных операторных уравнений.

Пример. Пусть метод 1 применяется к решению уравнения (20) с оператором $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_\alpha = \alpha I + A^*A$, где A — ограниченный оператор ($\|A\| < \infty$), где $\alpha = const > 0$. В этом случае, даже если $N(A) \equiv \ker(A) \neq \{0\}$, имеем $\mathrm{Sp}\,(\mathcal{A}_\alpha) \subset [\alpha + C_0, \alpha + C_1]$, где $C_0 = const \geq 0$. А тогда при $\tau = 2/(2\alpha + C_0 + C_1)$ скорость сходимости метода характеризуется оценкой вида

$$\|u - u^j\| \leq C \left(\frac{C_1 - C_0}{2\alpha + C_0 + C_1} \right)^j \to 0, \quad j \to \infty,$$

то есть метод обладает скоростью сходимости геометрической прогрессии, даже если оказывается, что $C_0 = 0$. ■

§ 3. Экстремальные задачи и методы их решения

Приведем ряд понятий и результатов из теории экстремальных задач [10, 24].

3.1. Определения и сведения из нелинейного анализа

3.1.1. Запишем некоторые определения и факты дифференциального исчисления нелинейных операторов в банаховом пространстве. Пусть $F : X \to Y$ — нелинейное отображение, X, Y — банаховы пространства, $D(F) \subseteq$ есть область определения F, являющаяся линейным множеством. Оператор F называется дифференцируемым по Фреше в точке $x \in D(F)$, если существует такой линейный оператор $F'_\Phi(x) \in L(X, Y)$, что

$$F(x+h) - F(x) = F'_\Phi(x)h + \omega(x,h) \quad \forall\, (x+h) \in D(F),$$

где

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|\omega(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Выражение $F'_\Phi(x)h$ называется дифференциалом Фреше, а оператор $F'_\Phi(x)$ — производной Фреше оператора F в точке x. Дифференциалом Гато оператора F в точке x называется предел

$$DF(x,h) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t},$$

понимаемый в смысле сходимости по норме пространства Y. Если дифференциал Гато линеен по h, т.е. $DF(x,h) = F'(x)h\ \forall\,(x+h) \in D(F)$ для некоторого линейного оператора $F'(x) \in L(X,Y)$, то $F'(x)$ называется производной Гато оператора F в точке x. Известно, что если оператор F обладает производной Фреше в точке x, то он имеет и производную Гато в этой точке, причем $F'(x) = F'_\Phi(x)$. Более того, если производная Гато $F'(x)$ существует для всех x из окрестности точки x_0 и отображение $x \to F'(x)$ непрерывно в метрике $L(X,Y)$ в этой точке, то существует производная Фреше $F'_\Phi(x_0)$. Старшие производные отображений определяются индуктивно как производные (Фреше или Гато) от производной рассматриваемого отображения на единицу меньшего порядка. Например, вторая производная Гато определяется равенством

$$F''(x)h = \lim_{t\to 0} \frac{F'(x+th) - F'(x)}{t},$$

где оператор $F''(x) \in L(X, L(X,Y))$ и предел в правой части вычисляется в норме $L(X,Y)$. При работе с гладкими операторами широко используются следующие оценки

$$\|F(x) - F(x_0)\|_Y \le \sup_{t\in[0,1]} \|F'(x + t(x_0 - x))\|_{L(X,Y)} \|x - x_0\|_X,$$

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x)(x - x_0)\|_Y \le \sup_{t\in[0,1]} \|F'(x + t(x_0 - x)) - \\ - F'(x)\|_{L(X,Y)} \|x - x_0\|_X.$$

Если отображение $z \to F'(z)h$ ($h \in X$) являются непрерывным на отрезке $[x, x+h]$, то

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 F'(x+th)h\,dt.$$

3.1.2. Если $Y \equiv \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^1$, то $F \equiv J$ — функционал. Пусть в точке $x \in D(J)$ для всех $h \in D(J)$ существует предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(x+th) - J(x)}{t} = \delta J(x;h);$$

он называется *вариацией функционала* J. Эта вариация есть однородный функционал от h: $\delta J(x;\alpha h) = \alpha \delta J(x;h)$, но она может и не быть аддитивным по h функционалом. Если

$\delta J(x;h)$ — линейный по h функционал, то ее называют *дифференциалом Гато*, пишут $\delta J(x;h) = DJ(x;h) \equiv J'(x)h$ и говорят, что $J'(x)$ — *производная Гато* от J в точке x. Если $J'(x)$ есть линейный ограниченный функционал, т.е. $J'(x) \in \in X^*$, то производную $J'(x)$ называют *градиентом функционала* J в точке x и обозначают $\operatorname{grad} J(x)$. В этом случае $DJ(x;h) =< h, \operatorname{grad} J(x) >$. Здесь $< h, \operatorname{grad} J(x) >$ есть значение непрерывного линейного функционала $J'(x) = = \operatorname{grad} J(x)$ на векторе $h \in D(J)$. Если $D(J)$ плотно в X, то по непрерывности функционал можно продолжить с $D(J)$ на все X и (для простоты) обозначать также $\operatorname{grad} J(x)$.

Функционал $f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемым* на множестве $U \equiv D(f) \subseteq X$, если он дифференцируем во всех точках $x \in U$ и $\|f'(x+h) - f'(x)\|_{X^*} \to 0$ при $\|h\|_X \to 0$ для всех $x, x+h \in U$. Множество всех функционалов, непрерывно дифференцируемых на U, будем обозначать $C^1(U)$. (Отметим, что приведенное определение предполагает, что если $J(x)$ дифференцируем в точке $x \in U$, то J определен в некоторой окрестности этой точки; поэтому говоря о принадлежности $J(x)$ множеству $C^1(U)$, обычно подразумевают существование некоторого открытого множества $W \subseteq X$, которое содержит U и на котором также определен функционал $J(x)$.)

Аналогично множеству $C^k(U)$ вводятся множества $C^k(U)$, $k > 1$.

Приведем примеры дифференцируемых функционалов и их градиентов.

Пример 1. Пусть $J(u) = \|Au - f\|_Y^2, \ \ u \in X$, где X — банахово пространство, Y — самосопряженное гильбертово пространство, $f \in Y, \ \ A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Здесь $A^* \in \mathcal{L}(Y, X^*)$, $J(u) \in C^1(X)$ и $J'(u) = \operatorname{grad} J(u) = 2A^*(Au - f)$. ■

Пример 2. Пусть $J_\alpha(u) = \alpha\|u\|_X^2 + \|Au - f\|_Y^2, \ \alpha = const$ и выполнены условия примера 1. Тогда $J'_\alpha(u) = = \operatorname{grad} J_\alpha(u) = 2(\alpha u + A^*(Au - f))$. ■

3.1.3. При исследовании экстремальных задач в банаховых пространствах важную роль играют такие понятия, как *выпуклые множества, выпуклые функционалы, ..., монотонные операторы.*

Определение 1. Множество U из линейного пространства называется *выпуклым*, если оно содержит вместе с любыми своими точками u, v и точку $u\alpha = \alpha v + (1-\alpha)u$ при любом $\alpha \in [0, 1]$.

Определение 2. Функционал $J(u)$, определенный на выпуклом множестве U, называется *выпуклым* на U, если $J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) \; \forall\, u, v \in U, \; \forall \alpha \in [0, 1]$. Если в последнем неравенстве равенство возможно только при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, то $J(u)$ называется *строго выпуклым* на U.

Пример 3. В банаховом пространстве X аффинный функционал $J_1(u) \equiv < g, u > +C$, где $g \in X^*$, $C = const$ и норма $J_2(u) \equiv \|u\|_X$ являются выпуклыми функционалами. ■

Определение 3. Функционал $J(u)$, определенный на выпуклом множестве U из гильбертова пространства H, называется *сильно выпуклым* на U, если существует æ $=$ $= const > 0$, что

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - \alpha(1-\alpha)æ\|u - v\|_H^2,$$

$$\forall\, u, v \in U, \quad \forall\, \alpha \in [0, 1].$$

Пример 4. Если H гильбертово, то $J(0) \equiv \|u\|_H^2 =$ $= (u, u)_H$ сильно выпуклый. ■

Свойства выпуклости функционалов тесно связаны с монотонностью их градиентов.

Определение 4. Оператор $F : X \to X^*$ называется *монотонным* на множестве $D(F) \subset X$, если $< u - v, \; F(u) -$ $-F(v) > \geq 0 \; \forall\, u, v \in D(F)$, и *строго монотонным*, если равенство выполняется лишь при $u = v$.

Приведем критерии выпуклости и сильной выпуклости гладких функционалов [8, 10, 60].

Теорема 14. *Пусть U — выпуклое множество из банахова пространства X. Тогда для того чтобы функционал $J(u)$ из $C^1(U)$ был выпуклым на U, необходимо и достаточно, чтобы при всех $u, v \in U$ выполнялось одно из следующих двух неравенств:* 1) $J(u) \geq J(v) + < J'(v), u - v >$; 2) $< J'(u) - J'(v), u - v > \geq 0$ *(т.е. чтобы градиент $J'(u) \equiv \equiv \operatorname{grad} J(u)$ был монотонным).*

Если $\operatorname{int} U \neq \{0\}$ (т.е. U имеет внутренние точки) и $J(u) \in C^2(U)$, то для выпуклости $J(u)$ на U необходимо и достаточно, чтобы $< J''(u)\xi, \xi > \geq 0 \quad \forall\, \xi \in X, \quad u \in U$.

Теорема 15. *Пусть U — выпуклое множество из гильбертова пространства H и пусть функция $J(u)$ принадлежит $C^1(U)$. Тогда для того чтобы $J(u)$ была сильно выпуклой на U, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:* 1) *существует постоянная* $æ > 0$ *такая, что* $J(u) \geq J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle + æ\|u - v\|_H^2$, $u, v \in U$; 2) *существует постоянная* $\mu > 0$ *такая, что* $\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle \geq \mu\|u - v\|_H^2,\ u, v \in U$. *Если $intU \neq \oslash$ и $J(u) \in C^2(U)$, то для сильной выпуклости $J(u)$ на U необходимо и достаточно существование постоянной $\mu > 0$ такой, что $\langle J''(u)\xi,\ \xi\rangle \geq \mu\|\xi\|_H^2$ при всех $\xi \in H,\ u \in U$.*

Пример 5. Функционал $J(u) = \|Au - f\|_Y^2$ из примера 1 выпуклый на X. ■

3.2. Экстремальные задачи и критические точки функционалов

Пусть J — вещественный функционал, заданный в нормированном пространстве X. Точка $u_0 \in X$ называется *экстремальной точкой* (*точкой локального экстремума*) *функционала* J, если в некоторой окрестности $U(u_0)$ этой точки выполняется одно из следующих неравенств: 1) $J(u) \leq \leq J(u_0)$, 2) $J(u) \geq J(u_0)$ для всех $u \in U(u_0)$.

Если второе неравенство справедливо для всех $u \in X$, то u_0 называется *точкой абсолютного* (*глобального*) *ми-*

нимума функционала J. Далее, если J дифференцируем по Гато в точке u_0, то при выполнении условия $DJ(u_0, h) = 0$ точка u_0 называется *критической точкой* функционала J. Так как из равенства нулю дифференциала следует его непрерывность по h, то последнее равенство принимает вид $\langle \operatorname{grad} J(u_0), h \rangle = 0$, и так как это равенство справедливо для произвольного $h \in X$, то можно сказать, что u_0 — критическая точка J, если $\operatorname{grad} J(u_0) = 0$.

Пусть U — некоторое множество из X, а $J(u)$ — функционал, определенный на U. Задачи минимизации или максимизации функционала $J(u)$ на множестве U называют *экстремальными задачами*. Для задачи минимизации $J(u)$ на U будем пользоваться следующей краткой записью: $J(u) = \inf,\ u \in U$, или $\inf J(u)$. Нижнюю грань $J(u)$ на U обозначим $J_* = \inf\limits_U J(u)$. (Если $J(u)$ неограничен снизу на U, то принимают $J_* = -\infty$.) Точки множества $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\}$ называют *точками минимума* $J(u)$ на U (их еще называют также *точками глобального минимума* $J(u)$ *на* U).

Последовательность $\{u_k\} \subset U$ называют *минимизирующей* для $J(u)$ на U, если $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_*$.

Выпуклый функционал на выпуклом множестве не может иметь локальных минимумов, отличных от глобального минимума. Точнее, верна

Теорема 16 [10]. *Пусть U — выпуклое множество из банахова пространства X, а функционал $J(u)$ определен и выпуклый на U. Тогда всякая точка локального минимума $J(u)$ одновременно является точкой ее глобального минимума на U, причем множество U_* выпукло. Если $J(u)$ строго выпуклый на U, то U_* содержит не более одной точки.*

Сформулируем некоторые теоремы, дающие условия экстремума функционала $J(u)$. Первая из этих теорем обобщает известную теорему Ферма, дающую необходимое условие экстремума.

Теорема 17. *Пусть функционал $J(u)$ определен в окрестности точки u_0 нормированного пространства X, достигает в u_0 локального экстремума и имеет в точке u_0 первую вариацию $\delta J(u_0; h)$. Тогда $\delta J(u_0; h) = 0$.*

Следствие. *Если в условиях теоремы пространство X банахово, а функционал $J(u)$ дифференцируем в точке u_0 в смысле Гато (Фреше), то u_0 удовлетворяет уравнению $J'(u_0) = 0$ — уравнению Эйлера.*

Теорема 18. *Пусть функционал J задан в области ω нормированного пространства X и u_0 — внутренняя точка области ω, в которой существует линейный дифференциал Гато. Тогда справедливы следующие утверждения:*
1. *Для того чтобы точка u_0 была экстремальной, необходимо, чтобы она была критической, т.е. чтобы*

$$\operatorname{grad} J(u_0) = 0. \tag{28}$$

2. *Если дополнительно в некоторой выпуклой окрестности $U(u_0) \subset \omega$ точки u_0 функционал J выпуклый (или $\operatorname{grad} J(u)$ — монотонный оператор), то равенство (28) необходимо и достаточно для того, чтобы точка u_0 была точкой минимума функционала J. Если J строго выпуклый, то u_0 – точка строгого локального минимума.*

Теорема 19. *Пусть U — выпуклое множество из банахова пространства B, $J(u) \in C^1(U)$ и пусть $U_* = \{u \in \in U : J(u) = J_* = \inf\limits_U J(u)\}$. Тогда в любой точке $u_* \in U_*$ необходимо выполняется неравенство*

$$\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 \text{ при всех } u \in U, \tag{29}$$

которое в случае $u_* \in \operatorname{int} U$ эквивалентно равенству $J'(u_*) = 0$. Если, кроме того, $J(u)$ выпукла на U, то условие (29) является достаточным для того, чтобы $u_* \in U_*$.

Пример 6. Пусть в примере 1 $X = Y$ гильбертово пространство. Тогда согласно последней теореме условие $\langle A^*(Au_* - f), u - u_*\rangle \geq 0 \; \forall u \in U$ необходимо и достаточно для того, чтобы функционал $J(u) = \|Au - f\|_Y^2$ достигал на выпуклом множестве $U \subseteq Y$ своей нижней грани; если $U = Y$ или $U_* \subset intU$, то это условие эквивалентно равенству $A^*Au = A^*f$. ■

Приведем теперь несколько более тонких фактов об экстремуме функционалов, в частности, формулируемых в *теоремах Вейерштрасса* (так называют утверждение о достижении нижней грани некоторой функции на каком-либо множестве). Они используют следующие важные понятия, связанные с понятием слабой сходимости в банаховом пространстве.

Определение 5. Множество U из банахова пространства B называется *слабо компактным*, если из любой последовательности $\{u_k\} \in U$ можно выбрать хотя бы одну последовательность $\{u_{k_m}\}$, которая слабо в B сходится в некоторой точке $v \in U$.

Определение 6. Функционал $J(u)$, определенный на некотором множестве U из банахова пространства B, называют *слабо полунепрерывным снизу (сверху) в точке* $u \in U$, если для любой последовательности $\{u_k\} \in U$, которая слабо в B сходится к точке u, имеет место неравенство

$$\varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \equiv \lim_{k\to\infty} \inf J(u_k) \geq J(u)$$

$$(\varlimsup_{k\to\infty} J(u_k) \equiv \lim_{k\to\infty} \sup J(u_k) \leq J(u)).$$

Если $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу (сверху) в каждой точке $u \in U$, то говорят, что $J(u)$ *слабо полунепрерывен снизу (сверху) на* U. Если $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу и сверху в точке u на U, то функционал $J(u)$ называется *слабо полунепрерывным в точке* $u \in U$.

Определение 7. Пусть B — банахово пространство. Скажем, что *последовательность* $\{u_k\} \in B$ *сходится к множеству* U *слабо* в B, если $\{u_k\}$ имеет хотя бы одну слабо сходящуюся подпоследовательность, причем все точки v, являющиеся слабым пределом какой-либо последовательности $\{u_k\}$, принадлежат U.

Теорема 20. *Пусть U — слабо компактное множество из банахова пространства B, функционал $J(u)$ определен, конечен и слабо полунепрерывен снизу на U. Тогда $J_* = \inf\limits_U J(u) > -\infty$, множество $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\}$ непусто, слабо компактно и любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}$ слабо сходится к U_*.*

Теорема 21. *Слабо полунепрерывный снизу функционал $J(u)$, заданный в рефлексивном банаховом пространстве X, ограничен снизу и достигает наименьшего значения на каждом ограниченном слабо замкнутом множестве $M \subset X$.*

В приложениях иногда удобнее применять не собственно теорему 21, а следствия из нее.

Следствие 1. *Слабо полунепрерывный снизу функционал в рефлексивном банаховом пространстве достигает своего наименьшего значения на каждом ограниченном замкнутом выпуклом множестве.*

(Доказательство следует из того факта, что всякое выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства является слабо замкнутым.)

Следствие 2. *Всякий заданный всюду в банаховом пространстве, дифференцируемый по Гато выпуклый функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу.*

Следствие 3. *Точка x_0 является точкой минимума функционала $J(0) \equiv \varphi(u) - \langle u, f\rangle$, где $f \in X^*$, а φ — выпуклый и дифференцируемый в точке u_0 по Гато, когда u_0 является решением уравнения $\varphi'(u) = f$.*

Для удобства пользования приведенными теоремами желательно иметь набор сравнительно легко проверяемых достаточных условий слабой компактности множеств и слабой полунепрерывности снизу функций в банаховых пространствах. Приведем несколько таких условий.

Определение 8. Множество U из банахова пространства называется *слабо замкнутым* (*секвенциально слабо замкнутым*), если оно содержит любую точку, являющуюся слабым пределом какой-либо последовательности $\{u_k\} \in U$.

Теорема 22. *Всякое ограниченное слабо замкнутое множество из рефлексивного банахова пространства слабо компактно.*

Поскольку проверка слабой замкнутости множества не всегда проста, то на практике вместо теоремы 22 может оказаться более удобной следующая

Теорема 23. *Всякое ограниченное замкнутое выпуклое множество U из рефлексивного банахова пространства B слабо компактно.*

(Подчеркнем, что в этой теореме замкнутость множества понимается в сильном смысле, т.е. в смысле метрики B — это обстоятельство часто облегчает проверку условий теоремы 4 в приложениях.)

Пример 7. В любом гильбертовом пространстве шар слабо компактен, но в бесконечномерном гильбертовом пространстве шар не может быть сильно компактным. ■

Следующая теорема дает достаточные условия слабой полунепрерывности функционала.

Теорема 24 [8, 11]. 1) *Пусть на открытом выпуклом множестве U нормированного пространства задан выпуклый и дифференцируемый по Гато функционал $J(u)$. Тогда если $DJ(u;h)$ непрерывен по h, то J слабо полунепрерывен на U.*

2) *Для слабой полунепрерывности снизу на выпуклом множестве U вещественного дифференцируемого $J(u)$ достаточно, чтобы его градиент был монотонным оператором.*

3) *Если градиент $F(u) \equiv \operatorname{grad} J(u)$ вещественного функ-*

ционала $J(u)$ имеет производную Гато $F'(u)$, причем $\langle F'(u)h, h \geq 0$, то функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу.

4) *Для того чтобы функционал $J(u)$, заданный в нормированном пространстве, был слабо полунепрерывен снизу, необходимо и достаточно, чтобы множество $U_C = \{u;\ J(u) \leq C\}$ было слабо замкнуто, каково бы ни было вещественное число C.*

Пример 8. Пусть $J(u) = \|u\|^\gamma,\ \gamma \geq 1$, где $\|u\|$ — норма в банаховом пространстве X. Тогда $J(u)$ слабо полунепрерывен на X [10]. ■

Приведем также следующие теоремы об экстремальных точках и теорему Вейерштрасса [8, 10].

Теорема 25 (обобщенная теорема Вейерштрасса). *Если на ограниченном слабо замкнутом множестве U в рефлексивном банаховом пространстве X задан конечный слабо полунепрерывный снизу функционал $J(u)$, то он ограничен снизу и достигает на U своей нижней грани.*

Теорема 26 [8]. *Пусть вещественный функционал $J(u)$, заданный в вещественном рефлексивном банаховом пространстве X, дифференцируем по Гато и* $\operatorname{grad} J(u) = F(u)$ *удовлетворяет условиям:* 1) *функция $\langle F(tu), u\rangle$ непрерывна по t на* [0,1] *при любом $u \in X$;* 2) $\langle F(u+h) - F(u), h\rangle \geq 0\ \forall\, u, h \in X$; 3) $\lim\limits_{R\to\infty} (\langle F(u), u\rangle)/R = +\infty\ \|u\| = R$. *Тогда существует точка минимума u_0 функционала $J(u)$ и* $\operatorname{grad} J(u_0) = 0$. *Если $F(u)$ — строго монотонный, то точка минимума функционала единственная и в ней $J(u)$ принимает абсолютный (глобальный) минимум.*

Теорема 27. *Пусть $J(u)$ — вещественный дифференцируемый по Гато функционал, задан в вещественном рефлексивном банаховом пространстве, слабо полунепрерывен снизу и $\langle F(u), u\rangle > 0\ \forall\, u \in X$, если $\|u\| = R > 0$, где R — некоторое число и $F(u) \equiv \operatorname{grad} J(u)$. Тогда существует внутренняя точка u_0 шара $\|u\| \leq R$, в которой $J(u)$ имеет* *локальный минимум, а следовательно,* $\operatorname{grad} J(u_0) = 0$.

В качестве примера к последней теореме рассмотрим следующий пример.

Пример 9. Пусть $J(u) = \|Au - f\|_H^2$, где $A : H \to H$ вполне непрерывный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H, причем $D(A) = H$. Предположим, что $N(A) \equiv \ker(A) = \{0\}$. Обозначим через H_A пополнение H по норме $[u] \equiv \|Au\|$. Рассмотрим элемент f такой, что $\|f\| < R$, где R какое-либо число. Тогда при $[u] = R$ имеем $\langle \operatorname{grad} J(u), u\rangle \geq 2([u]^2 - \|f\|[u]) = 2R(R - \|f\|) > 0$, и из последней теоремы вытекает существование внутренней точки u_0 шара $[u] \leq R$, в которой $J(u)$ принимает минимум, причем $(Au, Av)_H = (f, Av)_H \ \forall\, v \in H_A$. ■

Ряд глубоких теорем о минимизации выпуклых функционалов (равномерно выпуклых и др.) приводится в [10, 24].

3.3. Методы минимизации функционалов

Приведем некоторые из методов минимизации функционалов. Исследование их сходимости и формулировки соответствующих оценок скорости сходимости читатель может найти в [10] (где приведен также ряд других методов минимизации функционалов в банаховых и гильбертовых пространствах). Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь формулировок этих методов и простейших рекомендаций по их практическому применению [8, 10].

3.3.1. Градиентный метод может применяться для приближенного решения задачи

$$J(u) \to \inf; \quad u \in H,$$

где H — гильбертово пространство, $J(u) \in C^1(H)$. Этот метод заключается в построении последовательности $\{u_k\}$ по правилу

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k J'(u_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{30}$$

где u_0 — некоторая заданная начальная точка, α_k — положительная величина. Если $J'(u_k) \neq 0$, то α_k можно выбрать так, чтобы $J(u_{k+1}) < J(u_k)$.

Существуют различные способы выбора величины α_k в методе (30). Перечислим некоторые из них:

1) α_k выбирается из условия

$$f_k(\alpha_k) = \inf_{\alpha \geq 0} f_k(\alpha) = f_{k*}, \quad f_k(\alpha) = J(u_k - \alpha J'(u_k)); \quad (31)$$

этот вариант градиентного метода принято называть *методом скорейшего спуска*. Точное определение величины α_k из (31) не всегда возможно;

2) α_k выбирают из условия монотонности: $J(u_{k+1}) < J(u_k)$. Для этого задают какую-либо постоянную $\alpha > 0$ и в методе (30) на каждой итерации берут $\alpha_k = \alpha$. Затем проверяют условие монотонности и в случае его нарушения величину $\alpha_k = \alpha$ дробят до тех пор, пока не выполнится условие монотонности;

3) если $J(u) \in C^{1.1}(H)$ и постоянная $L > 0$ из неравенства $\|J'(u) - J'(v)\| \leq L\|u - v\|$, $u, v \in H$, известна, то величину α_k в (30) можно взять из условий

$$0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq 2/(L + 2\varepsilon),$$

где $\varepsilon, \varepsilon_0$ — положительные числа, являющиеся параметрами метода;

4) возможно априорное задание величин α_k из условий

$$\alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty.$$

Например, можно принять $\alpha_k = c(k+1)^{-\alpha}$, $c = const > 0$, $1/2 < \alpha \leq 1$. Такой выбор α_k прост для реализации, но не гарантирует выполнения условия монотонности $J(u_{k+1}) < < J(u_k)$ и, вообще говоря, сходится медленно;

5) в тех случаях, когда заранее известна величина $J_* = \inf\limits_H J(u) > -\infty$, в (30) можно принять

$$\alpha_k = (J(u_k) - J_*)/\|J'(u_k)\|^2.$$

На практике итерации (30) продолжают до тех пор, пока не выполнится какой-либо критерий окончания счета. Здесь возможно использование таких критериев: $\|u_k - u_{k+1}\| \leq \varepsilon$, или $\|J(u_k) - J(u_{k+1})\| \leq \delta$, или $\|J'(u_k)\| \leq \gamma$. где $\varepsilon, \delta, \gamma$ — заданные числа; иногда заранее задают число итераций.

3.3.2. Метод проекции градиента может применяться для приближенного решения задачи

$$J(u) \to \inf; \quad u \in U, \tag{32}$$

где U — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства H, $J(u) \in C^1(U)$. Проекцию точки u на множество U обозначим через $P_U(u)$.

Метод проекции градиента для решения задачи (32) заключается в построении последовательности $\{u_k\}$ по правилу

$$u_{k+1} = P_U(u_k - \alpha_k J'(u_k)), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{33}$$

где α_k — положительная величина. Если при некотором k оказалось, что $u_{k+1} = u_k$, процесс (33) прекращают.

Если $J(u) \in C^{1.1}(U)$ и константа Липшица L для градиента известна, то в (33) в качестве α_k можно взять любое число, удовлетворяющее условиям: $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq 2/(L+2\varepsilon)$, где $\varepsilon, \varepsilon_0$ — положительные числа, являющиеся параметрами метода.

Возможно априорное задание величин α_k из условий

$$\alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty.$$

Заметим, что описанные здесь варианты метода (33) при $U = H$ переходят в соответствующие варианты градиентного метода.

Методом (33) удобно пользоваться лишь в тех случаях, когда имеется явная формула для проекции точки на множество.

§ 4. Некорректные задачи и методы их решения

Приведем ряд понятий и результатов из теории некорректных задач, следуя [4, 5, 9, 18, 48, 59].

4.1. Некорректные, условно корректные задачи и понятие регуляризирующего оператора

Пусть X, Y — банаховы пространства. Рассмотрим уравнение

$$Au = g \tag{34}$$

с линейным оператором $A: \ X \to Y$.

Из-за неточностей математической модели описываемых явлений и в результате погрешностей дискретизации задачи при подготовке её к решению на вычислительных машинах вместо точного уравнения с $g \in R(A)$ мы можем получить некоторое возмущённое уравнение

$$A_\eta u_{\eta,\delta} = g_\delta \tag{35}$$

с некоторыми операторами A_η и правой частью g_δ. В дальнейшем мы всегда будем ограничиваться случаем, когда оператор A_η действует в тех же пространствах X, Y и $A_\eta \in L(X, Y)$, причём $\|g_\delta - g\|_\xi \leq \delta$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, где δ, η — малые положительные числа.

Задачи, записанные в виде операторного уравнения (34), могут быть некорректными (некорректно поставленными). Напомним, что задача определения $u \in X$ по исходным данным $g \in Y$ называется корректно поставленной на паре пространств X, Y, если удовлетворяются следующие условия: 1) для всякого $g \in Y$ существует решение $u \in X$; 2) решение единственно; 3) задача устойчива на пространствах X, Y. Если не выполнено хотя бы одно из этих условий, то задача называется некорректно поставленной. Отметим, что определение некорректно поставленных задач относится к выбранной паре пространств X, Y, т.к. в других пространствах та же самая задача может оказаться корректно поставленной.

К некорректно поставленным задачам приводят многие задачи оптимального управления, задачи минимизации функционалов, обратные задачи и многие другие. Одной из типичных трудностей решения этих задач является следующая. Как правило, в приложениях вместо элемента $g \in R(A)$ известно лишь его приближение $g_\delta \in Y$, $\|g_\delta - g\| \leq \delta$, например, при решении обратных задач, когда g_δ есть результат измерений (наблюдений) с точностью δ; при этом g_δ может не принадлежать $R(A)$. Приближённая задача $Au = g_\delta$ может быть, таким образом, неразрешимой. Но даже если $g_\delta \in R(A)$, то всё равно решения этого уравнения, вообще говоря, нельзя брать в качестве приближённого решения уравнения (34) — это связано с возможным отсутствием непрерывной зависимости решения от правой части (например, когда A вполне непрерывным, а X бесконечномерно. Поэтому возникает проблема построения решения уравнения (34) с приемлемой точностью, если правая часть задана с малой погрешностью. Важными в решении указанной проблемы являются понятия *условно корректной задачи и регуляризирующего оператора* (*регуляризатора*).

В основе понятия условно корректной задачи лежит *идея сужения области определения $D(A)$ исходного оператора.*

Определение 1. Задача (34) называется *условно корректной* (корректной по Тихонову А.Н.), если: 1) априори известно, что решение задачи (34) существует для некоторого класса данных из Y и принадлежит априори заданному множеству $M \subset D(A)$; 2) решение единственно в классе M; 3) бесконечно малым вариациям правой части (34), не выводящим решение из класса M, соответствуют бесконечно малые вариации решения. (Множество M называют *множеством корректности.*)

В основе приведённого определения условно корректной задачи лежит следующая теорема, дающая условия для корректности задачи (в смысле приведённого определения) и играющая важную роль в теории методов решения некорректных задач.

Теорема 28 (Теорема А.Н.Тихонова об устойчивости обратного оператора). *Если непустое множество $M \subseteq D(A)$ удовлетворяет условиям 2), 3), то при непрерывном операторе A обратный к нему оператор A^{-1}, рассматриваемый на образе множества M, является непрерывным.*

Если выполнены условия этой теоремы и X, Y — нормированные пространства, то возможно даже построение оценок устойчивости решения задачи. Эта возможность базируется на следующей теореме.

Теорема 29 (М.М.Лаврентьева). *Пусть A отображает компакт $M \subset X$ непрерывно и взаимно однозначно на множество $N = AM \subset Y$. Тогда существует непрерывная в нуле функция $\omega(\tau)$, $\omega(0) = 0$ такая, что $\|u_1 - u_2\|_X \leq \leq \omega(\|Au_1 - Au_2\|_Y)\ \forall\, u_1, u_2 \in M$.*

Если теорема 28, показывая возможность устойчивого решения (34), ещё не определяет метода решения (т.к. на практике g_δ не принадлежит $R(A)$, т.е. (34) не разрешимо при заданном g_δ), то на основании теоремы 29 при определённых условиях на A, задачу (34) можно заменить на близкую, но уже разрешимую при любых $g \in Y$. При этом существенным моментом приближённого решения (34) является необходимость знания как точности задания g, т.е. оценки $\|g - g_\delta\|_Y \leq \delta$, так и функции $\omega(\tau)$ (функции корректности).

Но при приближённом решении (34) можно избавиться от задания функции корректности $\omega(\tau)$ и не требовать знания δ, характеризующего точность задания правой части (34). Эти свойства метода приближённого решения (34) присущи *методу квазирешений* (метод В.К.Иванова). Приближённые решения, названные *квазирешениями*, определяются как элементы $u \in M$, на которых

$$\|Au - g_\delta\|_Y = \inf_{v \in M} \|Av - g_\delta\|_Y.$$

Существование квазирешений для любого $g_\delta \in Y$ при непрерывном A и условии компактности M следует из того, что непрерывный функционал $J(u) = \|Au - g_\delta\|_Y$ $(u \in M)$ на компакте достигает своей нижней границы. Сходимость метода непосредственно следует из теоремы о непрерывности обратного оператора.

Нетрудно заметить, что метод квазирешения обобщает понятие классического решения уравнения $Au = g$ $(u \in M)$. Этот метод допускает ряд обобщений в различных направлениях (например, можно отказаться от требования единственности решения (34), от непрерывности оператора A, не требовать компактности M и др.).

Существенный класс алгоритмов решения некорректных задач базируется на методе использования *регуляризирующего оператора* (*регуляризатора*), предложенного А.Н.Тихоновым (метод регуляризации, метод Тихонова).

Пусть рассматривается задача (34), где оператор A задан точно, и пусть эта задача некорректна. Предположим, что для точно заданной правой части $\bar{g}$ существует единственное решение $\bar{u}$ уравнения (34). Однако $\bar{g}$ может оказаться неизвестным, тогда как заданы g_δ и величина погрешности δ такие, что $\|g_\delta - \bar{g}\|_Y \leq \delta$. Требуется построить приближённое решение u_δ уравнения — элемент u_δ, который бы стремился к точному решению $\bar{u}$ при $\delta \to 0$. (Как отмечалось выше, в качестве u_δ нельзя брать элемент $A^{-1}g_\delta$, даже если $g_\delta \in R(A)$.) Построение u_δ можно осуществить, если для задачи (34) существует регуляризирующий оператор (регуляризатор). Дадим одно из определений регуляризирующего оператора [9, 18, 59].

Определение 2. Однопараметрическое семейство операторов R_δ, действующих из пространства Y в пространство X, называется *регуляризирующим (регуляризатором)* для уравнения $Au = g$ (относительно элемента $\bar{g}$), если оно обладает свойствами:

1) существует число $\delta_1 > 0$ такое, что оператор R_δ и элемент $R_\delta g_\delta \equiv R_\delta(g_\delta)$ определены для всех $\delta \in [0, \delta_1]$ и $g_\delta \in Y$, удовлетворяющих неравенству $\|g_\delta - \bar{g}\|_Y \leq \delta$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_0(\varepsilon, g_\delta)$ такое, что из неравенства

$$\|g_\delta - \bar{g}\|_Y \leq \delta \leq \delta_0$$

следует неравенство $\|u_\delta - \bar{u}\|_X \leq \varepsilon$, где $u_\delta = R_\delta g_\delta$.

В этом определении допускается многозначность оператора R_δ, через u_δ обозначается произвольный элемент из множества элементов $R_\delta g_\delta$.

Регуляризатор называется непрерывным, линейным и т.д., если каждый оператор R_δ $(0 < \delta \leq \delta_1)$ непрерывен, линеен и т.д. Задача (34) называется *регуляризуемой* (непрерывно регуляризуемой, линейно регуляризуемой), если для неё существует хотя бы один регуляризатор (непрерывный регуляризатор, линейный регуляризатор). Наличие регуляризатора позволяет при любом $g \in R(A)$, известном приближённо с точностью δ $(\|g_\delta - g\|_Y \leq \delta)$, восстановить точное решение u в пределе при $\delta \to 0$. В реальных задачах, хотя δ и мало, как правило, предельный переход $\delta \to 0$ неосуществим. Тем не менее есть надежда, что $R_\delta g_\delta$ будет хорошим приближением к точному решению. Поэтому построение регуляризаторов некорректных задач представляет не только большой теоретический интерес, но и даёт ключ к устойчивому решению таких задач.

Для теории приближённых методов типичной является ситуация, когда конкретный метод приближённого решения задачи зависит от некоторого параметра. Это может быть шаг сетки, номер числа итераций и т.д. В связи с этим часто используется следующая схема построения регуляризирующего оператора. Задаётся некоторое семейство операторов $R(\alpha)$, действующих из Y в X и зависящих от некоторого другого параметра α. Затем параметр α выбирается в зависимости от δ и g_δ: $(\alpha = \alpha(\delta, g_\delta))$ так, чтобы $(R_\delta \equiv R(\alpha(\delta, g_\delta)))g_\delta \to \bar{u}$ при $\delta \to 0$. (Отмечаем, что если $\alpha = \delta$, то получаем оператор R_δ, введённый в Определении 2.)

Задачу приближённого решения уравнения $Au = g$ можно рассматривать в более общем случае приближённого задания исходных данных, когда не только правая часть g, но и оператор A заданы с погрешностью. Для данной задачи также можно ввести понятие регуляризирующего оператора, в целом аналогично тому, как это сделано в Определении 2 (вводя соответствующее двухпараметрическое семейство операторов $R_{\eta,\delta}$и т.д.;см.,например, [8,59]).

После построения регуляризатора для рассматриваемой задачи можно присупить к построению ее приближенного решения. В связи с этим заметим, что для решения некорректной задачи , в частности, можно применять специальные итерационные методы, в которых (как и в случае корректно поставленных задач) основная проблема здесь состоит в построении аппроксимирующей последовательности $\{u^n\}$. Однако *для некорректных задач число итераций n необходимо согласовывать с погрешностью δ,* т.е. каждому δ нужно поставить в соответствие $n = n(\delta)$, носящий роль параметра регуляризации, такой, чтобы $u_n \to \bar{u}$ при $\delta \to 0$. Итерационные методы такого типа относятся к классу *методов итеративной регуляризации*, и они позволяют решать широкий класс задач с возмущением входных данных, т.к. при подходящем выборе $n(\delta)$ порождают регуляризирующий алгоритм для задачи (34).

Некоторые из методов решения некорректно поставленных задач, принадлежащих перечисленным выше классам методов, приводятся в следующих разделах этого параграфа.

4.2. Метод М.М.Лаврентьева

Метод М.М.Лаврентьева применяют для решения некорректно поставленных задач с самосопряжёнными неотрицательными операторами. Будем считать, что в уравнении (34) $A = A^* \geq 0$. *Метод М.М.Лаврентьева* заключается в переходе к регуляризованному уравнению

$$\alpha u + Au = g, \tag{36}$$

где α — малый положительный параметр (параметр регуляризации). Обозначая через I тождественный оператор, имеем $((\alpha I + A)u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \; \forall\, u \in H$, поэтому оператор $\alpha I + A$ обратим, $\|(\alpha I + A)^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$. Задача (36), таким образом, корректна, и некорректная задача (34) вкладывается в семейство корректных как предельный случай при $\alpha \to 0$. Решение $u_\alpha = (\alpha I + A)^{-1} g$ минимизирует функционал

$$J_\alpha(u) = \alpha \|u\|^2 + (Au, u) - (u, g) - (g, u).$$

Опишем одну *итеративную модификацию* метода М.М. Лаврентьева, рассматривая сразу случай, когда вместо g задано приближение g_δ (см. (35)). Зафиксируем натуральное число $m \geq 1$. Пусть u_0 — некоторое априори известное приближение к решению уравнения (34). Положив $u_{0,\alpha} = u_0$, последовательно вычислим $u_{1,\alpha}, \ldots, u_{m,\alpha}$ как решения уравнений

$$\begin{gathered} u_{0,\alpha} = u_0, \quad \alpha u_{n,\alpha} + Au_{n,\alpha} = \alpha u_{n-1,\alpha} + g_\delta, \\ n = 1, \ldots, m \quad (m \geq 2). \end{gathered} \tag{37}$$

В качестве приближённого решения уравнения (34) примем элемент $u_{m,\alpha}$. Заметим, что в случае $m = 1$, $u_0 = 0$ получаем уравнение (36),т.е. получаем метод М.М.Лаврентьева.

Обратим внимание на то, что число итераций m *в* (37) *фиксировано.*

Относительно сходимости (37) имеет место следующее утверждение.

Лемма 1 [9]. *Пусть* $X = Y \equiv H$, $A = A^*$ *— неотрицательный оператор,* $g \in R(A)$, $\|g_\delta - g\| \le \delta$. *Подберём параметр* $\alpha = \alpha(\delta)$ *в методе* (37) *таким образом, что* $b_1\delta \le \|Au_{m,\alpha} - g_\delta\| \le b_2\delta$, $1 < b_1 \le b_2$. *Тогда* $\delta/\alpha(\delta) \to 0$, $u_{m,\alpha(\delta)} \to u_*$ *при* $\delta \to 0$, *где* u_* *— решение уравнения* $Au = g_\delta$, *ближайшее к* u_0.

Замечание. В (37) можно принять $m = 1$; здесь $u_\alpha = u_{\alpha,1} = (\alpha I + A)^{-1}(\alpha u_0 + g_\delta)$, а $\alpha = \alpha(\delta)$ можно выбирать из условия $b_1\delta^s \le \|Au_\alpha - g_\delta\| \le b_2\delta^s$, $0 < b_1 \le b_2$, $0 < s < 1$ [9]. ■

Замечание. В дальнейшем при формулировке результатов сходимости рассматриваемых методов решения некорректных задач мы будем ограничиваться приведением лишь части данных результатов, полученных для этих методов. Более полная информация об оценках их скорости сходимости можно найти в цитируемой литературе. Однако отметим, что ряд утверждений о сходимости, выбора параметра α или числа итераций n в рассматриваемых нами задачах в следующих главах практически труднореализуемы, поскольку в этих задачах операторы A, A^*, AA^* задаются неявно. ■

4.3. Метод регуляризации А.Н.Тихонова

4.3.1. Метод регуляризации А.Н.Тихонова в применении к уравнению (34) (без требования самосопряжённости A) в одном из простейших его вариантов заключается в том, что вместо (34) рассматривается уравнение

$$\alpha u + A^*Au = A^*g, \tag{38}$$

где α — малый положительный параметр; $A : X \to Y$,

X, Y — гильбертовы пространства. Уравнение (38) является уравнением Эйлера для функционала

$$J_\alpha(u) = \alpha\|u\|_X^2 + \|Au - g\|_Y^2, \tag{39}$$

который принимает наименьшее значение на решении $u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*g$ уравнения (38). Как уже показано в п. 2.5., гл.1, если $g \in R(A)$, *то* $u_\alpha \to u^*$ *при* $\alpha \to +0$, *где* u^+ — *псевдорешение уравнения* (34). Оператор

$$R_\alpha \equiv (\alpha I + A^*A)^{-1}A^* = A^*(AA^* + \alpha I)^{-1} \tag{40}$$

является примером регуляризирующего оператора.

Если вместо точной правой части g уравнения (34) задана приближённая правая часть g_δ и величина погрешности δ : $\|g - g_\delta\|_Y \leq \delta$, то уравнение (38) и функционал $J_\alpha(u)$ задаются теми же выражениями (38), (39), в которых вместо g стоит g_δ. Задача (38) с возмущённой правой частью g_δ по-прежнему имеет единственное решение $u_{\alpha,\delta} = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*g_\delta$. Однако чтобы иметь сходимость $u_{\alpha,\delta}$ к решению уравнения (34), необходимо изменять характер поведения параметра регуляризации α в зависимости от δ, т.е. иметь $\alpha = \alpha(\delta)$ (иначе сходимость в общем случае отсутствует). Имеет место следующая

Теорема 30 [18]. *Пусть* $g \in R(A)$, $N(A) = \{0\}$, $\alpha(\delta) > 0$ *при* $\delta > 0$, $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$. *Тогда* $\|u_{\alpha,\delta} - u\|_X \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Замечание. В [18, с. 32] приводится пример, показывающий необходимость условия $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ для сходимости $u_{\alpha,\delta}$ к u при $\delta \to 0$. ■

Приведём некоторые результаты, касающиеся свойств решений уравнения (38) и поведения функционала (39), которые представляют определённый независимый интерес.

Введём при $\alpha > 0$ следующие функции:

$$\begin{gathered} m_\alpha \equiv \|Au_\alpha - g\|_Y^2 + \alpha\|u_\alpha\|^2, \\ \varphi(\alpha) = \|Au_\alpha - g\|_Y^2, \quad \psi(\alpha) = \|u_\alpha\|_X^2, \end{gathered} \tag{41}$$

где $u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*g$ — элемент, на котором достигается нижняя грань функционала $J_\alpha(u)$. Справедлива следующая

Лемма [18, 59]. *Пусть $A : X \to Y$ есть линейный, вполне непрерывный оператор, X, Y — сепарабельные гильбертовы пространства, $N(A) \equiv \ker(A) = \{0\}$ и $R(A) = Y$. Тогда:*

1) *если $g \neq 0$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $u_{\alpha_1} = u_{\alpha_2}$;*

2) *если $g \neq 0$ и $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, то $m(\alpha_1) < m(\alpha_2)$, $\varphi(\alpha_1) < < \varphi(\alpha_2)$, $\psi(\alpha_1) > \psi(\alpha_2)$;*

3)*при $\alpha > 0$ оператор $B_\alpha \equiv (\alpha I + A^*A)$ отображает пространство X на X и имеет определённый на всём X ограниченный обратный B_α^{-1};*

4) *функции $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ при $\alpha > 0$ непрерывны;*

5) *если $g \neq 0$, то $\lim\limits_{\alpha \to +0} \varphi(\alpha) = 0$, $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \varphi(\alpha) = \|g\|_Y^2$.*

На основе утверждений приведённой выше леммы базируется один из самых распространённых методов выбора параметра α в зависимости от α — *выбор параметра регуляризации по невязке.*

Теорема 31 [18, 59]. *Пусть выполнены условия леммы, $f \in R(A)$, и есть решение* (34), *а $u_{\alpha,\delta}$ есть решение* (38) *при замене g на g_δ, где $\|g - g_\delta\|_Y \le \delta$, $0 < \delta < \|g_\delta\|_Y$. Тогда для любого $\delta \in (0, \|g_\delta\|_Y)$ существует единственное значение $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющее уравнению $\|Au_{\alpha,\delta} - -g_\delta\|_Y^2 = \delta^2$, при этом $\|u_{\alpha(\delta),\delta} - u\|_Y \to 0$ при $\delta \to 0$.*

4.3.2. Наряду с описанным вариантом метода А.Н.Тихонова можно применять его *итерированный вариант.* Зададим начальное приближение $u_{0,\alpha} \equiv u_0 \in X$ и натуральное число $m \ge 1$ и последовательно вычислим $u_{1,\alpha}, \dots, u_{m,\alpha}$, решая уравнения

$$\alpha u_{n,\alpha} + A^*Au_{n,\alpha} = \alpha u_{n-1,\alpha} + A^*g_\delta; \quad n = 1, 2, \dots, m, \tag{42}$$

элемент $u_{m,\alpha}$ принимается за приближённое решение уравнения $Au = g$. Здесь g_δ — приближение к g такое, что $\|g_\delta - g\|_Y \le \delta$. Если принять $m = 1$, $u_0 = 0$, то из (42) получаем уравнение (38),т.е. получаем метод А.Н.Тихонова.

Теорема 32 [9]. *Пусть $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $g \in R(A)$. Подберём параметр $\alpha = \alpha(\delta)$ в алгоритме* (42) *таким образом, что*

$$b_1\delta \leq \|Au_{m,\alpha} - g_\delta\|_Y \leq b_2\delta, \quad 1 < b_1 \leq b_2. \tag{43}$$

Тогда $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$, $u_{m,\alpha(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$, где u_* — ближайшее к u_0 квазирешение уравнения $Au = g$.

4.3.3. Выше рассматривался один из простейших вариантов метода регуляризации А.Н.Тихонова. Однако ряд вариантов этого метода базируется на глубокой идее о стабилизации минимума уклонения значений Au от заданной правой части g_δ при помощи некоторого вспомогательного неотрицательного (сглаживающего) функционала $\Omega(u)$ — стабилизирующего функционала, определённого на некоторой части $U \subseteq D(A)$, которая плотна в X и сама является метрическим пространством. Требуется, чтобы множества $X_C \equiv \{u \in U : \Omega(u) \leq C\}$ были компактны в U, при этом $C \geq 0$.

Определение 1 [59]. Неотрицательный функционал $\Omega(u)$, определённый на всюду плотном в X подмножестве U множества X, называется *стабилизирующим функционалом,* если: 1) $U \subseteq D(A)$; 2) множество X_C компактно в X.

Ограничимся рассмотрением таких стабилизирующих функционалов Ω, что на элементах $u \in U \subseteq D(A)$ функционал $\|u\|_{X_C} = (\Omega(u))^{1/2}$ обладает свойствами нормы, причем $\|u\|_{X_C} \geq \|u\|_X \; \forall\, u \in U$ и норма $\|u\|_{X_C}$, определённая на U, порождает гильбертово пространство X_C с нормой $\|u\|_{X_C}$. Тогда можно ввести самосопряжённый положительно определённый оператор Λ_C такой, что $\|u\|_{X_C} = (\Lambda_C^{1/2}u, \Lambda_C^{1/2}u)_X^{1/2}$.

Пусть $\Omega(u) \equiv \|u\|^2_{X_C}$ — стабилизирующий функционал, определённый на подмножестве $U \subset X$ (U может совпадать с X, например, в конечномерном случае). Рассмотрим задачу минимизации функционала вида

$$J_\alpha(u,\delta) \equiv \alpha\Omega(u) + \|Au - g_\delta\|^2_Y, \tag{44}$$

где $g_\delta \in Y$, $\|g - g_\delta\|_Y \le \delta$, $\alpha > 0$. Эта задача имеет единственное решение $u_{\alpha,\delta} \in X_C$ при любом $\alpha > 0$. Если ввести обозначения $u_1 \equiv \Lambda_C^{1/2} u$, $A_1 \equiv A\Lambda_C^{-1/2}$, то рассмотрение проблемы минимизации функционала (44) сводится к задачам, рассмотренным в п. 4.3.1. Поэтому здесь можно также переформулировать многие утверждения из п. 4.3.1. В частности, имеет место следующая теорема [9, 18, 48, 59].

Теорема 33. *Пусть $g \in R(A)$, $N(A) = \{0\}$ и решение u уравнения* (34) *принадлежит X_C. Тогда если $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то $\|u_{\alpha,\delta} - u\|_{X_C} \to \to 0$ при $\delta \to o$.*

Замечание. Если $\Omega(u) = (\Lambda_C u, u)_X$, а параметр регуляризации α выбирается методом невязки, то для α справедливы оценки ([59], с. 80):

$$\alpha \le \frac{\|A\Lambda_C^{-1}A^*\|\delta}{\|g_\delta\|_Y - \delta}, \quad \alpha \le \frac{\|A^*A\|\,\|A^*\|\,\|g_\delta\|_Y}{2\|A^*g_\delta\| - \|A^*\|\,\|g_\delta\|_Y}.$$

При некоторых дополнительных предположениях можно пользоваться оценкой

$$\alpha \le \frac{\|A\|^2\delta}{\|g_\delta\|_Y - \delta}. \blacksquare$$

4.4. Итерационные методы решения некорректных задач

В предыдущих разделах этого параграфа регуляризация некорректной задачи достигалась её включением как некоторого предельного случая ($\alpha = 0$) в семейство корректно поставленных задач. Теперь обратимся к итерационным методам регуляризации. Параметром регуляризации в них является номер итерации. Дадим описание простейших итерационных методов сперва в самосопряжённом случае, когда

$X = Y = H$, $A = A^* \geq 0$. Зададимся начальным приближением $u_0 \in H$; его разумно брать ближе к искомому точному решению задачи (34); при отсутствии всякой информации о точном решении можно положить $u_0 = 0$. По u_0 последовательно вычислим

$$u_n = u_{n-1} - \tau(Au_{n-1} - g),\ n = 1, 2, \ldots\ (0 < \tau < 2/\|A\|). \quad (45)$$

Здесь τ — постоянная. Вот другая итерационная схема:

$$\alpha u_n + Au_n = \alpha u_{n-1} + g, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (\alpha = const > 0); \quad (46)$$

каждый шаг итерации заключается в решении корректно поставленной задачи. Постоянная α здесь не обязательно мала, регуляризация достигается за счёт многократного итерирования. При меньших α для достижения цели хотя и требуется меньшее число итераций, но сами итерации осуществить труднее — ухудшается мера устойчивости задачи (46). Стоит обратить внимание на формальное сходство итерационного метода (46) с итерированным вариантом метода М.М.Лаврентьева. Однако регуляризация в этих двух методах достигается по-разному: в итерированном варианте метода М.М.Лаврентьева за счёт малости α при фиксированном числе итераций, а в итерированном методе (46) — за счёт большого числа итераций при фиксированном α.

В общем случае несамосопряжённой задачи с $A \in L(X, Y)$ предварительно симметризуем задачу (переходим от (34) к задаче $A^*Au = A^*g$) и затем применяем те же итерационные схемы, что и выше. Таким образом, приходим к итерационным схемам

$$u_n = u_{n-1} - \tau A^*(Au_{n-1} - g),\ n = 1, 2, \ldots\ (0 < \tau < 2/\|A\|^2) \quad (47)$$

и

$$\alpha u_n + A^*Au_n = \alpha u_{n-1} + A^*g,\ n = 1, 2, \ldots\ (\alpha = const > 0). \quad (48)$$

Методы (45) и (47) называют *явными* итерационными процессами, а (46), (48) — *неявными*.

В случае несамосопряжённой задачи можно рассмотреть также следующий итерационный алгоритм:

$$u_n = u_{n-1} - \tau(\mathcal{A}_\alpha u_{n-1} - A^* g), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{49}$$

где $\mathcal{A}_\alpha = \alpha I + A^* A,\ 0 < \tau < 2/(\alpha + \|A\|^2)$.

Метод (49) рассмотрен в п. 2.6 настоящей главы, где приведены способы оптимизации выбора параметра τ и даны соответствующие оценки скорости сходимости метода. В силу ограничений на τ в (45), (47) эти алгоритмы согласно общей теории итерационных процессов также являются сходящимися [38, 56]. Изучение вопросов сходимости алгоритмов (45)–(48) можно найти в [9].

Особый интерес представляют итерационные алгоритмы решения некорректных задач в случае, когда вместо A, g известны их приближения A_η, g_δ, такие, что $\|A - A_\eta\| \le \eta$, $\|g - g_\delta\|_Y \le \delta$, где η, δ — малые положительные величины. Кроме того, из-за погрешностей определения и каких-либо других "помех"на каждом шаге итераций допускаются неточности, характеризуемые элементами ω_n, $n = 1, 2, \dots$ такие, что $\|\omega_n\|_X \le \varepsilon$ — малый положительный параметр (обычно $\varepsilon \ll \delta + \eta$). В силу сделанных предположений итерационный процесс (47) (мы ограничимся рассмотрением только этого метода) примет вид

$$\tilde{u}_n = \tilde{u}_{n-1} - \tau A_\eta^* (A_\eta \tilde{u}_{n-1} - g_\delta) + \omega_n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{50}$$

Относительно сходимости данного итерационного метода справедлива

Теорема 34 [9]. *Пусть* $A, A_\eta \in L(X, Y)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$ $(0 < \eta \le \eta_0)$, $\|g_\delta - g\|_Y \le \delta$, $g \in R(A)$, $\|\omega_n\|_X \le \varepsilon \le C(\delta + +\eta)^2$, $n = 1, 2, \dots$, $(C = const)$, $0 < \tau < 2/\|A_\eta\|^2$. *Тогда если итерации* (50) *останавливаются при таком* $n = n(\delta, \eta)$, *что* $n(\delta, \eta) \to \infty$, $(\delta + \eta)^2 n(\eta, \delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$, *то*

$\tilde u_n \to u_*$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$, где u_* — ближайшее к $\tilde u_0 \equiv u_0$ решение уравнения $Au = g$.

Замечание. В работе [18, с. 42] для алгоритма при $A = A_\eta$, $\omega_n \equiv 0$ устанавливается следующее утверждение: *если $g \in R(A)$, $N(A) = \{0\}$, $u_0 = \tau A^* g_\delta$, $0 < \tau < (2/\|A^*A\|)$, то, если $n(\delta) \to \infty$, $\delta \cdot n(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, имеет место сходимость $\tilde u_n$ к u — решению уравнения $Au = g$.* ■

Рассмотрим теперь алгоритм (49) при $A = A_\eta$, $\omega_n \equiv 0$:

$$\tilde u_n = \tilde u_{n-1} - \tau(\mathcal{A}_\alpha \tilde u_{n-1} - A^* g_\delta), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{51}$$

в котором примем $\alpha > 0$, $\tilde u_0 \equiv u_0 = \tau A^* g_\delta$, а параметр τ выбирается оптимальным: $\tau = \tau_{opt} = 2/(2\alpha + \|A^*A\|)$. Установим сходимость $\tilde u_n$ к решению u уравнения $\alpha u_\alpha + A^*Au_\alpha = A^*g$ и оценим погрешность $(\tilde u_n - u_\alpha)$.

Заметим, что $\tilde u_n$ при $\tilde u_0 = \tau A^* g_\delta$ представляется в виде $\tilde u_n = R_n g_\delta$, где $R_n \equiv \tau \sum\limits_{i=0}^{n} (I - \tau \mathcal{A}_\alpha)^i A^*$, тогда как u_α есть $u_\alpha = R_\infty g$. Следовательно,

$$\|\tilde u_n - u_\alpha\|_X \le \|R_n(g_\delta - g)\|_X + \|R_n g - R_\infty g\|_X \le$$

$$\le \|R_n\|\, \|g_\delta - g\|_Y + \|R_n - R_\infty\|\, \|g\|_Y.$$

Поскольку при $\tau = \tau_{opt}$ имеем

$$\|I - \tau \mathcal{A}_\alpha\| \le q_\alpha, \quad q_\alpha = \frac{\|A^*A\|}{2\alpha + \|A^*A\|} < 1,$$

то

$$\|R_n\| \le \tau \|A^*\| \sum_{i=0}^{n} q_\alpha^i \le \frac{\tau\|A^*\|}{1 - q_\alpha} = \frac{\tau\|A^*\|\,(\|A^*A\| + 2\alpha)}{2\alpha} = \frac{\|A^*\|}{\alpha}$$

$$\|R_n - R_\infty\| \le \tau\|A^*\| \sum_{i=n+1}^{\infty} q_\alpha^i \le \frac{\|A^*\|}{\alpha} q_\alpha^{n+1}$$

$$\|\tilde u_n - u_\alpha\|_X \le \frac{\|A^*\|}{\alpha}(\delta + \|g\|_Y q_\alpha^{n+1}).$$

Пусть n достаточно большое, причём $n \cong |\ln\delta|/\alpha$ при $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$. Тогда $\delta \cong q_\alpha^n$, а значит, $\|\tilde{u}_n - u\|_X \le C\delta/\alpha$, где постоянную C можно считать не зависящей от α, δ, n. Выбирая $\alpha = \alpha(\delta)$ так, чтобы $(\delta/\alpha(\delta)) \to 0$ при $\delta \to 0$, получаем как сходимость $\tilde{u}_n$ к u_α, так и оценку погрешности $(\tilde{u} - u_\alpha)$. Сформулируем установленные результаты в виде следующего утверждения:

Лемма. *Если в методе* (51) *выбрать* $\tau = \tau_{opt} = 2/(2\alpha + +\|A^*A\|)$, *а* $\alpha = \alpha(\delta)$ *и число итераций* $n = n(\delta, \alpha)$ *такие, что*

$$\begin{gathered} \alpha = \alpha(\delta) \to 0, \quad n(\delta,\alpha) \cong |\ln\delta|/\alpha(\delta) \to \infty, \\ \delta/\alpha(\delta) \to 0 \ \ \text{при} \ \ \delta \to 0, \end{gathered} \tag{52}$$

то $\tilde{u}_n \to u_\alpha$ *при* $\delta \to 0$, *причём*

$$\|\tilde{u}_n - u_\alpha\|_X \le C\delta/\alpha(\delta), \tag{53}$$

где $C = const$.

Следствие 1. *Если в* (51) *принято* $\alpha(\delta) = \delta^s$, *где* $0 < < s < 1$, *то утверждения леммы справедливы при* $n \cong \cong |\ln\delta|/\delta^s \to \infty$, $\delta/\alpha(\delta) = \delta^{1-s} \to 0$, *а также* $\delta \cdot n(\delta) = = \delta^{1-s}|\ln\delta| \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

На основе (53) и подходящих ограничений на решение (или исходные данные) задачи $Au = g$ можно установить сходимость $\tilde{u}_n$ к u или $A\tilde{u}_n$ к g. Например, имеем

Следствие 2. *Пусть* $u \in X$ *и выполнены условия следствия 1. Тогда при* $s = 2/3$ *получаем сходимость невязки* $(A\tilde{u}_n - g)$ *к нулю при* $\delta \to 0$, *причём* $\|A\tilde{u}_n - g\|_Y \le C\delta^{1/3}$, $C = const$.

Доказательство. Если $u \in X$, то из уравнений $A^*Au = = A^*g$, $\alpha u_\alpha + A^*Au_\alpha = A^*g$ легко получаем оценки вида

$$\begin{gathered} 2\alpha\|u - u_\alpha\|_X^2 + \|A(u - u_\alpha)\|_Y^2 \le \alpha\|u\|_X^2 \\ \|Au_\alpha - g\|_Y \le \sqrt{\alpha}\|u\|_X. \end{gathered}$$

При ограничениях следствия 1 имеем также

$$\begin{gathered} \|A\tilde{u}_n - g\|_Y \le \|Au_\alpha - g\|_Y + \|A\tilde{u}_n - Au_\alpha\|_Y \le \\ \le \sqrt{\alpha}\|u\|_X + \|A\|\,\|\tilde{u}_n - u_\alpha\|_X \le C\delta^{1/3}, \end{gathered}$$

где $C = const < \infty$. ■

На основе полученных ранее утверждений получаем следующий результат сходимости.

Следствие 3. *Если $A \in L(X, Y)$ и выполнены условия следствия 1, то $\{\tilde{u}_n\}$ сходятся к псевдорешению u^+ уравнения $Au = g$, если $Qg \in R(A)$, где Q — ортопроектор на $R(A)$, и к нормальному решению, если $g \in R(A)$.*

§ 5. Некоторые понятия теории оптимального управления

5.1. Понятие о задаче оптимального управления

Задачи оптимального управления можно рассматривать как специальный случай экстремальных задач. Это есть задачи о выборе наилучшего в заранее предписанном списке способа осуществления некоторого управляемого процесса. Этот (стационарный или нестационарный) *процесс* может быть, как правило, описан при помощи дифференциальных, интегральных, функциональных, конечно-разностных или иных формализованных соотношений, зависящих от системы функций или параметров, называемых *управляющими* и подлежащих определению. Искомые управления, а также реализацию самого процесса следует в общем случае выбирать с учётом ограничений. Если в заданном классе управлений требуется выбрать управление, оптимизирующее заданный показатель (критерий) качества процесса и представимый в виде функционала (от независимых переменных задачи, управления и др.), то управление, решающее проблему оптимизации (минимизации, максимизации и т.д.) показателя качества процесса, называется*оптимальным управлением*, а всю задачу называют *задачей оптимального управления.*

Задача оптимального управления в общем виде может быть описана следующим образом.

1. Пусть задана некоторая управляемая система (процесс) S, состояние которой описывается некоторой функцией ϕ (вектор-функцией, элементом некоторого функционального пространства и т.д.), зависящей от независимых переменных (пространственных переменных, времени и др.). Предполагается, что к системе S приложены некоторые управляющие воздействия u (функции, описывающие воздействие "сил", функции температурных или электрических потенциалов, капиталовложения и т.д.).

2. Дано уравнение — *уравнение состояния*, связывающее независимые переменные, ϕ, u и описывающее поведение системы. Одним из случаев этого уравнения может быть некоторое операторное уравнение $L(\phi, u, f) = 0$, где L — оператор, действующий в подходящих пространствах, а f — заданная функция.

3. Известен характер информации, которая может быть использована для формирования управляющих воздействий (например, задается функция φ_{ob}, построенная на основе экспериментальных измерений функций ϕ во всей области, где оператор ϕ, или на какой-то её подобласти). Оговаривается класс функций, среди которых будут описываться управления.

4. Устанавливаются ограничения на процесс, подлежащий реализации. Сюда прежде всего входят дополнительные ограничения, которые могут быть наложены на величины управляющих воздействий u, на область их определения (локализованные управления, неотрицательность управлений и т.п.).

5. Задаётся показатель (критерий) качества процесса, представимый в виде функционала $J(\phi, \ldots, u)$ (функционал стоимости, функция стоимости и др.) от рассматриваемых переменных $\phi, \ldots, u$ (возможно, как независимых переменных, так и зависимых ϕ, u). Условия 1)–4) дополняются условием оптимальности процесса – минимума, максимума

и т.д. J. Например, этим условием может быть

$$\inf_u J(\phi, \ldots, u, \varphi_{ob}).$$

После того как задача оптимального управления описана (см. 1)–5)), она формулируется так: *в выбранных функциональных пространствах требуется найти решение уравнения состояния* ϕ *и управление* u *такие, чтобы* (при выполнении дополнительных ограничений на управления) выполнялся критерий оптимальности процесса. Если задача рассматривается без дополнительных ограничений (на управления), то её называют ещё задачей без ограничений. Если задача оптимального управления имеет решение, то пару ϕ, u называют *оптимальным решением*, а управление u — *оптимальным управлением.*

В изучении задачи оптимального управления выделяют вопросы существования решения, вывод необходимых условий экстремума (оптимальности управления) — *условий оптимальности*, исследование достаточных условий, построение численных алгоритмов.

Описанный вариант постановки задач оптимального управления предполагает существование корректной математической модели процесса. Однако в приложениях доступной информации о системе (коэффициенты уравнения состояния, данные измерений и характер функции φ_{ob} могут обладать характером неопределённости и т.д.) может оказаться недостаточно для прямого использования отмеченных выше постановок задач оптимального управления. Поэтому возникает потребность в модификации этих постановок, что приводит к *задачам оптимального управления в условиях неопределённости*, задачам приближённого управления, задачам плотной управляемости и т.д.

Формализуем теперь ряд изложенных выше понятий и этапов в постановке задачи оптимального управления, причём в качестве управления состояния и критерия оптимальности будем брать частные их случаи, при этом дополнительные ограничения на управления будут отсутствовать.

Пусть рассматривается некоторая система (процесс), состояние которой описывается элементом ϕ и которая является решением *уравнения состояния* вида

$$L\phi = f + Bu, \tag{54}$$

где L, B — линейные операторы $L : W \to Y$, $B : H_C \to \to Y$, W, Y, H_C — гильбертовы пространства, $D(L)$ — область определения оператора L, $D(B)$ — область определения B. Считаем $\overline{D(L)} = W$, $\overline{D(B)} = H_C$, f — заданный элемент пространства Y, u — управление, подлежащее определению вместе с ϕ. Отметим, что операторы L, B могут быть неограниченными и несимметричными.

Пусть рассматривается некоторый функционал $J(u, \phi)$ класса C^1, зависящий от u, ϕ и, возможно, от независимых переменных, а также от некоторых заданных элементов (например, функции φ_{ob}, построенной на основе данных измерений, или φ_{ob} есть функция конечного состояния, в которое должна перейти описанная система в момент времени $t = T$ и т.д.). Область определения $D(J)$ функционала J считаем выпуклым и плотным в H_C. Элемент u считаем *управлением*; если он определён, то функция ϕ определяется как решение уравнения (54), т.е. имеем зависимость ϕ от u. Поэтому можно писать $\phi \equiv \phi(u)$, $J(u) \equiv J(u, \phi(u))$.

Пусть функционал J принимается в качестве критерия качества процесса (функционала стоимости, функции стоимости и т.д.). Чтобы найти ϕ вместе с u, введём условие вида

$$J(u, \phi(u)) = \inf_v J(v, \phi(v)), \tag{55}$$

которое можно также рассматривать как дополнительное уравнение, которое замыкает задачу определения неизвестных ϕ, u из соотношений (54), (55).

Определение. Если задача (54), (55) имеет решение ϕ, u, где $\phi = \phi(u)$, то элемент u называется *оптимальным* *управлением*, а пару ϕ, u называют *оптимальным решением.*

Если уравнение (54) корректно разрешимо при заданном u, то существует обратный оператор L и $\phi = L^{-1}(f + Bu)$. Поэтому функцию ϕ можно, как уже отмечалось выше, исключить и рассматривать функционал $J(v) \equiv J(v, \phi(v))$ (даже не требуя явного вида L^{-1}!), и проблему минимизации по одной переменной v. В дальнейшем в данной книге при *рассмотрении задач типа* (54), (55) *мы всегда будем считать, что если управление* v *задано, то уравнение* (54) *имеет единственное решение* $\phi = L^{-1}(f + Bv)$ *и разрешимость* (54) *является корректной, т.е. в подходящих пространствах* $\|L^{-1}\| < \infty$. В силу данного предположения и того, что $J \equiv J(v)$, мы часто будем принимать $D(B) = D(J)$.

5.2. Условия оптимальности

Предположим, что задача (55) исследована и доказано существование непустого множества U_* оптимальных управлений. Если некоторый элемент $u \in U_*$ является внутренней точкой из U_*, то согласно теории экстремальных задач она принадлежит множеству критических точек задачи (55) и должно выполняться условие:

$$\delta J(u, \delta u) \equiv \frac{dJ(u + \varepsilon \delta u, \phi(u + \varepsilon \delta u))}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0$$

при $\forall\,(u + \delta u) \in D(J)$, т.е. первая вариация функционала должна равняться нулю в точке u. Это условие приводит к уравнению вида

$$\langle J'_u(u, \phi(u), \delta u\rangle + \langle J'_\phi(u, \phi(u)), \delta\phi\rangle = 0, \qquad (56)$$

— *необходимому условию оптимальности*, где J'_u, J'_ϕ — частные производные функционала J по u и ϕ, а зависимая вариация $\delta\phi$ связана с независимой вариацией δu посредством уравнения

$$L\delta\phi = B\delta u, \tag{57}$$

полученного из (54) при переходе[1] от u к $u + \delta u$, т.е. $\delta\phi = L^{-1}B\delta u$. Если подставить это выражение для $\delta\phi$ в (56) и предположить, что $(L^{-1}B)^* = B^* L^{*-1}$, то из (56) получаем следующие выражения необходимого условия оптимальности

$$\langle J'_u(u,\phi), \delta u\rangle + \langle J'_\phi(u,\phi), L^{-1}B\delta u\rangle = 0,$$
$$\langle J'_u(u,\phi) + B^* L^{*-1} J'_\phi(u,\phi), \delta u\rangle = 0$$

при любых δu, таких, что $(u + \delta u) \in D(J)$. В силу условия плотности $D(J)$ в пространстве H_C из последнего соотношения получаем *уравнение Эйлера*

$$J'_u(u,\phi) + B^* L^{*-1} J'_\phi(u,\phi) = 0, \tag{58}$$

задающее *необходимое условие оптимальности*, как уравнение в пространстве H_C.

Таким образом, если $u, \phi \equiv \phi(u)$ есть решение задачи оптимального управления (54), (55), причём u — внутренняя точка из $D(J)$, то необходимо выполняются уравнения вида

$$L\phi = f + Bu, \quad J'_u(u,\phi) + B^* L^{*-1} J'_\phi(u,\phi) = 0. \tag{59}$$

Если ввести элемент $q \equiv L^{*-1} J'_\phi(u,\phi)$, который, как легко заметить, есть решение *сопряженного уравнения* $L^* q = J'_\phi(u,\phi)$, то систему (59) можно представить в форме системы *прямых и сопряженных уравнений и условия оптимальности*:

$$\begin{cases} L\phi = f + Bu, \\ L^* q = J'_\phi(u,\phi), \\ J'_u(u,\phi) + B^* q = 0, \end{cases} \tag{60}$$

где L^* — *сопряжённый оператор,* действующий из Y^* в X^* и имеющий область определения, которую обозначим через

[1]В случае нелинейного уравнения состояния $L(\phi, u) = 0$ с гладким оператором уравнение для вариаций $\delta\phi, \delta u$ имеет вид $L'_\phi\delta\phi + L'_u\delta u = 0$.

$D(L^*)$. Систему (60) будем называть также *системой вариационных уравнений* или *системой условий оптимальности.* (Обратим внимание на то, что в системе (60) не требуется знания явного вида обратных операторов $L^{-1}, \dots,$ L^{*-1}.)

Приведём некоторые примеры функционалов $J(u, \phi)$ и соответствующих им задач оптимального управления.

Пример 1. Пусть уравнение (54) описывает некоторый нестационарный процесс, t — время — является одной из независимых переменных, $t \in [0, T]$. Предположим, что при $\forall t \in [0, T]$ функция $\phi \equiv \phi(\delta)$ принадлежит некоторому гильбертову пространству H. Требуется найти такое управление u, чтобы решение ϕ уравнения состояния в конечный момент времени отклонялось от некоторого заданного состояния, описываемого функцией φ_{ob}, наименьшим образом по норме $\| \cdot \|_H$. Данная задача является задачей управления — задачей о финальном наблюдении. Для формулировки её как задачи оптимального управления примем $C\phi \equiv \phi|_{t=T} = \phi(T)$, т.е. C есть оператор "взятия следа"при $t = T$, и пусть $J(u, \phi) \equiv J(\phi(u)) = \|\phi(T) - \varphi_{ob}\|_H^2$. Тогда задача оптимального управления имеет вид: требуется найти φ, u такие, что

$$L\phi = f + Bu, \quad \|\phi(T) - \varphi_{ob}\|_H^2 = \inf_u .$$

Отмечаем, что если множество решений U_* этой задачи непусто, то решение (если оно существует!) *задачи точного управления* вида

$$L\phi = f + Bu, \quad \phi(T) = \varphi_{ob}$$

заведомо включено в U_*. ■

Пример 2. Пусть решение ϕ уравнения (54) описывает состояние некоторой системы с заданной функцией источника f и дополнительными источниками вида Bu, генерируемых управлением u. Необходимо подобрать дополнительные источники (т.е. фактически функцию u) так, чтобы состояние системы ϕ наименьшим образом отклонялось по норме $\|\cdot\|_W$ от заданного желаемого состояния φ_{ob}. Однако за включение дополнительных источников необходимо вносить "дополнительную плату", которая пусть задаётся выражением $J_0 \equiv \alpha\|u\|^2_{H_C}$, где $\alpha = const > 0$ (удельная себестоимость включения управления u). Пусть также, если $\phi \neq \varphi_{ob}$, мы вынуждены нести издержки, величина которых измеряется величиной $J_1 \equiv \beta\|\phi - \varphi_{ob}\|^2_W$, где $\beta = const > 0$. И если мы примем $u \equiv 0$, то величина J_1 может оказаться неприемлемо большой. Поэтому ставится следующая задача оптимального управления: требуется найти управление u такое, чтобы полный функционал стоимости $J \equiv J_0 + J_1$, принимал наименьшее значение, т.е. чтобы ϕ, u были решением задачи вида

$$L\phi = f + Bu, \quad \alpha\|u\|^2_{H_C} + \beta\|\phi - \varphi_{ob}\|^2_W = \inf_u . \blacksquare$$

Отметим, что в задачах такого типа α, β есть положительные постоянные, и по физическому смыслу они не могут быть сколь угодно малыми. Такие задачи часто встречаются среди классических задач оптимального управления; нередко они являются корректными или могут быть переформулированы так, чтобы они стали корректными, а значит, можно предположить, что и решать их проще по сравнению, например, со случаем задачи, записанной формально в том же виде, но где $\alpha \to +0$. Задачи последнего типа нас и будут интересовать в дальнейшем.

5.3. О подходах к решению задач оптимального управления

Среди общих подходов к решению задач оптимального управления выделим следующие два.

I. В первом подходе задача (54), (55) рассматривается в первую очередь как экстремальная задача о минимизации функционала $J(u)$, при этом уравнение (54) трактуется даже как ограничение в форме уравнения. После установления существования этой задачи её численное решение осуществляется методами минимизации функционала и применяются методы решения экстремальных задач [10, 24, 3].

II. Второй подход в целом базируется на исследовании системы вариационных уравнений (60), являющихся необходимыми условиями оптимальности. При определённых ограничениях (на функционал $J(u)$, область $D(J)$ и некоторые другие) удовлетворение функциями ϕ, q, u является также достаточным условием того, что ϕ, u будет оптимальным решением.

Во втором подходе выделяются следующие два направления исследования и решения задачи. Так, можно попытаться исключить управление u из уравнений, используя уравнение $J'_u(u,\phi)+B^*q=0$ и получая систему для функций ϕ и q (см., например, классическую книгу [34]). Однако заметим, что здесь, как правило, возникает система с несимметричным оператором, а если весовые коэффициенты (типа коэффициента α в примере 2) стремятся к нулю, то система может быть сингулярно возмущенной. Малый коэффициент возникает также в известном методе приближенного решения задач оптимального управления — *методе штрафа*, когда в задаче (54), (55) функционал $J(u)$ приближённо заменяется функционалом $J_\alpha(u) \equiv \alpha\|u\|^2_{X_C}+J(u)$, где $\|u\|_{X_C}$ — норма гильбертова пространства $X_C \subset H_C$, $\alpha = const \geq 0$.

В другом направлении второго подхода исключают функции ϕ, q из (60) и получают одно операторное уравнение для управления u, *считая при этом* $L^{-1}, (L^*)^{-1}$ *заданными неявно* (т.е. отыскание явного вида $L^{-1}, (L^*)^{-1}$ не предполагается). После исключения ϕ, q уравнение для u имеет вид типа уравнений $\alpha u + A^*Au = A^*g$ с некоторым (часто непрерывным) оператором A. Переход к уравнению для управления позволяет (нередко достаточно просто) ответить на принципиальный вопрос: является ли задача (60) корректно поставленной? Очевидно, что ответ на этот вопрос определяет дальнейший ход исследования и численного решения всей задачи. После установления разрешимости уравнения для управления можно сформулировать подходящий итерационный алгоритм, а затем выписать этапы этого алгоритма в терминах операторов системы (60). В дальнейшем мы в основном следуем именно этому направлению исследования и решения рассматриваемых задач [68, 72, 73].