Глава 4. ПРИЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Рассмотрим методы и подходы, сформулированные в предыдущей главе, применительно к задачам математической физики. Предварительно приведём некоторые сведения, касающиеся краевых задач для уравнений в частных производных. Ниже будут приведены также некоторые оценки решений задачи Коши, которые в настоящее время находят всё большее применение при исследовании обратных задач и задач точного управления.

§ 1. Некоторые уравнения и задачи математической физики

1.1. Некоторые основные уравнения математической физики

Важный класс уравнений в частных производных описывается линейным уравнением второго порядка, имеющим вид

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = F(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Функции $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $a(x)$ называются *коэффициентами* уравнения (1) а функция $F(x)$ — *свободным членом.*

При изучении уравнений вида (1) можно выделить три основных типа: *эллиптические, параболические* и *гиперболические* [13]. Простейшими уравнениями этих типов являются соответственно уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности и волновое уравнение, которые уже приводились в главе 1 и которые будут рассматриваться ниже.

Среди уравнений в частных производных первого порядка отметим лишь *интегро-дифференциальное уравнение переноса частиц*, относящееся к классу кинетических уравнений [1, 43]. Уравнения других классов в частных производных и постановки задач для них приведены, например, в [13, 21, 46].

1.1.1. Уравнения Лапласа и Пуассона. Уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta u = 0, \tag{2}$$

где $u = u(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа в $\mathbf{R}^n$. Соответствующее неоднородное уравнение

$$-\Delta u = F \tag{3}$$

(F — известная функция) называется *уравнением Пуассона*. Уравнения Лапласа и Пуассона возникают в разнообразных задачах. Например, стационарное (т.е. не меняющееся со временем) распределение температуры в однородной среде и установившаяся форма натянутой мембраны удовлетворяют уравнению Лапласа, а аналогичное распределение температуры при наличии источников тепла (с плотностью, не меняющейся во времени) и форма мембраны при наличии стационарных внешних сил удовлетворяют уравнению Пуассона. Потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению Пуассона с функцией F, пропорциональной плотности зарядов (тем самым, в области, где нет зарядов, он удовлетворяет уравнению Лапласа).

1.1.2. Уравнение колебаний. Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объёмов) и физики (электромагнитные колебания) описываются уравнением колебаний вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t), \tag{4}$$

где неизвестная функция $u(x,t)$ зависит от n $(n = 1, 2, 3)$ пространственных координат $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и времени t; коэффициенты ρ, p и q определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; свободный член $F(x,t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения. В уравнении (4) в соответствии с определением операторов div и grad

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(p \frac{\partial}{\partial x_i}\Big).$$

Частным случаем уравнения (4) является также *уравнение малых поперечных колебаний мембраны*

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F. \tag{5}$$

Если плотность ρ постоянна, то уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}, \tag{6}$$

называют также *двумерным волновым уравнением.*

Трехмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f \tag{7}$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяют плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

1.1.3. Уравнения диффузии и теплопроводности. Процессы распространения тепла и диффузии частиц в среде описываются следующим уравнением диффузии:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t), \tag{8}$$

где ρ – коэффициент пористости среды, а p и q характеризуют ее свойства.

Если рассматривается процесс распространения тепла, то $u(x,t)$ есть температура среды в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t. Считая среду изотропной, обозначим через $\rho(x)$, $c(x)$ и $k(x)$ соответственно ее плотность, удельную теплоемкость и коэффициент теплопроводности, а через $F(x,t)$ – интенсивность источников тепла. Процесс распространения тепла описывается функцией, удовлетворяющей уравнению вида

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x,t). \tag{9}$$

Если среда однородна, т.е. c, ρ и k – постоянные, то уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \tag{10}$$

где

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{F}{c\rho}.$$

Уравнение (10) называется *уравнением теплопроводности.* Число n пространственных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в этом уравнении может быть любым.

1.1.4. Уравнение переноса. Для описания процесса распространения частиц вместо уравнения диффузии используются также более точные уравнения — так называемые *уравнения переноса* (*кинетические уравнения*). Одним из представителей этого класса уравнений является *односкоростное уравнение переноса* вида

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (s, \mathrm{grad})\varphi + \sigma\varphi = \frac{\sigma_s}{4\pi}\int\limits_{S_1}\varphi(x, s', t)ds' + F, \qquad (11)$$

где $\varphi = vN(x, s, t)$ – поток частиц, летящих с (одной и той же) скоростью v в направлении $s = (s_1, s_2, s_3)$, $|s| = 1$; $N(x, s, t)$ – плотность частиц; $F(x, s, t)$ – плотность источников, коэффициенты $\sigma(x, t)$, $\sigma_s(x, t)$ характеризуют свойства среды; S_1 – сфера единичного радиуса в $\mathbf{R}^3$.

Для полного описания процесса переноса частиц необходимо задать начальное распределение потока частиц φ в области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ (начальное условие) и режим на границе этой области (граничное условие). Например, если область Ω, где происходит процесс переноса, выпуклая, то граничное условие вида

$$\varphi(x, s, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (s, n) < 0, \qquad (12)$$

где $n = n(x)$ – единичный вектор внешней нормали к границе области Ω, выражает отсутствие падающего потока частиц на область извне.

Отметим, что уравнение переноса описывает процессы переноса нейтронов в ядерном реакторе, переноса лучистой энергии, прохождение γ-квантов через вещество, движения газов и другие.

1.2. Постановка основных задач математической физики

Сформулируем постановки основных краевых (начально-краевых) задач математической физики [3, 17, 46].

1.2.1. Классификация краевых задач. Как отмечалось ранее, линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{div}\,(p\,\mathrm{grad}\,u) - qu + F(x, t) \qquad (13)$$

описывает процессы колебаний, уравнение

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t) \tag{14}$$

описывает процессы диффузии и, наконец, уравнение

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = F(x) \tag{15}$$

описывает соответствующие стационарные процессы.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область, где происходит физический процесс, а $\partial\Omega$ – ее граница, которую считаем кусочно-гладкой поверхностью. Область изменения аргументов x – область Ω – в случае уравнения (14) есть *область задания уравнения.* Временную переменную t считаем из $(0, T)$.

Будем предполагать, что коэффициенты ρ, p и q уравнений (13)–(15) не зависят от t. Далее, в соответствии с их физическим смыслом, считаем, что $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) > 0$, $x \in \overline{\Omega}$. Кроме того, в соответствии с математическим смыслом уравнений (13)–(15) необходимо считать, что $\rho \in C(\overline{\Omega}), p \in C^1(\overline{\Omega})$ и $q \in C(\overline{\Omega})$.

При сделанных предположениях *уравнение колебаний* (13) — *гиперболического типа, уравнение диффузии* (14) — *параболического типа и стационарное уравнение* (15) — *эллиптического типа.*

Чтобы полностью описать тот или иной физический процесс, необходимо, кроме самого уравнения, описывающего этот процесс, задать начальное состояние этого процесса (*начальные условия*) и режим на границе той области, в которой происходит этот процесс (*граничные условия*). Математически это связано с неединственностью решения дифференциальных уравнений. Поэтому, чтобы выделить решение, описывающее реальный физический процесс, необходимо задавать дополнительные условия. Такими дополнительными условиями и являются *краевые условия*: *начальные* и *граничные.* Соответствующая задача называется *краевой задачей.* Таким образом, краевая задача математической физики — это дифференциальное (интегро-дифференциальное) уравнение (или система уравнений) с заданными краевыми условиями.

Различают, таким образом, следующие три основных типа краевых задач для дифференциальных уравнений.

a) *Задача Коши* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, область Ω совпадает со всем пространством $\mathbf{R}^n$, граничные условия отсутствуют.

b) *Краевая задача* эллиптического типа: задаются граничные условия на границе $\partial\Omega$, начальные условия отсутствуют.

c) *Смешанная задача* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные и граничные условия, $\Omega \neq \mathbf{R}^n$.

Опишем подробнее постановку каждой из перечисленных краевых задач для рассматриваемых уравнений (13)–(15).

1.2.2. Задача Коши. Для уравнения колебаний (13) (гиперболический тип) задача Коши ставится следующим образом: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(t > 0) \bigcap C^1(t \geq 0)$, удовлетворяющую уравнению (13) в полупространстве $t > 0$ и начальным условиям при $t = +0$:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x). \tag{16}$$

При этом необходимо , чтобы $F \in C(t > 0)$, $u_0 \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $u_1 \in C(\mathbf{R}^n)$.

Для уравнения диффузии (14) (параболический тип) задача Коши ставится так: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(t > 0) \bigcap C(t \geq 0)$, удовлетворяющую уравнению (14) в полупространстве $t > 0$ и начальному условию при $t = +0$:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x). \tag{17}$$

При этом необходимо, чтобы $F \in C(t > 0)$, $u_0 \in C(\mathbf{R}^n)$.

Приведенная постановка задачи Коши допускает следующее обобщение. Пусть даны квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + \\ + \Phi(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t}), \qquad (18)$$

кусочно-гладкая поверхность $\Sigma = [t = \sigma(x)]$ и функции u_0, u_1 на Σ (*данные Коши*). Задача Коши для уравнения (18) состоит в нахождении в некоторой части области $t > \sigma(x)$, примыкающей к поверхности Σ, решения $u(x, t)$, удовлетворяющего на Σ краевым условиям

$$u|_{\Sigma} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = u_1, \qquad (19)$$

где n – нормаль к Σ, направленная в сторону возрастающих значений t.

1.2.3. Краевая задача для уравнения эллиптического типа. Краевая задача для уравнения (15) (эллиптический тип) состоит в нахождении функции $u(x)$ класса $C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей в области Ω уравнению (15) и граничному условию на $\partial\Omega$ вида

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \nu, \qquad (20)$$

где α, β и ν – заданные кусочно-непрерывные функции на $\partial\Omega$, причем $\alpha(x) \geq 0,\ \beta(x) \geq 0,\ \alpha(x) + \beta(x) > 0,\ x \in \partial\Omega$. Выделяют следующие типы граничных условий (20):
граничное условие I рода ($\alpha = 1,\ \beta = 0$)

$$u|_{\partial\Omega} = u_0; \qquad (21)$$

граничное условие II рода ($\alpha = 0,\ \beta = 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = u_1; \tag{22}$$

граничное условие III рода ($\alpha \geq 0,\ \beta = 1$)

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = u_2. \tag{23}$$

Соответствующие краевые задачи называются *краевыми задачами* I, II и III *рода*.

Для уравнений Лапласа и Пуассона краевая задача I рода

$$\Delta u = -f, \quad u|_{\partial\Omega} = u_0 \tag{24}$$

называется *задачей Дирихле*; краевая задача II рода

$$\Delta u = -f, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = u_1 \tag{25}$$

называется *задачей Неймана.*

Аналогично ставятся краевые задачи для уравнения (15) и во внешности ограниченной области Ω (*внешние краевые задачи*). Отличие состоит в том, что, помимо граничного условия (20), на $\partial\Omega$ задаются еще условия на бесконечности. Таким условием, например, может быть условие вида

$$u(x) = O(1) \quad \text{или} \quad u(x) = o(1), \quad |x| \to \infty, \tag{26}$$

для уравнения Пуассона.

1.2.4. Смешанные задачи. Для уравнения колебаний (13) (гиперболический тип) смешанная задача ставится следующим образом: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(Q_T)\bigcap \bigcap C^1(\overline{Q}_T)$, где $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, удовлетворяющую уравнению (13) в цилиндре Q_T, начальным условиям (16) при $t = 0,\ x = \overline{\Omega}$ (на нижнем основании цилиндра Q_T) и граничному условию (20) (на боковой поверхности цилиндра Q_T). При этом должны быть выполнены условия гладкости

$$F \in C(Q_T), \ \ u_0 \in C^1(\overline{\Omega}), \ \ u_1 \in C(\overline{\Omega}),$$

v – кусочно-непрерывна на $\partial\Omega \times [0, T]$ и условия согласованности

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = v\big|_{t=0}, \quad \alpha u_1 + \beta \frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}. \qquad (27)$$

(Второе из равенств (27) имеет смысл, если решение $u(x, t)$ достаточно гладко вплоть до нижнего основания Q_T.)

Аналогично для уравнения диффузии (14) (параболический тип) смешанная задача ставится так: найти функцию $u(x, t)$ класса $C^2(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T)$, $\mathrm{grad}_x\, u \in C(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющую уравнению (14) в Q_T, начальному условию (17) и граничному условию (20).

1.3. Обобщенные постановки и решения задач математической физики

Изложенные в предыдущих пунктах постановки краевых задач характеризуются тем, что решения их предполагаются достаточно гладкими, и они должны удовлетворять уравнению в каждой точке области задания этого уравнения. Такие решения мы будем называть *классическими*, а постановку соответствующей краевой задачи – *классической постановкой*. Таким образом, классические постановки задач уже предполагают достаточную гладкость входящих в задачу данных. Однако в наиболее интересных задачах эти данные могут иметь довольно сильные особенности. Поэтому для таких задач классические постановки уже оказываются недостаточными. Чтобы поставить такие задачи, приходится отказываться (частично или полностью) от требования гладкости решения в области или вплоть до границы, вводить так называемые *обобщенные решения* и *обобщенные постановки задач* математической физики.

Одно из направлений в теории обобщенных решений и постановок краевых задач базируется на использовании функциональных пространств Соболева. При этом теоремы вложения и теоремы существования следов (граничных значений), установленные для этих пространств, позволяют придать смысл граничным условиям для уравнений математической физики и рассматривать эти условия как дополнительные уравнения в соответствующих пространствах (пространствах следов). В ряде задач даже можно исключить явное присутствие граничных условий в обобщенной постановке задач, включив их вместе с основным уравнением в некоторое интегральное тождество (так называемые естественные граничные условия).

Сформулируем основные подходы введения обобщенных постановок задач и обобщенных решений на примерах некоторых основных задач математической физики, используя при этом пространства Соболева [21, 46, 47].

1.3.1. Обобщенные производные. Пространства Соболева. Следуя С.Л.Соболеву, определим для локально суммируемой функции обобщенную производную.

Локально суммируемую на Ω функцию ω_α назовем *обобщенной производной функции* $f \in L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *порядка* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, α_k – целые неотрицательные, $k = 1, \ldots, n$, если для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место равенство

$$\int\limits_\Omega f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega \omega_\alpha \varphi dx. \qquad (28)$$

В дальнейшем будем обозначать $\omega_\alpha = D^\alpha f$.

Рассмотрим некоторые свойства обобщенных производных [13, 27, 50]. Равенство (28) ставит в соответствие локально суммируемой функции f единственную обобщенную производную порядка α. Это следует из леммы дю Буа-Реймонда.

Лемма 1 (лемма дю Буа-Реймонда). *Для того чтобы локально суммируемая функция $f = 0$ почти всюду в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнялось*

$$\int\limits_\Omega f \varphi dx = 0.$$

Теорема 1 (*Слабая замкнутость оператора обобщенного дифференцирования*). *Пусть f_n — последовательность локально суммируемых на Ω функций. Если существуют такие $\omega_0, \omega_\alpha \in L_{\text{loc}}$, что для любых финитных функций $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняются равенства*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n \varphi dx = \int\limits_\Omega \omega_0 \varphi dx, \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n D^\alpha \varphi dx =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega \omega_\alpha \varphi dx,$$

то локально суммируемая функция ω_α является обобщенной производной порядка α функции ω_0.

Следствие. *Пусть последовательность $f_n \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, слабо сходится к $f_0 \in L_p(\Omega)$, а последовательность обобщенных производных $D^\alpha f_n \in L_p(\Omega)$ слабо сходится к $\omega_\alpha \in L_p(\Omega)$, тогда f_0 имеет обобщенную производную порядка α и $D^\alpha f_0 = \omega_\alpha$.*

Из теоремы 1 следует, что обобщенные производные по Соболеву можно рассматривать как предельные элементы сходящихся в $L_p(\Omega)$ последовательностей производных от гладких функций. Это свойство обобщенных производных широко используется в различных краевых задачах математической физики. Рассматриваемые задачи, как правило, сводятся к исследованию некоторого оператора, первоначально заданного на гладких функциях, который надо расширить до замкнутого оператора в некотором нормированном пространстве. Широкие классы дифференциальных операторов, рассматриваемых в пространстве типа L_p, будут замкнутыми, если их расширить на функции, имеющие обобщенные производные. Эта методика, предложенная в работах С.Л.Соболева и К.О.Фридрихса, позволила решить много трудных задач в теории дифференциальных уравнений и стала в настоящее время классической. Особенно важную роль здесь получили введенные С.Л.Соболевым классы функций $W_p^l(\Omega)$.

Определим классы $W_p^l(\Omega)$ Соболева (см. [27, 50]). Пусть Ω принадлежит классу $C^{0,1}$ и l есть неотрицательное целое число. Пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$, $p \geq 1$ есть подпространство $L_p(\Omega)$ функций f, имеющих обобщённые производные $D^\alpha f$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leq l$, с нормой

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \Big(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \int_\Omega |D^\alpha f|^p dx \Big)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{W_p^\infty(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \; ess \sup_{x \in \Omega} \; |D^2 f(x)|, \quad p = \infty.$$

Пространство $W_p^l(\Omega)$ является банаховым пространством. Если $l = 0$, то $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$и $\|f\|_{W_p^0(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)}$. *Если Ω — область с липшицевой границей и $(1 \leq p < \infty)$, то $W_p^l(\Omega)$ может быть определено как замыкание $C^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{W_p^l(\Omega)}$.*

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ подпространство из $W_p^l(\Omega)$, являющееся пополнением функций из $\overset{\circ}{C}{}_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{W_p^l(\Omega)}$. При $p = 2$ пространства $W_p^l(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ являются гильбертовыми пространствами со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_p^l(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \int_\Omega D^\alpha u \overline{D^\alpha v} \, dx$$

и нормой

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

Пространства $W_p^l(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ обозначают также как $H^l(\Omega) \equiv W_p^l(\Omega)$, $H_0^l(\Omega) \equiv \overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$. Отмечаем, что *пространства*

$W_p^l(\Omega)$, $\overset{\circ}{W_p^l}(\Omega)$ *не совпадают для ограниченной области* Ω.

Ряд свойств пространств $W_p^l(\Omega)$ приведен в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *есть ограниченная область с липшицевой границей* $\partial\Omega$.

1. *Если* $1 < p$, *то существует постоянная* C *такая, что*

$$\|u\|_{L_p(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega}).$$

2. *Если* $n < kp$, $\lambda < k - n/p$, *то существует* C *такая, что*

$$\|u\|_{C^\lambda(\Omega)} \le C\|u\|_{W_p^k(\Omega)} \quad \forall u \in W_p^k(\Omega).$$

3. *Если* $u \in W_p^k(\Omega)$ *и* $D^\alpha u = 0$ *на* $\partial\Omega$ *для* $|\alpha| \le k-1$, *тогда* $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$.

4. *Существует линейный ограниченный оператор* L_{ext}, *отображающий* $W_p^k(\Omega)$ *в* $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\mathbf{R}^n)$, *так что* $L_{\text{ext}}u(x) = u(x)$ *при* $x \in \Omega$.

5. *Существует постоянная* $C = C(\Omega, k)$ *такая, что*

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} \le C\|u\|_{W_2^m(\Omega)}^{k/m}\|u\|_{L_2(\Omega)}^{1-k/m} \ \ \forall u \in W_2^m(\Omega) \ \ 0 \le k \le m.$$

Утверждение 1 из этой теоремы называют "теоремой о следах". Оно утверждает, что отображение $\gamma : C^1(\bar{\Omega}) \to$ $\to L_p(\partial\Omega)$, $\gamma u = u$ на $\partial\Omega$ — линейное и непрерывное на $C^1(\bar{\Omega})$. Таким образом, γ *может быть продолжено на все* $W_p^1(\Omega)$ с сохранением неравенства из п. 1. Вместо γu будем писать просто u и эту функцию (принадлежащую $L_p(\partial\Omega)$) называть *следом* u *на* $\partial\Omega$. Если $u \in W_p^l(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, то можно определить следы для всех производных вплоть до порядка $l-1$. Этот факт оправдывает определение $\overset{\circ}{W_p^l}(\Omega)$ на основе утверждения 3 из приведенной выше теоремы.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 3 (формула Грина). *Пусть* Ω *— область в* $\mathbf{R}^n$ *класса* $C^{0,1}$ *и* v, w *— две функции из* $C^1(\bar{\Omega})$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int_\Omega \frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\, v(x)\, dx = -\int_\Omega w(x)\, \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} w(x) v(x) n_i(x) ds,$$

где n_i *—* i*-й компонент единичного вектора внешней нормали* n *к* $\partial\Omega$.

Для функций $v, w \in C^m(\bar{\Omega})$ справедлива следующая формула:

$$\int_\Omega D^\alpha w(x) v(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega w(x) D^\alpha v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} G(v, w)\, ds,$$

где α — n-мерный мультииндекс длины $m, |\alpha| = m, G(v, w)$ — сумма произведений вида $\pm D^\beta v(x) D^\gamma w(x) n_i(x),\ x \in \partial\Omega$ с $|\beta| < m,\ |\gamma| < m,$ а $n_i = n_i(x)$ — компонент вектора внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$.

1.3.2. Обобщенные постановки и решения эллиптических задач. Задача Дирихле. Рассмотрим простейшую эллиптическую краевую задачу — задачу Дирихле для уравнения Лапласа или уравнения Пуассона — и дадим ее обобщенную постановку. Вначале обсудим задачу для уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ \qquad u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Вместо граничного условия $u|_{\partial\Omega} = 0$ будем писать $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (это включение в случае ограниченных областей с гладкой, или кусочно-гладкой, границей равносильно тому, что $u \in$ $\in W_2^1(\Omega)$ и $u|_{\partial\Omega} = 0$). Умножая обе части уравнения $-\Delta u = f$ на $\overline{v}(x)$, где $v \in C_0^\infty(\Omega)$, и интегрируя по частям, получаем

$$[u, v] = (f, v), \tag{30}$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, а

$$[u,v] = \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_j} dx,$$

так что $[\cdot,\cdot]$ – форма, непрерывная на пространстве $W_2^1(\Omega)$, т.е. $|[u,v]| \leq C\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\|v\|_{W_2^1(\Omega)}$, где постоянная $C > 0$ не зависит от u, v. Величина

$$\mathcal{D}(u) = [u,u] = \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|^2 dx$$

называется *интегралом Дирихле.*

Равенство (30) имеет смысл для любых функций $u, v \in$ $\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и для $f \in L_2(\Omega)$. Оно и будет рассматриваться вместо задачи (29). При этом можно брать лишь такие функции v, что $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В случае классического решения u (т.е. решения $u \in C^2(\overline{\Omega})$ задачи (29) равенство (30) получается описанной выше процедурой при $v \in C_0^\infty$ и затем с использованием предельного перехода при $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Итак, приходим к следующей *обобщенной постановке задачи* (29): *при заданной функции $f \in L_2(\Omega)$ найти такую функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, что для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено* (30).

Как уже указывалось, вместо $v \in C_0^\infty(\Omega)$ можно писать $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, что приводит к эквивалентной постановке. Кроме того, перебрасывая производные с v на u интегрированием по частям, получаем, что (30) равносильно уравнению $-\Delta u = f$, понимаемому в смысле обобщенных функций, так что сформулированная обобщенная постановка задачи эквивалентна следующей: *дана функция $f \in L_2(\Omega)$; найти такую функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, что $-\Delta u = f$ в смысле обобщенных функций.*

Всякое решение u задачи (30) будем называть *обобщенным* или *слабым решением,* в отличие от классического решения, о котором имеет смысл говорить при $f \in C(\overline{\Omega})$). С другой стороны, всякое классическое решение $u \in C^2(\Omega)$ является обобщенным.

Заметим, что $[\cdot,\cdot]$ можно считать скалярным произведением в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Это равносильно тому, что выражение $\|u\|_1 = \sqrt{\mathcal{D}(u)} = [u,u]^{1/2}$ является нормой, эквивалентной норме $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)}$ на $C_0^\infty(\Omega)$. Ввиду очевидного соотношения $\|u\|^2_{W_2^1} = \|u\|^2 + \mathcal{D}(u)$ эквивалентность норм $\|\cdot\|_{W_2^1}$ и $\|\cdot\|_1$ вытекает из так называемого *неравенства Стеклова*

$$\|u\|^2 \le C\mathcal{D}(u), \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{31}$$

где $C > 0$ не зависит от u, а $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$.

Пользуясь эквивалентностью норм $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_1$ для функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и привлекая теорему Рисса о представлении линейного ограниченного функционала, нетрудно установить следующее утверждение.

Теорема 4. *Если Ω – любая ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и $f \in L_2(\Omega)$, то обобщенное решение задачи* (29) *существует и единственно.*

Рассмотрим теперь кратко задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \tag{32}$$

При переходе к обобщенной постановке прежде всего возникает вопрос об интерпретации граничного условия. Если граница $\partial\Omega$ является гладкой и если $\varphi \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$,[1] то по теореме о существовании следа существует такая функция

[1] Определение пространств W_2^γ дробного порядка γ приводится, например, в [17, 27, 35, 50]

$v \in W_2^2(\Omega)$, что $v|_{\partial\Omega} = \varphi$. Но тогда если $u \in W_2^1(\Omega)$ является решением задачи (32), то для $w = u - v$ мы получим задачу вида (29) с $f = -\Delta v \in L_2(\Omega)$, так что можно перейти к обобщенной постановке (30) и в случае ограниченной области Ω воспользоваться теоремой 4, из которой теперь следует существование и единственность решения задачи (32). Если граница $\partial\Omega$ негладкая, то можно сразу зафиксировать функцию $v \in W_2^1(\Omega)$, задающую граничное условие, и ставить задачу следующим образом: *дана функция $v \in W_2^1(\Omega)$; найти функцию u такую, что $u - v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а также $\Delta u(x) = 0$ при $x \in \Omega$.*

Теорема 5. *Если Ω — любая ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и $v \in W_2^1(\Omega)$, то обобщенное решение u задачи* (32) *существует и единственно. Это решение имеет строго минимальный интеграл Дирихле $\mathcal{D}(u)$ среди всех функций $u \in W_2^1(\Omega)$, для которых $u - v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Обратно, если u является стационарной точкой интеграла Дирихле в классе всех функций $u \in W_2^1(\Omega)$, для которых $u - v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то u – обобщенное решение задачи* (32) (*и тем самым интеграл Дирихле имеет строгий минимум на функции u*).

Задача Неймана. Однородная задача Неймана для уравнения Пуассона имеет вид

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Для перехода к ее обобщенной постановке будем считать, что Ω – ограниченная область с гладкой границей, и пусть сначала $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Умножая обе части уравнения $-\Delta u = f$ на функцию $\overline{v}$, где $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, и затем интегрируя по Ω, воспользуемся формулой Грина

$$\int_\Omega \Delta u(x)\overline{v}(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\overline{v}(x)dx + \int_{\partial\Omega} \overline{v}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n}dS_x,$$

где dS_x – элемент площади поверхности границы. Отсюда находим в силу (33)

$$[u, v] = (f, v). \tag{34}$$

По непрерывности здесь вместо $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ можно брать $v \in W_2^1(\Omega)$ даже в том случае, когда известно лишь, что $u \in W_2^1(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$. Это дает *обобщенную постановку задачи Неймана*: *по функции* $f \in L_2(\Omega)$ *найти такую функцию* $u \in W_2^1(\Omega)$, *чтобы* (34) *выполнялось для любой функции* $v \in W_2^1(\Omega)$.

Решение этой задачи единственно с точностью до произвольной постоянной: если u_1 – другое решение задачи Неймана (с той же функцией f) и $w = u_1 - u$, то $[w, v] = 0$ для любой функции $v \in W_2^1(\Omega)$. Полагая $v = w$, получаем, что $[w, w] = 0$. Это значит, что все обобщенные производные $\dfrac{\partial w}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, обращаются в нуль и $w =$const.

Обобщенное решение задачи Неймана существует для тех и только тех функций $f \in L_2(\Omega)$, для которых выполнено условие

$$(f, 1) = \int\limits_{\Omega} f(x)dx = 0,$$

то есть для функций с нулевым средним значением. Необходимость этого условия сразу вытекает из (34) при $v \equiv 1$.

Для доказательства существования обобщенного решения задачи Неймана можно воспользоваться *неравенством Пуанкаре*:

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \le C\Big(\mathcal{D}(u) + \Big(\int\limits_{\Omega} u dx\Big)^2\Big), \quad u \in C^\infty(\Omega), \tag{35}$$

где C=const не зависит от u, в силу которого на функциях из $W_2^1(\Omega)$, ортогональных единице, нормы $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$, $\|u\|_1 = (\mathcal{D}(u) + (\int\limits_{\Omega} u dx)^2)^{1/2}$ эквивалентны. Привлекая теперь известную теорему Рисса, *получаем существование единственного обобщенного решения $u \in W_2^1(\Omega)$ задачи Неймана при условиях $f \in L_2(\Omega)$, $\int\limits_\Omega f(x)dx = 0$.*

Краевые задачи для общих эллиптических уравнений 2-го порядка могут быть переформулированы и исследованы подходами, которые продемонстрированы выше на примере задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа.

1.3.3. Обобщенные постановки и решения гиперболических задач. Пусть Ω – некоторая ограниченная область n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$ ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – точка этого пространства). В $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \{-\infty < t < +\infty\}$ рассмотрим ограниченный цилиндр $Q_T = \{x \in \Omega,\ 0 < t < T\}$ высоты $T > 0$. Обозначим через Γ_T боковую поверхность $\{x \in \partial\Omega,\ 0 < t < T\}$ цилиндра Q_T, а через Ω_τ – сечение $\{x \in \Omega,\ t = \tau\}$ этого цилиндра плоскостью $t = \tau$; в частности, верхнее основание цилиндра Q_T есть $\Omega_T = \{x \in \Omega,\ t = T\}$, а нижнее его основание – $\Omega_0 = \{x \in \Omega,\ t = 0\}$.

В цилиндре Q_T при некотором $T > 0$ рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = f(x,t), \tag{36}$$

где $k(x) \in C^1(\overline{Q}_T),\ a(x) \in C(\overline{Q}_T),\ k(x) \geq k_0 = \text{const} > 0$.

Функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству $C^2(Q_T) \bigcap \bigcap C^1(Q_T \bigcup \Gamma_T \bigcup \overline{\Omega}_0)$, удовлетворяющая в Q_T уравнению (36), на $\overline{\Omega}_0$ — начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi, \tag{37}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi, \tag{38}$$

а на Γ_T — одному из граничных условий

$$u|_{\Gamma_T} = \chi$$

или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma_T} = \chi,$$

где σ – некоторая непрерывная на Γ_T функция, называется (*классическим*) *решением первой или* соответственно *третьей смешанной задачи для уравнения* (36). Если $\sigma \equiv 0$ на Γ_T, то третья смешанная задача называется *второй смешанной задачей.*

Так как случай неоднородных граничных условий легко сводится к случаю однородных граничных условий, то ограничимся рассмотрением случая однородных граничных условий

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{39}$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma_T} = 0. \tag{40}$$

Будем считать, что коэффициент $a(x)$ в уравнении (36) неотрицателен в Q_T, а функция σ в граничном условии (40) зависит лишь от x и неотрицательна на Γ_T.

Пусть функция $u(x,t)$ является решением одной из задач (36)–(39) или (36), (37), (38), (40), причем правая часть $f(x,t)$ уравнения (36) принадлежит $L_2(Q_T)$. Умножая (36) на $v(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, для которых выполнены условия (39) и $v|_{Q_T} = 0$, проинтегрируем по Q_T с применением формулы интегрирования по частям и формулы Грина. В результате получаем тождество

$$\int\limits_{Q_T} (k\nabla u \nabla v + auv - u_t v_t)dxdt = \int\limits_{\Omega_0} \psi v dx + \int\limits_{Q_T} f v dxdt \tag{41}$$

при всех $v \in W_2^1(Q_T)$, для которых выполнены условия (39) и условие

$$v|_{\Omega_T} = 0, \tag{42}$$

или

$$\int\limits_{Q_T} (k\nabla u \nabla v + auv - u_t v_t)dx\,dt + \int\limits_{\Gamma_T} k\sigma uv\,dS\,dt =$$
$$= \int\limits_{\Omega_0} \psi v dx + \int\limits_{Q_T} fv\,dx\,dt \tag{43}$$

при всех $v \in W_2^1(Q_T)$, для которых выполнено условие (42).

С помощью полученных тождеств введем понятие обобщенных решений рассматриваемых смешанных задач. Будем предполагать, что $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, а $\psi(x) \in L_2(\Omega)$.

Принадлежащая пространству $W_2^1(Q_T)$ функция u называется *обобщенным решением в* Q_T *первой смешанной задачи* (36)–(39), если она удовлетворяет начальному условию (37), граничному условию (39) и тождеству (41).

Принадлежащая пространству $W_2^1(Q_T)$ функция u называется *обобщенным решением в* Q_T *третьей* (*второй* при $\sigma = 0$) *смешанной задачи* (36)–(38), (40), если она удовлетворяет условию (37) и тождеству (43).

Заметим, что, как и классические решения, обобщенные решения обладают следующими свойствами. *Если u – обобщенное решение задачи* (36)–(39) *или задачи* (36)–(38), (40) *в цилиндре Q_T, то оно является обобщенным решением соответствующей задачи и в цилиндре $Q_{T'}$ при $T' < T$.*

Теорема 6. *Пусть $f \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, а $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в случае первой смешанной задачи* (36)–(39) *и $\varphi \in W_2^1(\Omega)$ в случае третьей (второй) смешанной задачи* (36)–(38), (40). *Тогда обобщенное решение u соответствующей задачи существует и единственно. При этом имеет место неравенство*

$$\|u\|_{W_2^1(Q_T)} \le C(\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}), \tag{44}$$

в котором положительная постоянная C не зависит от $\varphi,\ \psi,\ f$.

1.3.4. Обобщенные постановки и решения параболических задач. Пусть Ω – ограниченная область n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$, а $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – точка этого пространства. Подобно смешанным задачам для гиперболических уравнений рассмотрим в $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \{-\infty < t < +\infty\}$ ограниченный цилиндр $Q_T = \{x \in \Omega,\ \ 0 < t < T\}$ высоты $T > 0$ и пусть Γ_T — боковая поверхность этого цилиндра $\Gamma_T = \{x \in \partial\Omega,\ 0 < t < T\}$, а $\Omega_\tau,\ \tau \in [0, T]$ — множество $\{x \in \Omega,\ t = \tau\}$, в частности, верхнее основание цилиндра Q_T есть $\Omega_T = \{x \in \Omega,\ t = T\}$, а нижнее его основание – $\Omega_0 = \{x \in \Omega,\ t = 0\}$. Через $C^{2,1}(Q_T)$ обозначим совокупность непрерывных в Q_T функций, имеющих непрерывные в Q_T производные $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}$, $C^{1,0}(Q_T \bigcup \Gamma_T)$ есть множество непрерывных в $(Q_T \bigcup \Gamma_T)$ функций с непрерывными производными $u_{x_i}(i, j = 1, 2, ...n)$.

Рассмотрим в цилиндре Q_T при некотором $T > 0$ параболическое уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv u_t - \mathrm{div}\,(k(x)\nabla u) + a(x)u = f(x,t), \tag{45}$$

где $k(x) \in C^1(\overline{Q}_T),\ a(x) \in C(\overline{Q}_T),\ k(x) \geq k_0 = \mathrm{const} > 0$.

Функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству $C^{2,1}(Q_T) \bigcap \bigcap C(Q_T \bigcup \Gamma_T \bigcup \overline{\Omega}_0)$, удовлетворяющая в Q_T уравнению (45), на $\overline{\Omega}_0$ – начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi, \tag{46}$$

а на Γ_T – граничному условию

$$u|_{\Gamma_T} = \chi,$$

называется *классическим решением первой смешанной задачи для уравнения* (45).

Функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству $C^{2,1}(Q_T)\bigcap$ $\bigcap C(Q_T \bigcup \bigcup \Gamma_T \bigcup \overline{\Omega}_0) \bigcap C^{1,0}(Q_T \bigcup \Gamma_T)$, удовлетворяющая в Q_T уравнению (45), на $\overline{\Omega}_0$ – начальному условию (46), а на Γ_T – граничному условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\right)\Big|_{\Gamma_T} = \chi,$$

где $\sigma(x)$ – некоторая непрерывная на Γ_T функция, называется *классическим решением третьей смешанной задачи для уравнения* (45). Если $\sigma \equiv 0$, то третья смешанная задача называется *второй смешанной задачей.*

Так как случай неоднородных граничных условий сводится к случаю однородных граничных условий, то будем рассматривать только однородные граничные условия

$$u_t|_{\Gamma_T} = 0 \tag{47}$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\right)\Big|_{\Gamma_T} = 0. \tag{48}$$

Будем считать, что коэффициент $a(x)$ в уравнении (45) неотрицателен в Q_T, а функция $\sigma(x)$ в граничном условии (48) неотрицательна на Γ_T.

Пусть функция u является классическим решением третьей (второй) смешанной задачи (45), (46), (48) или принадлежащим $C^{1,0}(Q_T \bigcup \Gamma_T)$ классическим решением первой смешанной задачи (45)–(47), причем функция $f(x,t) \in L_2(Q_T)$. Умножим (46) на произвольную функцию $v(x,t) \in {}^1(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющую условию

$$v|_{\Omega_T} = 0, \tag{49}$$

и проинтегрируем полученное равенство по цилиндру Q_T. Применяя формулы Грина, получаем следующие утверждения.

Принадлежащее $C^{1,0}(Q_T \bigcup \Gamma_T)$ *классическое решение* $u(x,t)$ *первой смешанной задачи удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_{Q_T} (-uv_t + k\nabla u \nabla v + auv)dxdt = \int\limits_{\Omega_0} \varphi v dx + \int\limits_{Q_T} fvdxdt \quad (50)$$

при всех $v \in C^1(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющих условиям (49) и $v|_{\Gamma_T} = 0$, а следовательно, и *при всех* $v \in W_2^1(Q_T)$, *удовлетворяющих условиям* (49) и $v|_{\Gamma_T} = 0$.

Классическое решение $u(x,t)$ *третьей* (*второй при* $\sigma = 0$) *смешанной задачи удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_{Q_T} (-uv_t + k\nabla u \nabla v + auv)dxdt + \int\limits_{\Gamma_T} k\sigma uvdSdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} \varphi v dx + \int\limits_{Q_T} fvdxdt \quad (51)$$

при всех $v \in C^1(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющих условию (49), а следовательно, и при всех $v \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условию (49).

С помощью полученных тождеств можно ввести понятие обобщенных решений рассматриваемых смешанных задач.

Будем предполагать, что $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, а $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$. Функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству $W_2^{1,0}(Q_T)$, определяемому как

$$(u,v)_{W_2^{1,0}(Q_T)} = \int\limits_{Q_T} (uv + \nabla u \nabla v)dx, \ \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} = (u,u)^{1/2}_{W_2^{1,0}(Q_T)},$$

называется *обобщенным решением первой смешанной задачи* (45)–(47), если она удовлетворяет граничному условию (47) и тождеству (50) для всех $v(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям (47) и (49).

Принадлежащая пространству $W_2^{1,0}(Q_T)$ функция $u(x,t)$ называется *обобщенным решением третьей* (*второй* при

$\sigma = 0$) *смешанной задачи* (45), (46), (48), если она удовлетворяет тождеству (51) при всех $v(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условию (49).

Отметим еще, что обобщенное решение смешанной задачи для параболического уравнения, так же как и классическое решение, обладает следующим свойством: если $u(x,t)$ есть обобщенное решение смешанной задачи (45)–(47) или задачи (45), (46), (48) в цилиндре Q_T, то оно является обобщенным решением соответствующей задачи и в цилиндре $Q_{T'}$ при любом T', $0 < T' < T$.

Теорема 7. *Пусть* $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in L_2(\Omega)$, *то каждая из смешанных задач* (45)–(47) *или* (45), (46), (48) *имеет обобщенное решение* $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$. *При этом имеет место неравенство*

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \le C(\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}), \tag{52}$$

в котором положительная постоянная C *не зависит от* φ, f.

Многие задачи математической физики могут быть переформулированы как *вариационные задачи*, представляющие собой один из подходов к введению обобщенных постановок исходных краевых задач. Этот подход известен еще как *энергетический метод* (см. гл. 2 настоящей книги). Многие важные примеры вариационных постановок задач математической физики приводятся в [41, 46, 47].

1.3.5. Оценки решений задачи Коши. Приведём некоторые оценки решений задачи Коши для уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов. Данные оценки в настоящее время находят различные приложения в исследованиях обратных задач и задач точного управления.

Введём некоторые обозначения. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$; $\tilde{x} = (0, x_2, \dots, x_n)$; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс с неотрицательными целочисленными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; m — мультииндекс с целыми положительными компонентами m_j такими, что $m_1 = \dots = m_q >$ $> m_{q+1} \geq \cdots$; ∇_q — "q–градиент", т.е. $\nabla_q \equiv (D_1, \dots, D_q,$ $0, \dots, 0)$, где $D_j = \partial/\partial x_j$; $|\alpha : m| = \alpha_1/m_1 + \dots + \alpha_n/m_n$.

Множество Γ из $\mathbf{R}^n$ называется *гиперповерхностью* класса C^k (липшицевой, аналитической), если локально (и, возможно, после подходящей замены координат) Γ представляется как функция $x_1 = \gamma(\tilde{x})$ класса C^k (липшицева, аналитическая). Если Γ есть класса C^k и допускает упомянутое выше представление, то существует нормаль $n(x)$ к Γ в точке $x \in \Gamma$.

Говорят, что Γ кусочно-гладкая класса C^k (аналитическая), если она представима в виде $\Gamma_1 \bigcup \dots \bigcup \Gamma_m$, где $\bar{\Gamma}_j$ — части гладких гиперповерхностей класса C^k (аналитических).

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка m: $A = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, где $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$. Коэффициенты a_α считаются вещественными, ограниченными и измеряемыми, а коэффициенты m — главной части $A_m(x; D) =$ $= \sum\limits_{|\alpha : m| = 1} a_\alpha D^\alpha$ оператора A — принадлежат классу $C^1(\bar{\Omega})$.

Сформулируем задачу Коши вида:

$$
\begin{gathered}
Au = f \;\text{ в }\; \Omega, \Big(\frac{\partial}{\partial n}\Big)^j u = g_j, \quad j \leq m_1 - 1 \;\text{ на }\; \Gamma; \\
D^\alpha u \in L_2(\Omega) \;\text{ если }\; |\alpha : m| \leq 1,
\end{gathered}
\tag{53}
$$

где Γ — часть границы $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\Gamma \in C^{m_1}$, Γ — открытое множество из $\partial\Omega$.

Приведём ряд утверждений, касающихся оценок решений задачи (53).

Теорема 8 [64]. *Пусть Ω есть область из $\mathbf{R}^n$, Γ — гиперповерхность (положительной меры), лежащая на $\partial\Omega$, $m = (2, \dots, 2)$, а оператор A является эллиптическим, т.е. $\Sigma a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq \varepsilon_0|\xi|^2$ $\forall x \in \Omega$ и $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon_0 = const > 0$.*

Тогда для любого решения задачи Коши (53) *справедлива оценка вида*

$$\|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega_1)} \le CM^{1-\lambda}\Big(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{j\le m_{1-1}} \|g_j\|_{L_{m_1-j}(\Gamma)}\Big)^\lambda, \quad (54)$$

где Ω_1 *— подобласть из* Ω *такая, что* $dist(\Omega_1, \partial\Omega/\Gamma) > 0$, *постоянные* C *и* λ, $0 < \lambda < 1$, *зависят от* Ω_1, *а* M *есть сумма величин* $\|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$ *по* α *при* $|\alpha : m| \le 1$.

Проиллюстрируем применение теоремы 8 следующим примером.

Пример 1. Предположим, что в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ определена функция $u = u(x)$ такая, что

$$\Delta u = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma,$$

где Γ — гиперповерхность на $\partial\Omega$ положительной меры и $\Gamma \subset \partial\Omega$. Тогда на основании теоремы 8 заключаем, что $u \equiv 0$ в Ω, т.е. информация о $u(x)$ на $\partial\Omega\backslash\Gamma$ отсутствует, тем не менее с помощью оценки (54) сделаем вывод о тривиальности $u(x)$. ■

Теорема 9 [64]. *Пусть* $A(x; D)$ *есть параболический оператор вида:*

$$A(x;D) = D_{n+1} + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} D_j D_k + \sum_{j=1}^{n} a_j D_j + a$$

с коэффициентами $a_{jk} \in C^1(\bar{\Omega})$, *удовлетворяющими условию эллиптичности,* a_j, $a \in L_\infty(\Omega)$. *Пусть также* x', x'' *есть проекции точки* $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ *на* $\mathbf{R}^n$ *и* $\mathbf{R}^{n-1}$, $\Omega = \Omega' \times T$ *и* $\Gamma = \Gamma' \times I$, *где* Ω' *есть область из* $\mathbf{R}^n$, $\Gamma' - C^2$ *— гиперповерхность из* $\mathbf{R}^n$ (*положительной меры*), *являющейся открытой частью* $\partial\Omega'$, *а* I *есть некоторый интервал из* $\mathbf{R}^1$. *Тогда для решения задачи* (53) *при* $m = (2, \dots, 2, 1)$ *справедлива оценка* (54).

Пример 2. Пусть рассматривается задача вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \ \text{ в } \ \Omega \times (0, T), \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0, T),$$

где $T > 0$, а область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ и Γ те же, что и примере 1. Из теоремы 9 следует, что данная параболическая задача может иметь только тривиальное решение. ■

Теорема, аналогичная теоремам 8, 9, может быть сформулирована также для некоторых гиперболических задач второго порядка (см. [64]).

1.4. Сведение краевой задачи к операторному уравнению

После формулировки краевой задачи предстоит изучить ряд вопросов, связанных с данной задачей: существует ли (классическое или обобщённое) решение? Единственно ли решение? Устойчиво ли решение к малым изменениям исходных данных задачи? Исследование часто удобно проводить, заменяя краевую задачу эквивалентным ей операторным уравнением, применяя общие методы теории операторов и операторных уравнений. Заметим также, что изложение предыдущих глав велось в основном для операторных уравнений. Поэтому вопрос сведения конкретных задач к операторным уравнениям также возникает в связи с необходимостью использования приведённых ранее утверждений и алгоритмов решения рассматриваемых задач.

Рассмотрим некоторые способы сведения краевых задач к операторным уравнениям. Их изложение будем проводить в применении к следующей линейной краевой задаче:

$$Au = f, \quad x \in \Omega; \tag{55}$$

$$b_s u = \varphi_s, \quad s = 1, 2, \ldots, k, \quad x \in \partial\Omega, \tag{56}$$

где $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\partial\Omega$ — граница области Ω, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = f(x)$, $\varphi_s = \varphi_s(x)$ — заданные функции в Ω и на $\partial\Omega$, а также

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad b_s = \sum_{|\beta| \leq m_s} a_{s\beta}(x) D^\beta, \tag{57}$$

m — порядок уравнения, m_s — порядок граничных дифференциальных выражений b_s, k — их число.

Прежде всего при формулировке краевой задачи в виде операторного уравнения необходимо выбрать систему функциональных пространств, в которых будет рассматриваться операторное уравнение. Так, при рассмотрении уравнения (55) нужно выбрать два пространства (например, банаховых) E и F; искомое решение рассматривается как элемент E, а совокупность правых частей — как элемент F. Очевидно, эти пространства должны состоять из функций, определённых в $\Omega, \bar{\Omega}$ или на $\partial\bar{\Omega}$. Далее нужно построить оператор L, действующий из первого пространства во второе и преобразующий решение в совокупность правых частей. Специфическая особенность задачи состоит в наличии граничных условий. Учесть их при построении оператора можно двумя способами.

Первый состоит в том, что в область определения оператора L включаются только те функции, которые удовлетворяют граничным условиям (56). Действие оператора определяется следующим образом: $Lu = Au$.

Применение этого способа ограничено, так как функции, удовлетворяющие неоднородным граничным условиям (56), не образуют линейное пространство. Область же определения линейного оператора должна быть линейным пространством. Поэтому, если не отказаться от линейности оператора L, этот способ сведения задачи к операторному уравнению можно применять только к задачам с однородными граничными условиями, когда $\varphi_s = 0$. Краевую задачу с неоднородными граничными условиями всегда можно свести к задаче с однородными условиями, подбирая функцию u_0, удовлетворяющую неоднородным граничным условиям, и полагая $v = u - u_0$.

Второй способ сведения состоит в том, что в качестве пространства F берут декартово произведение $F_0 \times F_1 \times \ldots \times F_k$. Функция f рассматривается как элемент F_0, а функции φ_s — как элементы $F_s (s = 1, 2, \ldots, k)$. Таким образом, пространство F_0 состоит из функций, заданных в Ω, а пространства F_s — из функций, заданных на $\partial\Omega$. Оператор краевой задачи действует как отображение $L : u \to \{Au, b_1 u, \ldots, b_k u\}$. Тогда краевая задача сводится к операторному уравнению $Lu = g$, где $g = \{f, \varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$.

Пример 1. Пусть рассматривается краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области Ω:

$$-\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \partial\Omega \tag{58}$$

и ищется классическое решение $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$.

При $\varphi \equiv 0$ полагаем: $E = L_2(\Omega)$, $F = L_2(\Omega)$, $L_1 u = -\Delta u$, $D(L_1) = \{u : u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega}),\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$ — область определения оператора L_1. Теперь задачу (58) можно записать в виде операторного уравнения

$$L_1 u = f. \tag{59}$$

Отмечаем, что уравнение (59) эквивалентно задаче (58), т.к. всякое классическое решение (58) есть решение уравнения (59) и наоборот. Заметим, что для этой эквивалентности в задаче (58) надо потребовать, чтобы $f \in L_2(\Omega)$, что не обязательно для существования её решения.

Пусть теперь $\varphi \neq 0$. Тогда полагаем: $E = L_2(\Omega)$, $F = L_2(\Omega) \times C(\partial\Omega)$ и $L_2 : u \to \{-\Delta u, u|_{\partial\Omega}\}$, $D(L_2) = C^2(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$. Уравнение

$$L_2 u = g, \quad g = \{f, \varphi\} \tag{60}$$

эквивалентно задаче (58), поскольку всякое решение уравнения (60) есть классическое решение этой задачи и наоборот. ■

Каждой краевой задаче можно сопоставить различные операторные уравнения, выбирая в качестве E и F различные пространства и рассматривая тем самым решения различных классов. Но при определении действия оператора краевой задачи на функции, не принадлежащие $C^m(\Omega)\bigcap \bigcap C^\mu(\bar{\Omega})$ (т.е. при введении обобщённого, а не классического решения), необходимо решить две проблемы. Первая состоит в корректном придании смысла операции дифференцирования функций, не принадлежащих $C^m(\Omega)$, а вторая — в истолковании операции взятия следа на границе $\partial\Omega$ для функции и её производных до порядка μ. В рассмотренном примере эта операция состоит в отображении $u \to u|_{\partial\Omega}$ и участвует в конструкции оператора L_2 из примера 1. Подчеркнём, что она имеет смысл лишь при $u \in D(L_2)$, так как $D(L_2) \subset C(\bar{\Omega})$, но не для произвольного $u \in L_2(\Omega)$. Поскольку эти проблемы решены для пространств С.Л.Соболева, то отсюда ясна их важность в теории краевых задач.

Применяя изложенные схемы, любую краевую задачу можно свести к операторному уравнению $Lu = f$. Но в некоторых случаях её удобнее приводить к операторному уравнению иного типа. Покажем это на примере первой краевой задачи для волнового уравнения.

В этой задаче задаются область $\bar{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$, функции $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, где $x \in \Omega$, $t \geq 0$, а также функция $\varphi(x)$ при $x \in \partial\,\Omega$. Задача состоит в отыскании функции $u(x,t)$ ($x \in \in \Omega$, $t \geq 0$), удовлетворяющей волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \tag{61}$$

в области Q_T, которая представляет собой цилиндр $\Omega \times \times (0,T)$ в пространстве R^{n+1} переменных x, t. Граница цилиндра ∂Q_T состоит из основания $x \in \bar{\Omega}$, $t = 0, T$ и боковой поверхности $x \in \partial\,\Omega,\ t \geq 0$. Искомая функция должна удовлетворять начальным условиям

$$u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \tag{62}$$

т.е. условиям на основании цилиндра, и граничному условию

$$u = \varphi \quad (x \in \partial\,\Omega,\ t \geq 0) \tag{63}$$

на боковой поверхности. Классическое решение задачи должно удовлетворять также условию гладкости $u \in^2 (Q_T) \bigcap \bigcap C^1(\bar{Q}_T)$.

Функции $u(x,t)$, $f(x,t)$ можно интерпретировать как элементы некоторых банаховых пространств функций от x и t, определённых в $\bar{Q}$, и в соответствии с изложенными схемами свести задачи к рассмотрению операторного уравнения алгебраического типа. Но в рассматриваемой задаче удобнее поступить иначе. Будем истолковывать $u(x,t)$ как функцию от переменной t со значениями в некотором пространстве, состоящем из функций от x, определённых в Ω. Аналогично можно истолковать и $f(x,t)$. Если, например, $\varphi = 0$, то в качестве этих пространств возьмём $L_2(\Omega)$ и снова рассмотрим оператор L_1 из примера 1. Рассмотрим дифференциальное операторное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L_1 u = f \tag{64}$$

и начальное условие для него

$$u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{65}$$

Предположим, что найдено решение уравнения (64), удовлетворяющее условиям (65). Это означает, что найдена функция от t со значениями в $L_2(\Omega)$, которая при каждом t принадлежит $D(L_1)$, т.е. классу $C^2(\Omega) \bigcap C^1(\bar{\Omega})$, и удовлетворяет условию $u = 0$ при $x \in \partial\,\Omega$. Кроме того, u и du/dt при

$t=0$ обращаются в заданные элементы u_0 и u_1 пространства $L_2(\Omega)$. Это означает, что найдено решение краевой задачи (61)–(63). Таким образом, она сведена к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции со значениями в $L_2(\Omega)$. Коэффициенты этого уравнения являются операторами $L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$.

Описанный метод введения форм записи нестационарных, или эволюционных, краевых задач, где одна из переменных (в данном случае t) играет особую роль, широко применяется в современной теории уравнений с частными производными.

Обратим внимание, что выше мы рассматривали операторные формы записи классических постановок задач. Однако во многих случаях эти задачи могут иметь лишь обобщённые решения. Это предполагает соответствующую обобщённую постановку этих задач в виде интегральных равенств (см. пп. 1.3.2–1.3.4), например, в виде

$$a(u,w) = f(w) + b(v,w) \quad \forall\, w \in Y, \tag{66}$$

где u — искомое решение из некоторого пространства W, v — заданная функция из пространства H_C, $f(w)$ — линейный ограниченный функционал из пространства Y, $a(w,u)$, $b(v,w)$ — билинейные ограниченные формы над $W\times Y$, $H_C\times$ $\times Y$ соответственно. Пусть пространства W, Y, H_C являются вещественными, гильбертовыми и сепарабельными. Считаем, что Y плотно вложено в некоторое гильбертово пространство H_0 и что пространства H_0, H_C — самосопряжённые, т.е. $H_0 \equiv H_0^*$, $H_C \equiv H_C^*$ (этого предположения не делаем относительно W, Y, т.е. $W \not\equiv W^*$, $Y \not\equiv Y^*$).

Чтобы записать (66) в виде операторного уравнения, напомним следующий факт из функционального анализа [35]. Скалярное произведение $(h,g)_Y$ можно представить как $(h,g)_Y = (\Lambda_Y^{1/2}h, \Lambda_Y^{1/2}g)_{H_0} = (\Lambda_Y h, g)_{H_0}$, где $\Lambda_Y^{1/2}\cdot\Lambda_Y^{1/2} \equiv \Lambda_Y$ — канонический изоморфизм Y на Y^*, $\Lambda_Y : Y \to Y^*$ есть отображение, при котором каждому элементу $h \in Y$ ставится в соответствие $\Lambda_Y h = a(h, \cdot) \in Y^*$, т.е. значение Λ_Y на элементы h рассматривается как функционал, т.е. $(\Lambda_Y h, g)_{H_0} = (h, g)_{H_0}$ $\forall\, h, g \in Y$. Используя это представление $(h, g)_Y$, запишем (66) в виде операторного уравнения в Y^*.

Рассмотрим форму $a(u, w)$. В силу её ограниченности по w по теореме Рисса имеем: $a(u, w) = (U, w)_Y$, где элемент $U \in Y$ определяется элементом $u \in W$ однозначно, тем самым задаётся отображение $\tilde{A}$ из W в $Y : \tilde{A}u = U$. Следовательно,

$$a(u, w) = (\tilde{A}u, w)_Y = (\Lambda_Y \tilde{A}u, w)_{H_0} \equiv (Lu, w)_{H_0},$$

где $L \equiv \Lambda_Y \tilde{A} : W \to Y^*$. Аналогично получаем представления

$$b(v, w) = (Bv, w)_{H_0}, \quad B : H_c \to Y^*,$$
$$f(w) = (f_0, w)_{H_0}, \quad f_0 \in Y^*.$$

Следовательно, равенство (66) можно записать в виде

$$(Lu, w)_{H_0} = (f_0, w)_{H_0} + (Bv, w)_{H_0} \quad \forall\, w \in Y \tag{67}$$

или как операторное уравнение в пространстве Y^*:

$$Lu = f_0 + Bv \quad (\text{в } Y^*). \tag{68}$$

Обратно, если $u \in W$ удовлетворяет уравнению (68) (т.е. соотношению (67)!), получаем снова равенство (66). Таким образом, постановки задач (66), (68) эквивалентны. Заметим, что многие из обобщённых постановок задач математической физики (как стационарных, так и нестационарных) можно представить в виде (68). Кроме того, часто к соотношениям (66), а значит и к (67), (68), приводят также условия оптимальности систем в задачах оптимального управления, минуя их запись в виде краевых задач математической физики.

Рассмотрим следующий простой пример получения уравнения (68).

Пример 2. Пусть Ω есть область из R^2 с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу Неймана для эллиптического уравнения:

$$-\Delta u + u = f \;\text{ в }\; \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = v \;\text{ на } \partial\,\Omega,$$

где $f \in L_2(\Omega)$, $v \in L_2(\partial\,\Omega)$ — заданные функции. Обобщённая постановка этой задачи: требуется найти функцию $u \in W_2^1(\Omega)$ такую, что

$$a(u,w) = \int\limits_{\Omega} ((\nabla u \cdot \nabla w) + uw)\,dx = f(w) + b(v,w) \;\forall\, w \in W_2^1(\Omega),$$

где $f(w) = \int\limits_{\Omega} fwdx$, $b(v,w) = \int\limits_{\partial\Omega} vw\,d\,\Gamma$. Отмечаем, что краевое условие здесь является естественным, и оно включено в обобщённую постановку задачи.

Принимая $W = Y = W_2^1(\Omega)$, $H_0 = L_2(\Omega)$, $H_C = L_2(\partial\,\Omega)$ и учитывая ограниченность $a(u,w)$, $b(v,w)$, $f(w)$ над $W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$, $L_2(\partial\,\Omega) \times W_2^1(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ соответственно, заключаем, что рассматриваемая задача может быть представлена в виде операторного уравнения (68) в пространстве $Y^* = (W_2^1(\Omega))^* \equiv W_2^{-1}(\Omega)$. ■

В заключение заметим, что целесообразность операторной трактовки краевых задач, т.е. сведения их к операторным уравнениям типа (68) или к задаче Коши для дифференциального операторного уравнения типа (64), вытекает из возможности и целесообразности применения хорошо разработанных в настоящее время общих методов теории операторных уравнений (см. [26, 36, 37], а также гл. 2 настоящей книги) к решению проблем, связанных с краевыми задачами.

§ 2. Эллиптическая задача о внутренних источниках

Рассмотрим сначала одну из обратных задач для эллиптического уравнения о внутренних источниках (см. пример 1, § 5 из гл. 1).

2.1. Постановка задачи

Пусть Ω — область из $\mathbf{R}^n$ с границей $\partial\Omega \equiv \Gamma$ — есть подобласть из Ω (допускается также, что $\Omega_C = \Omega$), χ_C — характеристическая функция подобласти Ω_C. Для простоты считаем, что границы области Ω и подобласти Ω_C являются достаточно гладкими. Рассмотрим задачу об отыскании функции $\phi(x) \in D(L) \equiv (W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)(\Omega))$ и функции $u(x) \in L_2(\Omega)$ в подобласти Ω_C такие, что почти всюду справедливы следующие уравнения:

$$\begin{gathered} L\phi = -a\Delta\phi + b\phi = f + \chi_C u \ \text{ в } \ \Omega, \\ \phi = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \quad \phi = \varphi_{ob} \ \text{ в } \ \Omega, \end{gathered} \tag{69}$$

где $a, b = const > 0$, $f(x)$, $\varphi_{ob}(x)$ — заданные функции из $L_2(\Omega)$. Здесь $u(x)$ — дополнительная неизвестная, которую считаем для определённости продолженной нулём на $\Omega \backslash \Omega_C$, после чего $u(x)$ становится принадлежащей подпространству $L_2^{(C)}(\Omega) = \{v : v \in L_2(\Omega), v \equiv 0 \text{ на } \Omega\backslash\Omega_C\}$ пространства $L_2(\Omega)$.

Для операторной формулировки задачи примем $W = Y = H_0 \equiv L_2(\Omega) = H_0^* = \cdots = W^*$, $H_C = L_2^{(C)}(\Omega)$, $H_{ob} = L_2(\Omega)$, $Bu \equiv \chi_C u$, $C \equiv I$ — тождественный оператор. Тогда задачу (69) можно записать в операторной форме

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \varphi_{ob}. \tag{70}$$

Заметим, что если u есть заданная функция из $L_2^{(C)}(\Omega)$, то из теории эллиптических задач известно, что первое уравнение имеет единственное решение $\phi \in W_2^2(\Omega)$, причём

$$\|\phi\|_{W_2^2(\Omega)} \le C(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|v\|_{L_2(\Omega)}),$$

где $C = const > 0$.

Отмечаем, что *поскольку пространство* $W_2^2(\Omega)$ *компактно вложено в* $L_2(\Omega)$, *то оператор* $A \equiv CL^{-1}B$ *является вполне непрерывным, а, значит, задача* (69) *является некорректно поставленной.*

2.2. Задача оптимального управления

Рассмотрим семейство задач оптимального управления, зависящее от параметра регуляризации $\alpha \ge 0$:

$$L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \quad J_\alpha(u_\alpha, \phi(u_\alpha)) = \inf_{v \in L_2^{(C)}} J_\alpha(v, \varphi(v)), \quad (71)$$

где

$$J_\alpha(v, \varphi(v)) = \alpha \cdot \|v\|^2_{L_2^{(C)}(\Omega)} + \|C\phi - \varphi_{ob}\|^2_{L_2(\Omega)},$$

т.е. принимается также $X_C \equiv L_2^{(C)}(\Omega)$. Как показано в предыдущих главах, при $\alpha \ge 0$ задача (71) имеет непустое множество решений, причём при $\alpha > 0$ это решение единственное, и оно удовлетворяет следующей системе вариационных уравнений:

$$L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha,\ L^* q_\alpha = C^*(C\phi_\alpha - \varphi_{ob}),\ \alpha u_\alpha + B^* q_\alpha = 0, \ (72)$$

причём здесь $L = L^*$, $C = C^*$, B — симметричный, но $B \ne B^*$ (поскольку $D(B) = L_2^{(C)}(\Omega) \subset D(B^*) = L_2(\Omega)$).

Изучим некоторые свойства A, A^*. Как уже отмечалось, оператор A (а значит, и оператор A^*) является вполне непрерывным. Далее, легко заметить, что *нуль-пространство* $N(A)$ *тривиально*, т.е. $N(A) = \{0\}$. Действительно, очевидно, что система (22) из § 2, гл. 3 здесь есть

$$-a\Delta\phi + b\phi = \chi_C u \ \text{ в } \ \Omega, \quad \phi = 0 \ \text{ в } \ \Omega,$$

и она имеет лишь тривиальное решение. Следовательно, *если задача* (69) *при некотором* φ_{ob} *имеет решение, то это решение единственное.* (Отметим, что если бы мы приняли $D(B) \equiv L_2(\Omega)$, то тогда заведомо $N(A) \neq \{0\}$, поскольку имеем $\phi = 0$ в Ω, но в $\Omega \backslash \Omega_C$ функция $u(x)$ может быть произвольной из $L_2(\Omega)$, а в Ω_C она полагается равной нулю; тогда имеем $\chi_C u = 0$ в Ω, $\phi \equiv 0$ в Ω, но $u \not\equiv 0$ в Ω, т.е. $N(A) \neq \{0\}$.)

Рассмотрим теперь систему

$$L^* q = -a\Delta q + bq = w, \quad B^* q = \chi_C q = 0 \quad \text{в} \;\; \Omega.$$

Замечаем, что если Ω_C есть строго внутренняя подобласть из Ω, то, выбирая любую гладкую функцию q с носителем в $\Omega \backslash \bar{\Omega}_C$, путём обычной подстановки уравнения находим $w \equiv L^* q$. При этом будем иметь $q = 0$ в Ω_C. Следовательно, $N(A) \neq \{0\}$, и, кроме того, замечаем, что $\dim(N(A^*)) = \infty$. Поэтому, как следует из теоремы 2 (гл. 3), *задача* (69) *не является плотно разрешимой*, поскольку здесь $L_2 \neq \overline{R(CL^{-1}B)}$. (Конечно, последнее утверждение можно было бы сделать уже из невозможности в общем случае равенства $\phi = \varphi_{ob}$ из (69), т.к. ϕ, φ_{ob} принадлежит классам функций различной степени гладкости!)

В *случае, когда* $\Omega_C = \Omega$, *имеем* $N(A) = N(A^*) = \{0\}$, *задача* (69) *некорректна, она плотно разрешима и может иметь не более одного классического решения.* Если ϕ, u есть классическое решение задачи (69) при некоторой известной функции φ_{ob}, причём $u \in L_2(\Omega)$, то решения ϕ_α, u_α задачи (72) сходятся к ϕ, u при $\alpha \to +0$ и справедлива оценка

$$\|\phi - \phi_\alpha\|_{w_2^2(\Omega)} + \|u - u_\alpha\|_{L_2(\Omega)} \leq C \cdot \sqrt{\alpha},$$

где постоянная C не зависит от α.

2.3. Итерационный алгоритм

Пусть для определённости $\Omega = \Omega_C$. Предположим, что $(\varphi_{ob} - L^{-1}f) \in R(CL^{-1}B)$. Тогда задача (69) имеет единственное классическое решение $\phi \in W_2^2(\Omega)$, $u \in L_2^{(C)}(\Omega)$. Чтобы построить приближённое решение этой задачи, достаточно выбрать $\alpha > 0$ достаточно малым. Тогда можно принять $\phi \cong \phi_\alpha$, $u \cong u_\alpha$, где ϕ_α, u_α есть решение системы (72). Построение ϕ_α, u_α возможно с помощью итерационного алгоритма (91) из п. 6.3 гл. 3, который в терминах операторов задачи (69) имеет вид:

$$\begin{array}{ll} -a\Delta\phi_\alpha^k + b\phi_\alpha^k = f + u_\alpha^k \ \text{ в } \ \Omega, & \phi_\alpha^k = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \\ -a\Delta q_\alpha^k + bq_\alpha^k = \phi_\alpha^k - \varphi_{ob} \ \text{ в } \ \Omega, & q_\alpha^k = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \\ u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau(\alpha u_\alpha^k + q_\alpha^k) \ \text{ в } \ \Omega, & k = 0, 1, \ldots, \end{array} \tag{73}$$

где

$$\tau = \tau_{opt} = \frac{2}{2\alpha + \|A\|^2}, \quad \|A\| = (a \cdot \lambda_1 + b)^{-1}.$$

Здесь $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ есть минимальное собственное значение задачи на собственные значения вида

$$-\Delta\varphi_j = \lambda_j\varphi_j \ \text{ в } \ \Omega, \ \varphi_j = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \ \|\varphi_j\|_{L_2(\Omega)} = 1, \ j = 1, 2, \ldots$$

Как известно, λ_1 — положительное и простое, кроме того, для многих областей Ω можно получить оценки (или приближённое значение) λ_1 с приемлемой точностью. При таком выборе параметра τ справедливы следующие оценки скорости сходимости итерационного процесса:

$$\|\phi_\alpha - \phi_\alpha^k\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_\alpha - u_\alpha^k\|_{L_2(\Omega)} \leq Cq^k \to 0, \ k \to \infty,$$

где $q = (\|A\|^2)/(2\alpha + \|A\|^2) < 1$. Выбрав k достаточно большим, можно принять $\phi \cong \phi_\alpha^k$, $u \cong \phi_\alpha^k$. Приближения $\{\phi_\alpha^k\}$, $\{u_\alpha^k\}$ можно строить также с помощью других итерационных алгоритмов (см. § 6 гл. 3).

При численной реализации алгоритмов типа (73) будут допускаться дополнительные численные ошибки, поэтому могут возникать ограничения на выбор α, числа итераций и т.п. (см. п. 6.3 гл. 3).

В заключение данного раздела заметим, что изложенное здесь легко переформулируется на более сложные эллиптические задачи (например, когда L симметричный эллиптический оператор второго порядка с переменными коэффициентами и др.)

§ 3. Задача о локальном граничном управлении

3.1. Постановка задачи

Пусть Ω есть ограниченная область из $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\Gamma \equiv \partial\,\Omega$, $x = (x_1, x_2)$, Γ_1 — часть границы Γ_2, $\Gamma_2 \equiv \Gamma \backslash \Gamma_1$. Рассмотрим следующую задачу: требуется найти $\phi(x)$ в Ω и управление $u(x)$ на Γ_1 такие, что

$$-a\Delta\phi + b\phi = f(x) \;\text{ в }\; \Omega,\; a\frac{\partial\,\phi}{\partial n} = u \;\text{ на }\; \Gamma_1,\; a\frac{\partial\,\phi}{\partial n} = 0 \;\text{ на }\; \Gamma_2,$$

где $a, b = const > 0$, $f(x)$ — заданная функция из $L_2(\Omega)$, а также почти всюду на Γ_2 выполняется дополнительное условие вида

$$\phi = \varphi_{ob} \;\text{ на }\; \Gamma_2,$$

где φ_{ob} — заданная функция из $L_2(\Gamma_2)$.

В обобщённой постановке эта задача ставится следующим образом: требуется найти $\phi \in W_2^1(\Omega)$, $u \in L_2(\Gamma_2)$ такие, что

$$\begin{gathered} a(\phi, w) \equiv (a\nabla\phi, \nabla w) + (b\phi, w) = (f, w) + (u, w)_{L_2(\Gamma_1)} \\ \forall\, w \in W_2^1(\Omega), \quad \phi = \varphi_{ob} \;\text{ на }\; \Gamma_2, \end{gathered} \tag{74}$$

где $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$. Если, как это описано в п. 1.4, ввести операторы L, B, C следующим образом:

$$\begin{gathered}(L\phi, w) \equiv a(\phi, w) \qquad \forall\, \phi, w \in W_2^1(\Omega),\\ (Bu, w) \equiv (u, w)_{L_2(\Gamma_1)} \quad \forall\, u \in L_2(\Gamma_1), \quad w \in W_2^1(\Omega),\\ C\phi \equiv \varphi \ \text{ на } \ \Gamma_2,\\ L:\, W_2^1(\Omega) \to (W_2^1(\Omega))^* \equiv W_2^{-1}(\Omega), \quad B:\, L_2(\Gamma_1) \to W_2^{-1}(\Omega),\\ C:\, W_2^1(\Omega) \to W_2^{1/2}(\Gamma_2),\end{gathered}$$

то задачу (74) можно записать в виде системы операторных уравнений:

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \varphi_{ob}. \tag{75}$$

Отмечаем, что поскольку пространство $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma_2)$ (см., например, [50]), то оператор является вполне непрерывным, а задача (75)((74)) — некорректной.

3.2. Задача оптимального управления

Задача оптимального управления здесь имеет вид

$$L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \quad J_\alpha(u_\alpha, \phi_\alpha(u_\alpha)) = \inf_{v \in L_2(\Gamma_1)} J_\alpha(v, \phi(v)), \tag{76}$$

где

$$J_\alpha(v, \phi(v)) = \alpha \|v\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \|\phi - \varphi_{ob}\|^2_{L_2(\Gamma_2)}, \ \alpha \geq 0.$$

Система вариационных уравнений, соответствующая (76), есть

$$L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \quad L^* q_\alpha = C^*(C\phi - \varphi_{ob}), \quad \alpha u_\alpha + B^* q_\alpha = 0,$$

каждое из уравнений которой соответственно задаётся следующим образом:

$$\begin{gathered}a(\phi_\alpha, w) = (f, w) + (u_\alpha, w)_{L_2(\Gamma_1)} \quad \forall\, w \in W_2^1(\Omega),\\ a(\tilde{w}, q_\alpha) = (\phi_\alpha - \varphi_{ob}, \tilde{w})_{L_2(\Gamma_2)} \quad \forall\, \tilde{w} \in W_2^1(\Omega),\\ \alpha u_\alpha + q_\alpha = 0 \quad \text{на } \ \Gamma_2, \ \alpha \geq 0.\end{gathered} \tag{77}$$

Рассмотрим систему

$$L\phi = Bu, \quad \phi = 0 \quad \text{на} \;\; \Gamma_2$$

или, что одно и то же:

$$a(\phi, w) = (u, w)_{L_2(\Gamma_1)} \quad \forall\, w \in W_2^1(\Omega), \quad \phi = 0 \quad \text{на} \;\; \Gamma_2.$$

Если предположить, что эта система имеет нетривиальное решение ϕ, u, то согласно теории эллиптических уравнений [31] функции ϕ, u удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{gathered} -a\Delta\phi + b\phi = 0 \;\; \text{в} \;\; \Omega, \quad a\frac{\partial\phi}{\partial n} = u \;\; \text{на}\; \Gamma_1, \\ a\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \;\; \text{на}\; \Gamma_2, \quad \phi = 0 \quad \text{на}\; \Gamma_2. \end{gathered}$$

Рассмотрим первое уравнение в Ω вместе с двумя граничными условиями на Γ_2, т.е. *задачу Коши для эллиптического уравнения второго порядка.* Согласно результатам по задаче Коши (см. § 1 настоящей главы) эта задача имеет только тривиальное решение $\phi \equiv 0$ в Ω. Но тогда из граничного условия на Γ_1 заключаем, что $u \equiv 0$ на Γ_1. Таким образом мы показали, что $N(A) = \{0\}$. Аналогичным образом устанавливается, что также $N(A^*) = \{0\}$, поскольку система

$$\begin{gathered} -a\Delta q + bq = 0 \;\; \text{в} \;\; \Omega, \quad a\frac{\partial q}{\partial n} = 0 \;\; \text{на}\; \Gamma_1, \\ a\frac{\partial q}{\partial n} = w \;\; \text{на}\; \Gamma_2, \quad q = 0 \quad \text{на}\; \Gamma_2, \end{gathered}$$

очевидно, имеет также лишь тривиальное решение $q \equiv 0$, $w \equiv 0$. Теперь, как одно из следствий теорем 1,2 из §§ 2, 3 гл. 3, получаем следующее утверждение: *задача* (74) ((75)) *однозначно и плотно разрешима, если $\phi_\alpha, q_\alpha, u_\alpha$ есть решение* (77) *при $\alpha > 0$, то $\|\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{L_2(\Gamma_2)} \to 0$ при $\alpha \to +0$.*

Таким образом, для приближённого решения задачи (74) достаточно построить приближённое решение системы (77) при достаточно малом $\alpha > 0$, например, итерационными алгоритмами.

3.3. Итерационные алгоритмы

В качестве первого алгоритма решения (77) можно использовать тот же алгоритм, что и в предыдущем параграфе, который в применении к (77) имеет вид:

$$\begin{gathered} a(\phi_\alpha^k, w) = (f, w) + (u_\alpha^k, w)_{L_2(\Gamma_1)} \quad \forall\, w \in W_2^1(\Omega), \\ a(\tilde{w}, q_\alpha^k) = (\phi_\alpha^k - \varphi_{ob}, \tilde{w})_{L_2(\Gamma_2)} \quad \forall\, \tilde{w} \in W_2^1(\Omega), \\ u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau_k(\alpha u_\alpha^k + q_\alpha^k) \text{ (в } L_2(\Gamma_1)),\ k = 0, 1, \ldots. \end{gathered} \tag{78}$$

При $0 < \tau_k < (2/\|A\|^2)$ алгоритм (78) является сходящимся. Если провести дополнительное изучение оценок для $\|A\|$, то можно уже известным способом осуществить оптимизацию скорости сходимости алгоритма (78) путём выбора $\tau_k = \tau_{opt}$. Другим способом выбора $\{\tau_k\}$ может быть определение параметров $\{\tau_k\}$ согласно методу минимальных невязок (см. (104) из гл.3). В данном случае итерационный алгоритм решения (77) состоит в следующем. Сначала на каждом k-ом шаге решаются первые две задачи из (78). Затем решаются следующие две задачи (при $\xi^k \equiv \alpha u_\alpha^k + q_\alpha^k$):

$$\begin{gathered} a(\tilde{\phi}, w) = (\xi^k, w)_{L_2(\Gamma_1)} \quad \forall\, w \in W_2^1(\Omega), \\ a(\tilde{w}, \tilde{q}) = (\tilde{\phi}, \tilde{w})_{L_2(\Gamma_2)} \quad \forall\, \tilde{w} \in W_2^1(\Omega), \end{gathered}$$

и вычисляется параметр τ_k:

$$\tau_k = (\tilde{q}, \xi^k)_{L_2(\Gamma_1)} / \|\tilde{q}\|^2_{L_2(\Gamma_1)},$$

после чего вычисляется следующее приближение u_α^{k+1} по третьему уравнению из (78).

Согласно общей теории метода минимальных невязок сформулированный алгоритм решения задачи (77) является сходящимся при $\forall\, \alpha > 0$. Поэтому беря $\phi_\alpha^k, u_\alpha^k$ при достаточно большом k и малом $\alpha > 0$, можно принять $\phi_\alpha^k \cong \phi$,

$u_\alpha^k \cong u$, если выполнены условия разрешимости задачи (74) (см. теоремы 1, 2 из §§ 2, 3, гл. 3) или если считать, что для построенных $\phi_\alpha^k, u_\alpha^k$ в случае произвольной $\varphi_{ob} \in L_2(\Gamma_2)$.

Некоторые предложения по учёту влияния ошибок численной реализации этапов сформулированных выше итерационных алгоритмов приведены в § 6, гл. 3.

Нетрудно заметить, что изложенное выше остаётся справедливым для более общих эллиптических задач с переменными коэффициентами, поскольку основная часть всех рассмотрений приведена в терминах обобщённых постановок типа (77), (78) или в виде операторных уравнений.

§ 4. Задача точного управления для параболического уравнения

В данном и следующем параграфах мы рассмотрим две типичные задачи управления для параболического уравнения второго порядка. Первую из этих задач называют также задачей о финальном наблюдении, вторая является задачей о граничном управлении.

4.1. Формулировка задачи

Рассмотрим задачу об отыскании $\phi(t,x), u(t,x)$ таких, что

$$\begin{gathered} L\phi \equiv \phi_t - a\Delta\phi + b\phi = f(t,x) \ \text{ в } \ \Omega \times (0,T) \equiv Q_T, \\ \phi(0,x) = u(x) \ \text{ в } \ \Omega, \\ \phi(t,x) = 0 \ \text{ на } \quad \partial\Omega \times (0,T) \equiv Q_T, \end{gathered} \tag{79}$$

и выполнено условие "попадания в заданное финальное состояние $\varphi_{obs}(x)$" в момент времени $T < \infty$:

$$\phi(T,x) = \varphi_{obs}(x) \ \text{ в } \ \Omega. \tag{80}$$

$\phi_t \equiv \partial\phi/\partial t$, Ω — ограниченная область из $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega \equiv \Gamma$, $\varphi_{obs} \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$, $a, b = const$, $a > 0$, $b \geq 0$.

Если функция $\varphi_{obs} \in L_2(\Omega)$ задана, то задача (79), (80) имеет единственное решение $\phi \in W_2^{1,0}(Q_T)$ (см. п.1.3.4, теорема 7), которое можно записать в виде

$$\phi = G_0 u + G_1 f$$

с линейными ограниченными операторами G_0, G_1. Структуру этих операторов можно считать известной (пусть даже в неявной или трудно реализуемой форме). Найдём представление этих операторов, воспользовавшись собственными функциями и собственными значениями эллиптического оператора, входящего в оператор уравнения (79). Предположим, что решения задачи

$$-a\Delta\varphi_j + b\varphi_j = \lambda_j \cdot \varphi_j \ \text{ в } \ \Omega, \ \varphi_j = 0 \ \text{ на } \Gamma, \ \|\varphi_j\|_{L_2(\Omega)} = 1,$$

известны. В случае простых областей (Ω — шар, прямоугольник и т.п.) это действительно так. Но если Γ имеет сложную форму, $b(x)$ — переменный коэффициент и др., то вид $\{\lambda_j\}, \{\varphi_j\}$ в общем случае неизвестен. Однако ряд свойств собственных функций и собственных значений изучен и в данных случаях. Так, показано, что: 1) $0 < \lambda_1 < < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_N \to \infty$, $N \to \infty$; 2) $\{\varphi_j\}$ — ортонормальная система, являющаяся базисом в $L_2(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ([46]). Если теперь применить метод разложения по собственным функциям, то получим:

$$G_0 u \equiv \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t}(u, \varphi_j)\varphi;$$
$$G_1 f \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \Big(e^{-\lambda_j (t-t')}(f, \varphi_j)(t')\, dt \Big) \varphi_j(x),$$

где $(\cdot, \cdot) \equiv (\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)}$.

4.2. Задачи оптимального управления и вариационные уравнения

Одновременно с (79), (80) рассмотрим семейство задач оптимального управления вида:

$$L\phi = f \ \text{ в } \ Q_T, \ \phi = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T), \ \phi = u \ \text{ при } \ t = 0,$$

$$\inf_{u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \{\alpha \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u(T,x) - \varphi_{obs}\|^2_{L_2(\Omega)}\}, \qquad (81)$$

где $\alpha \geq 0$ и для упрощения обозначений за решением этой задачи ϕ, u для каждого α оставлено то же обозначение, что и для решения задачи (79), (80).

Вариационные уравнения, соответствующие (81), есть

$$\begin{cases} L\phi = f \ \text{ в } \ Q_T, \ \phi = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T), \ \phi = u \ \text{ при } \ t = 0, \\ \alpha(u,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} + (\phi(T,x) - \varphi_{obs}, \tilde{\phi}(T,x))_{L_2(\Omega)} = 0, \end{cases} \qquad (82)$$

где v — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а $\tilde{\phi}$ определяется как решение задачи (79) при $f \equiv 0$ и $u \equiv v$, т.е. $\tilde{\phi} = G_0 v$. Если воспользоваться введёнными операторами G_0, G_1, а также оператором взятия следа $P_T\phi \equiv \phi(T,x)$ при $t = T$ от $\phi(t,x)$, то второе уравнение из (82) можно переписать в следующей форме:

$$\alpha(u,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} + (P_T G_0 u, P_T C_0 v) = (g, P_T C_0 v) \ \ \forall\, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

где $g = \varphi_{obs} - P_T G_1 f$, а также $P_T G_0 \equiv A = CL^{-1}B$ (в обозначениях предыдущих параграфов). Здесь и далее в этом разделе считаем, что
$(u,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \equiv (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)} \ \forall\, u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Введём сопряжённую задачу

$$L^*q \equiv -q_t - a\Delta q + bq = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \ q = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T),$$

$$q(T,x) = \phi(T,x) - \varphi_{obs},$$

решение которой есть

$$q = \tilde{G}_0(\phi(T,x) - \varphi_{obs}) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j(T-t)}(\phi(T,x) - \varphi_{obs}, \varphi_j)\varphi_j.$$

С использованием решения этой сопряжённой задачи и оператора $P_0 : \ P_0 q \equiv q(0,x)$ вариационные уравнения для функций ϕ, u можно записать в виде системы

$$\left\{ \begin{array}{l} L\phi = f \ \text{ в } \ Q_T, \ \phi = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \phi = u \ \text{ при } \ t = 0, \\ L^*q = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \ q = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T), \\ \qquad\qquad\qquad q = \phi(T,x) - \varphi_{obs} \ \text{ при } \ t = T, \\ -\alpha\Delta u + q(0,x) = 0 \ \text{ в } \ \Omega), \ u = 0 \text{ на } \ \Gamma, \end{array} \right. \tag{83}$$

или в виде одного уравнения для u (при условии $u \in W_2^2(\Omega)$):

$$\mathcal{A}_\alpha u \equiv -\alpha\Delta u + (P_T G_0)^*(P_T G_0)u = (P_T G_0)^* g \ \text{ в } \ \Omega,$$
$$u = 0 \text{ на } \ \Gamma,$$

где

$$(P_T G_0)^* = P_0 \tilde{G}_0.$$

Рассмотрим вопрос о тривиальности нуль-пространств $N(P_T G_0), \ N(P_0 \tilde{G}_0)$. Предположим, что $N(P_T G_0) \neq \{0\}$. Тогда существует нетривиальное решение задачи

$$L\phi = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \ \phi = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T), \ \phi = u \ \text{ при } \ t = 0,$$

причём $\phi(T,x) \equiv P_T\phi = 0$. Из последнего условия и представления ϕ в форме: $\phi = \sum\limits_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t}(u, \varphi_j)\varphi_j(x)$, получаем

$(u,\varphi_j) = 0 \ \forall j$. Следовательно, $u \equiv 0$, а также $\phi = 0$ и $N(P_T G_0) = \{0\}$.

Аналогично показывается, что $N(P_0\tilde{G}_0) = \{0\}$.

Из тривиальности нуль-пространств $N(P_T G_0)$, $N(P_0\tilde{G}_0)$ и общих результатов о разрешимости операторных уравнений (см. гл. 2 и 3) заключаем, что в *рассматриваемой задаче* (79), (80) *имеют место единственность решения и плотная разрешимость, а при достаточно малых* $\alpha > 0$ *можно добиться выполнения условия* $\|u(T,x)-\varphi_{obs}\|_{L_2(\Omega)} \leq$ $\leq \varepsilon$ *для любого наперёд заданного* $\varepsilon > 0$, *где* $u \equiv u_\alpha(t,x)$ *есть один из компонентов решения системы вариационных уравнений* (83).

4.3. Итерационный алгоритм

Отмечаем, что оператор $\mathcal{A} \equiv (P_T G_0)^*(P_T G_0)$ с областью определения $D(\mathcal{A}_0) = W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в качестве собственных функций имеет собственные функции $\{\varphi_j\}$, а его собственными значениями являются числа $\mu_j = \exp(-2\lambda_j T)$, $j = 1, 2, \ldots$, стремящиеся к нулю быстрее любой конечной степени "$1/\lambda_j^N$". Оператор $\mathcal{A}_0$, также как и оператор $P_T G_0$, является вполне непрерывным. Заметим, что полная непрерывность оператора $P_T G_0$ следует из результатов разрешимости эволюционных уравнений (см. [16]). Отсюда заключаем, что задача (79), (80) *является некорректно поставленной,* и для её приближённого решения целесообразно пользоваться методами и подходами теории некорректных задач (см. гл. 3). Одним из таких методов является метод регуляризации А.Н.Тихонова, и система (83) фактически представляет собой уравнения данного метода.

Для приближённого решения системы (83) можно воспользоваться подходящим итерационным алгоритмом, например следующим:

$$\begin{cases} L\phi^k = f \ \text{ в } \ Q_T, \ \phi^k = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \phi^k = u^k \ \text{ при } \ t = 0, \\ L^* q^k = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \ q^k = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \times (0,T), \\ \qquad\qquad\qquad q^k = \phi^k(T,x) - \varphi_{obs} \ \text{ при } \ t = T, \\ -\Delta w^k = q^k(0,x) \ \text{ в } \ \Omega, \ w^k = 0 \text{ на } \ \Gamma, \\ u^{k+1} = u^k - \tau(\alpha v^k + w^k), \quad k = 0,1,\ldots, \end{cases} \tag{84}$$

где $u^0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — начальное приближение.

Если в этом алгоритме исключить третий этап и принимать $w^k \equiv q^k(0,x)$, то получим случай, когда приближённые решения $\{u^k\}$ сходятся в $L_2(\Omega)$. В данном случае несложно осуществить оптимизацию скорости сходимости, приняв

$$\tau = \tau_{opt} = 2/(2\alpha + e^{-2\lambda_1 T}).$$

Обоснование сходимости рассматриваемых итерационных алгоритмов дано в общей форме в гл. 3.

Замечание. Обратим внимание на то, что мы здесь ради упрощения изложения не записывали рассматриваемую задачу (79), (80) в виде одного операторного уравнения $L\phi = f + Bv$. Как это сделать, рассматривая обобщённую постановку задачи, будет показано в дальнейшем при рассмотрении задачи об усвоении данных для эволюционного уравнения. ■

§ 5. Параболическая задача о граничном управлении

5.1. Формулировка задачи

Предположим, что сохраняются обозначения и предположения предыдущего параграфа. Пусть граница Γ составлена из трёх частей (положительной меры каждая) Γ_1, Γ_2, $\Gamma_3 = \Gamma \backslash (\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2)$. Рассмотрим задачу об отыскании функции

$u(t,x) \in L_2((0,T)\times\Gamma_1)$ — "управления", такой, что решение $\phi(t,x)$ задачи вида

$$\phi_t - a\Delta\phi + b\phi = f \;\text{ в }\; Q_T,\; \phi = \phi_{(0)} \;\text{ при }\; t=0, \qquad (85)$$

$$a\frac{\partial\phi}{\partial n} = u \;\text{ на }\; (0,T)\times\Gamma_1, \quad a\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \;\text{ на }\; (0,T)\times(\Gamma_3\cup\Gamma_2),$$

удовлетворяет почти всюду следующему условию:

$$\phi(t,x) = \varphi_{obs}(t,x) \;\text{ на }\; (0,T)\times\Gamma_2, \qquad (86)$$

где $\varphi_{obs}(t,x) \in L_2((0,T)\times\Gamma_2) \equiv H_{ob}$ — заданная функция.

Для формулировки обобщённой постановки задачи введём пространство $Y \equiv L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ и пространство W, состоящее из функций $\phi \in Y$ таких, что $\phi_t \in L_2(0,T;(W_2^1(0,T))^*) \equiv Y$. Норма в W имеет вид

$$\|\phi\|_W = (\|\phi_t\|_Y^2 + \|\phi\|_Y^2)^{1/2}.$$

Умножим уравнение состояния из (85) на $w \in W$ и выполним интегрирование по частям. В результате приходим к следующей обобщённой постановке задачи (85), (86): требуется найти $\phi \in w$, $u \in H_C \equiv L_2((0,T)\times\Gamma_1)$ такие, что

$$(L\phi,w) \equiv (\phi,-w_t) + (a\nabla\phi,\nabla w) + (b\phi,w)+$$

$$+\phi(T,x)w(T,x))_{L_2(\Omega)} = f(w) + (Bu,w) \;\; \forall\, w\in W \qquad (87)$$

$$C\phi \equiv \phi = \varphi_{ob} \;\text{ на }\; (0,T)\times\Gamma_2$$

где $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_{L_1(Q_T)}$, а также

$$f(w) \equiv (f,w) + \int\limits_\Omega \phi_{(0)}(x)w(0,x)\,dx \equiv (f_0,w),$$

$$(Bu,w) \equiv \int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_1} uw\,d\Gamma dt.$$

(Здесь f_0 есть элемент из W^*, соответствующий функционалу $f(w)$ по теореме Рисса.) Теперь обобщённую постановку задачи (85), (86) можно записать в следующей операторной форме:

$$L\phi = f_0 + Bv, \quad C\phi = \varphi_{ob}, \tag{88}$$

где

$$L : W \to W^*, \quad B : H_C \to W^*, \quad C : W \to H_{ob}.$$

В качестве основных пространств здесь принимаются $H_0 \equiv \equiv L_2(Q_T),\ H_C,\ H_{ob}$.

5.2. Задачи оптимального управления и вариационные уравнения

Совместно с (87) рассмотрим семейство задач, зависящих от $\alpha \geq 0$:

$$\begin{gathered}(L\phi, w) = f(w) + (Bu, w) \quad \forall\, w \in W,\\ \inf_{u \in H_C} \{\alpha \|u\|^2_{H_C} + \|\phi - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}}\}.\end{gathered} \tag{89}$$

Обычными рассуждениями и вычислениями несложно получить вид вариационных уравнений — условий оптимальности решения ϕ, u задачи (89):

$$\begin{cases} (L\phi, w) = f(w) + (Bu, w) \quad \forall\, w \in W,\\ (\tilde{w}, L^* q) = (\tilde{w}, C^*(C\phi - \varphi_{ob})) \quad \forall\, \tilde{w} \in W,\\ \alpha u + B^* q = 0 \quad \text{в} \quad H_C, \end{cases} \tag{90}$$

где

$$(\tilde{w}, L^* q) \equiv (\tilde{w}, q) + (a\nabla\tilde{w}, \nabla q) + (b\tilde{w}, q) + (\tilde{w}(0,x), q(0,x))_{L_2(\Omega)},$$

$$(\tilde{w}, C^*(C\phi - \varphi_{ob})) \equiv \int_0^T \int\limits_{\Gamma_2} \tilde{w}(\phi - \varphi_{ob})\, d\,\Gamma dt,$$

$$B^* q \equiv q \quad \text{на} \quad (0,T) \times \Gamma_1.$$

Как мы уже знаем, при $\alpha > 0$ задачи (90) всегда имеют единственное решение: $\phi \equiv \phi(\alpha),\ q \equiv q(\alpha),\ u \equiv u(\alpha)$.

Рассмотрим вопросы единственности и разрешимости задачи (85), (86). Рассмотрим сначала однородную систему вида

$$L\phi = Bu, \quad C\phi = 0.$$

Если эта система имеет нетривиальное решение, то из теории параболических задач следует, что ϕ, u удовлетворяют системе уравнений вида

$$\phi_t - a\Delta\phi + b\phi = 0 \ \text{ в } \ Q_T,\ \phi = 0 \ \text{ при } \ t = 0,$$

$$a\frac{\partial\phi}{\partial n} = u \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_1, \quad a\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_3,$$

$$a\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_2, \quad \phi = 0 \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_2.$$

Рассматривая уравнение состояния в Q_T лишь при последних двух условиях на $(0,T)\times\Gamma_2$, из результатов по задаче Коши для параболических уравнений заключаем, что $\phi \equiv 0$, а значит, также $u = 0$. Итак, установлено, что $N(CL^{-1}B) = \{0\}$.

Аналогично показывается, что также $N((CL^{-1}B)^*) = \{0\}$ (здесь только однородные условия Коши имеют вид: $q = a\,\partial q/\partial n = 0$ на $(0,T)\times\Gamma_1$).

Таким образом, имеют место утверждения: 1) *задача* (85), (86) *однозначно и плотно разрешима;* 2) *если* ϕ_0, u_0 *есть решение задачи* (85), (86), *а* $\phi \equiv \phi(\alpha),\ u \equiv u(\alpha)$ *— компоненты решения системы* (90), *то* $\phi \to \phi_0,\ u \to u_0$ *при* $\alpha \to +0$ *при* $u_0 \in H_C$; 3) *если* $\varphi_{obs} \in S(\varphi_{obs}^{(0)};\delta) \equiv \{v : \|v - \varphi_{obs}^{(0)}\|_{H_C} \le \delta,\ \varphi_{obs}^{(0)} \in H_C\}$ *задаётся в условиях неопределённости, то* $\|\phi - \varphi_{obs}\|_{H_C} \to 0$ *при* $\alpha \to 0,\ \delta \to 0$.

Все эти утверждения являются следствиями из теорем 1, 2 из §§ 2, 3 главы 3.

5.3. Итерационный алгоритм

Следующий этап приближённого решения задачи состоит в решении задачи (90) итерационным методом при достаточно малом положительном $\alpha > 0$.

Для простоты мы рассмотрим лишь простейший итерационный алгоритм, а для наглядности запишем его в классической форме записи уравнений (т.е. считая все рассматриваемые решения гладкими). В этих предположениях итерационный алгоритм решения задачи (90) имеет вид:

$$\phi_t^k - a\Delta\phi^k + b\phi^k = f \ \text{ в } \ Q_T, \ \phi^k = \phi_{(0)} \ \text{ при } \ t = 0,$$

$$a\frac{\partial\phi^k}{\partial n} = u^k \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_1, \ a\frac{\partial\phi^k}{\partial n} = 0 \quad \text{ на } \ (0,T)\times(\Gamma_2\cup\Gamma_3),$$

$$-q_t^k - a\Delta q^k + bq^k = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \ q^k = 0 \ \text{ при } \ t = T,$$

$$a\frac{\partial q^k}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ (0,T)\times(\Gamma_1\cup\Gamma_3),$$

$$a\frac{\partial q^k}{\partial n} = \phi^k - \varphi_{obs} \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_2,$$

$$u^{k+1} = u^k - \tau(\alpha u^k + q^k) \ \text{ на } \ (0,T)\times\Gamma_1, \ k = 0,1,\ldots$$

Условия сходимости данного алгоритма рассмотрены в общем виде в главе 2.

В заключение данного параграфа заметим, что изложенное в последних двух параграфах несложно распространить на параболические задачи с переменными коэффициентами и ослабить ограничение гладкости границы области Ω, а также рассмотреть случай, когда f, φ_{obs}, u принадлежат сопряжённым пространствам.

§ 6. Задача усвоения данных наблюдений

Рассмотрим задачу о выборе начального состояния системы, описываемой решением линейного эволюционного уравнения. Эта задача в проблемах геофизической гидродинамики известна как "задача усвоения данных наблюдений".

6.1. Постановка задачи

Введём следующие вещественные сепарабельные гильбертовы пространства: $H, X \subset H; H^*, X^*$ — пространства сопряжённых к $H, X; L_2(0,T,H), L_2(0,T;X)$ и $L_2(0,T;X^*)$ — пространства абстрактных функций $f(t) (t \in [0,T], T < \infty)$ со значениями в H, X и X^* соответственно;

$$W \equiv W(0,T) = \Big\{ f \in L_2(0,T;X) : \frac{df}{dt} \in L_2(0,T;X^*),$$

$$\|f\|_W = \Big(\Big\| \frac{df}{dt} \Big\|_{L_2(0,T;X^*)} + \|f\|_{L_2(0,T;X)} \Big)^{1/2} \Big\}.$$

Через $C^{(0)}([0,T];H)$ обозначим банахово пространство функций $f(t),\ t \in [0,T]$, снабжённое нормой

$$\|f\|_{C^{(0)}([0,T];H)} = \max_{t \in [0,T]} \|f\|_H.$$

В последующем мы предполагаем, что

$$H \equiv H^*,\ X^* \equiv X^{-1},\ W^* \equiv W^{-1},$$

$$L_2(0,T;H) \equiv L_2^*(0,T;H) \equiv L_2(0,T;H^*),\ (\cdot,\cdot)_{L_2(0,T;H)} \equiv (\cdot,\cdot).$$

Следовательно,

$$W \subset L_2(0,T;X) \subset L_2(0,T;H) \subset L_2(0,T;X^*) \subset W^*.$$

Лемма 1 [34]. *Если* $f(t) \in W$, *то* $f(t) \in C^{(0)}([0,T];H)$ *и*

$$\max_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_H \le C\|f\|_W, \quad C = const,$$

то есть $W \subset C^{(0)}([0,T];H)$.

Пусть $a(t,\varphi,\psi)$ есть билинейная форма, определённая при $t \in [0,T]$ для любых $\varphi,\psi \in X$ и удовлетворяющая следующим условиям $\forall\, t \in [0,T]$:(1) $|a(t,\varphi,\psi)| \le C\|\varphi\|_X\|\psi\|_X$; (2) $\tilde{C}\|\varphi\|_X^2 \le a(t,\varphi,\varphi)$. Через $A(t) \in \mathcal{L}(X,X^*)$ будем обозначать оператор, порождаемый этой формой: $(A(t)\varphi,\psi)_H \equiv a(t,\varphi,\psi)$, $\forall u,\psi \in X$, и через $A \in \mathcal{L}(Y,Y^*)$ — оператор, определённый следующим образом: $(A\varphi,\psi) \equiv \equiv \int_0^T a(t,\varphi,\psi)\,dt \;\forall\varphi,\psi \in L_2(0,T;X)$.

Рассмотрим следующую задачу: найти $\phi \in W$, $u \in H$ такие, что

$$\begin{cases} \phi_t + A\phi = f_0, & t \in (0,T), \\ \phi = u, & t = 0, \\ \phi = \varphi_{obs}, & t \in (0,T), \end{cases} \tag{91}$$

где $\phi_t = d\phi/dt$, $f_0 \in L_2(0,T;X^*)$ — заданная функция, φ_{obs} — некоторая функция, построенная на основе данных наблюдений. Мы предполагаем, что $\varphi_{ob} \in L_2(0,T;H)$. Заметим также, что φ_{obs} может быть задана приближённо: $\|\varphi_{obs} - \varphi_{obs}^{(0)}\|_{L_2(0,T;H)} \le \delta$, где δ — оценка погрешности данных наблюдений, тогда как $\varphi_{obs}^{(0)}$ есть некоторая фиксированная функция.

Отметим также, что запись дополнительного условия в (91) в виде $\phi = \varphi_{obs}$ является во многих случаях упрощённой, поскольку на самом деле это уравнение должно быть заменено более сложным типа $C\phi = \varphi_{obs}$ с некоторым оператором C. Кроме того, данных измерений часто бывает не столь много, чтобы с их помощью построить φ_{obs} (например, подходящий интерполянт на некоторой сетке) с достаточной точностью. Чаще это можно сделать лишь в некоторых подобластях и временных интервалах. Но мы здесь ограничимся рассмотрением задачи вида (91).

6.2. Вспомогательные утверждения и задача оптимального управления

Сформулируем вспомогательные утверждения, которые могут быть полезными при изучении задач типа (91).

Лемма 2 [89]. *Норма* $\|\cdot\|_W$ *и скалярное произведение в* $W \equiv W(0,T)$ *эквивалентны норме и скалярному произведению, задаваемым следующим образом:*
1)

$$\|\varphi\|_1 = \left(\|\varphi(0)\|_H^2 + \|\varphi_t + A\varphi\|^2_{L_2(0,T;X^*)}\right)^{1/2},$$

$$(\varphi,\psi)_1 = (\varphi(0),\psi(0))_H + (\varphi_t + A\varphi, \Lambda_0^{-1}(\psi_t + A\psi))_{L_2(0,T;H)},$$

$$\forall\, \varphi,\psi \in W,$$

2)

$$\|\varphi\|_2 = \left(\|\varphi(T)\|_H^2 + \|-\varphi_t + A^*\varphi\|_{L_2(0,T;X^*)}\right)^{1/2},$$

$$(\varphi,\psi)_2 = (\varphi(T),\psi(T))_H + (-\varphi_t + A^*\varphi, \Lambda_0^{-1}(-\psi_t + A^*\psi))_{L_2(0,T;H)},$$

$$\forall\, \varphi,\psi \in W,$$

где Λ_0 *есть канонический изоморфизм* $L_2(0,T;X)$ *на* $L_2(0,T;X^*)$.

Пусть φ_0, q_0 есть решение следующих задач:

$$\frac{d\phi_0}{dt} + A\phi_0 = f_0, \quad t\in(0,T), \quad \varphi(0) = V_0;$$

$$-\frac{dq_0}{dt} + A^* q_0 = q_0, \quad t\in(0,T), \quad q(T) = Q_0,$$

где $f_0, g_0 \in L_2(0,T;X^*)$; $V_0, Q_0 \in H$. Тогда φ_0, q_0 могут быть представлены как

$$\varphi_0 = G_1 f_0 + G_0 V_0, \quad q_0 = G_1^{(T)} g_0 + G_0^{(T)} Q_0,$$

где $G_1 = G_1(t)$, $G_1^{(T)} = G_1^{(T)}(t)$; $G_1, G_1^{(T)} \in \mathcal{L}(L_2(0,T;X^*); W)$; $G_0 = G_0(t)$, $G_0^{(T)} = G_0^{(T)}(t)$; $G_0, G_0^{(T)} \in \mathcal{L}(H,W)$; т.е. $G_1, \ldots, G_0^{(T)}$ являются линейными ограниченными операторами.

Введём следующие подпространства из W:

$$\begin{aligned}
W^{(1)} &= \{f \in W : f = G_1 f_0 \quad \forall\, f_0 \in L_2(0,T;X^*)\},\\
W^{(0)} &= \{f \in W : f = G_0 V_0 \quad \forall\, V_0 \in H\},\\
\tilde{W}^{(1)} &= \{f \in W : f = G_1^{(T)} g \quad \forall\, g \in L_2(0,T;X^*)\},\\
\tilde{W}^{(0)} &= \{f \in W : f = G_0^{(T)} Q_0 \quad \forall\, Q_0 \in H\}.
\end{aligned}$$

Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Если в W введено скалярное произведение $[\cdot,\cdot]_1$, то $W^{(1)}$ ортогонально $W^{(0)}$ и $W = W^{(1)} \oplus W^{(0)}$, если же в W вводится скалярное произведение $[\cdot,\cdot]_2$, то $\tilde{W}^{(1)}$ ортогонально $\tilde{W}^{(0)}$ и $W = \tilde{W}^{(1)} \oplus \tilde{W}^{(0)}$.*

Вернёмся к задаче (91). Запишем следующую обобщённую постановку этой задачи:

$$(\phi,\ -\psi_t + A^*\psi) + (\phi(T), \psi(T))_H = (f_0, \psi) + (u, \psi(0))_H \quad (92)$$

$$\forall\, \psi \in W, \quad \phi = \varphi_{obs},$$

где второе уравнение рассматривается в $L_2(0,T;H)$. Но постановка (92) эквивалентна соотношениям вида:

$$\begin{aligned}
&\Big((G_1^{(T)}\Lambda_0 + G_0^{(T)}P_{(T)})\phi, \psi\Big)_2 = (f_0,\psi) + (G_0 u, \psi)_1 \quad \forall\, \psi \in W,\\
&\Big(\Lambda_2(G_1^{(T)}\Lambda_0 + G_0^{(T)}P_{(T)})\phi, \psi\Big) = (f_0,\psi) + (\Lambda_1 G_0 u, \psi)\ \forall\, \psi \in W,
\end{aligned}$$

где Λ_k есть канонический изоморфизм пространства W (снабжённого нормой $\|\cdot\|_k$, $k = 1,2$) на W^* и также

$P_{(T)}\phi \equiv \phi(T)$, $P_{(0)}\phi \equiv \phi(0)$. Поэтому задача (92) сводится к уравнениям:

$$L\phi = f_0 + Bu, \quad \phi = \varphi_{obs}, \tag{93}$$

где

$$L = \Lambda_2(G_1^{(T)}\Lambda_0 + G_0^{(T)}P_{(T)}), \quad B = \Lambda_1 G_0,$$
$$L^* = \Lambda_1(G_1\Lambda_0 + G_0 P_{(0)}).$$

Если мы предположим, что u известна, то легко доказать, что для заданных f_0, u уравнение (93) имеет единственное решение $\phi \in W$, кроме того: $\|\phi\|_2^2 = \|f_0\|^2_{L_2(0,T;X^*)} + \|u\|^2_H$. Принимая во внимание эквивалентность норм $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_W$, заключаем, что *уравнение* (93) *разрешимо тогда и только тогда, когда* $f_0 \in L_2(0,T;X^*)$, $u \in H$*; при этих условиях справедливы оценки*

$$\tilde{C}(\|f_0\|^2_{L_2(0,T;X^*)} + \|v\|_H) \leq \|\varphi\|_W \leq C(\|f_0\|^2_{L_2(0,T;X^*)} + \|v\|_H),$$

где $\tilde{C}, C = const > 0$. (Заметим, что в научной литературе эти условия формулируются лишь как достаточные; см. [34].)

Предположим теперь, что

$$W \equiv Y \equiv W(0,T), \quad H_0 \equiv L_2(0,T;H), \quad H_C \equiv H \equiv X_C,$$
$$H_{ob} \equiv L_2(0,T;H), \quad C \equiv I, \quad \Lambda_C \equiv I, \quad u_C \equiv 0,$$

где I — тождественный оператор. После чего к задаче (93) можно попытаться применить утверждения теорем 1, 2 из §§ 2, 3, главы 3.

Задача оптимального управления здесь есть

$$L\phi = f_0 + Bu, \ \inf_{u \in H_C}\{\alpha\|u\|^2_H + \|\phi - \varphi_{obs}\|^2_{L_2(0,T;H)}\}, \tag{94}$$

где $\alpha \geq 0$, а вариационные уравнения имеют вид

$$L\phi = f_0 + Bu, \quad L_0^* q = \phi - \varphi_{obs}, \quad \alpha u + q(0) = 0, \qquad (95)$$

где L_0^* определяется так:

$$(\tilde{w}, L_0^* q) \equiv (\tilde{w}_t, q) + (\tilde{w}, A^* q) + (\tilde{w}(0), q(0))_H = (\tilde{w}, \phi - \varphi_{ob})$$
$$\forall \tilde{w} \in W.$$

Легко заметить, что однородная задача

$$L\phi = Bu, \quad \phi = 0$$

имеет только тривиальное решение; поэтому $N(CL^{-1}B) = \{0\}$, и если задача (91) имеет решение, то это решение единственное. Но также замечаем, что однородная система

$$L_0^* q = w, \quad q(0) = 0,$$

как правило, имеет бесконечное множество нетривиальных решений q, w, что в конкретных задачах нередко установить просто, выбрав в качестве q гладкую функцию, такую, что $q(0) = q(T) = 0$, и путём подстановки в уравнение определив соответствующую функцию w.

Итак, для *задачи* (91) *имеет место единственность решения, но плотной разрешимости, как правило, нет.* Если (91) априори имеет решение $\phi_0 \in W$, $u_0 \in H$, то решения ϕ, u системы (95) сходятся к ϕ_0, u_0, причём

$$\|\phi - \varphi_{ob}\|_{L_2(0,T;H)} \le \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2} \|u_0\|_H \to 0, \ \alpha \to 0.$$

Замечание. При условии $N(CL^{-1}B) = \{0\}$ можно также ввести понятие обобщённого решения задачи (91). Однако это требует весьма специфических построений и определений [84]. ■

6.3. Итерационный алгоритм

Из предыдущего раздела следует единственность решения задачи (91). Поэтому если априори предполагается существование решения этой задачи, то построение приближённого решения можно осуществить, например, с помощью следующей итерационной процедуры:

$$\begin{aligned}
&\phi_t^k + A\phi^k = f_0, \quad t \in (0,T), \quad \phi^k = u^k, \quad t = 0,\\
&-q_t^k + A^* q^k = \phi^k - \varphi_{obs}, \quad t \in (0,T), \quad q^k(T) = 0,\\
&u^{k+1} = u^k - \tau(\alpha u^k + q^k(0)), \quad k = 0, 1, \ldots,
\end{aligned}$$

которая будет сходиться при реальных положительных τ.

Значительное разнообразие итерационных методов решения задач типа (91) обсуждается в работах [63, 82, 94, 96].

§ 7. Обратная задача для возмущенной системы Стокса

7.1. Постановка задачи

В области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ с гладкой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$ рассмотрим задачу вида:

$$\begin{aligned}
&-a\Delta\phi + b\phi + K\phi = f + \chi_C u - \nabla p \quad \text{в} \quad \Omega,\\
&\operatorname{div}\phi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \int\limits_{\Omega} p\,dx = 0, \quad \phi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,
\end{aligned} \tag{96}$$

где $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, $u = (u_1, u_2)$, p — скалярная функция, $a = const > 0$, $b = const \geq 0$, $f = (f_1, f_2)$ — заданная вектор-функция (далее просто функция), $K\phi \equiv (-l\phi_2, l\phi_1)$, $l = l_0 + l_1 x_2$, $l_0, l_1 = const$, χ_C — характеристическая функция области $\Omega_C \subseteq \Omega$. Функции ϕ, u считаются неизвестными.

Для замыкания задачи вводим следующее дополнительное условие:

$$\chi_{ob}\phi = \chi_{ob}\varphi_{obs}, \tag{97}$$

где $\varphi_{obs} = (\varphi_{obs,1}, \varphi_{obs,2})$ — заданная в Ω функция такая, что $\operatorname{div}\varphi_{obs} = 0$, χ_{ob} — характеристическая функция области $\Omega_{ob} \subseteq \Omega$. В дальнейшем считается, что границы Γ_{ob}, Γ_C областей Ω_{ob}, Ω_C также гладкие.

Система (96) есть известная система стационарных уравнений Стокса, возмущённая слагаемым в ϕ и кососимметрическим оператором K. Задача (96), (97) для этой системы есть обратная задача о нахождении ϕ, p и дополнительных источников u в Ω_C.

Для операторной формулировки задачи введём следующие известные пространства [30]. Пространство $H \equiv (L_2(\Omega))^2$ считаем основным, а пространство V определяется так:

$$V = \{\phi \in (W_2^1(\Omega))^2; \quad \operatorname{div}\phi = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \ \phi = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\}.$$

Через $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ обозначаем подпространство из H, полученное замыканием по норме пространства H множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω соленоидальных вектор-функций. (Заметим, что $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ состоит из тех вектор-функций $\phi \in H$, для которых в слабом смысле имеем: $\operatorname{div}\phi = 0$ в Ω и $\phi \cdot n = 0$ на Γ, где $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ; см. [58].) Через $G(\Omega)$ обозначим подпространство из H, состоящее из вектор-функций вида ∇g, где g — произвольная скалярная функция из $W_2^1(\Omega)$. Известно, что $H = \overset{\circ}{J}(\Omega) \oplus G(\Omega)$.

Умножая скалярно в H уравнение (96) на $w \in V$ и выполняя интегрирования по частям, приходим к следующей постановке задачи (96), (97): найти $\phi \in V$ и u такие, что

$$\begin{gathered} a(\phi, w) \equiv (a\nabla\phi, \nabla w) + (b\phi, w) + (K\phi, w) = \\ = (f, w) + (\chi_C u, w) \ \forall w \in V, \quad \chi_{ob}\phi = \chi_{ob}\varphi_{obs}, \end{gathered} \tag{98}$$

где $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_H$.

Дополнительное неизвестное u будем искать в классе функций $\overset{\circ}{J}(\Omega_C)$, которые считаем продолженными нулями на $\Omega \backslash \Omega_C$. После этого $\overset{\circ}{J}(\Omega_C)$ можно рассматривать как подпространство из $\overset{\circ}{J}(\Omega)$. Если теперь ввести операторы L, B, C следующим образом (см. § 1):

$$(L\phi, w) \equiv a(\phi, w) \quad \forall \phi, w \in V, \quad L : V \to V^*, \quad D(L) = V,$$

$$(Bu, w) \equiv (\chi_C u, w) \quad \forall u \in H \quad \forall w \in V,$$
$$B : H \to V^*, \quad D(B) = \overset{\circ}{J}(\Omega_C),$$

$$C\phi \equiv \chi_{ob}\phi, \quad C : H \to H, \quad D(C) = H,$$

то (98) уже полностью определяет обобщённую постановку задачи (96), (97), которую в операторной форме можно записать так:

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \chi_{ob}\varphi_{obs}. \tag{99}$$

Семейство задач оптимального управления, которое мы вводим в связи с (99), является следующим:

$$\begin{gathered} L\phi = f + Bu, \\ \inf_{u \in D(B)} \{\alpha \|u\|_H^2 + \|C\phi - \chi_{ob}\varphi_{obs}\|_H^2\}, \ \alpha = const \geq 0. \end{gathered} \tag{100}$$

Система вариационных уравнений, соответствующая (100), есть

$$L\phi = f + Bu, \quad L^* q = {}^*(C\phi - \chi_{obs}\varphi_{obs}), \quad \alpha u + B^* q = 0, \tag{101}$$

где $C^* = C$. В терминах билинейных форм система (101) имеет вид:

$$\begin{aligned} &(a\nabla\phi, \nabla w) + (b\phi, w) + (K\phi, w) = (f, w) + (\chi_C u, w) \ \forall w \in V, \\ &(a\nabla\tilde{w}, \nabla q) + (b\tilde{w}, q) + (K\tilde{w}, q) = (\tilde{w}, \chi_{ob}\phi - \chi_{ob}\varphi_{obs}) \ \forall \tilde{w} \in V, \\ &\alpha u + q = 0 \quad \text{на} \quad \Omega_C. \end{aligned} \tag{102}$$

Заметим, что задача (100)((101), (102)) при $\alpha = 0$ является обобщённой постановкой задачи (98), а значит и последующей обобщённой постановкой задачи (96), (97).

7.2. Условия разрешимости задачи и единственности решения

Изучим некоторые условия, при которых имеют место единственность решения (99) или плотная разрешимость этой задачи. Для этого необходимо изучить тривиальность нуль-пространств $N(A), N(A^*)$, где $A = CL^{-1}B$, или, что равносильно, тривиальность решений задач вида:

$$\begin{cases} (a\nabla\phi, \nabla w) + (b\phi, w) + (K\phi, w) = (\chi_C u, w) \ \forall w \in V, \\ \phi = 0 \quad \text{на} \quad \Omega_{ob}; \end{cases} \tag{103}$$

$$\begin{cases} (a\nabla\tilde{w}, \nabla q) + (b\tilde{w}, q) + (K\tilde{w}, q) = (\tilde{w}, \chi_{ob} Q) \ \ \forall\tilde{w} \in \tilde{V}, \\ q = 0 \quad \text{на} \quad \Omega_C, \end{cases} \tag{104}$$

где $\operatorname{div} Q = 0$ на Ω_{ob}.

Докажем следующее

Предложение. *Справедливы следующие утверждения:* 1) *Если* $mes\,(\Omega_C \bigcap \Omega_{ob}) = 0$, *то* $dim\,(N(A)) = dim\,(N(A^*)) = \infty$. 2) *Если* $\bar{\Omega}_C \subset \Omega_{ob} = \Omega$, *то* $N(A) = \{0\}$ *и* $dim\,(N(A^*)) = \infty$. 3) *Если* $\bar{\Omega}_{ob} \subset \Omega_C \subset \Omega$, *то* $dim\,(N(A)) = \infty$ *и* $N(A^*) = \{0\}$. 4) *Если* $\Omega_{ob} = \Omega_C$, *то* $N(A) = N(A^*) = \{0\}$.

Доказательство. 1. Пусть Ω_C и Ω_{ob} не пересекаются. Рассмотрим задачу (103) и в ней все функции с носителями в Ω_C, т.е. $\phi, w \in V \equiv V(\Omega_C)$, $u \in \overset{\circ}{J}(\Omega_C)$. Задавая произвольную $u \in \overset{\circ}{J}(\Omega_C)$, с помощью теоремы Вишика–Лакса–Мильграма (см. гл. 2) легко устанавливается существование единственного решения $\phi \in V(\Omega_C)$, соответствующего выбранному $u \in \overset{\circ}{J}(\Omega_C)$. Продолжим теперь u и ϕ тождественными нулями на $\Omega \backslash \Omega_C$. В результате получим, что данные продолженные функции удовлетворяют системе двух соотношений (103), т.е. $N(A) \neq \{0\}$. А поскольку число таких нетривиальных решений задачи (103) можно построить бесконечное множество, то заключаем, что $\dim(N(A)) = \infty$.

Аналогично показывается, что в данном случае также $\dim(N(A^*)) = \infty$.

2. Пусть теперь $\bar{\Omega}_C \subset \Omega_{ob} = \Omega$. Из (103) немедленно следует, что $\phi = 0$ (по условию из (103)) и $u = 0$ (из первого уравнения).

Рассмотрим задачу (104). Поскольку mes $(\Omega \backslash \Omega_C) > 0$, то, повторяя рассуждения из п. 1 данного доказательства, устанавливаем бесконечное множество нетривиальных решений q, Q этой задачи, причём $q \equiv 0$ на Ω_C. Следовательно, $\dim(N(A^*)) = \infty$.

3. Если $\bar{\Omega}_{ob} \subset \Omega_C \subset \Omega$, то теперь уже можно говорить, очевидно, что $\dim(N(A)) = \infty$. Рассмотрим задачу (104). Предположим, что она имеет нетривиальное решение q, Q. Тогда оно будет удовлетворять также системе вида

$$\begin{array}{l} -a\Delta q + bq - Kq = \chi_{ob} Q - \nabla P \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} q = 0 \;\; \text{в} \;\; \Omega, \quad q = 0 \;\; \text{на} \;\; \partial\,\Omega, \quad q = 0 \text{ на } \;\Omega_C \end{array}$$

с некоторой скалярной функцией $P \in W_2^1(\Omega)$, определяемой с точностью до постоянной. Рассматривая первое уравнение на Ω_C и учитывая последнее равенство, получаем:

$$\begin{array}{l} \chi_{ob} Q - \nabla P = 0 \;\; \text{на} \quad \Omega_C, \quad \nabla P = 0 \;\; \text{на} \quad (\Omega_C \backslash \Omega_{ob}), \\ \operatorname{div} Q - \Delta P = 0 \;\; \text{на} \quad \Omega_{ob}, \quad P = C_0 = const \;\; \text{на} \quad (\Omega_C \backslash \Omega_{ob}). \end{array}$$

Поскольку $\operatorname{div} Q = 0$ на Ω_{ob}, то также $\Delta P = 0$ на Ω_{ob}. Если в последних уравнениях перейти к функции $\tilde{P} = P - C_0$, то получаем, что $\tilde{P} \in W_2^1(\Omega)$, $\tilde{P} = 0$ в $(\Omega_C \backslash \Omega_{ob})$ и

$$\Delta \tilde{P} = 0 \;\; \text{в} \quad \Omega_{ob}, \quad \tilde{P} = 0 \;\; \text{на} \quad \partial\,\Omega_{ob}.$$

Следовательно, $\tilde{P} = 0$ в Ω_{ob}, $P = C_0$ и $Q = 0$ в Ω_{ob}. Но тогда $q = 0$ и $N(A^*) = \{0\}$.

4. То, что $N(A) = N(A^*) = \{0\}$ при $\Omega_C = \Omega_{ob}$, следует из предыдущих рассмотрений настоящего доказательства. Таким образом, все утверждения установлены. ■

Как следствия сформулированных выше Предложения и Теорем 1,2 из §§ 2,3, Гл.3 можно установить соответствующие утверждения о разрешимости задачи (96),(97) и единственности её решения. Здесь мы ограничимся лишь одним таким утверждением.

Лемма 1. *Пусть* $\Omega_C = \Omega_{ob} \subseteq \Omega$. *Тогда:* 1) *задача* (96), (97) *может иметь не более одного решения;* 2) *задача* (96), (97) *плотно разрешима;* 3) *при любом* $\alpha > 0$ *и любых заданных* $f \in H$, $\varphi_{ob} \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ *система* (102) *имеет единственное решение, при этом* $\|\chi_{ob}\phi - \chi_{ob}\varphi_{obs}\|_H \to 0$ *при* $\alpha \to +0$.

7.3. Итерационный алгоритм

Для приближённого решения задачи (102) можно воспользоваться, например, простейшим итерационным процессом (который для наглядности запишем для классических решений):

$$\begin{cases} a\Delta\phi^k + b\phi^k + K\phi^k = f - \nabla p^k + \chi_C u^k \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \operatorname{div}\phi^k = 0 \text{ в } \ \Omega, \quad \phi^k = 0 \text{ на } \ \Gamma, \ \displaystyle\int\limits_{\Omega_0} p^k dx = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a\Delta q^k + bq^k - Kq^k = \chi_{ob}\phi^k - \chi_{ob}\varphi_{ob} - \nabla\tilde{\rho}^k \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} q^k = 0 \text{ в } \ \Omega, \ q^k = 0 \text{ на } \ \Gamma, \ \displaystyle\int\limits_{\Omega_0} \tilde{\rho}^k dx = 0, \end{cases} \tag{105}$$

$$u^{k+1} = u^k - \tau(\alpha u^k + q^k) \quad \text{на} \quad \Omega_C, \ k = 0, 1, \ldots,$$

где $\tau = 0$ — параметр итерационного процесса. Формулировка условий сходимости алгоритма и оптимизация его скорости сходимости приводились уже неоднократно ранее.

Таким образом, если имеется эффективный алгоритм численного решения стационарной системы Стокса, возмущенной несимметричными операторами $bI + K$, то, решая последовательно подзадачи из (105), при достаточно большом k (и малом α!) можно приближенно принять $\phi \cong \cong \phi^k$, $u \cong u^k$, где ϕ, u — классическое (или обобщенное) решение задачи (96), (97). Конечно, здесь необходимо помнить, что при численной реализации (105) на каждом шаге будут допускаться дополнительные численные ошибки. Поэтому уменьшение параметра α и увеличение числа итераций k необходимо согласовывать с величиной этих численных ошибок (см. § 6 гл. 3).

§ 8. О решении других линейных обратных задач

Дадим краткое описание задач математической физики, помимо рассматриваемых ранее, к которым могут быть применен формулируемые в данной книге методы и подходы.

8.1. Задача о финальном наблюдении для эволюционного уравнения второго порядка

С помощью изложенных выше методов может быть исследована следующая задача о финальном наблюдении (задача точного управления): найти абстрактную функцию $\phi \in L_2(0, T; X)$ и пару управлений $u_0 \in X$, $u_1 \in H$ таких, что

$$\phi_{tt} + \beta \cdot \phi_t + \mathcal{L}\phi = f, \quad t \in (0, T),$$
$$\phi = u_0, \quad \phi_t = u_1 \ \text{ при } \ t = 0,$$

и выполняются дополнительные условия

$$\phi(0) = \phi(T), \quad \phi_t(0) = \phi_t(T)$$

или

$$\phi(T) = \varphi_{obs}^{(0)}, \quad \phi_t(T) = \varphi_{obs}^{(1)}.$$

Здесь X, H — гильбертовы пространства, $X \subset H$, $H \equiv \equiv H^*$; $\beta = const \geq 0$, $\mathcal{L} : X \to X^*$ — оператор, порождаемый симметричной X-ограниченной и X-определенной билинейной формой $a(\varphi, \psi)$; f, $\varphi_{obs}^{(0)}$, $\varphi_{obs}^{(1)}$ — заданные элементы соответственно из $L_2(0, T; H), X, H$.

Рассматриваемые задачи вновь можно свести к изучению регуляризированного уравнения

$$(\alpha I + A^* A)u = A^* g$$

для вектор-функции $u = (u_0, u_1)$, оценить норму оператора A, предложить итерационные методы решения задач и оптимизировать скорость их сходимости. Интересно отметить, что если $\beta = 0$, то оказывается, что $A^* A = I$, и итерационные процессы могут сходиться за одну итерацию, т.е. для решения задачи достаточно последовательно решить прямую и сопряженную задачи.

Одним из частных случаев рассматриваемой задачи является обратная задача о длинных волнах: требуется найти $\phi(t, x, z), u_0, u_1$ такие, что

$$\Delta \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \ \text{ в } \ \Omega = (0, A) \times (-B, 0),$$

$$g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega_1 = \{z = 0, \ 0 < x < A\},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega_2 = \partial\Omega \backslash \partial\Omega_1,$$

$$\phi = u_0, \quad \phi_t = u_1 \ \text{ на } \ \partial\Omega_1 \ \text{ при } \ t = 0,$$

и выполнены дополнительные условия

$$\phi = \varphi_{obs}^{(0)}, \quad \phi_t = \varphi_{obs}^{(1)} \ \text{ на } \ \partial\Omega_1 \ \text{ при } \ t = T,$$

где $g = const > 0$, $\varphi_{obs}^{(0)}, \varphi_{obs}^{(1)}$ — заданные функции.

При подходящем выборе функциональных пространств задача о длинных волнах может быть записана как задача для абстрактного эволюционного уравнения, сформулированной в начале данного раздела.

Результаты изучения приведённых здесь задач формулируются в работе [73], где имеются также результаты некоторых численных экспериментов по решению обратной задачи о длинных волнах.

8.2. Задача о граничных функциях в гидродинамике

Вычисление (задание) функций граничных значений на "жидких" ("открытых") частях границ областей является одной из проблем гидродинамики, связанных с математическим моделированием прибрежных зон океанов, устьев больших рек и т.п. В некоторых случаях нахождение таких функций граничных значений можно осуществить, рассматривая их как дополнительные неизвестные и привлекая данные измерений. Так, например, пусть рассматривается квазигеострофическая модель циркуляции в океане [57]:

$$L\phi = \frac{1}{2\alpha}\Delta\phi + (U,\nabla)\phi + \frac{H\beta}{l}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} = f \quad \text{в} \;\; \Omega,$$

$$\phi = 0 \;\; \text{на} \;\; \Gamma_0, \quad \phi = u \;\; \text{на} \;\; \Gamma_1,$$

где $(x,y) \equiv \Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$, $U = (U_1, U_2)$, $U_1 = -\partial H/\partial y$, $U_2 = \partial H/\partial x$, $l = l_0 + \beta y$, $l_0, \beta, \alpha = const > 0$, $f \in L_2(\Omega)$, $H(x,y) \in C^{(1)}(\Omega)$. Предположим, что функция u также неизвестна, но имеются данные наблюдений $\{\varphi_i^{(0)}\}$, $\{\varphi_i^{(1)}\}$, которые являются приближёнными значениями величин $\{(\rho_i, \frac{g}{l}\,\phi_x) \equiv I_i^{(0)}\}$, $\{-(\rho_i, \frac{g}{l}\,\phi_y) \equiv I_i^{(1)}\}$ соответственно, где $\{\rho_i\}$ — некоторые весовые функции из $(W_2^1(\Omega))^*$, $g = const > 0$, $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$. Вводим функционал вида

$$J_\alpha(u,\phi(u)) \equiv \frac{\alpha_0}{2}\|\phi\|_W^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\Big((\varphi_i^{(0)} - I_i^{(0)})^2 + \\ +(\varphi_i^{(1)} - I_i^{(1)})^2\Big),$$

где $\alpha_0, \alpha_i = const > 0$. Пространство W здесь определяется так: $W \equiv W_{2,0}^{1/2}(\Gamma_1) = \{\psi : \psi = w$ на Γ_1 $\forall w \in W_2^1(\Omega)$, $w = 0$ на $\Gamma_0\}$. Теперь задача об одновременном определении ϕ и граничной функции u формулируется так: найти ϕ и u такие, что

$$L\phi = f \text{ в } \Omega,\ \phi = 0 \text{ на } \Gamma_0,\ \phi = u \text{ на } \Gamma_1\ \ \inf_{u\in W} J_\alpha(u,\phi(u)).$$

Некоторые результаты по изучению этой задачи приведены в [72, 74].

8.3. Задачи теории переноса частиц

Задачи для уравнений переноса (см. (17), п. 1.1.4 данной главы) встречаются при изучении многих прикладных проблем теории ядерных реакторов, астрофизики, рассеяния солнечного излучения в атмосфере и многих других. Особую значимость приобретают обратные задачи и задачи управления для данных уравнений. Цикл исследований по данным задачам для стационарных уравнений переноса проведён автором совместно с коллегами в работах [78–84].

Обратные задачи и задачи управления для уравнений переноса обладают рядом специфических трудностей. Прежде всего, как правило, они являются существенно многомерными. Далее, теория пространств Соболева С.Л. неприменима здесь и необходимы специальные функциональные пространства для исследования разрешимости задач, изучения проблем существования следов и т.д. Такие пространства были развиты в [1]. Кроме того, методы исследования обратных задач и задач управления, базирующиеся на применении результатов по задаче Коши для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений (см. § 1, настоящей главы), здесь применять нельзя. Поэтому необходимо было создавать другой математический аппарат изучения подобных задач. Ряд исследований в данном направлении осуществлён в работах [80, 81, 84].

Подробности решения обратных задач для уравнения переноса о локальных функциях источников, о граничных функциях и др., а также численные эксперименты по проверке эффективности ряда итерационных алгоритмов решения задач (не только рассмотренных в данной книге) приведены в [78–84].