# Глава 5. О ПРИЛОЖЕНИЯХ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ

В данной главе в краткой форме будут предложены некоторые пути распространения рассматриваемых в данной книге методов и подходов к решению обратных задач и задач управления с нелинейным уравнением состояния. Кроме того, мы покажем, что эти подходы могут применяться также для конструирования новых методов вычислительной математики для численного решения классических (прямых) задач математической физики.

## § 1. Подходы к решению нелинейных задач

Рассмотрим некоторое нелинейное уравнение состояния

$$L(\phi, u) = 0 \tag{1}$$

с нелинейным оператором $L$, определенном на парах $(\phi, u) \in$ $\in W \times X_C$ и действующим из пространства $W \times H_C$ в $Y^*$, где $W, \ldots, Y^*$ — система пространств, введенная в § 1, гл. 3 при рассмотрении линейного уравнения состояния. Частными случаями (1) являются следующие уравнения:

$$L(\phi, u) \equiv L_0\phi - B_0 u - f - \beta \cdot D_0(\phi, \phi) = 0, \tag{2}$$

$$L(\phi, u) \equiv L_0\phi - B_0 u - f - \beta \cdot D_1(\phi, u) = 0, \tag{3}$$

где $L_0, B_0$ — линейные операторы, $D_0, D_1$ — билинейные операторы, $f$ — элемент из $Y^*$, а $\beta$ — заданный числовой параметр, который часто возникает в задачах после операций масштабирования и перехода к безразмерным переменным.

Данный параметр можно ввести также формально, а после проведения всех исследований (например, методом малого параметра) положить $\beta = 1$, возвращаясь тем самым к исходной задаче.

Пусть одновременно с (1) рассматривается уравнение

$$C\phi = \varphi_{obs}, \tag{4}$$

с линейным оператором $C$ и заданным элементом $\varphi_{ob} \in H_{ob}$. Система (1), (4) является нелинейной задачей, в которой мы по-прежнему будем считать $u$ дополнительной неизвестной, уравнение (1) — уравнением состояния, а (2) — уравнением замыкания. Предполагаем, что если $u$ задано, то (1) разрешимо относительно $\phi$. Заметим, что относительно нелинейных уравнений типа (1) чаще справедливы предположения о локальной разрешимости в окрестности некоторого решения $(\phi_0, u_0)$ этого уравнения. Однако имеется ряд интересных примеров нелинейных задач, которые разрешимы при любых $u \in X_C$ (см., например, [33]). В последующем, не оговаривая особо, считаем $L$ аналитическим.

Прежде чем рассмотреть некоторые подходы к решению задачи (1), (4), сделаем следующее замечание. Мы рассматривали задачи оптимального управления как одну из форм обобщенной постановки исходной задачи (когда параметр регуляризации равен нулю) и, одновременно, как способ построения регуляризированных решений. В нелинейных задачах типа (1), (4) может оказаться нецелесообразным следовать данному пути (хотя, например, из-за ряда сложностей при исследовании достаточных условий экстремума вводимого функционала), а проще рассматривать систему (1), (4) как нелинейную задачу $\mathcal{L}(U) = 0$ с векторами $U \equiv (\phi, u)$ и применять известные методы решения нелинейных задач. Но здесь необходимо обратить внимание, что эти методы, как правило, сводят задачу к отысканию вектора $U = (\phi, u)$ на каждой итерации и т.п., т.е. к одновременному вычислению $\phi$ и $u$, что усугубляет проблему размерности задачи и построения эффективных численных алгоритмов для решения систем уравнений для $\phi, u$. В подходах, которые мы рассматривали ранее, задача в результате сводилась к последовательному отысканию приближений к $\phi$ и $u$, при этом обращались лишь операторы $L_0, L_0^*$. Поэтому, очевидно, выбор путей исследования задач типа (1), (4) и методов их решения зависит от свойств операторов задачи, корректности её постановки, наличия эффективных методов решения задачи на выбранном пути её исследования и т.д. Мы ниже отметим в краткой форме подходы к решению задач вида (1), (4) с помощью методов, рассматриваемых в предыдущих главах.

Вернёмся к задаче (1), (4). Предположим, что одна из основных трудностей здесь состоит в удовлетворении уравнению (4). Тогда рассматриваем семейство задач

$$L(\phi, u) = 0, \quad J_\alpha(u, \phi(u)) = \inf_{v \in X_C} L_\alpha(v, \phi(v)), \tag{5}$$

где $J_\alpha(v, \phi(v)) = \alpha\|v - u_0\|^2_{X_C} + \|C\phi(v) - \varphi_{obs}\|^2_{H_{ob}}$, $u_0$ — заданный элемент из $X_C$, $\phi(v)$ есть уравнение $L(\phi(v), v) = 0$, $\alpha \geq 0$. Если $\alpha = 0$, то (5) есть обобщённая постановка задачи (1), (4).

Один из подходов к исследованию (5) может базироваться на теории экстремальных задач [10, 24, 11], когда (5) рассматривается в первую очередь как задача о минимизации функционала, а уравнение состояния трактуется как ограничение типа равенства. Предположим, что на основе общих теорем об экстремальных задачах [24], свойств рассматриваемых пространств и операторов устанавливается существование решения (5). После этого приближённое решение задачи можно построить численными методами теории экстремальных задач [8, 10]. Если устанавливается, что элемент $u$ — оптимальное управление — является внутренней точкой выпуклого множества, на котором рассматривается проблема минимизации, то можно перейти к системе вариационных уравнений, которая в данном случае будет иметь вид

$$\begin{gathered} L(\phi, u) = 0, \quad L_\phi^*(\phi, u) q = C^*(C\phi - \varphi_{obs}), \\ \alpha \Lambda_C u - L_u^*(\phi, u) q = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где $L_\phi, L_u$ — частные производные оператора $L$ по $\phi, u$ соответственно. Дальнейшее решение (6) осуществляется подходящими итерационными методами. Простейший из них состоит в задании начального приближения $u^0$ и последующем вычислении $\phi, q$. Новые приближения $u^{k+1}$ можно осуществлять из уравнения

$$\Lambda_C u^{k+1} = \Lambda_C u^k - \tau(\alpha \Lambda_C u^k - L_u^*(\phi^k, u^k) q^k).$$

Проблему выбора параметра $\tau$ и сходимости алгоритма здесь мы не рассматриваем.

Применение методов общей теории экстремальных задач непосредственно к (1), (4) может привести к системам её более сложного вида по сравнению с (1), (4) (пусть даже обладающим рядом хороших свойств). Поэтому в конкретных случаях может оказаться целесообразным предварительное упрощение (1), (4) с помощью, например, метода малого параметра. В результате получают системы уравнений, к которым можно применить рассматриваемые в данной книге алгоритмы. Проиллюстрируем данный подход на примере задачи (2), (4):

$$L(\phi, u) \equiv L_0\phi - B_0 u - f - \beta \cdot D_0(\phi, \phi) = 0, \; C\phi = \varphi_{obs}, \tag{7}$$

где $\beta$ — малый параметр. Предположим, что $\phi, u$ представимы в виде рядов

$$\phi = \phi_0 + \beta\phi_1 + \beta^2\phi_2 + \cdots, \quad u = u_0 + \beta u_1 + \beta^2 u_2 + \cdots \tag{8}$$

Следуя методу малого параметра [42, 45], находим систему уравнений для определения элементов $\{u_i\}, \{\phi_i\}$:

$$\begin{array}{ll} L_0\phi_0 = f_0 + B_0 u_0, & C\phi_0 = \varphi_{obs}, \\ L_0\phi_1 = D_0(\phi_0, \phi_0) + B_0 u_1, & C\phi_1 = 0, \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array} \tag{9}$$

Решая последовательно задачи (9), можно построить приближение к $\phi, u$ с наперёд заданной точностью. В практических расчётах наиболее популярными являются приближения 1-го и 2-го порядка точности, когда $\phi \cong \phi_0 + \beta\phi_1$, $u \cong u_0 + \beta u_1$ или $\phi \cong \phi_0 + \beta\phi_1 + \beta^2\phi_2$, $u \cong u_0 + \beta u_1 + \beta^2 u_2$. Задача для каждой пары $\phi_i, u_i$ есть уже линейная задача, и к ней применимы алгоритмы из предыдущих глав.

Другой подход, также использующий методы малого параметра, состоит в следующем. Пусть рассматривается задача (3), (4)

$$L(\phi, u) \equiv L_0\phi - B_0 u - f - \beta \cdot D_1(\phi, u) = 0, \; C\phi = \varphi_{ob}, \quad (10)$$

где

$$\varphi_{obs} = \varphi_{obs}^{(0)} + \varepsilon\varphi_{obs}^{(1)} + \varepsilon^2\varphi_{obs}^{(2)} + \cdots, \quad \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$$

с заданными элементами $\{\varphi_{obs}^{(i)}\}$ и малым параметром $\varepsilon$. Предположим, что при $\varepsilon = 0$ задача (10) имеет решение $\phi_0, u_0$ при $\varphi_{obs}^{(0)} \equiv C\phi_0$, т.е. $\phi_0, u_0$ удовлетворяют уравнению состояния $L(\phi_0, u_0) = 0$, а в качестве $\varphi_{obs}^{(0)}$ по определению принимается значение $C\phi_0$. Пусть задается (или наблюдается) отклонение $\varphi_{obs} - \varphi_{obs}^{(0)} = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\varphi_{obs}^{(i)}$ и требуется определить возмущения в элементе $u$, которые вызвали данное отклонение. Считаем, что $f$ задаётся в виде $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots$, а неизвестное $u$ ищется в классе элементов $u$ вида

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots,$$

которые принадлежат к классу $X_C$ при $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Пусть производная $L_\phi(\phi_0, u_0)$ непрерывно обратима. Тогда по теореме о неявных операторах уравнение $L(\phi, u) = 0$ определяет в окрестности точки $\phi_0, u_0$ единственную неявную функцию $\phi = \phi(u)$ и $\phi(u)$ аналитична в точке $u_0$. Учитывая выбор вида $u$, заключаем, что $\phi$ представима также в виде аналитической функции по $\varepsilon$:

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \cdots$$

Привлекая методы малого параметра, находим системы для определения $\{\phi_i\}, \{u_i\}$:

$$\begin{array}{ll} L\phi_1 = f_1 + Bu_1, & C\phi_1 = \varphi_{obs}^{(1)}, \\ L\phi_2 = \tilde{f}_2 + Bu_2, & C\phi_2 = \varphi_{obs}^{(2)}, \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array} \tag{11}$$

где

$$L\phi_k = L_0\phi_k - \beta \cdot D_1(\phi_k, u_0),\ Bu_k = B_0u_k + \beta \cdot D_1(\phi_0, u_k),$$
$$\tilde{f}_2 = f_2 + \beta \cdot D_1(\phi_1, u_1).$$

Решая последовательно задачи (11), можно найти приближённое решение исходной задачи с подходящей точностью. Каждая из этих задач является уже линейной, и здесь возможно применение методов, изложенных в предыдущих главах.

Рассмотрим ещё один подход, который может быть применён к (1), (4). Пусть снова $\phi_0, u_0$ таковы, что $L(\phi_0, u_0) \equiv 0$, $\varphi_{obs}^{(0)} \equiv C\phi_0$ и $\varphi_{obs} = \varphi_{obs}^{(0)} + \varphi_{obs}^{(1)}$, где $\|\varphi_{obs} - \varphi_{obs}^{(0)}\|_{H_C} \leq \delta$, $\delta$ — малое число. Предположим, что выполнены следующие три условия: 1) оператор $L_\phi(\phi, u)$ непрерывно обратим; 2) $N(C(L_\phi^{-1}L_u)(\phi, u)) = \{0\}$; 3) $X_C$ есть конечномерное подпространство из $H_C$. Тогда (как уже отмечалось ранее в случае линейных задач) первая производная Фреше оператора всей системы (1), (4) вместе с оператором $A \equiv CL_\phi^{-1}L_u$ будут непрерывно обратимы. Тогда по теореме о неявных операторах в окрестности точки $\phi_0, u_0$ существует решение задачи (1), (4), которое является также решением вариационной задачи (5) при $\alpha = 0$. После того как локальное существование решения (5) установлено, можно применить итерационные методы решения экстремальных задач для минимизации функционала $J_0(u)$ (см. гл. 2), *которые будут сводить* *решение задачи к последовательному определению приближений к $\phi, u$* из уравнений типа (6).

В качестве примера нелинейной задачи (1), (4) отметим задачу усвоения данных наблюдений для нелинейной квазигеострофической многослойной модели динамики океана, исследованной в [76, 77] методами общей теории экстремальных задач и нелинейных задач математической физики.
Другой пример подхода к приближённому решению задач типа (1), (4) рассматривается в следующем параграфе для кинетического уравнения коагуляции–дробления.

## § 2. Решение задачи о восстановлении функции источника в уравнении коагуляции-дробления

### 2.1. Постановка задачи и приближенная модель процесса коагуляции-дробления

Рассмотрим уравнение коагуляции–дробления Смолуховского

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_0^x K(x-y,y)c(x-y,t)c(y,t)dy -$$

$$-c(x,t)\int_0^\infty K(x,y)c(y,t)dy + \int_x^\infty \Psi(y,x)c(y,t)dy -$$

$$-\frac{c(x,t)}{x}\int_0^x y\Psi(x,y)dy + v(x,t),\ \ x \geq 0,\ \ t > 0, \qquad (12)$$

где функция $c(x,t) \geq 0$ является функцией распределения частиц по массам $x$. Известные из физики процесса функции $K(x,y) = K(y,x) \geq 0$ и $\Psi(x,y) \geq 0$, называются ядрами коагуляции и дробления, соответственно. К уравнению (12) добавим начальное условие

$$c(x,0) = c_0(x) \geq 0. \qquad (13)$$

Рассмотрим одну из обратных задач для уравнения (12). Предположим, что функция $v(x,t)$ финитна по $t$ с носителем из $(t_1,t_2) \subset (0,T)$, $0 < t_1 < t_2 < T < \infty$. В дальнейшем мы будем записывать $v$ в виде $m_c(t)v(x,t)$, где $m_c$ является характеристической функцией интервала $(t_1,t_2)$. Теперь функцию $v(x,t)$ можно продолжить на $[0,\infty)\times[0,T]$ каким-либо подходящим образом. Предполагается, что помимо $c(x,t)$ функция $v(x,t)$ также неизвестна, и требуется определить ее при $t \in (t_1,t_2)$, используя дополнительную информацию

$$c(x,T) = c_{\text{obs}}(x). \tag{14}$$

Таким образом, возникает обратная задача о нахождении $c, v$ таких, что выполнены соотношения (12)–(14). Далее в этом разделе рассматривается сформулированная обратная задача в приближенной линеаризированной постановке.

Перейдём к приближённой модели процесса коагуляции–дробления. Считаем функцию $c_0(x) \geq 0$ и ядра коагуляции $K(x,y)$ и дробления $\Psi(x,y)$ финитными с носителями в $[0,H]$ – для $c_0(x)$, а для ядер – в $[0,H]\times[0,H]$, $H < \infty$. Будем рассматривать задачу (12)–(14) при малых $t > 0$. Тогда начальную функцию $c_0(x)$ можно рассматривать в качестве приближения к решению $c(x,t)$. Полагая $g(x,t) = c(x,t) - c_0(x)$ и пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, приходим к следующему линейному уравнению для приближения функции $g$ (за которым оставим прежнее обозначение $g$):

$$\begin{gathered}\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = Kg(x,t) - a(x)g(x,t) + m_c v(x,t) + \mathbf{S}(c_0)(x,t), \\ g(x,0) = 0,\ g(x,T) = g_{\text{obs}}(x),\ 0 \leq x \leq H,\ 0 < t \leq T,\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$K = K_1 - K_2 + K_3,\ K_1 g(x) = \int_0^x K(x-y,y)c_0(x-y)g(y)dy,$$

$$K_2 g(x) = c_0(x)\int_0^H K(x,y)g(y)dy,\ K_3 g(x) = \int_x^H \Psi(y,x)g(y)dy,$$

$$a(x) = \int_0^H K(x,y)c_0(y)dy + \int_0^x \Psi(x,y)\frac{y}{x}dy,$$

$$g_{\text{obs}}(x) = c_{\text{obs}}(x) - c_0(x),$$

$$\mathbf{S}(c)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x K(x-y,y)c(x-y)c(y)dy-$$

$$-c(x)\int_0^\infty K(x,y)c(y)dy + \int_x^\infty \Psi(y,x)c(y)dy-$$

$$-\frac{c(x)}{x}\int_0^x y\Psi(x,y)dy.$$

Теперь задача приобретает следующий вид: найти $g, v$ такие, что имеют место соотношения (15).

Перепишем задачу (15) в операторном виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} + Ag(x,t) = (m_c v(x,t) + \mathbf{S}(c_0)),\\ (x,t) \in X = [0,H]\times[0,T]\end{gathered} \tag{16}$$

с дополнительными условиями

$$g|_{t=0} = 0, \quad g|_{t=T} = g_{\text{obs}}(x). \tag{17}$$

Здесь $A = aI - K:\ L_2(X) \mapsto L_2(X),\ v \in L_2(X)$; считаем ядра коагуляции и дробления такими, что оператор $A$ ограничен. В этом случае $\dfrac{\partial g}{\partial t} \in L_2(X)$ и $g \in L_2(0,H;W_2^1(0,T))$, так что почти всюду определены значения $g(x,t) \in L_2[0,H]$, $t \in [0,T]$ и $g(x,t) \in C[0,T]$ почти при всех $x \in [0,H]$. Теперь мы приходим к следующей постановке обратной задачи: найти функции $g$, $v \in L_2(X)$, удовлетворяющие (16), (17).

Пусть функция $g_1$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial g_1(x,t)}{\partial t} + Ag_1(x,t) = \mathbf{S}(c_0),\ (x,t) \in X,\ g_1|_{t=0} = 0.$$

Тогда для $h(x,t) = g - g_1$ задача (16), (17) сводится к нахождению функций $h$, $v \in L_2(X)$ таких, чтобы

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + Ah(x,t) = m_c v(x,t),\ (x,t) \in X, \tag{18}$$

$$h(x,0) = 0, h(x,T) = h_{obs}(x). \tag{19}$$

Здесь $h_{\text{obs}} = g_{\text{obs}} - g_1(x,T)$. Таким образом, обратная задача (15) сведена к задаче (18), (19).

### 2.2. Вариационные уравнения

Наряду с (18)–(19) будем рассматривать следующую вариационную задачу: найти $h$, $v$ такие, что

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + Ah(x,t) = m_c v(x,t),\ (x,t) \in X,\ h(x,0) = 0, \tag{20}$$

$$\inf_{v \in L_2} \left\{ \alpha \|m_c v\|^2_{L_2(X)} + \|h(.,T) - h_{\text{obs}}\|^2_{L_2[0,H]} \right\}.$$

Здесь $\alpha = const \geq 0$. Отметим, что при $\alpha = 0$ вариационная задача (20) может рассматриваться в качестве обобщенной постановки задачи (18), (19).

Предполагая, что задача (20) имеет решение, получаем систему вариационных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + Ah(x,t) = m_c v(x,t),\ (x,t) \in X,\ h(x,0) = 0,\\ -\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + A^* q(x,t) = 0,\ (x,t) \in X,\ q|_{t=T} = h|_{t=T} - h_{\text{obs}}, \\ \alpha m_c v(x,t) + m_c q(x,t) = 0,\ (x,t) \in X.\end{gathered} \tag{21}$$

Очевидно, обратная задача (18), (19) имеет бесконечно много решений в $L_2(X)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять любую гладкую функцию $g(x,t)$ с носителем в $[0, H] \times [t_1, t_2]$, подставить ее в (18) и получить $v(x,t) \in \in L_2(X)$. Однако возможно, что в некоторых классах $V$ функций управления $v$ решение обратной задачи будет единственным. С целью выделения одного из таких классов $V$ рассмотрим некоторую заданную функцию $V_0(t) \in L_2[0,T]$, причем $V_0(t)$ неотрицательна на $[t_1, t_2]$ и $\int_{t_1}^{t_2} V_0(t)dt > 0$. Пусть для дальнейшего класс $V$ определяется следующим образом: $V = \{v(x,t) : v(x,t) = V_0(t)v(x),\ v(x) \in L_2[0,H]\}$. Легко заметить, что $V$ есть подпространство из $L_2(X)$. Подпространство $V$, соответствующее случаю $V_0(t) \equiv 1, t \in (t_1, t_2)$, будем обозначать через $V_{(1)}$.

Отмечаем, что если $v(x,t)$ ищется в подпространстве $V$, то система вариационных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + Ah(x,t) = m_c V_0(t)v(x),\ (x,t) \in X,\ h(x,0) = 0,\\
&-\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + A^* q(x,t) = 0,\ (x,t) \in X,\ q|_{t=T} = h|_{t=T} - h_{\text{obs}}, \quad (22)\\
&\alpha \int_0^T m_c V_0^2(t)dt v(x) + \int_0^T m_c V_0(t) q(x,t)dt = 0,\ x \in (0,H).
\end{aligned}$$

Свойства операторов рассматриваемых задач изучены в работе [88], где также сформулированы условия разрешимости данных задач. Ниже приводятся только итерационные алгоритмы для их решения.

## 2.3. Итерационный алгоритм

При достаточно малых значениях $\alpha > 0$ и выполнении некоторых дополнительных ограничений решение задачи (21) может рассматриваться в качестве приближенного решения задачи (18), (19) (см. [88]). Для решения (21) можно рассмотреть различные итерационные алгоритмы. Приведем один из них, а именно следующий простейший итерационный алгоритм:

$$\frac{\partial h^n}{\partial t} + Ah^n = m_c v^n,\ h^n|_{t=0} = 0,$$
$$-\frac{\partial q^n}{\partial t} + A^* q^n = 0,\ (x,t) \in X,\ q|_{t=T} = P_T h^n - h_{\text{obs}},$$
$$v^{n+1} = v^n - \tau(\alpha v^n + q^n),\ t \in (t_1, t_2),\ n = 0, 1, \ldots,$$

где произвольное начальное значение $v^0 \in L_2(X)$.

Если функция $v(x,t) = V_0(t)v(x)$ ищется в классе $V$, то этот алгоритм имеет вид:

$$\frac{\partial h^n}{\partial t} + Ah^n = m_c v^n, \quad h^n|_{t=0} = 0,$$

$$-\frac{\partial q^n}{\partial t} + A^* q^n = 0, \quad (x,t) \in X, \quad q|_{t=T} = P_T h^n - h_{\text{obs}},$$
$$\int_{t_1}^{t_2} V_0(t) v^{n+1}(x,t) dt = \int_{t_1}^{t_2} V_0(t) v^n(x,t) dt -$$
$$-\tau \int_{t_1}^{t_2} (\alpha v^n(x,t) + q^n(x,t)) dt, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $v^0(x,t) \in V$.

Если ядра коагуляции и дробления таковы, что

$$C_0 \|m_c v\|^2 \le (A_0 v, v) \le C_1 \|m_c v\|^2,$$

то, выбрав $\tau = 2(2\alpha + C_0 + C_1)^{-1}$, имеем

$$\|m_c(v^n - v)\|_{L_2(X)} \le C_2 \left( \frac{C_1 - C_0}{2\alpha + C_0 + C_1} \right)^n \to 0,\ n \to \infty,$$

где $C_2$ не зависит от $n$.

Значения $C_0, C_1$ можно получить, рассмотрев конкретные ядра $K$ и $\Psi$. Отметим, что за простейшее значение $C_0$ можно принять $C_0 = 0$, а в качестве $C_1$ можно выбрать любое достаточно большое число. В этом случае итерационный процесс будет сходиться при любом малом $\alpha > 0$. Результаты тестовых расчётов с помощью рассматриваемых итерационных алгоритмов приводятся в [88].

## § 3. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в вычислительных процессах

В данном параграфе рассматривается ещё одно приложение изучаемых в данной книге подходов, а именно к построению новых вычислительных алгоритмов для численного решения классических задач математической физики. Сначала мы сформулируем основную идею построения таких вычислительных алгоритмов, а затем реализуем её в применении к решению стационарной обобщённой системы Стокса, возмущённой линейным кососимметрическим оператором.

### 3.1. Подход к построению вычислительных алгоритмов

Пусть рассматривается некоторая задача, записанная в виде системы линейных операторных уравнений вида

$$L\phi = Bu + f, \quad C\phi = Du + h, \tag{23}$$

где операторы $L, C$ имеют одну область определения $D(L)$, а операторы $B, D$ — область определения $D(B)$, $f, h$ — заданные элементы. Предположим, что введена система пространств из § 1, гл. 3 и выполнены сделанные там предположения относительно этих пространств и областей $D(L)$, $D(B)$.

Пара $\phi, u$ определяет решение рассматриваемой задачи. Считаем, что представление этой задачи в виде (23) осуществлено так, что оператор $L$ есть главная часть оператора задачи, он непрерывно обратим, но не обязан быть симметричным. Однако предполагается, что мы владеем эффективными алгоритмами обращения $L$ и сопряжённого оператора $L^*$.

Наряду с (23) запишем семейство задач оптимального управления вида

$$L\phi = f + Bu, \quad J_\alpha(u, \phi(u)) = \inf_{v \in D(B)} J_\alpha(v, \phi(v)), \tag{24}$$

где

$$J_\alpha(v, \phi(v)) = \alpha \|v\|^2_{X_C} + \|C\phi - h - Dv\|^2_{H_{ob}},$$
$$L\phi(v) = f + Bv, \quad \alpha \geq 0.$$

Очевидно, что если $\phi, u$ есть решение (23), то $\phi, u$ будет решением (24) при $\alpha = 0$. Таким образом, задачу (24) можно рассматривать как семейство задач, включающее одну из обобщённых постановок (23), в которой второе уравнение рассматривается в смысле "наименьших квадратов".

Если исключить $\phi = L^{-1}(f + Bu)$ из (24), то функционал $J_\alpha(u, \phi(u)) \equiv J_\alpha(u)$ примет вид

$$J_\alpha(u) = \alpha \|u\|^2_{X_C} + \|Au - g\|^2_{H_{ob}}, \tag{25}$$

где

$$A = CL^{-1}B - D, \quad g = h - CL^{-1}f.$$

Вариационное уравнение, соответствующее (25), имеет вид

$$\mathcal{A}_\alpha u \equiv \alpha \Lambda_C u + A^* A u = A^* g, \tag{26}$$

а полная система вариационных уравнений задачи (24) есть

$$\begin{gathered} L\phi = f + Bu, \quad L^* q = C^*(C\phi - h - Du), \\ \alpha \Lambda_C u + B^* q - D^*(C\phi - h - Du). \end{gathered} \tag{27}$$

Если $\mathrm{Sp}(\Lambda_C^{-1} A^* A) \in [\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1]$, $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1 = const$, $\mathbf{C}_0 \geq 0$, $\mathbf{C}_1 > 0$, то для решения уравнения (26), обладающего симметричным и положительно определённым (при $\alpha > 0$) оператором, можно применить различные итерационные процессы. Простейший из них есть

$$\Lambda_C u^{k+1} = \Lambda_C u^k - \tau(\alpha \Lambda_C u^k - A^* A u^k - A^* g), \; k = 0, 1, \ldots \tag{28}$$

Вычислив в нём параметр $\tau$ по формуле: $\tau = 2/(2\alpha + \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1)$, получим следующую оценку скорости сходимости (см. гл. 2):

$$\|u - u^k\|_{X_C} \le C \left( \frac{\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0}{2\alpha + \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1} \right)^k \to 0, \quad k \to \infty, \qquad (29)$$

где постоянная $C$ не зависит от $k$, а $u$ (вместе с $\phi, q$) есть решение (27).

В терминах операторов задачи (23) алгоритм (28) имеет вид при заданном $u^k$:

$$\begin{gathered} L\phi^k = f + Bu^k, \quad L^* q^k = C^*(C\phi^k - h - Du^k), \\ \Lambda_C w^k = B^* q - D^*(C\phi^k - h - Du^k), \\ u^{k+1} = u^k - \tau(\alpha u^k + w^k) \ k = 0, 1, \ldots \end{gathered} \qquad (30)$$

Если для первого уравнения из (23) при заданных $\phi, u$ справедлива оценка $\|\phi\|_W \le C(\|f\|_Y^* + \|u\|_{H_C})$, то отсюда и из (29) получаем оценку скорости сходимости $\phi^k$ к $\phi$:

$$\|\phi - \phi^k\|_W \le C \left( \frac{\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0}{2\alpha + \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1} \right)^k \to 0, \quad k \to \infty, \qquad (31)$$

где $C = const > 0$, а $\phi \equiv \phi(\alpha)$ есть составляющая решения системы (27).

Если система (23) корректно разрешима, то можно в приведённых выше алгоритмах принять $\alpha \equiv 0$. Если же в целом задача (23) некорректна, то необходимо брать $\alpha \to +0$, а число итераций согласовывать с величиной $\alpha$ и возможными ошибками численных реализаций этапов итерационного алгоритма (30) (см. гл. 2).

Предположим, что задача (23) корректно разрешима. Тогда полагая $\alpha \equiv 0$, $\Lambda_C = I$ (т.е. $X_C \equiv H_C$), независимо от симметричности операторов $L, \ldots, D$ алгоритм (30) будет иметь "геометрическую скорость сходимости". Для реализации его нам необходимо последовательно обращать лишь операторы $L, L^*$.

Примером применения рассмотренного подхода к решению задач является алгоритм решения обобщённой системы Стокса, изученный в работе [85], где также приведены численные эксперименты, иллюстрирующие эффективность алгоритма. В следующем разделе мы рассмотрим применение обсуждаемого подхода к решению обобщённой системы Стокса, возмущённой кососимметрическим оператором.

## 3.2. Вычислительный процесс решения возмущенной системы Стокса

В области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с липшицевой границей $\Gamma \equiv \partial\,\Omega$ рассмотрим задачу вида

$$\begin{gathered} -a\Delta\phi + b\phi + K\phi = f - \nabla p \ \text{ в } \ \Omega, \\ \mathrm{div}\phi = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad \int\limits_{\Omega} p\,dx = 0,\, \phi = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \end{gathered} \tag{32}$$

где $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$, $p(x)$ — скалярная функция (давление), $a = const > 0$, $b = const \geq 0$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ — заданная вектор-функция $\in (L_2(\Omega))^n$, $K\phi \equiv (-l\phi_2, l\phi_1, 0, \ldots, 0)$, $l = l_0 + l_1 x_2$, $l_0, l_1 = const$. Если $l \equiv 0$, то задачу (32) называют обобщённой задачей Стокса, если же $l \equiv 0, b \equiv 0$, то получаем классическую задачу Дирихле для стационарной системы Стокса.

Введём пространства $W \equiv (\overset{\circ}{W}{}_2^1\,(\Omega))^n$, $H_0 \equiv (L_2(\Omega))^n$, $H_C \equiv L_2^{(0)}(\Omega) = \{v : v \in L_2(\Omega),\ \int_{\Omega} v\,dx = 0\}$ и запишем (32) в операторной форме

$$L\phi = f + Bp, \quad C\phi = 0, \tag{33}$$

где

$$L = A_0 + K,\ (A_0\phi, \psi) \equiv (a\nabla\phi, \nabla\psi) + (b\phi, \psi)\ \forall\, \phi, \psi \in W,$$

$$(Bp, \psi) \equiv (p, \mathrm{div}\,\psi)_{L_2(\Omega)}\ \forall\, \psi \in W,\ C\psi \equiv \mathrm{div}\,\psi,$$

$$L: W \to W^*,\ B: H_C \to W^*,\ C: W \to H_C,$$
$$D(L) = W,\ D(B) = H_C,\ D(C) = W,\ (\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_{H_0}.$$

Выберем функционал $J_\alpha$: $J_\alpha(p,\phi) = \alpha\|p\|^2_{W_2^k} + \|C\phi\|^2_{H_C}, \quad k = 0, 1$, где $\alpha = const \geq 0$, и рассмотрим семейство задач (24). Тогда в уравнении (26) имеем (при $p \equiv u, \Lambda_C \equiv \Lambda_k$):

$$\Lambda_0 p = p \ \text{ при } \ k = 0,$$

$$(\Lambda_1 p, \tilde{p})_{L_2(\Omega)} \equiv (\nabla p, \nabla \tilde{p})_{L_2(\Omega)} + (p, \tilde{p})_{L_2(\Omega)}$$

$$\forall\, p, \tilde{p} \in W_2^1(\Omega) \ \text{ при } \ k = 1,$$

$$A = -\mathrm{div}\,(A_0 + K)^{-1}\nabla,$$

а уравнения (27) есть

$$\begin{gathered} A_0\phi + K\phi = f + Bp, \quad A_0 q - Kq = C^*C\phi, \\ \alpha\Lambda_k p + B^* q = 0, \quad k = 0, 1. \end{gathered} \tag{34}$$

Далее будем рассматривать лишь случай $k = 0$. Некоторые особенности задач при $k = 1$ и необходимость рассмотрения этого случая при малых положительных значениях $\alpha$ обсуждаются в [85].

Изучим некоторые свойства оператора $\mathcal{A}_0 \equiv A^*A$. При их исследовании мы будем пользоваться первым собственным значением задачи

$$-\Delta\varphi_j = \lambda_j\varphi_j \ \text{ в } \ \Omega, \quad \varphi_j = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \quad \|\varphi_j\|_{L_2(\Omega)} = 1.$$

Известно, что $\lambda_1 = \min\limits_i \lambda_i > 0$.

Докажем сначала положительность оператора $A$. Рассмотрим квадратурную форму $(Ap,p)_{L_2(\Omega)} \equiv \|p\|^2_A \ \forall\, p \in H_C$. Пусть $\phi \equiv -(A_0 + K)^{-1}\nabla p$, тогда

$$\|p\|^2_A = (\mathrm{div}\,\phi, p) = -(\phi, \nabla p) = (\phi, A_0\phi + K\phi) = (\phi, A_0\phi) \geq$$

$$\geq (a\lambda_1 + b)\|\phi\|^2 > 0 \ \text{ при } \ p \not\equiv 0$$

на основании чего заключаем о положительности оператора $A$.

Далее с помощью простых вычислений устанавливается следующее равенство:

$$(Ap, p)_{L_2(\Omega)} \equiv \|p\|_A^2 = (A_0^{-1}\nabla p, \nabla p) - (A_0^{-1}K\phi, K\phi). \qquad (35)$$

Учитывая соотношения, установленные в [85]:

$$\frac{\mu_1\lambda_1}{(a\lambda_1 + b)}\|p\|^2_{L_2(\Omega)} \le (A_0^{-1}\nabla p, \nabla p) \le \frac{1}{a}\,\|p\|^2_{L_2(\Omega)}\ \forall\, p \in H_C, \qquad (36)$$

где $1 > \mu_1 = \mu_1(\Omega) = const > 0$ (оценки для постоянной $\mu_1$ приводятся в [62]), из (35) получаем (при $\|l\|_\infty \equiv \|l\|_{L_\infty(\Omega)}$):

$$\|p\|_A^2 \le \|p\|^2_{L_2(\Omega)}/a;$$

$$\begin{gathered}(\nabla p, A_0^{-1}\nabla p) = \|p\|_A^2 + (A_0^{-1}K\phi, K\phi) \le \|p\|_A^2 + \\ + \frac{\|l\|^2_\infty}{(a\lambda_1 + b)^2}\|\phi\|^2 \le \left(1 + \frac{\|l\|^2_\infty}{(a\lambda_1+b)^2}\right)\|p\|_A^2; \\ \frac{\mu_1\lambda_1(a\lambda_1+b)}{\left((a\lambda_1+b)^2 + \|l\|^2_\infty\right)}\,\|p\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|p\|_A^2 \le \frac{1}{a}\,\|p\|^2_{L_2(\Omega)}.\end{gathered} \qquad (37)$$

Подобные оценки справедливы и для $A^*$, поскольку в проводимых вычислениях достаточно заменить лишь $K$ на $-K$ в силу кососимметричности оператора $K$. Из последних оценок заключаем о справедливости следующего утверждения: *если область $\Omega$ конечна, то операторы $A, A^*$ положительно определены, $N(A) = N(A^*) = \{0\}$ и задача* (34) *корректно разрешима при любом $\alpha \ge 0$, а значит, и задача* (32) (*случай $\alpha = 0$*) *корректно разрешима.*

Получим оценки для границ спектра оператора $\mathcal{A}_0 = A^*A$. Пусть $p, \tilde{p} \in H_C$ и $\phi \equiv -(A_0 + K)^{-1}\nabla p$,

$\tilde{\phi} \equiv -(A_0 + K)^{-1}\nabla\tilde{p}$. Тогда

$$(Ap, \tilde{p})_{L_2(\Omega)} = (\phi, -\nabla\tilde{p}) = (a\nabla\phi, \nabla\tilde{\phi}) + (b\phi, \tilde{\phi}) + (K\phi, \tilde{\phi}) \le$$

$$\le \|p\|_A \|\tilde{p}\|_A + + \frac{\|l\|_\infty}{(a\lambda_1 + b)} \|p\|_A \cdot \|\tilde{p}\|_A \le$$

$$\le \frac{1}{a} \left(1 + \frac{\|l\|_\infty}{(a\lambda_1 + b)}\right) \|p\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\tilde{p}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\|A\| \le \frac{1}{a} \left(1 + \frac{\|l\|_\infty}{a\lambda_1 + b}\right). \tag{38}$$

Из (37) легко получаем (учитывая соотношение $\|p\|_A^2 = = (Ap, p)_{L_2(\Omega)} \le \|Ap\|_{L_2(\Omega)} \|p\|_{L_2(\Omega)}$ ):

$$\frac{\mu_1\lambda_1(a\lambda_1 + b)}{((a\lambda_1 + b)^2 + \|l\|_\infty^2)} \le \frac{\|Ap\|_{L_2(\Omega)}}{\|p\|_{L_2(\Omega)}} \quad \forall\, p \ne 0. \tag{39}$$

На основании (38), (39) делаем заключение, что

$$\mathrm{Sp}(A^*A) \in [\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1], \tag{40}$$

где

$$\mathbf{C}_0 = \left(\frac{\mu_1\lambda_1(a\lambda_1 + b)}{(a\lambda_1 + b)^2 + \|l\|_\infty^2}\right)^2, \ \mathbf{C}_1 = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{\|l\|_\infty}{a\lambda_1 + b}\right)^2,$$

$$\begin{gathered} \xi \equiv \frac{\mathbf{C}_0}{\mathbf{C}_1} = \frac{\mu_1^2(1 + b_0)^4}{((1 + b_0)^2 + a_0^2)^2(1 + b_0 + a_0)^2}, \\ a_0 \equiv \frac{\|l\|_\infty}{a\lambda_1}, \quad b_0 \equiv \frac{b}{a\lambda_1}. \end{gathered} \tag{41}$$

Соотношения (40), (41) играют важную роль при оптимизации скорости сходимости итерационного алгоритма типа

(30) в применении к (34). Пусть $\alpha = 0,\ k = 0$, тогда в классической форме данный алгоритм имеет вид:

$$
\begin{gathered}
-a\Delta\phi^k + b\phi^k + K\phi^k = f - \nabla p^k \quad \text{в} \quad \Omega, \\
\phi^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad \int\limits_{\Omega} p^k\, dx = 0, \\
-a\Delta q^k + bq^k - Kq^k = -\nabla \operatorname{div} \phi^k \quad \text{в} \quad \Omega, \\
q^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \\
p^{k+1} = p^k - \tau \operatorname{div} q^k, \quad k = 0, 1, \ldots,
\end{gathered}
\tag{42}
$$

где $\tau = 2/(\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1)$, а постоянные $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1$ определяются по формулам (41). Для данного алгоритма справедливы оценки скорости сходимости

$$
\|\phi^k - \phi\|_W + \|p - p^k\|_{H_C} \le C \left( \frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^k \to 0,\ k \to \infty, \tag{43}
$$

где $C = const$, $\xi = \mathbf{C}_0/\mathbf{C}_1$. Отмечаем, что при $b \equiv 0,\ l \equiv 0$ имеем $\xi = \mu_1^2$ и скорость сходимости алгоритма определяется только геометрией области, т.к. $\mu_1 = \mu_1(\Omega)$.

Итак, если мы имеем эффективные алгоритмы решения обычных эллиптических задач, то на их основе и основе алгоритмов типа (42) можно строить вычислительные процессы решения задач для систем Стокса, возмущённых кососимметрическими операторами. При этом мы избегаем трудностей, связанных с удовлетворением условию $\operatorname{div} \phi = 0$ в $\Omega$. В свою очередь, легко заметить, что с помощью алгоритмов (42) реализуются этапы итерационных процедур решения обратных задач, рассмотренных в § 7 предыдущей главы.