ПРЕДИСЛОВИЕ

В современном обществе всевозрастающую роль играют разнообразные обратные задачи, задачи управления сложными процессами, задачи идентификации, задачи усвоения данных наблюдений в математических моделях и др. Поэтому насущной проблемой является разработка методологий эффективного решения данных задач. Одна из таких методологий на протяжении ряда лет исследовалась в Институте вычислительной математики Российской академии наук. Она базируется на подходах и результатах нескольких разделов современной математики: теории оптимального управления системами с распределёнными параметрами, теории линейных уравнений в банаховых пространствах, теории некорректно поставленных задач и общих методах их решения, сопряжённых уравнениях и современных итерационных алгоритмах для операторных уравнений. Основные положения этой методологии излагаются в данной книге.

Книга является расширенным изложением курса лекций, прочитанного автором в 2002 году в МФТИ на кафедре математического моделирования физических процессов студентам и группе энтузиастов из числа аспирантов и молодых учёных. Этот курс был прочитан в 2002 году также в университете г.Брешиа (Universitá degli Studi di Brescia, Italia, в 2005г. - в EPFL (г. Лозанна, Швейцария), в 2009г.- в Сибирском Федеральном университете (г.Красноярск). В настоящее время данный курс читается автором как специальный курс лекций в МГУ и МФТИ.

Большое влияние на формирование подходов, излагаемых в книге, оказали методы, развиваемые научными школами А.Н.Тихонова, М.М.Лаврентьева и Ж.-Л.Лионса (Франция). Значительная часть приложений рассматриваемой методологии к обратным задачам теории переноса частиц была выполнена автором в 1997–1999 гг. в Ecole Normale Supérieure de Cachan (Paris, France). Данные исследования проводились при поддержке Министерства образования Франции. Автор благодарен Министерству образования и CNRS Франции за предоставленную возможность осуществить эти исследования.

Методология, излагаемая в настоящей книге , составляет теоретическую базу разработок и исследований, проводимых в Институте вычислительной математики РАН по созданию Специализированной Информационно-вычислительной системы вариационной ассимиляции данных наблюдений при поддержке Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013годы (Государственный контракт № П2237).Теоретические исследования по рассматриваемым в книге проблемам на протяжении ряда лет поддерживались также Российским фондом фундаментальных исследований и Отделением математики РАН.

Издание настоящей электронной версии книги осуществлено в рамках Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013годы

Автор благодарит всех своих коллег из Института вычислительной математики РАН и из научных школ Ж.–Л.Лионса и Э.Мадженеса за сотрудничество на протяжении многих лет.

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящем введении мы приведем обозначения и понятия, являющиеся общепринятыми в теории задач математической физики, а также сформулируем некоторые из этих задач. Затем будут даны примеры задач, которые отнесем в дальнейшем к классу обратных задач, исследование и разработка алгоритмов решения которых составляет основную цель настоящей книги. В третьей части введения в виде единой схемы описывается взаимосвязь задач и уравнений, подходов и методов, рассматриваемых и применяемых ниже. Данная схема фактически представляет собой общий план построения книги.

§ 1. Множества и области из R^n

Пусть $\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$) есть n-мерное вещественное евклидово пространство, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – точка в $\mathbf{R}^n$, где x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, – координаты точки x. *Скалярное произведение* и *норму* (*длину*) в $\mathbf{R}^n$ обозначим соответственно через $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, $|x| = (x, x)^{1/2} = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$. Тогда число $|x - y|$ есть евклидово расстояние между точками x и y.

Множество точек x из $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < R$, называется *открытым шаром* радиуса R с центром в точке x_0. Этот шар будем обозначать $U(x_0; R)$, $U_R = U(0; R)$.

Множество называется *ограниченным* в $\mathbf{R}^n$, если существует шар, содержащий это множество.

Точка x_0 называется *внутренней* точкой множества, если существует шар $U(x_0;\varepsilon)$, содержащийся в этом множестве. Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить кусочно-гладкой кривой, лежащей в этом множестве. Связное открытое множество называется *областью*. Точка x_0 называется *предельной точкой* множества A, если существует последовательность x_k, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $x_k \in A$, $x_k \neq x_0$, $x_k \to x_0$, $k \to \infty$. Если к множеству A добавить все его предельные точки, то полученное множество называется *замыканием* множества A и обозначается $\overline{A}$. Если множество совпадает со своим замыканием, то оно называется *замкнутым*. Замкнутое ограниченное множество называется *компактом*. *Окрестностью* множества A называется всякое открытое множество, содержащее A; *ε-окрестностью* A_ε множества A называется объединение шаров $U(x;\varepsilon)$, когда x пробегает A: $A_\varepsilon = \bigcup\limits_{x\in A} U(x;\varepsilon)$.

Функция $\chi_A(x)$, равная 1 при $x \in A$ и 0 при $x \notin A$, называется *характеристической функцией* множества A.

Пусть Ω – область. Точки замыкания $\overline{\Omega}$, не принадлежащие Ω, образуют замкнутое множество $\partial\Omega$, называемое *границей области* Ω, так что $\partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega$.

Будем говорить, что поверхность $\partial\Omega$ принадлежит *классу* C^p, $p \geq 1$, если в некоторой окрестности каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ она представляется уравнением $\omega_{x_0}(x) = 0$, причем $\operatorname{grad}\omega_{x_0}(x) \neq 0$ и функция $\omega_{x_0}(x)$ непрерывна вместе со всеми производными до порядка p включительно в упомянутой окрестности. Поверхность $\partial\Omega$ называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа поверхностей класса C^1.

Введем определение *липшицевой границы* (*границы класса* $C^{0,1}$).

Пусть Ω – ограниченная область. Мы говорим, что Ω имеет липшицеву границу $\partial\Omega$ (короче, Ω принадлежит $C^{0,1}$), если существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, такие, что для каждой точки $x^0 \in \partial\Omega$ декартова система координат может быть повернута и смещена в точку x^0 так, что справедливо следующее утверждение. Положим: $K_{n-1} = \{\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mid |x_i| < \alpha \text{ при } i = 1, 2, \ldots, n-1\}$ (K_{n-1} есть $n-1$–мерный открытый куб). Тогда существует липшицева функция a, определенная на K_{n-1}, такая, что $a(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n$ для точек $(x_1, \ldots, x_n) \in \partial\Omega$. Более того, все точки, такие, что $\mathbf{x}' \in K_{n-1}$ и $a(\mathbf{x}') < x_n < a(\mathbf{x}') + \beta$, лежат внутри Ω, а все точки $\mathbf{x} = (\mathbf{x}',\ \mathbf{x}' \in K_{n-1},\ a\mathbf{x}' - \beta < x_n < a\mathbf{x}')$ лежат вне $\bar{\Omega}$.

Далее мы будем иметь дело только с областями Ω, границы которых липшиц-непрерывны.

Если $\partial\Omega$ является кусочно-гладкой класса C^1 (или даже липшицевой), то почти во всех точках $x \in \partial\Omega$ существует единичный вектор внешней нормали $n(x)$ к $\partial\Omega$.

Пусть точка x_0 лежит на кусочно-гладкой поверхности $\partial\Omega$. *Окрестностью точки x_0 на поверхности $\partial\Omega$* называется та связная часть множества $\partial\Omega \bigcap U(x_0; R)$, которая содержит точку x_0.

Ограниченная область Ω' называется *подобластью, строго лежащей в области* Ω, если $\overline{\Omega}' \subset \Omega$; при этом пишут $\Omega' \Subset \Omega$.

§ 2. Классы функций $\mathbf{C^p(\Omega)}$, $\mathbf{C^p(\overline{\Omega})}$, $\mathbf{L_p(\Omega)}$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — целочисленный вектор с неотрицательными составляющими α_j (мультииндекс). Через $D^\alpha f(x)$ обозначают производную функции $f(x)$

порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$:

$$D^\alpha f(x) = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} f(x) = \frac{D^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$D^0 f(x) = f(x),$$

$$D = (D_1, D_2, \ldots, D_n), \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Для низших производных употребляют обозначения $f_{x_i}, f_{x_i x_j}$. Пользуются также следующими сокращенными обозначениями:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!$$

Множество (комплекснозначных) функций f, непрерывных вместе с производными $D^\alpha f(x)$, $|\alpha| \le p$ $(0 \le p < \infty)$ в области Ω, образуют *класс функций* $C^p(\Omega)$. Функции f класса $C^p(\Omega)$, у которых все производные $D^\alpha f(x)$, $|\alpha| \le p$, допускают непрерывное продолжение на замыкание $\overline{\Omega}$, образуют *класс функций* $C^p(\overline{\Omega})$; при этом под значением $D^\alpha f(x)$, $x \in \in \partial\Omega$, $|\alpha| \le p$, понимают $\lim D^\alpha f(x')$ при $x' \to x$, $x' \in \Omega$. Класс функций, принадлежащих $C^p(\Omega)$ при всех p, обозначают через $C^\infty(\Omega)$; аналогично определяется и класс функций $C^\infty(\overline{\Omega})$. Класс $C(\Omega) \equiv C^0(\Omega)$ состоит из всех непрерывных функций в Ω, а класс $C(\overline{\Omega}) \equiv C^0(\overline{\Omega})$ можно отождествить с множеством всех непрерывных функций на $\overline{\Omega}$.

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором множестве, содержащем область Ω. В этом случае принадлежность f классу $C^p(\overline{\Omega})$ означает, что *сужение* f на Ω принадлежит $C^p(\overline{\Omega})$.

Введенные классы функций представляют собой *линейные множества*, т.е. из принадлежности функций f и g какому-либо из этих классов следует принадлежность этому же классу и любой их линейной комбинации $\lambda f + \mu g$, где λ и μ – произвольные комплексные числа.

Функция f называется *кусочно-непрерывной* в $\mathbf{R}^n$, если существует конечное или счетное число областей Ω_k, $k = 1, 2, \ldots$, без общих точек с кусочно-гладкими границами, таких, что каждый шар покрывается конечным числом замкнутых областей $\{\overline{\Omega}_k\}$ и $f \in C(\overline{\Omega}_k),\ k = 1, 2, \ldots$

Кусочно-непрерывная функция называется *финитной*, если она обращается в нуль вне некоторого шара.

Пусть $\varphi \in C(\mathbf{R}^n)$. *Носителем* $\operatorname{supp} \varphi$ непрерывной функции φ называется замыкание множества тех точек, где $\varphi(x) \neq 0$.

Через $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ обозначают множество бесконечно дифференцируемых функций с финитными носителями, а через $C_0^\infty(\Omega)$ – те из них, носители которых принадлежат $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

Рассмотрим множество $A \subset \mathbf{R}^n$. Говорят, что A имеет *меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ оно может быть покрыто шарами суммарного объема меньше ε.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ есть область. Говорят, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* в Ω, если множество точек области Ω, которое не обладает этим свойством, имеет меру нуль.

Функция $f(x)$ называется *измеримой*, если она совпадает почти всюду с пределом почти всюду сходящейся последовательности кусочно-непрерывных функций.

Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется *измеримым*, если его характеристическая функция $\chi_A(x)$ измерима.

Пусть Ω есть измеримое множество из $\mathbf{R}^n$, на котором определен *интеграл Лебега* от функции $f(x)$ (см., например, [13]). Тогда *пространство* $L_1(\Omega)$ *интегрируемых* (*по Лебегу*) *функций* — пространство функций $f(x)$, для которых конечна величина (*норма*)

$$\|f\|_{L_1(\Omega)} = \int\limits_\Omega |f(x)| dx,$$

где $\int\limits_\Omega$ есть интеграл Лебега.

Функция $f(x)$ называется *локально интегрируемой по Лебегу в области* Ω, $f \in L_{loc}(\Omega)$, если $f \in L_1(\Omega')$ для всех измеримых $\Omega' \Subset \Omega$.

Пусть $1 \le p < \infty$. Множество измеримых по Лебегу функций $f(x)$, определенных на Ω, для которых конечна *норма*

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

образует пространство $L_p(\Omega)$.

Пространство $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, наряду с $C^p(\Omega)$, $C^p(\overline{\Omega})$ широко используется при изучении и численном решении задач математической физики.

§ 3. Понятие о дифференциальном уравнении с частными производными, о краевых и начальных условиях. Типичные примеры задач математической физики

Дифференциальным уравнением с частными производными называется соотношение, содержащее неизвестную функцию от независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и ее частные производные до некоторого порядка.

Порядком уравнения называют порядок наивысшей производной, в него входящей. Следовательно, можно говорить об уравнениях первого, второго и т.д. порядков. Важным классом уравнений являются *линейные.* Общий вид такого уравнения порядка m с коэффициентами a_α задает уравнение

$$\sum_{0 \le |\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha u = f. \tag{1}$$

Основной задачей теории дифференциальных уравнений с частными производными является исследование нахождения решений дифференциальных уравнений. Понятие решения требует уточнения.

Далее будем выделять два вида решения. Под *классическим решением* будем понимать функцию, непрерывно дифференцируемую столько раз, каков порядок уравнения, и удовлетворяющую ему в обычном смысле в каждой рассматриваемой области. Наряду с классическим рассматривают также *различные обобщенные решения* (см.: § 6, гл. 1, п. 1.5, гл. 2; § 1, гл. 4).

Дифференциальные уравнения с частными производными возникают в различных задачах физики.

Классическими примерами являются следующие уравнения:

уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f, \tag{2}$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f, \tag{3}$$

волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f. \tag{4}$$

Здесь f — заданная, u — искомая функция. Во втором уравнении они являются функциями от $x \in R^n$, в третьем и четвертом — функциями от $x \in R^n$ и $t \in R$. В физических задачах переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ играют роль пространственных координат, t означает время. В уравнениях (2)–(4) Δ означает *оператор Лапласа*

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

a^2 — некоторую положительную постоянную. Уравнение (2) называют уравнением Пуассона, а *уравнением Лапласа* называют однородное уравнение (2), когда $f = 0$.

Уравнения (2)–(4) описывают различные физические процессы и явления, и они являются классическими примерами *уравнений математической физики.*

Ясно, что дифференциальное уравнение имеет неединственное решение. Если известно, что функция удовлетворяет дифференциальному уравнению, то этим она полностью не определяется. Степень произвола в отыскании этой функции, если она зависит от одной переменной, а уравнение есть обыкновенное дифференциальное уравнение, известна. Общее решение такого уравнения содержит столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Для нахождения определенного частного решения необходимо соответствующее число дополнительных условий.

При переходе к уравнениям с частными производными ситуация усложняется. Здесь понятие "общее решение"уже теряет свою определенность. Поэтому в теории дифференциальных уравнений с частными производными не ставится задача описания всей совокупности решений уравнения, а находят вполне определенное решение. Для выделения такого решения из всей совокупности решений некоторого уравнения также нужны дополнительные условия. Эти дополнительные условия в случае с частными производными задаются на многообразиях меньшей размерности, чем область, где должно удовлетворяться уравнение. Эти многообразия представляют собой различные поверхности, плоскости, кривые.

Упомянутые дополнительные условия называются *краевыми.* Задача о нахождении функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению и краевым условиям, называется *краевой задачей.* Обычно она ставится следующим образом: задается область, в ней функция должна удовлетворять уравнению, а краевые условия ставятся на границе области. Если одна из независимых переменных играет роль времени, то часто краевые условия задаются при фиксированном значении этой переменной. Тогда они называются *начальными.* В противоположность этому краевые условия, не связанные с этой переменной, называют *граничными.*

Приведем примеры краевых задач. Пусть задана область Ω в R^n и функции f, $u_0\, u_1$, φ. Через $\underline{n}$ обозначен единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области $\Omega \subset R^n$, $\partial/\partial n \equiv \underline{n} \cdot \mathrm{grad} \equiv \underline{n} \cdot \nabla$. Следующие задачи о нахождении функции являются классическими задачами математической физики:

задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f \quad (x \in \Omega), \quad u = f \quad (x \in \partial\Omega);$$

задача Неймана для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f \quad (x \in \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi \quad (x \in \partial\Omega);$$

задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f \quad (x \in R^n,\ t > 0), \quad u = u_o \quad (t = 0);$$

задача Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f \quad (x \in R^n,\ t > 0),$$

$$u = u_o, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1 \quad (t = 0);$$

первая смешанная задача для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f \quad (x \in \Omega,\ t > 0),$$

$$u = u_o \ \ (x \in \Omega,\ t = 0), \quad u = \varphi \ \ (x \in \partial\Omega,\ t > 0);$$

вторая смешанная задача для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f \quad (x \in \Omega,\ t > 0),$$

$$u = u_o \quad (x \in \Omega,\ t = 0), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi \quad (x \in \partial\Omega,\ t > 0);$$

первая смешанная задача для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f \quad (x \in \Omega,\ t > 0),$$

$$u = u_o, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1 (x \in \Omega,\ t = 0), \quad u = \varphi \quad (x \in \partial\Omega,\ t > 0);$$

вторая смешанная задача для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f \quad (x \in \Omega,\ t > 0),$$

$$u = u_o, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1 \quad (x \in \Omega,\ t > 0), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi \quad (x \in \partial\Omega,\ t > 0).$$

Краевые условия при $t = 0$ здесь носят характер начальных, а при $x \in \partial\Omega$ — граничных.

Каждой из приведенных краевых задач можно дать физическую интерпретацию. Например, задача Дирихле для уравнения Лапласа может быть истолкована как задача об отыскании электрического потенциала внутри тела Ω, если потенциал на границе задан. Задача Коши для уравнения теплопроводности может быть истолкована как задача о нахождении температуры пространства R^n, если задана начальная температура при $t = 0$. Первая смешанная задача для волнового уравнения при $n = 2$ и $\varphi = 0$ интерпретируется как задача об исследовании мембраны с закрепленным краем при заданном внешнем воздействии и начальных отклонений u_0 и скорости u_1. Разумеется, эти интерпретации не являются единственно возможными.

Весьма важным и тонким является вопрос о числе и характере тех краевых условий, которые обеспечивают однозначную разрешимость задачи. Условий должно быть "не слишком мало", чтобы устранить неоднозначность решения, и "не слишком много", чтобы решение существовало. Кроме того, краевые условия должны быть согласованы с уравнением. Иногда их можно установить из физических соображений. Но отыскание корректной постановки краевых условий только с помощью физической интуиции в достаточно сложных случаях может привести к ошибкам.

Современная теория дифференциальных уравнений с частными производными располагает средствами для нахождения правильных формулировок краевых задач для достаточно широкого класса уравнений.

§ 4. Понятие об обратных задачах

Введем теперь понятие об обратных задачах математической физики.

Пусть, например, рассматривается задача об отыскании решения стационарного уравнения диффузии

$$-a\Delta u + bu = f(x) \ \text{ в } \ \Omega \tag{5}$$

при граничном условии

$$u = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \equiv \Gamma, \tag{6}$$

где $a = const > 0$, $b = const \geq 0$, $f(x) \in L_2(\Omega)$ — заданная функция, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, Ω — ограниченная область из $\mathbf{R}^n$ с границей $\partial\Omega \equiv \Gamma$. Уравнение (5) (как равенство) рассматривается в $L_2(\Omega)$. Функцию $u(x)$ ищем среди дважды непрерывно дифференцируемых в Ω функций (т.е. $u \in C^{(2)}(\Omega)$), удовлетворяющих граничному условию (6).

Введем операторную форму записи задачи (5), (6). Для этого обозначим через L *отображение* (*оператор*), задаваемое следующим образом: $Lu \equiv -a\Delta u + bu$, которое определено на множестве $D(L) \equiv \{u(x) : u \in C^{(2)}(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega}),\ u = 0 \text{ на } \Gamma\}$, называемом *областью определения* оператора L. Считаем, что L действует из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ (или, кратко, $L : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$), т.е. и функции из области определения $D(L)$, и функции из области значений $R(L) \equiv \equiv \{v : v \equiv Lu \ \forall u \in D(L)\}$ оператора L рассматриваются как элементы пространства $L_2(\Omega)$. Теперь задачу (5), (6) можно записать в виде одного операторного уравнения:

$$Lu = f \quad \text{в} \quad L_2(\Omega). \tag{7}$$

Задачу отыскания решения уравнения при заданной функции f — функции исходных данных — называют *прямой задачей.*

Но может оказаться, что функция f или часть этой функции также неизвестна. Например, пусть функция $f(x)$ в задаче (5), (6) представляется в виде $f(x) = = f_0(x) + \chi_C(x)v(x)$, где $f_0(x)$ — заданная функция на Ω, $\chi_C(x)$ — характеристическая функция подобласти $\Omega_C \subset \Omega$, а $v(x)$ — неизвестная функция, т.е. рассматривается задача, в которой $f_0(x)$ локально возмущается неизвестной функцией $v(x)$. В этом случае уравнение (7) представляет собой задачу с двумя неизвестными $u(x)$ и $f(x) = f_0 + \chi_C v$, т.е. имеем одно уравнение с двумя неизвестными, причем здесь в качестве *дополнительной неизвестной* выступает функция, входившая в исходные данные в прямой задаче. Такие задачи, т.е. задачи, в которых часть исходных данных из прямой задачи также неизвестны и выступают в качестве дополнительных неизвестных, подлежащих определению вместе с решением u уравнения (7), называют *обратными задачами.* Отметим, что в обратных задачах математической физики в качестве дополнительных неизвестных, могут выступать функции *правых частей уравнений, функции начальных или граничных условий, коэффициенты уравнений* и др. Чтобы замкнуть систему уравнений с основными неизвестными (выше это была функция $u(x)$) и дополнительными (это функция $f(x)$, а точнее, ее часть $\chi_C v(x)$), вводят *дополнительные уравнения* (*уравнения замыкания*). Пусть в случае уравнения (7) в качестве такого уравнения принимается уравнение вида

$$Cu = \varphi_{ob} \tag{8}$$

где C — некоторый оператор (оператор наблюдения), φ_{ob} — заданная функция. Оператор C может действовать уже в другом пространстве (отличном от пространства, в котором рассматривается уравнение (7)).

После того как уравнение замыкания введено, *обратная задача формулируется следующим образом*: требуется найти u и v, такие, что выполняются следующие уравнения

$$\begin{cases} Lu = f_0 + Bv \\ Cu = \varphi_{ob}, \end{cases} \tag{9}$$

где B есть оператор (в случае уравнения (7)) умножения на характеристическую функцию χ_C : $Bv \equiv \chi_C\, v$. Простейшим примером оператора C является тождественный оператор, т.е. $C = I$, когда второе уравнение из (9) принимает вид: $u = \varphi_{ob}$ в Ω, где $\varphi_{ob}(x)$ — заданная функция из $L_2(\Omega)$. И уже в этом простейшем примере возникает трудность, типичная для задач типа (9): так, если $\varphi_{ob} \in L_2(\Omega)$, тогда как u ищется среди функций из $D(L)$, т.е. обладает дополнительной гладкостью по сравнению с φ_{ob} и удовлетворяет определенным граничным условиям, то сразу можно сделать заключение, что задача (9) в общем случае может не иметь классического решения, т.е. решения, удовлетворяющего почти всюду в Ω уравнениям (9). Поэтому для исследования разрешимости такой задачи необходимо вводить обобщения понятия решения, применять специальные подходы в исследованиях и приближенном решении таких задач.

К системе (9) мы пришли, рассматривая обратную задачу для уравнения (7). Однако *в форме* (9) *могут быть записаны многие важные прикладные задачи: разнообразные обратные задачи математической физики, задачи точного управления, задачи идентификации, задачи ассимиляции*

(усвоения) данных измерений (наблюдений) и др. . В определенном смысле все эти задачи могут рассматриваться как представители класса обратных задач, записанных в операторной форме (9), с операторами L, B, C, действующими в некоторой системе функциональных пространств. Первое уравнение из (9) часто называют *основным уравнением* (*уравнением состояния*), тогда как второе уравнение из (9) — *дополнительным уравнением* (*уравнением замыкания, уравнением наблюдения и др.*) Интерпретация "дополнительной неизвестной" v в этих задачах может быть различной: так, в задачах управления это есть *управление*, тогда как в обратных задачах v представляет собой одно из исходных данных прямой задачи, которое здесь также неизвестно и которое условно можно называть *управлением.* Функция (элемент) φ_{ob} также может иметь различную интерпретацию в задачах вида (9). Так, в задачах усвоения данных измерений элемент φ_{ob} построен на основе реальных данных измерений, тогда как в задачах управления φ_{ob} может рассматриваться как желаемое состояние, т.е. состояние, которое мы хотим иметь в качестве значения оператора C на решении уравнения состояния (другими словами, чтобы имело место уравнение $Cu = \varphi_{ob}$).

Таким образом, система (9) представляет собой класс задач математической физики, который мы будем рассматривать как класс обратных задач. В следующем разделе приводятся простые примеры задач, входящих в этот класс, и которые (при подходящем выборе операторов и пространств) могут быть записаны в виде системы (9).

§ 5. Примеры обратных задач и задач управления

Приведем примеры задач, которые входят в класс задач вида (9) и которые изучаются в последующем. При этом мы будем приводить упрощенные постановки этих задач — с постоянными коэффициентами, гладкими границами областей и т.п. Однако, как будет видно из дальнейшего, переформулировка этих задач для более практического случая не представляет труда.

В качестве первого примера рассмотрим задачу (5), (6), (8), которая уже обсуждалась выше, и обозначения, применяемые в ней, введены ранее.

Пример 1 ("Задача о внутренних источниках"). Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\partial\Omega \equiv \Gamma$ — граница области Ω, $\Omega_C \subseteq \Omega$, χ_C — характеристическая функция подобласти Ω_C. Требуется найти $u(x) \in D(L)$ и функцию $v(x)$ в подобласти Ω_C, такие, что $v(x) \in L_2(\Omega)$, и почти всюду удовлетворяются уравнения вида

$$\begin{gathered} Lu \equiv -a\Delta u + bu = f + \chi_C v \text{ в } \Omega, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma, \; u = \varphi_{ob} \text{ на } \Omega, \end{gathered} \tag{10}$$

где $a, b = const > 0$, $D(L) = \{u : \; u \in C^{(2)}(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega}),\; u = 0$ на $\Gamma\}$, $L : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, $f(x)$ — заданная функция "внутренних источников", $v(x)$ — неизвестная функция "дополнительных"источников в Ω_C, $\varphi_{ob} \in L_2(\Omega)$ — заданная, наблюдаемая ("желаемая") функция. (Отметим, что $\chi_C v = 0$ в $\Omega \backslash \Omega_C$, поэтому для определенности в данной задаче можно считать, что $v \equiv 0$ на $\Omega \backslash \Omega_C$, и искать неизвестную v в подпространстве $L_2^{(C)} \equiv \{v \in L_2(\Omega) : \; v \equiv 0$ на $\Omega \backslash \Omega_C\}$.)

Если ввести операторы (отображения) B, C следующим образом: $Bv \equiv \chi_C v$, $Cu \equiv u$ (т.е. $C = I$ — тождественный оператор), то задачу (10) можно записать в виде

$$Lu = f + Bv, \quad Cu = \varphi_{ob}. \tag{11}$$

Обратим внимание на то, что *если* $\varphi_{ob} \in L_2(\Omega)$, *то в общем случае нельзя подставлять* φ_{ob} *непосредственно в первое уравнение из* (11) — *уравнение состояния — с целью отыскания дополнительного неизвестного* $v(x)$. Поэтому исследование разрешимости и построение методов приближенного решения этой задачи требует специальных подходов. ■

Пример 2 ("Задача о локальном граничном управлении", "обратная задача о граничной функции").
Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, $\Gamma \equiv \partial\Omega$ — граница Ω, Γ_1 — часть границы Γ, $\Gamma_2 \equiv \Gamma \backslash \Gamma_1$, $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} \equiv \Omega \bigcup \Gamma$. Рассмотрим следующую задачу: требуется найти $u(x)$ в Ω и $v(x)$ на Γ_1, такие, что

$$-a\Delta u + bu = f(x) \text{ на } \Omega,$$

$$a\frac{\partial u}{\partial n} = v \text{ на } \Gamma_1, \quad a\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_2,$$

где $a, b = const > 0$, $f(x)$ — заданная функция из $L_2(\Omega)$. При этом требуется удовлетворение почти всюду на Γ_2 следующему дополнительному условию вида:

$$u = \varphi_{ob} \text{ на } \Gamma_2.$$

В обобщенной форме эту задачу можно записать следующим образом: требуется найти $u \in W_2^1(\Omega), v$, такие, что

$$\begin{gathered} a(u,w) \equiv (a\nabla u, \nabla w)_{L_2(\Omega)} + (bu, w)_{L_2(\Omega)} = \\ = (f,w)_{L_2(\Omega)} + (v,w)_{L_2(\Gamma_1)},\ \forall w \in W_2^1(\Omega), \\ u = \varphi_{ob} \text{ на } \Gamma_2, \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$\nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big), \quad (u,w)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} uw\, dx,$$

$$W_2^1(\Omega) \equiv H^1(\Omega) = \{u(x) : \|u\|_{W_2^1}(\Omega) \equiv$$

$$\equiv (\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)})^{1/2} < \infty\},$$

или в операторной форме вида (11), где операторы L, B, C определяются следующим образом:

$$(Lu, w) \equiv a(u,w)\ \forall u, w \in W_2^1(\Omega),$$

$$(Bv, w) \equiv (v,w)_{L_2(\Gamma_1)} = \int\limits_{\Gamma_1} vw\, d\Gamma\ \forall v, w \in W_2^1(\Omega),$$

$$Cu \equiv u \text{ на } \Gamma_2. \blacksquare$$

Пример 3 ("Задача точного управления").
Рассматривается нестационарная задача: требуется найти $u(x,t)$, $v(x)$ такие, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (\underline{U}, \nabla)u - a\Delta u + bu = f(x,t) \\ \qquad\qquad \text{в } Q_T \equiv \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \forall t \in (0,T), \\ u(x,0) = v(x) \text{ в } \Omega, \ u(x,T) = \varphi_{ob}(x), \end{cases} \tag{13}$$

где $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\Gamma \equiv \partial\Omega$, $T < \infty$, $\underline{U} = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ — заданная вектор-функция, $(\underline{U}, \nabla) = \sum\limits_{i=1}^{n} U_i \partial/\partial x_i$, $a, b = const > > 0$, $f(x,t)$, $\varphi_{ob}(x)$ — заданные функции. Последнее уравнение здесь есть дополнительное уравнение, требующее, чтобы траектория, описываемая решением уравнения состояния $u(x,t)$, попала в заданное состояние φ_{ob} в момент времени $t = T$.

Задачу (13) называют также задачей идентификации начального условия или задачей о финальном наблюдении. Ее можно также записать в операторной форме (11). Однако для простоты здесь (так же как и в следующих двух примерах) мы этого делать не будем, а сделаем в четвертой главе данной книги при изучении подобных задач. ■

Пример 4 ("Задача усвоения данных измерений").
Пусть рассматривается нестационарная задача вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (\underline{U}, \nabla)u - a\Delta u + bu = f(x,t) \text{ в } Q_T, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma, \ u(x,0) = v(x) \text{ в } \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

(где основные обозначения введены в примере 3) с дополнительной неизвестной $v(x)$ — функцией начального состояния. Предположим, что имеются данные измерений $\varphi_{ob}^{(i,j)}$, $i = 1, 2, \ldots, I$, $j = 1, 2, \ldots, J$, которые здесь для простоты будем считать значениями решения $u(x, t)$ задачи (14) в точках $\{(x_i, t_j)\}$. На основе этих данных измерений можно ввести следующее уравнение замыкания

$$Cu = \varphi_{ob} \tag{15}$$

где

$$Cu \equiv (u(x_1, t_1), u(x_2, t_1), \ldots, u(x_I, t_J)),$$
$$\varphi_{ob} \equiv (\varphi_{ob}^{(1,1)}, \varphi_{ob}^{(2,1)}, \ldots, \varphi_{ob}^{(I,J)}).$$

(Обратим внимание на то, что здесь оператор C имеет область определения $D(C) \equiv D(L)$, состоящую из достаточно гладких функций, и действует из $L_2(\Omega)$ в евклидово пространство $\mathbf{R}^N$, где $N = I \cdot J$.) Теперь задача формулируется так: требуется найти решение уравнения состояния $u(x, t)$, функцию начального состояния $v(x)$ так, чтобы выполнялись уравнения (14), (15).

Отметим, что формулировка "задача усвоения данных измерений" исходит из задач геофизической гидродинамики, в которых на основе спутниковых и других измерений (наблюдений) необходимо восстановить (хотя бы приближенно!) те или иные данные задач, в частности функции начального состояния рассматриваемой системы. Однако в прикладных проблемах из других областей "задача усвоения данных измерений"может носить название "задача идентификации начального состояния"или "обратная задача о начальном состоянии"(см. пример 3). ■

Пример 5 ("Задача управления интенсивностью источников"). В проблемах охраны окружающей среды представляют практический интерес задачи следующего типа. Предположим, что концентрация некоторых частиц (загрязнений и т.п.) в области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ при $t \in (0, T)$ задается решением $u(x,t)$ задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (\underline{U}, \underline{\nabla})u - a\Delta u + bu = f + \chi_C(x)v(x,t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{в } Q_T = \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \text{ на } \Gamma, \quad t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_{(0)}(x) \text{ в } \Omega, \end{cases} \qquad (16)$$

где основные обозначения введены в примере 3; $f(x,t)$ — заданная функция (функция основных источников в Q_T); $u_{(0)}(x)$ — заданная функция начального распределения частиц в Ω; $\chi_C(x)$ — характеристическая функция некоторого множества Ω_C (не обязательно связного!) из Ω, в котором действуют источники частиц интенсивности $v(x,t)$, которую необходимо определить вместе с $u(x,t)$. При этом требуется выбрать $v(x,t)$ в $\Omega_C \times (0,T)$ такой, чтобы выполнялось условие $u(x,t) = \varphi_{ob}(x,t)$ в $\Omega_{ob} \times (0,T)$, где Ω_{ob} — некоторое другое множество из Ω (вообще говоря, не совпадающее с Ω_C) (характеристическую функцию которой обозначим через $\chi_{ob}(x)$), $\varphi_{ob}(x,t)$ — заданная функция. Например, φ_{ob} есть безопасный уровень концентрации частиц в $\Omega_{ob} \times (0,T)$. На основе этого уравнения введем следующее дополнительное уравнение (уравнение замыкания):

$$Cu = \chi_{ob}\varphi_{ob} \text{ в } Q_T, \qquad (17)$$

где $Cu \equiv \chi_{ob}u$. Окончательно задача о выборе интенсивности источников — "задача управления интенсивностью источников", формулируется так: требуется найти $u(x,t)$ в Q_T, $v(x,t)$ в $\Omega_C \times (0,T)$ такие, что выполняются уравнения (16) и дополнительное уравнение (17).

Если функция φ_{ob} есть *реально* наблюдаемая концентрация частиц в $\Omega_{ob} \times (0,T)$, вызванная неизвестными источниками в $\Omega_C \times (0,T)$ с неизвестной интенсивностью $v(x,t)$, то *задача* (16), (17) *представляет собой обратную задачу об определении интенсивности локализованных источников частиц.* Таким образом, эту задачу можно рассматривать как задачу управления или как обратную задачу, в зависимости от интерпретации функций $\varphi_{ob}(x,t)$ и $v(x,t)$. ■

Задачи в приведенных примерах 1–5 легко можно переформулировать для уравнений состояний с переменными коэффициентами, для систем уравнений, для других дополнительных уравнений и т.д., с учетом специфики исследуемой проблемы.

§ 6. Задачи оптимального управления как форма обобщенных постановок задач

Рассмотрим систему уравнений типа (9) или (11):

$$Lu = f + Bv, \quad Cu = \varphi_{ob} \tag{18}$$

с неизвестными u, v, с операторами L, B, C, действующими в некоторой системе пространств с заданными f и φ_{ob}. Будем считать, что области определения операторов L, C совпадают, эти операторы действуют в одном и том же пространстве $L_2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, а областью определения оператора B является либо все пространство $L_2(\Omega)$, либо множество $D(B)$, плотное в $L_2(\Omega)$.

Если считать элемент v известным, $F \equiv f + Bv$ принадлежащим области значений оператора L, а оператор L обратимым[1], можно представить решение первого уравнения из (18) как $u = L^{-1}(f + Bv)$, где L^{-1} — оператор, обратный к L (разрешающий оператор). Если элемент v неизвестен, но на элементе $F = f + Bv$ возможно обращение оператора L, пусть даже в некотором обобщенном смысле, то можно снова записать в виде $u = L^{-1}(f + Bv)$. Подставив это выражение во второе уравнение из (18), получаем уравнение

[1] Это предположение для уравнения состояния, как правило, вводится для всех дальнейших рассуждений в книге; это относит проблему разрешимости уравнений вида $Lu = F$ к проблемам, связанным с обычными прямыми задачами.

для дополнительной неизвестной v:

$$Av = g, \tag{19}$$

где $A = CL^{-1}B$, $g = \varphi_{ob} - CL^{-1}f$. Таким образом, при сделанном выше предположении о разрешимости уравнения $Lu = F$ для фиксированного элемента F, задачи (18), (19) можно считать эквивалентными. Действительно, если u, v удовлетворяют системе (18), то v удовлетворяет (19). С другой стороны, если v есть решение уравнения (19), т.е. $CL^{-1}(f + Bv) = \varphi_{ob}$, то, вводя обозначение $u \equiv L^{-1}(f + Bv)$, заключаем, что u, v есть решение системы (18). Из изложенного следует, что *исследование задачи* (18) *и построение методов ее приближенного решения можно осуществить изучая уравнение для дополнительной переменной* v.

Как отмечалось в примере 1, задачи вида (18), а значит и уравнение (19), даже в простых случаях могут не иметь классического решения. Поэтому возникает естественная необходимость введения обобщенной постановки задачи. Рассматривая первое уравнение — уравнение состояния в прежней форме $Lu = f + Bv$, второе уравнение из (18) заменим соотношением вида $\inf\limits_{v} = \|Cu - \varphi_{ob}\|^2$, где зависимая переменная $u = u(v)$ связана с независимой переменной v уравнением состояния, $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{L_2}$. Таким образом, *задача* (18) *заменяется простейшей задачей оптимального управления* вида: требуется найти u и управление (дополнительное неизвестное) v такие, что

$$Lu = f + Bv, \quad \inf_{v} = J_0(u(v)) \tag{20}$$

при специальном функционале стоимости (функции стоимости) $J_0(u(v)) \equiv \|Cu - \varphi_{ob}\|^2 \geq 0$. Легко заметить, что задача (20) может рассматриваться как *обобщенная постановка задачи* (18). Действительно, если u, v есть решение задачи (18), то $J_0(u(v))$ принимает на u, v наименьшее значение: $J_0(u(v)) = 0$, т.е. решение u, v включается во множество решений задачи (20), которое может быть не пустым и содержать более чем одну пару элементов u, v даже в случае, когда задача (18) не имеет классического решения.

Поскольку $u = L^{-1}(f + Bv)$, $J_0(u(v)) \equiv J_0(v) \equiv \equiv \|Av - g\|^2$, то заключаем, что задача (20) есть запись уравнения (19) в виде *проблемы минимизации функционала невязки*:

$$\inf_v = \|Av - g\|^2. \tag{21}$$

Задачу (20) можно рассматривать в качестве одного представителя *следующего семейства задач оптимального управления:*

$$Lv_\alpha = f + Bv_\alpha, \quad \inf_{v_\alpha} = J_\alpha(v_\alpha, u_\alpha), \tag{22}$$

зависящго от числового параметра $\alpha \geq 0$ с функционалом стоимости $J_\alpha(v_\alpha, u_\alpha)$ вида

$$J_\alpha(v_\alpha, u(v_\alpha)) \equiv \alpha\|v_\alpha\|^2 + \|Cu_\alpha - \varphi_{ob}\|^2, \tag{23}$$

где $u_\alpha \equiv u(v_\alpha)$, поскольку задачи (20), (22) при $\alpha = 0$ совпадают. В свою очередь, поскольку $u_\alpha = L^{-1}(f + Bv_\alpha)$, то задачу (22) можно записать в виде следующей проблемы минимизации:

$$\inf_{v_\alpha} = \alpha\|v_\alpha\|^2 + \|Av_\alpha - g\|^2 \equiv J_\alpha(v_\alpha). \tag{24}$$

Итак, из изложенного выше следует, что *задачи* (22), (23) *при* $\alpha = 0$ *можно рассматривать как обобщенные постановки задач* (18), (19). *Кроме того, как мы установим в дальнейшем, решения задач* (22), (23) *при положительном, но достаточно малом значении* α*, при выполнении некоторых дополнительных ограничений могут браться в качестве приближений к обобщенным решениям задач* (18), (19).

Отметим принципиальные особенности задачи (22). В классических задачах оптимального управления функционал стоимости $J_\alpha(v_\alpha, u_\alpha)$ может иметь вид, отличный от (23). Кроме того, слагаемое $\alpha\|v_\alpha\|^2$ в этих задачах часто имеет физическую (экономическую и т.п.) интерпретацию. При этом параметр α нередко является фиксированным и положительным. В задачах, которые будут изучаться в дальнейшем, функционал стоимости $J_\alpha(v_\alpha, u_\alpha)$ имеет специальный вид (типа (23)), но параметр α здесь не фиксируется и особенно важным является изучение проблемы сходимости решений задач (22), (23) при $\alpha \to +0$, т.к. именно при $\alpha = 0$ могут существовать обобщенные решения задач (18), (19). Таким образом, *задачи оптимального управления "специального"вида* (22) *и задачи минимизации* (24) *выступают в наших рассматриваемых проблемах как составляющие общей методологии исследования и приближенного решения класса задач вида* (18).

Отметим, что существенную роль в этой методологии будут играть *сопряженные операторы* $L^*, B^*, \ldots, A^*$ (определения и свойства которых будут даны в следующей главе) и *сопряженные уравнения*. Предположим, что v_α есть решение задачи (24), тогда необходимым условием будет

$$dJ_\alpha(v_\alpha + \varepsilon w)/d\varepsilon = 0 \ \text{ при } \ \varepsilon = 0$$

при произвольном элементе w из области определения $D(B)$ оператора B. Учитывая сделанные ранее предположения о $D(B)$ и вычисляя эту производную, получаем уравнение, которому удовлетворяет v_α (уравнение Эйлера, условие оптимальности)

$$\alpha v_\alpha + A^* A v_\alpha = A^* g, \tag{25}$$

где $A = CL^{-1}B$, A^* — оператор, сопряженный к A. Считая, что $(CL^{-1}B)^* = B^* L^{*-1} C^*$ и вводя функции $u_\alpha \equiv L^{-1}(f + Bv_\alpha)$, $q_\alpha \equiv L^{*-1}C^*(Cu_\alpha - \varphi_{ob})$, уравнение (25) можно переписать в виде следующей *системы прямых и сопряженных уравнений* (вариационных уравнений, необходимых условий оптимальности, уравнений Эйлера) вида:

$$Lu_\alpha = f + Bv_\alpha, \;\; L^* q_\alpha = C^*(Cu_\alpha - \varphi_{ob}), \;\; \alpha v_\alpha + B^* q_\alpha = 0. \quad (26)$$

Обратим внимание на то, что в (26) *не присутствуют обратные операторы* L^{-1}, L^{*-1}. Это дает нам возможность рассматривать широкий класс задач с операторами L, B, C достаточно общего вида. При этом переход к задачам (21), (24) и уравнению (25) (и его частному случаю $A^*Av_0 = A^*g$ при $\alpha = 0$) есть один из этапов изучения исходной задачи. Формулировка итерационных алгоритмов построения приближенных решений этих задач можно осуществить, используя ту же самую идею: *рассматривая уравнение* (25), *записываем и исследуем подходящий итерационный алгоритм, а затем записываем его в виде систем типа* (26), *которые и реализуются подходящими методами решения "обычных"задач математической физики.*

Таким образом, взаимосвязь рассматриваемых нами задач, уравнений, методов их исследования и решения можно представить в виде схемы на рис. 1.

Особо обратим внимание на то, что уравнение (25) возникает в известном *методе регуляризации А.Н.Тихонова* в применении к уравнению $Av = g$. Это говорит не только о глубокой взаимосвязи рассматриваемого нами класса задач с общей теорией обратных и некорректно поставленных задач, но и о том, что *при изучении и численном решении задач вида* (18): *задачи точного управления, задачи оптимального управления, ..., задачи усвоения данных измерений и др., необходимо учитывать и применять многие положения и подходы этой теории. С другой стороны, обратные задачи* (*даже достаточно общего вида!*) *можно изучать и решать, применяя методы оптимального управления с активным использованием теории сопряженных уравнений.*

$Lu = f + Bv,$ $Cu = \varphi_{ob}$	$\longleftrightarrow$	$Av = g$
$\downarrow$		$\downarrow$
$Lu = f + Bv,$ $\inf\limits_{v} = \|Cu - \varphi_{ob}\|^2$	$\longleftrightarrow$	$\inf\limits_{v} = \|Av - g\|^2$
$\downarrow$		$\downarrow$
$Lu_\alpha = f + Bv_\alpha,$ $\inf\limits_{v_\alpha} = \alpha\|v_\alpha\|^2 +$ $+ \|Cu_\alpha - \varphi_{ob}\|^2$	$\longleftrightarrow$	$\inf\limits_{v_\alpha} = \alpha\|v_\alpha\|^2 +$ $+ \|Av_\alpha - g\|^2$
$\downarrow$		$\downarrow$
$Lu_\alpha = f + Bv_\alpha,$ $L^* q_\alpha = C^*(Cu_\alpha - \varphi_{ob})$ $\alpha v_\alpha + B^* q_\alpha = 0$	$\longleftrightarrow$	$\alpha v_\alpha + A^* A v_\alpha = A^* g,$ $\alpha \geq 0$
$\downarrow$		$\downarrow$
Итерационные алгоритмы	$\longleftarrow$	Итерационные алгоритмы
$\searrow$		
Численная реализация итерационных алгоритмов		

Рис. 1. Схема взаимосвязи задач и уравнений.

§ 7. Основные этапы исследования задач

Из предыдущего раздела уже можно наметить следующие основные этапы исследования и решения задач вида (18), которые будут применяться нами в дальнейшем.

1. После формулировки рассматриваемой задачи в виде (18) — выбора пространств, в которых действуют операторы L, B, C, задания области определения этих операторов и т.д. — она переформулируется как задача оптимального управления и включается в семейство задач типа (22).

2. Исследуется проблема разрешимости задач (22), (24), а также вопросы существования решений уравнения (25)

при $\alpha = 0$ и делаются соответствующие выводы о разрешимости системы (26) и задачи (18).

3. При необходимости проводится изучение дополнительных свойств операторов $A, A^*, \alpha I + A^*A$ и формулируется подходящий итерационный алгоритм в применении к уравнению (25); оценивается и оптимизируется скорость сходимости этого алгоритма; в последующем данный алгоритм выписывается в терминах уравнений системы (26) и, как следствие полученных для (25) результатов, делаются соответствующие выводы о сходимости решений, получаемых в итерационном процессе к решению исходной задачи (18).

При рассмотрении отмеченных выше основных этапов, применяемых в данной книге, используются факты и положения из ряда разделов математики: функционального анализа, теории разрешимости операторных уравнений в банаховых пространствах, теории оптимального управления, теории обратных задач, общей теории итерационных алгоритмов. Эти факты и положения в основном приводятся без доказательств во второй главе настоящей книги.

В третьей главе изучается разрешимость рассматриваемого нами класса задач при введении подходящих ограничений. Устанавливается сходимость (в том или ином смысле!) решений $u_\alpha, q_\alpha, v_\alpha$ при $\alpha \to +0$ к решению исходных задач и формулируются итерационные алгоритмы решения рассматриваемых задач.

Четвертая глава посвящена приложению общей методологии, используемой в настоящей книге, к изучению и формулировке методов приближенного решения ряда конкретных обратных задач математической физики, задач управления, задач ассимиляции (усвоения) данных измерений для эволюционных уравнений.

В пятой главе формулируются некоторые из подходов распространения рассматриваемых в книге методов на нелинейные задачи.

Заключительная глава посвящена применению изучаемых методов и подходов к численному решению обратнах задач и соответствующих им задач вариационной ассимиляции данных наблюдений для нелинейной системы уравнений математической модели гидротермодинамики океанов и морей. В данной главе показано как с привлечением современных методов вычислительной математики, в т.ч. методов расщепления, излагаемая в данной книге общая методология может быть применена к практическому решению сложных прикладных задач.

В список литературы включены в основном учебники и монографии, в которых можно найти факты и положения, приводимые без доказательств во второй главе книги, а также оригинальные статьи, которые легли в основу многих разделов настоящей книги.