Глава 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ И МЕТОДОВ ИХ РЕШЕНИЯ

§ 1. Описание класса задач и этапы их исследований

Запишем в операторной форме класс задач, который будем рассматривать в дальнейшем. Сформулируем основные ограничения на операторы уравнений и пространства, в которых эти операторы действуют, а также перечислим основные этапы процесса изучения и решения рассматриваемых задач.

1.1. Описание класса задач

Пусть X_C, H_0, H_C, H_{ob} — гильбертовы пространства, а W, Y — банаховы, причём имеют место вложения

$$W \subseteq Y \subseteq H_0 \equiv H_0^* \subseteq Y^* \subseteq W^*$$
$$X_C \subseteq H_C \equiv H_C^* \subseteq X_C^*,$$

при этом каждое вложение предполагается плотным и непрерывным (т.е. если, например, $W \subset Y$, то все элементы φ из W являются также элементами из Y, причём $\|\phi\|_Y \leq \leq C\|\phi\|_W$, $C = const$, а также W плотно в Y). Далее, только пространства H_0, H_C, H_{ob} предполагаются самосопряжёнными (т.е. являются основными). В дальнейшем пространство W всегда считается рефлексивным (т.е. $W = W^{**}$).

Рассмотрим *класс обратных задач*, каждая из которых формулируется в следующей операторной форме: найти ϕ (функцию состояния) и u (дополнительное неизвестное) такие, что

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \varphi_{ob}, \tag{1}$$

где f, φ_{ob} — заданные элементы, L, B, C — линейные операторы, причём:

$L : W \to Y^*$, $\overline{D(L)} = W, L$ — замкнут, существует

L^{-1} и $\|L^{-1}\| < \infty$,

$C : W \to H_{ob}$, $D(C) = D(L)$, $C \in L(W, H_{ob})$,

$B : H_C \to Y^*$, $\overline{D(B)} = H_C$, $B \in L(H_C, Y^*)$.

Относительно $D(B)$ будем рассматривать только один из следующих случаев: а) $D(B)$ — некоторое выпуклое множество, плотное в $X_C \subseteq H_C$, т.е. $\overline{D(B)} = X_C$; б) $D(B) = X_C$; в) $D(B) = X_C^{(0)}$ — некоторое подпространство из X_C, причём в этом случае считаем, что $B : X_C^{(0)} \to Y^*$. Оператор проектирования X_C на $X_C^{(0)}$ в пространстве H_C будем обозначать P_C.

Обращаем внимание на то, что P_C не обязательно является ортопроектором, от него требуется выполнение лишь двух следующих свойств: 1) $P_C X_C = X_C^{(0)}$; 2) $P_C^2 = P_C$. Через P_C^* обозначаем оператор, сопряжённый к P_C.

Отмечаем некоторые следствия, вытекающие из сделанных выше ограничений на операторы и пространства при формулировке уравнений (1).

Отметим, что в зависимости от соотношений пространств $W, \ldots, H_{ob}$ каждый из операторов L, B, C может быть ограниченным, неограниченным или даже вполне непрерывным.

Поскольку считается, что W — рефлексивное банахово пространство, L — замкнут, $\overline{D(L)} = W$ и существует L^{-1}, то всегда будем иметь равенство $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$. Кроме того, область определения сопряжённого к L оператора $D(L^*)$ плотна в Y^*, т.е. $\overline{D(L^*)} = Y^*$.

В силу сделанных ограничений всегда существуют единственным образом определённые операторы L^*, B^*, C^*. Кроме того, мы всегда в дальнейшем будем считать, что либо операторы L^{-1}, B, C ограничены, либо два из этих операторов подчинены третьему. В этом случае выполняется равенство $(BL^{-1}C)^* = C^*L^{*-1}B^*$. (Выполнение этого равенства всегда в дальнейшем предполагается.)

Если элемент $u \in D(B)$ задан (или уже определён), то в силу существования оператора L^{-1} и его ограниченности первое из уравнений (1) есть обычное прямое уравнение, и оно корректно разрешимо, причём справедлива оценка $\|\phi\|_W \leq C(\|f\|_{Y^*} + \|Bu\|_{Y^*})$, где $C = const$. Если оператор $B : H_C \to Y^*$ является ограниченным, то имеем также оценку вида $\|\phi\|_W \leq C(\|f\|_{Y^*} + \|u\|_{H_C})$, $C = const$.

В форме (1) могут быть записаны многие задачи управления, где u есть управление, задачи идентификации и др., а также ряд обратных задач, где u — дополнительное неизвестное, которое в этих задачах будем условно называть "управлением".

1.2. Этапы исследования и решения задач

К изучению и решению можно применить следующие подходы. Исключая ϕ из (1) с помощью представления $\phi = L^{-1}(f + Bu)$, получим уравнение для u

$$Au = g \tag{2}$$

где

$$g \equiv \varphi_{ob} - CL^{-1}f, \quad A \equiv CL^{-1}B.$$

Если операторы L^{-1}, A известны в явном виде, то можно решать непосредственно уравнение (2). И если эта задача для одной неизвестной u оказывается некорректной, то построение решения (2) осуществляется с привлечением подходов и методов теории некорректно поставленных задач [12, 18, 59]. Очевидно, что данный подход применим к классу задач, в которых операторы L^{-1}, A известны в явном виде.

Можно поступать и другим образом. Включим (1) в семейство задач оптимального управления вида

$$\left\{ \begin{array}{c} L\phi = f + Bu, \\ J_\alpha(u, \phi(u)) = \inf\limits_{v \in D(B)} J_\alpha(v, \phi(v)), \end{array} \right. \tag{3}$$

где $\alpha = const \geq 0$, $u_C \in X_C$ — некоторый заданный элемент из X_C, например $u_C \equiv 0$, а функционал J_α есть

$$J_\alpha(v, \phi(v)) = \alpha \|v - u_C\|^2_{X_C} + \|C\phi - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}}. \tag{4}$$

Замечаем, что решение задачи (1) является решением (3) при $\alpha = 0$. Таким образом, *задача* (3) *при* $\alpha = 0$ *является одной из обобщённых постановок задачи* (1). Семейство задач (3) при различных значениях параметра α (в том числе при $\alpha \to +0$) может быть изучено методами теории экстремальных задач и оптимального управления с привлечением результатов из теории некорректных задач. Решение (3) можно осуществить итерационными алгоритмами на базе теории итерационных методов. Перечисленное выше составляет суть второго подхода к исследованию и решению задачи (1). Подчеркнём, что *здесь не требуется знания операторов* L^{-1} , $CL^{-1}B$ *в явной форме*, а требуется исследование их общих свойств и свойств сопряжённых к ннм операторов на основе свойств операторов L, B, C и выбранных пространств $W, \ldots, H_{ob}$. Поэтому можно предположить, что данный подход применим к задачам достаточно общего вида, и в дальнейшем будем применять именно этот подход к изучению и решению рассматриваемых нами задач.

Сформулируем основные этапы исследования и решения задачи (1) выбранным способом.

Этап 1. Формулируем рассматриваемую задачу в виде (1).

Этап 2. Переформулируем (1) как задачу оптимального управления (точнее, включаем (1) в семейство задач (3)).

Этап 3. Вычисляем необходимые условия оптимальности и системы вариационных уравнений, зависящих от параметра $\alpha \geq 0$. Как будет показано в следующем разделе, одной из форм этих уравнений будет система вида

$$\begin{gathered}L\phi = f + Bu, \quad L^*q = C^*(C\phi - \varphi_{ob}),\\ \alpha\Lambda_C u + B^*q = \alpha\Lambda_C u_C,\end{gathered} \tag{5}$$

где Λ_C – канонический изоморфизм X_C на X_C^*, т.е. $(u,v)_{X_C} = (\Lambda_C u, v)_{H_c}$ $\forall\, u, v \in X_C$, $\|u\|_{X_C} = \|\Lambda_C^{1/2} u\|_{H_C}$, или (после исключения ϕ и q) уравнение для одной неизвестной u:

$$\mathcal{A}_\alpha u = g_\alpha \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_\alpha \equiv \alpha\Lambda_C + A^*A, \quad A = CL^{-1}B,\\ &g_\alpha = A^*g + \alpha\Lambda_C u_C, \quad g = \varphi_{ob} - CL^{-1}f.\end{aligned}$$

Этап 4. Исследуется проблема существования и единственности решения задач (3), ((5), (6)) при $\alpha \geq 0$ (отметим, что при $\alpha > 0$ это сделать совсем просто).

Этап 5. Изучаем сходимость решений $\phi \equiv \phi(\alpha)$, $u \equiv u(\alpha)$ задач (3) при $\alpha \to +0$: $\phi_\alpha \to \phi(0) \equiv \phi_0$, $u(\alpha) \to u(0) \equiv u_0$ при $\alpha \to +0$, в подходящем смысле и устанавливаем, какое отношение имеют функции ϕ_0, u_0 к решению (псевдорешению, нормальному решению и др.) задачи (1).

Этап 6. Фиксируя достаточное малое α, когда имеем $\phi(\alpha) \cong \phi_0$, $u(\alpha) \cong u_0$, применяем подходящий итерационный метод к решению уравнения (6), например, алгоритм вида

$$u^{k+1} = u^k - \tau_k(\mathcal{A}_\alpha u^k - g_\alpha), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

оптимизируем выбор параметров $\{\tau_k\}$ и переформулируем этапы итерационного метода в терминах уравнений (5), которые в случае алгоритма (7) есть

$$\left\{\begin{aligned}&L\phi^k = f + Bu^k,\\ &L^*q^k = C^*(C\phi^k - \varphi_{ob}),\\ &\Lambda_C u^{k+1} = \Lambda_C u^k - \tau_k(\alpha\Lambda_C(u^k - u_C) + B^*q^k),\end{aligned}\right. \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Формулируем результаты сходимости ϕ^k, u^kк ϕ, u и оцениваем результирующие погрешности $(u^k - u_0), (\phi^k - \phi_0)$.

Этап 7. Применяем классические численные методы (метод конечных разностей, проекционно-сеточные методы и др.) для решения последовательности задач (8).

В дальнейшем мы будем рассматривать более подробно этапы 1–6 как в общей форме (в данной главе), так и в применении к конкретным задачам математической физики, считая, что этап 7 может быть известен читателям из курсов, читаемых студентам старших курсов, или из монографий и учебников, список которых в настоящее время весьма обширен [2, 6, 15, 25, 38, 43, 44].

Отметим, принципиальными из перечисленных выше этапов являются этапы 4, 5, а именно исследование существования решений при $\alpha = 0$ и сходимости решений $\phi(\alpha), u(\alpha)$ при $\alpha \to +0$ к решению задачи (1). *Изучение именно этих вопросов и получаемые здесь результаты составляют бóльшую часть фундамента всего алгоритма решения задач вида* (1).

Отметим также, что практическая реализация всех алгоритмов зависит от погрешностей применяемых численных методов на этапе 7. И здесь может оказаться, что ошибки аппроксимации и погрешности вычислений будут превышать или будут сравнимы с погрешностями регуляризации задач, обусловленными присутствием слагаемого $\alpha\|v - u_C\|^2_{X_C}$ в функционале J_α. Поэтому возможны ситуации, когда из-за погрешностей методов применения численных методов на этапе 7 итерационные алгоритмы типа (8) могут оказаться расходящимися, если решаемые задачи (т.е. задача (2)!) являются некорректными. Поэтому в данном случае необходимо привлекать результаты и рекомендации из общей теории решения некорректно поставленных задач, ряд которых приведён в предыдущей главе.

1.3. Формы записи вариационных уравнений

Пусть $\phi \equiv \phi(\alpha), u \equiv u(\alpha)$ есть решение экстремальной задачи (3) и $\overline{D(B)} = X_C$ или $D(B) = X_C$. Вычисляем первую вариацию функционала J_α и приравниваем её к нулю (что является необходимым условием экстремальности точки u при сделанных ограничениях на $D(B) \equiv D(J_\alpha)$). В результате получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} L\phi = f + Bu, \\ \alpha(u,w)_{X_C} + (C\phi - \varphi_{ob}, CL^{-1}Bw)_{H_{ob}} = 0, \\ \hfill \forall\, w \in X_C. \end{cases} \tag{9}$$

Если представить ϕ в форме $\phi = L^{-1}(f + Bu)$ и подставить это выражение в (9), то получим равенство

$$a_\alpha(u,w) = g_\alpha(w) \quad \forall\, w \in X_C, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} a_\alpha(u,w) &= \alpha(u,w)_{X_C} + ((CL^{-1}B)u, (CL^{-1}B)w)_{H_{ob}}, \\ g_\alpha(w) &= \alpha(u_C,w)_{X_C} + (\varphi_{ob} - CL^{-1}f, (CL^{-1}B)w)_{H_{ob}} \end{aligned}$$

Поскольку

$$((CL^{-1}B)u, (CL^{-1}B)w)_{H_{ob}} = ((CL^{-1}B)^*(CL^{-1}B)u, w)_{H_C},$$

то, учитывая плотность X_C в H_C, из (10) получаем следующее операторное уравнение для u:

$$\mathcal{A}_\alpha u = g_\alpha, \quad \alpha \geq 0, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_\alpha = \alpha\Lambda_C + A^*A, \quad A = CL^{-1}B, \\ &g_\alpha = A^*g + \alpha\Lambda_C u_C, \quad g \equiv \varphi_{ob} - CL^{-1}f, \end{aligned}$$

и в силу принятых нами условий на $L, \ldots, D(C)$ имеем $A^* = B^*L^{*-1}C^*$.

При $\alpha = 0$ уравнение (11) примет вид

$$\mathcal{A}_0 u \equiv A^* A u = A^* g \tag{12}$$

— уравнение (2) в смысле наименьших квадратов.

Наконец, если использовать представление $\phi = L^{-1}(f + +Bu)$ и ввести обозначение $q \equiv L^{*-1} C^* (C\phi - \varphi_{ob})$ — решение сопряжённой задачи, то уравнение (11) можно записать в виде системы прямых, сопряжённых уравнений и уравнения Эйлера для u:

$$\begin{cases} L\phi = f + Bu, \\ L^* q = C^*(C\phi - \varphi_{ob}), \\ \alpha \Lambda_C u + B^* q = \alpha \Lambda_C u_C, \end{cases} \tag{13}$$

т.е. получим полную *систему вариационных уравнений.*

В том случае, если $D(B) = X_C^{(0)}$ — подпространство из X_C, а P_C — проектор (в H_C!) пространства X_C на $X_C^{(0)}$, то в (9)–(10) элементы u, w будут из $X_C^{(0)}$. И хотя для них $P_C u = u$, $P_C w = w$, тем не менее будем писать $P_C u$ вместо u, а w заменим везде на $P_C \tilde{w}$, где $\tilde{w}$ — произвольный элемент из X_C (если $\tilde{w} \in X_C^{(0)}$, то имеем $P_C \tilde{w} = \tilde{w}$). Теперь с помощью проведённых выше рассуждений получаем модификации уравнений (9)–(13), соответствующие рассматриваемому случаю. Так, например, оператор $\mathcal{A}_\alpha$ и g_α имеют вид

$$\mathcal{A}_\alpha \equiv \alpha P_C^* \Lambda_C P_C + P_C^* A^* A P_C, \quad g_\alpha = P_C^*(A^* g + \alpha \Lambda_C u_C), \tag{14}$$

а система (13) заменяется на систему

$$\begin{cases} L\phi = f + BP_C u, \\ L^* q = C^*(C\phi - \varphi_{ob}), \\ \alpha P_C^* \Lambda_C P_C u + P_C^* B^* q = \alpha P_C^* \Lambda_C u_C. \end{cases} \tag{15}$$

Обратим внимание на то, что даже если подпространство $X_C^{(0)}$ может быть конечномерным (что нередко бывает при решении практических задач!), элементы ϕ, q в общем случае принадлежат бесконечномерным пространствам W, Y соответственно.

Уравнения (9)–(13), (15) являются различными формами записи вариационных уравнений. Использование той или иной из них зависит от изучаемой проблемы. Поэтому в дальнейшем мы будем применять все данные представления вариационных уравнений.

1.4. Обсуждение понятия "решение задачи"

Обсудим вопрос: что понимать под решением задачи (1) и вариационных уравнений в зависимости от значения $\alpha \geq 0$.

Прежде всего из (11) замечаем, что это уравнение для u имеет вид уравнения в методе регуляризации А.Н.Тихонова, а *параметр α есть параметр регуляризации* (поэтому мы его так и будем называть в дальнейшем).

Рассмотрим сначала случай $\alpha > 0$. Как легко заметить из (11), оператор $\mathcal{A}_\alpha$ является симметричным и положительно определённым в H_{ob}. Поэтому введём энергетическое пространство $H_{\mathcal{A}}$ оператора $\mathcal{A}_\alpha$ (как пополнение $D(B)$) со скалярным произведением $[u, u]_\alpha \equiv a_\alpha(u, v)$ и нормой $[u]_\alpha = [u, v]_\alpha^{1/2}$. Тогда уравнение (10) есть постановка задачи (11) в обобщённой форме. Согласно теории вариационных постановок задач (см. гл. 2, п. 1.5) уравнение (11) имеет *единственное обобщённое решение* $u \equiv u(\alpha) \in H_{\mathcal{A}}$ при $g \equiv (\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in H_{ob}$, $u_C \in X_C$, причём справедливы оценки

$$\begin{gathered} \alpha\|u\|^2_{X_C} + \|Au\|^2_{H_{ob}} \leq \alpha\|u_C\|^2_{X_C} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|_{H_{ob}} \\ \|u\|^2_{X_C} \leq \|u_C\|^2_{X_C} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|^2_{H_{ob}}/\alpha. \end{gathered} \tag{16}$$

Если окажется, что $u \in D(B)$, то можно ввести обычные решения ϕ, q первых двух уравнений из (13) (поскольку будем иметь $Bu \in Y^*$ и т.д.). Если же $u \notin D(B)$, то существует последовательность $\{u_n\}$ из $D(B)$, сходящаяся по норме $[\cdot]_\alpha$ к u. Для каждого u_n можно определить решения ϕ_n, q_n первых двух уравнений из (13), которые будут сходящимися в W, Y, соответственно, к некоторым элементам $\phi \in W$, $q \in Y$. В этом случае *тройку ϕ, q, u назовём обобщённым решением* системы (13). В силу единственности $u \in X_C$ обобщённое решение системы (13) также единственное.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = 0$. Обратимся сначала к задаче (1). Если она имеет решение, то $u \in D(B)$ является решением уравнения (2). Обратно, если (2) имеет решение $u \in D(B)$, то $\phi = L^{-1}(f + Bu)$ вместе с u есть решение задачи (1). Таким образом, при введённых условиях на операторы L, B, C задачи (1), (2) эквивалентны. Поэтому если уравнение (2) не имеет решения, то и задача (1) также не имеет решения.

Как отмечалось ранее, уравнение (12) является обобщённой постановкой задачи (2) в смысле наименьших квадратов. Если оказывается, что $g \equiv (\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(A)$, то существует (возможно, неединственное) решение $u \in D(B)$ уравнения $Au = g$ (а также и уравнения (12)), и можно определить элемент $\phi = L^{-1}(f + Bu)$, который вместе с u будет решением задачи (1). Среди таких решений u выделим элемент с наименьшей нормой, который вместе с соответствующим ему элементом назовём *нормальным решением* задачи (1).

Пусть теперь $g \notin R(A)$, однако выполнено условие вида

$$Q(\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}B), \qquad (17)$$

где Q — ортопроектор на $\overline{R(CL^{-1}B)}$. В этом случае уравнение (2) не имеет решения, в то время как (12) имеет. Решения уравнения (12) являются квазирешениями уравнения (2). Множество этих квазирешений обозначим U_*. Квазирешение из U_* с минимальной нормой называется псевдорешением, и его мы обозначим u^+. Итак, если выполнено условие (17), то (12) имеет решение $u \in U_*$. Но тогда данное решение удовлетворяет также уравнению $Au = Qg$ (см. гл. 2, п. 2.4). В силу (17) заключаем, что $u \in D(CL^{-1}B)$, а значит, по элементу u однозначно определяется $\phi = L^{-1}(f + Bu)$. *Пару* ϕ, u *назовём квазирешением задачи* (1). Если $u \equiv u^+$, то определяем $\phi^+ \equiv L^{-1}(f + Bu^+)$ *и пару* ϕ^+, u^+ *называем псевдорешением задачи* (1).

Если $Qg \notin \overline{R(CL^{-1}B)}$, то в силу представления $H_{ob} = \overline{R(A)} \oplus N(A^*)$ заключаем, что $g \in N(A^*)$, $Qg = 0$, а решением (2), (12) является любая функция $u \in (N(A^*A) = N(A))$, причём $u^+ = 0$.

Функционал $J_0(u) = \|Au - g\|^2_{H_{ob}}$ в рассмотренных выше случаях на решениях уравнения (12) принимает следующие значения:

1) $J_0(u) = 0$, если $g \in R(A)$;

2) $J_0(u) = \|g - Qg\|^2_{H_{ob}}$, если $Qg \in R(A)$;

3) $J_0(u) = \|g\|^2_{H_{ob}}$, если $Qg \notin \bar{R}(A)$.

Замечание. Можно рассмотреть также случай, когда $Qg \notin R(A)$, однако $Qg \in \bar{R}(A)$. Для определения решения задач (1), (2), (12) здесь необходимо ввести некоторые дополнительные предположения относительно операторов C, L, B и провести специальные построения, которые в практических задачах будут трудно реализуемыми. Поэтому мы ограничимся рассмотрением изложенного выше и в последующем будем часто вводить ограничение $g \in R(A)$ или ограничение (17). ■

§ 2. Некоторые условия разрешимости задач и единственности решений

Рассмотрим некоторые случаи рассматриваемых задач, когда имеет место разрешимость и единственность решений.

2.1. Условие единственности решений

Наряду с задачами (1), (2)

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \varphi_{ob} \tag{18}$$

$$Au = g, \quad A = CL^{-1}B, \quad g = \varphi_{ob} - CL^{-1}f. \tag{19}$$

сформулируем их обобщённые постановки:

$$L\phi = f + Bu, \quad J_0(u,\phi) = \inf_{v \in D(B)} J_0(v, \phi(v)), \tag{20}$$

$$A^*Au = A^*g, \tag{21}$$

где

$$J_0(u, \phi(u)) = \|C\phi(u) - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} = \|Au - g\|^2_{H_{ob}}.$$

Поскольку нуль-пространства операторов A, A^*A совпадают, то условия единственности решений задач (18)–(21) совпадают и имеют вид требования, чтобы $N(A) = \{0\}$. Но последнее условие в другой форме (которая и рассматривается при решении задач) имеет вид: решение ϕ, u системы

$$L\phi = Bu, \quad C\phi = 0 \tag{22}$$

является тривиальным. Итак, *если система* (22) *имеет только тривиальное решение: $\phi \equiv 0$, $u \equiv 0$, то каждая из задач* (18)–(21) *может иметь только единственное решение.*

Пример 1. Пусть Ω — ограниченная область из $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. $W = Y = H_0 = \dots = H_{ob} = L_2(\Omega)$. Рассмотрим задачу определения решения ϕ и функции источника u в задаче

$$L\phi \equiv -\Delta\phi = u, \quad \phi = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

если в Ω задана функция $\phi_{ob} \in L_2(\Omega)$ и дополнительное условие вида

$$\phi = \varphi_{ob} \ \text{ на } \ \Omega.$$

Здесь все пространства принимаются равными $L_2(\Omega)$, $D(L) = \{\phi : \phi \in C^{(2)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),\ \phi = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$, $B = C = I$ — тождественный оператор. Очевидно, что поскольку $\varphi_{ob} \in \in L_2(\Omega)$, то задачу определения u нельзя решать подстановкой φ_{ob} в уравнение состояния. Однако в данной задаче условие единственности решения имеет вид: задача $-\Delta\phi = u$ в Ω, $\phi = 0$ на $\partial\Omega$, $\phi = 0$ в Ω должна иметь тривиальное решение, что здесь является очевидным. ■

Пример 2. Рассмотрим задачу определения решения $\phi(t,x)$ параболического уравнения и начального условия $u(x)$ таких, что $\phi(t,x)$ в конечный момент времени принимала заданное состояние $\varphi_{ob}(x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial t} - \Delta\phi = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T \equiv (0,T) \times \Omega, \\ \phi = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad \phi = u \text{ при } t = 0, \\ \phi(T,x) = \varphi_{ob}(x), \end{cases}$$

где f — заданная функция из $L_2(Q_T)$, Ω — выпуклая область из $\mathbf{R}^n$, а функции u, φ_{ob} считаем из класса $L_2(\Omega)$.

Чтобы установить единственность возможных решений данной задачи: 1) примем в задаче $f \equiv 0$, $\varphi_{ob} \equiv 0$; 2) применим для решения возникающей задачи метод разложения по собственным функциям $\{\varphi_j\}$ задачи $-\Delta\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$, $\varphi_j = 0$ на $\partial\Omega$ $\|\varphi_j\|_{L_2(\Omega)} = 1$; 3) решение ϕ имеет вид $\phi = \sum\limits_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t}(u, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}\varphi_j(x)$. В силу условия $\phi(T,x) = 0$, ортогональности $\{\varphi_j\}$ и плотности этой системы функций в $L_2(\Omega)$ получаем $(u, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} = 0\ \forall j$, $u = 0$ и $\phi(t,x) = 0$. Итак, рассматриваемая задача может иметь не более одного решения. ■

2.2. Условия разрешимости задач

С учётом условия единственности $N(A) = \{0\}$ можно сформулировать также некоторые условия разрешимости рассматриваемых задач.

2.2.1. Предположим, что $D(B) = H_C$, оператор $A = CL^{-1}B$ является непрерывным, а его нуль-пространство тривиально: $N(A) = \{0\}$. Рассмотрим функционал $J_0(v) = \|Av - g\|^2_{H_{ob}}$. Этот функционал непрерывно дифференцируем, $F(v) \equiv \operatorname{grad} J_0(v) = 2A^*(Av - g)$, является строго выпуклым: $(u - v, F(u) - F(v))_{H_{ob}} = 2\|A(u - v)\|^2_{H_{ob}} > 0$ при $u \neq v$. Поскольку $N(A) = \{0\}$, то можно ввести пространство H_A как пополнение $D(B)$ по норме $[u] = \|Av\|_{H_{ob}}$. Справедлива оценка

$$(F(v), v)_{H_{ob}} = 2(Av - g, Av)_{H_{ob}} \geq 2[v]([v] - \|g\|_{H_{ob}}) =$$

$$= 2R(R - \|g\|_{H_{ob}}),\ R \equiv [v].$$

Выбирая $R > \|g\|_{H_{ob}}$, получаем $(F(v), v)_{H_{ob}} > 0$, и из теоремы 27 (гл. 2, § 3; см. там же пример 9) следует существование единственной внутренней точки u в шаре $[v] \leq R$, в которой функционал $J_0(v)$ имеет минимум. В этой точке выполняется уравнение Эйлера — уравнение (21). *В том случае, если* $g \equiv (\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}B)$, *то* u, $\phi = L^{-1}(f + Bu)$ *есть решение задачи* (18). *Если* $g \notin R(CL^{-1}B)$, *но* $Qg \in R(CL^{-1}B)$, *то* u, ϕ *есть квазирешение этой задачи.*

Если оператор $CL^{-1}B$ является вполне непрерывным, отличным от конечномерного, а пространство H_C бесконечномерно, то задача (18) является некорректной.

2.2.2. Рассмотрим теперь задачу (18) при ограничениях, которые могут выполняться во многих прикладных задачах.

Пусть оператор $A = CL^{-1}B$ непрерывен, $N(A) = \{0\}$ и $D(B) \equiv X_C^{(0)}$ — конечномерное подпространство из $X_C \subseteq H_C$ размерности $K < \infty$ с базисом $\varphi_k,\ k = 1, 2, \ldots, K$.

Оператор ортогонального проектирования в H_C на $X_C^{(0)}$ обозначим P_C.

Поскольку $P_C v = v \;\forall\, v \in X_C^{(0)}$, то функционал $J_0(v)$ можно записать в виде $J_0(v) = \|AP_C v - g\|^2_{H_{ob}}$. Этот функционал, как и в предыдущем разделе, является выпуклым, непрерывным, монотонным, а его производные есть

$$
\begin{aligned}
(J_0'(v), h_1) &= 2(AP_C v - g, AAP_C h_1)_{H_{ob}},\\
(J_0''(v)h_1, h_2) &= 2(AP_C h_1, AP_C h_2)_{H_{ob}},
\end{aligned}
$$

где h_1, h_2 можно считать произвольными элементами из X_C, поскольку $P_C h_1 \in X_C^{(0)}$, $P_C h_2 \in X_C^{(0)}$. Если $h \in X_C$, то элемент $P_C h$ представим в виде $P_C h = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k \varphi_k$ с некоторыми коэффициентами. Тогда

$$
(J_0''(v)h, h) = 2\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} a_k a_m (A\varphi_k, A\varphi_m)_{H_{ob}} \geq \gamma^2 \|P_C h\|_H^2,
$$

где $\gamma \equiv \gamma(K)$ — положительное (возможно, малое!) число, зависящее от K, но не от h. Последнее соотношение следует из тривиальности нуль-пространства оператора A, линейной независимости системы $\{A\varphi_k\}$ и свойств симметричных положительно определённых матриц с элементами $\{(A\varphi_k, A\varphi_m)_{H_{ob}}\}$, $(\varphi_k, \varphi_m)_{H_C}$. Выполнение этого соотношения вместе с уравнением Эйлера

$$
P_C A^*(AP_C u - g) = 0 \tag{23}
$$

даёт нам достаточные условия того, что решение u уравнения (22) сообщает минимальное значение функционалу $J_0(u)$. В свою очередь, из этого заключаем: *при выполнении сделанных выше ограничений задача* (18) *имеет единственное решение $\phi \in W$, $u \in X_C^{(0)}$; если $(\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}BP_C)$, то ϕ, u — обычное решение* (18), *если $Q(\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}BP_C)$, то ϕ, u — квазирешение.*

Отмечаем также, что *если $N(CL^{-1}B) = \{0\}$, а число K конечно, то задача* ((20), (21)) *здесь является корректно поставленной* (в силу ограниченности обратного оператора в уравнении (23)), даже если оператор $A = CL^{-1}B$ является вполне непрерывным.

2.2.3. Рассмотрим теперь семейство задач оптимального управления (3):

$$L\phi = f + Bu, \quad J_\alpha(u, \phi(u)) = \inf_{v \in D(B)} J_\alpha(v, \phi(v)), \tag{24}$$

где $\alpha > 0$, $D(B) = X_C$, а функционал J_α есть

$$J_\alpha(v, \phi(v)) = \alpha \|v - u_C\|^2_{X_C} + \|C\phi(v) - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} =$$

$$= \alpha \|v - u_C\|^2_{X_C} + \|Av - g\|^2_{H_{ob}} \equiv J_\alpha(v).$$

Необходимое условие минимума $J_\alpha(u)$ имеет вид

$$(J'_\alpha(u), v) = 2\alpha(\Lambda_C(u - u_C), v)_{H_C} + 2(A^*(Au - g), v)_{H_C} = 0 \quad \forall\, v \in X_C,$$

откуда, в силу плотности X_C в H_C, получаем вариационное уравнение (6)

$$\mathcal{A}_\alpha u = g_\alpha, \tag{25}$$

где

$$\mathcal{A}_\alpha = \alpha\Lambda_C + A^*A, \quad A + CL^{-1}B,$$
$$g_\alpha = A^*g + \alpha\Lambda_C u_C, \quad g = \varphi_{ob} - CL^{-1}f.$$

Оператор $\mathcal{A}_\alpha$ является симметричным и положительно определённым:

$$(\mathcal{A}_\alpha u, v) = (u, \mathcal{A}_\alpha v)_{H_C}, \quad (\mathcal{A}_\alpha u, u) \geq \alpha\|u\|^2_{H_C},\ \forall\, u, v \in X_C.$$

А поскольку $(J''_\alpha(u)v, v) = 2(\mathcal{A}_\alpha v, v)_{H_C}$, то заключаем, что если некоторый элемент $u \in X_C$ удовлетворяет уравнению (25), то u вместе с $\phi \equiv L^{-1}(f + Bu)$ есть решение экстремальной задачи (24), т.к. в данном случае уравнение (25) является также достаточным условием того, что u, ϕ являются решением (24).

Существование единственного *обобщённого решения* $u \equiv \equiv u(\alpha)$ уравнения (25) при $\forall\, g \in H_{ob}$, $u_C \in X_C$ установлено в п. 1.4. Это решение удовлетворяет равенству (10), и справедлива оценка

$$\alpha\|u\|^2_{X_C} + \|Au\|^2_{H_{ob}} \le \alpha\|u_C\|^2_{X_C} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|^2_{H_{ob}}.$$

На основе $u \in X_C$ определяем $\phi \equiv L^{-1}(f + Bu)$, $g \equiv \equiv L^{-1}C^*(C\phi - \varphi_{ob})$, которые являются решением системы (13):

$$\left\{\begin{array}{c} L\phi = f + Bu \\ L^*q = C^*(C\phi - \varphi_{ob}) \\ \alpha\Lambda_C u + B^*q = \alpha\Lambda_C u_C. \end{array}\right. \tag{26}$$

Итак, *если* $g \in H_{ob}$, $u_C \in X_C$, $\alpha > 0$, *система* (26) (*задача*(24)) *имеет единственное обобщённое решение* $\phi \in W$, $q \in Y$, $u \in X_C$, при этом справедливы оценки вида

$$\|\phi\|^2_W \le c \cdot (\|f\|^2_{Y^*} + \|Bu\|^2_{Y^*}) \le c \cdot (\|f\|^2_{Y^*} + \|u\|^2_{H_C});$$

$$\begin{aligned} \|q\|^2_Y \le c \cdot \|C\phi - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} = c\|Au - g\|^2_{H_{ob}} \le \\ \le c \cdot \left(\alpha\|u_C\|^2_{X_C} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|^2_{H_{ob}}\right); \end{aligned} \tag{27}$$

$$\alpha\|u\|^2_{X_C} + \|Au\|^2_{H_{ob}} \le \alpha\|u_C\|^2_{X_C} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|^2_{H_{ob}},$$

где $c = const > 0$. Если первое уравнение из (26) умножить скалярно в H_0 на q и из результата вычесть результат скалярного умножения в H_0 второго уравнения из (26) на ϕ, то после простых вычислений с учётом третьего уравнения из (26) получаем неравенство

$$\|C\phi\|^2_{W^*} + \alpha\|u\|^2_{X_C} \le c \cdot (\|\varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} + \alpha\|u_C\|^2_{X_C} + \|f\|^2_{Y^*}), \tag{28}$$

где постоянная c не зависит от α.

2.2.4. Основной проблемой в изучаемых задачах является проблема сходимости решений $\phi_\alpha \equiv \phi(\alpha)$, $u_\alpha \equiv u(\alpha)$ системы (26) к решению задачи (18), которую ниже будем обозначать ϕ_0, u_0 для случая непрерывного оператора A.

Изучение проблемы начнём с уравнений (21),(25). Пусть сначала $\Lambda_C \equiv I$, а $g \in R(A)$. Тогда оператор $R_\alpha = (\alpha I + A^* A)^{-1} A^*$ является регуляризатором, и из теории некорректных задач ([9, 22, 49]; см. также гл. 2, п. 2.5) известно, что $\|u_\alpha - u_0\|_{H_C} \to 0$ при $\alpha \to +0$, где u_0 — нормальное решение уравнения $Au = g$. Если же $Qg \in R(A)$ (напомним, что Q — ортопроектор на $\overline{R(A)}$), то $\|u_\alpha - u_0^+\|_{H_C} \to 0$, $\alpha \to +0$, где u_0^+ — псевдорешение уравнения $Au = g$, т.е. решение уравнения (21) с минимальной нормой.

Элементы u_α, u_0 однозначно определяют ϕ_α, ϕ_0 — решения первых уравнений из (18), (26). Из первого неравенства (27) получаем: $\|\phi_\alpha - \phi_0\|_W \to 0$ или $\|\phi_\alpha - \phi_0^+\|_W \to 0$ при $\alpha \to +0$.

Сходимость невязки $Au_\alpha - g = C\phi_\alpha - \varphi_{ob}$ устанавливается на основе сингулярного разложения оператора A (см. гл. 2, п. 2.4):

$$\|C\phi_\alpha - g\|^2_{H_{ob}} = \|Au_\alpha - g\|^2_{H_{ob}} = \|A(\alpha I + A^*A)^{-1}A^*g - g\|^2_{H_{ob}} =$$

$$= \|AA^*(\alpha I + AA^*)^{-1}g - g\|^2_{H_{ob}} = \alpha\|(\alpha I + AA^*)^{-1}g\|^2_{H_{ob}} =$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(g, g_k)^2}{(\alpha + \sigma_k^2)^2} \to 0, \quad \alpha \to +0.$$

При $g \in R(A)$ сходимость невязки к нулю есть следствие сходимости $u_\alpha \to u_0$ и ограниченности A:

$$\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} = \|Au_\alpha - g\|_{H_{ob}} = \|A(u_\alpha - u_0)\|_{H_{ob}} \le$$

$$\le \|A\|\|u_\alpha - u_0\|_{H_{ob}} \to 0, \quad \alpha \to +0.$$

При дополнительных ограничениях на u_0 можно получить оценки скорости. Так, если $\|u_0\|_{H_C} \le C_0 = const < \infty$, то из (21), (25) легко получаем следующее равенство (напомним, что рассматривается случай $\Lambda_C \equiv I$):

$$\alpha\|u-u_0\|^2_{H_C} + \|A(u-u_0)\|^2_{H_{ob}} = -\alpha(u_0, u-u_0)_{H_C}.$$

Из этого соотношения после оценки правой части по неравенству Коши-Буняковского имеем (учитывая то, что $Au_0 = Qg$):

$$\alpha\|u_\alpha-u_0\|^2_{H_C} + 2\|A(u_\alpha-u_0)\|^2_{H_{ob}} \le \alpha\|u_0\|^2_{H_C} \le \alpha C_0^2,$$

$$\|Au_\alpha - Qg\|^2_{H_{ob}} = \|Au_\alpha - g\|^2_{H_{ob}} - \|g\|^2_{H_{ob}} + \|Qg\|^2_{H_{ob}}, \qquad (29)$$

$$\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} = \|Au_\alpha - g\|^2_{H_{ob}} \le \|g\|^2_{H_{ob}} - \|Qg\|^2_{H_{ob}} + \alpha C_0^2,$$

где $g = \varphi_{ob} - CL^{-1}f$. Если $g \in R(A)$, то получаем

$$\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le \sqrt{\alpha}\cdot C_0. \qquad (30)$$

Отметим, что если $\|u_0\|_{H_C} \le C_0$*, то из первого соотношения*(29) *следует также, что* $\|u_\alpha\|_{H_C} < C_0 \;\forall\, \alpha > 0$.

Пример 3. Предположим, что $R(A) = \overline{R(A)}$, тогда псевдообратный оператор A^+ ограничен. Поэтому $\|u_0\|_{H_C} = \|A^+g\|_{H_C} \le \|A^+\|\,\|g\|_{H_{ob}} \le C\|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|_{H_{0b}} \equiv C_0 < \infty$.

Если вводить дополнительные ограничения на u_0 (а значит, и на $g \equiv \varphi_{ob} - CL^{-1}f$), то можно получить ряд других оценок скорости сходимости. Однако необходимо обратить внимание, что в классе задач, рассматриваемых нами, очень часто элементы $\varphi_{ob}, \ldots, f$ известны приближённо. Поэтому чрезмерные предположения о гладкости элементов $u_0, g, \ldots, \varphi_{ob}$ редко выполняются при решении практических задач.

Перейдём теперь к случаю, когда $\Lambda_C \not\equiv I$. Если ввести $\tilde u_\alpha \equiv \Lambda_C^{1/2}u_\alpha$, $\tilde w \equiv \Lambda_C^{1/2}w$, то уравнение (10) примет вид

$$\alpha(\tilde u_\alpha, \tilde w)_{H_C} + (A\Lambda_C^{-1/2}\tilde u_\alpha, A\Lambda_C^{-1/2}\tilde w)_{H_{ob}} =$$

$$= (g, A\Lambda_C^{-1/2}\tilde w)_{H_{ob}} + \alpha(\Lambda_C^{-1/2}u_C, \tilde w)_{H_C} \;\forall\, \tilde w \in H_C.$$

Одновременно, вместо уравнения $Au_0 = g$ будем рассматривать уравнение $A\Lambda_C^{-1/2}\tilde{u}_0 = g$, где *непрерывным считать будем оператор* $\tilde{A} \equiv A\Lambda_C^{-1/2}$ (хотя уже формально допускается, что каждый из операторов $A, \Lambda_C^{1/2}$ может быть неограниченным!). Таким образом, случай $\Lambda_C \not\equiv I$ сводится к случаю $\Lambda_C = I$. Переформулируя полученные ранее $\tilde{u}_\alpha = \Lambda_C^{1/2} u_\alpha, \ldots, \phi_\alpha$, заключаем, что если $(\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}B\Lambda_C^{-1/2})$, то $u_0, u_\alpha \in X_C$, а также

$$\|u_\alpha - u_0\|_{X_C} \to 0, \ \|\phi_\alpha - \phi_0\|_W \to 0, \ \|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \to 0 \quad (31)$$

$$\text{при } \alpha \to +0,$$

где u_0 — нормальное решение уравнения $Au = g$. Если $\|u_0\|_{X_C} \le C_0 < \infty$, то $\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le \sqrt{\alpha} \cdot C_0$.

Аналогичные утверждения имеют место и для псевдорешения u_0^+, ϕ_0^+ (вместо u_0, ϕ_0), если $Q(\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(A\Lambda_C^{-1/2})$, где Q — оператор ортогонального проектирования на $\overline{R(A\Lambda_C^{-1/2})}$.

Сформулируем некоторые из приведённых выше утверждений в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть операторы L, B, C таковы, что оператор $A \equiv CL^{-1}B$ непрерывен, и пусть $g \equiv \varphi_{ob} - CL^{-1}f \in H_{ob}$. Тогда:*

1) *Если система* (22) *имеет только тривиальное решение, то нуль-пространство $N(A)$ оператора $A \equiv CL^{-1}B$ тривиально и каждая из задач* (18)–(21) *может иметь не более одного решения.*

2) *Если $g \in R(A)$, то множество решений задачи* (18) *непусто; если же $Qg \in R(A)$, где Q — оператор ортогонального проектирования на $\overline{R(A)}$, то множество U_* квазирешений задачи* (18) *непусто.*

3) *Если $N(A) = \{0\}$ и $D(B) = X_C^{(0)}$ — конечномерное подпространство из $X_C \subseteq H_C$, то задача* (20) *имеет единственное решение и является корректно поставленной.*

4) *Система вариационных уравнений* (26) *задачи* (24) *при любом* $\alpha > 0$ *имеет единственное решение* $(\phi_\alpha, q_\alpha, u_\alpha) \in$ $\in W \times Y \times X_C$, *для которого справедливы оценки* (27), (28). *Пары* (ϕ_α, u_α) *при* $\alpha \to +0$ *сходятся к нормальному решению* ϕ_0, u_0 *задачи* (18) *при* $g \in R(A\Lambda_C^{-1/2})$ *и к псевдорешению* ϕ_0^+, u_0^+ *при* $Qg \in R(A\Lambda_C^{-1/2})$, *где* Q — *ортопроектор на* $\overline{R(A\Lambda_C^{-1/2})}$, *и справедливы соотношения* (31).

5) *Если* $\|u_0\|_{H_C} \le C_0 < \infty$ *и* $g \in R(A)$, *то справедлива также оценка* (30). ■

Одним из основных следствий из данной теоремы является следующее: если при выполнении соответствующих ограничений имеют место соотношения (31), то, выбрав достаточно малым, но положительным параметр регуляризации α, можно принять пару (ϕ_α, u_α), ходящую в решение системы (26), в качестве приближённого решения исходной задачи (18). И, если теперь подходящим итерационным процессом построим приближения $\phi_\alpha^k, u_\alpha^k$ к ϕ_α, u_α, то $\phi_\alpha^k, u_\alpha^k$ будут также приближениями к решению задачи (18).

§ 3. Условие плотной ("аппроксимативной") разрешимости задач

Плотная разрешимость задач является важным понятием при изучении многих прикладных проблем, особенно тех, в которых исходные данные задач известны приближённо.

3.1. Условие плотной разрешимости

Пусть рассматривается задача об отыскании ϕ, u таких, что

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \varphi_{ob} \tag{32}$$

и уравнение для u

$$Au = g, \tag{33}$$

где $A = CL^{-1}B$ есть непрерывный оператор, $g = \varphi_{ob}$ –

$CL^{-1}f$, f — заданный элемент из Y^*, а φ_{ob} — элемент из H_{ob}, который в общем случае (как и элемент g) не принадлежит $R(A)$ — области значений оператора . Поэтому, вообще говоря, задачи (32), (33) не имеют "обычных"решений. Однако эти задачи могут быть плотно разрешимы.

Определение 1. Задача (32) называется *плотно разрешимой*, если для любого заданного $\varphi_{ob} \in H_{ob}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $u_\delta \in D(B)$, что для решения $\phi_\delta = L^{-1}(f + Bu_\delta)$ первого уравнения из (32) при $u \equiv u_\delta$ имеем $\|C\phi_\delta - \varphi_{ob}\|_{H)_{ob}} \leq \varepsilon$.

Обратим внимание, что мы говорим о плотной разрешимости задачи (32) только по отношению к правой части φ_{ob} второгоуравнения из (32), считая первое уравнение из (32) везде разрешимым в Y^* (хотя определение плотной разрешимости можно сформулировать для системы (32) в целом, т.е. по отношению к обоим элементам f, φ_{ob}, когда оно будет классическим определением плотной разрешимости (32)).

Переформулируем приведённое определение в применении к уравнению (33). Замечаем, что

$$\|C\phi_\delta - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} = \|Au_\delta - g\|_{H_{ob}} = \|g_\delta - g\|_{H_{ob}},$$

где $g = (\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in H_{ob}$, $g_\delta \equiv Au_\delta \in R(A)$, поскольку $u_\delta \in D(A) = D(B)$. Поэтому приведённое определение означает, что *если $g \in H_{ob}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $g_\delta \in R(A)$ такой, что $\|g_\delta - g\|_{H_{ob}} \leq \varepsilon$.* Однако данная формулировка означает, что плотная разрешимость имеет место, если $\overline{R(A)} = H_{ob}$, что является общепринятым определением плотной разрешимости уравнения (33) ([26], см. также п. 2.2, гл. 2). Поэтому в дальнейшем будем придерживаться данной терминологии. Отметим также, что плотную разрешимость можно назвать "приближённой разрешимостью", а в задачах управления её называют "приближённой управляемостью"("аппроксимативной управляемостью"), поскольку в этих задачах неизвестная u является управлением.

Формулировка плотной разрешимости задачи (32) к уравнению (33) даёт возможность сформулировать условие плотной разрешимости на основе тривиальности нуль-пространства $N(A^*) \equiv \ker(A^*)$ оператора A^*, сопряжённого к A. Действительно, поскольку из теории операторных уравнений в гильбертовых пространствах известно, что $H_{ob} = \overline{R(A)} \oplus N(A^*)$ (см. теоремы 11, 12 из § 1, § 2 гл. 2), то заключаем: *плотная разрешимость уравнения* (33) (*и задачи* (32)) *имеет место, если и только если* $N(A^*) = \{0\}$. Следовательно, плотная разрешимость рассматриваемых задач имеет место, если $N(A^*) = \{0\}$, что приводит к следующему условию: *плотная разрешимость задачи* (32) *имеет место тогда и только тогда, когда однородная система сопряжённых уравнений вида*

$$L^*q = C^*w, \quad B^*q = 0 \tag{34}$$

имеет только тривиальное решение $q = 0,\ w = 0$.

Частной реализацией сформулированного выше определения плотной разрешимости (32) является следующее.

Пусть $\varphi_{ob}^{(0)}$ — некоторый элемент из H_{ob}, а $U(\varphi_{ob}^{(0)};\delta)$ есть шар в H_{ob} с центром в $\varphi_{ob}^{(0)}$: $U(\varphi_{ob};\delta) = \{\varphi_{ob} \in H_{ob} : \|\varphi_{ob}^{(0)} - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \leq \delta\}$, где $\delta > 0$.

Определение 2. Задача (32) называется *плотно разрешимой*, если для любого $\varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)};\delta)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $u_\delta \in D(B)$ такой, что $\|C\phi_\delta - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \leq \varepsilon$, где $\phi_\delta = L^{-1}(f + Bu_\delta)$.

В отличие от первого определения в определении 2 конкретизируется множество элементов $\{\varphi_{ob}\}$, для которых рассматривается задача (32). В ряде прикладных задач такая конкретизация может быть обусловлена рассматриваемой задачей, например: если $\varphi_{ob}^{(0)}$ есть некоторый заданный элемент, а $\varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)};\delta)$ является реально наблюдаемым (измеряемым) элементом с точностью δ. Заметим также, что элементы $\varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)};\delta)$ даже могут быть неизвестными. В этом случае, если будут построены $u_\delta,\ \phi_\delta = L^{-1}(f + Bu_\delta)$ такие, что $\|C\phi_\delta - \varphi_{ob}^{(0)}\|_{H_{ob}} \leq \varepsilon$, то

$$\begin{gathered}\|C\phi_\delta - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \leq \\ \leq \|C\phi_\delta - \varphi_{ob}^{(0)}\|_{H_{ob}} + \|\varphi_{ob}^{(0)} - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \leq \varepsilon + \delta \equiv \varepsilon_1 \\ \forall\, \varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)}; \delta),\end{gathered} \tag{35}$$

т.е. решение ϕ_δ, u_δ задачи (32), построенное на основе знания лишь элемента $\varphi_{ob}^{(0)}$ и точности наблюдений δ может быть принято в качестве приближённого решения рассматриваемой задачи при любом $\varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)}; \delta)$, если ε, δ достаточно малы.

Итак, для установления плотной разрешимости задачи (32) достаточно показать, что задача (34) имеет только тривиальное решение. Изучение данной задачи осуществляется в каждом конкретном случае с привлечением операторов вида $L, \ldots, C^*$ и необходимых сведений из теории краевых задач. Иногда тривиальность решения задачи (34) доказывается совсем просто.

Пример 1. Пусть рассматривается задача из примера 1 п. 2.1 предыдущего параграфа. Тогда задача (34) будет иметь вид

$$L^*q \equiv -\Delta q = w \ \text{ в } \ \Omega, \ q = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \ B^*q \equiv q = 0 \ \text{ в } \ \Omega.$$

Очевидно, что она имеет только тривиальное решение $q = 0,\ w = 0$. А значит, некорректная задача из примера 1 п. 2.1 является плотно разрешимой: для любой заданной функции $\varphi_{ob}(x) \in L_2(\Omega)$ можно подобрать классическое решение задачи $-\Delta\phi_\delta = u_\delta$ в Ω, $\phi_\delta = 0$ на $\partial\Omega$ такое, что $\|\phi_\delta - \varphi_{ob}\|_{L_2\Omega} \leq \varepsilon$ для любого заданного $\varepsilon > 0$. ■

Пример 2. Рассмотрим задачу из примера 2 п. 2.1 предыдущего параграфа. Можно показать, что задача (34) здесь имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial t} - \Delta q = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \\ q = 0, \ \text{на} \ \ \partial\Omega, \ q(0,x) = 0, \\ q(T,x) = w(x), \end{cases}$$

Тем же способом, что и в примере 2 из п. 2.1 устанавливается, что $q = 0$, $w = 0$, т.е. задача из примера 2 из п. 2.2 плотно разрешима (при $\varphi_{ob} \in L_2(\Omega)$ она может не иметь решения, а значит, является некорректной). ■

3.2. Решения системы вариационных уравнений в задаче о плотной разрешимости

Рассмотрим семейство задач оптимального управления (24) и соответствующую систему вариационных уравнений (26) при $\alpha > 0$. Для любого $\varphi_{ob} \in H_{ob}$ и $\alpha > 0$ эта система имеет единственное решение $(\phi_\alpha, q_\alpha, u_\alpha) \in W \times Y \times X_C$ и справедливы оценки (27), (28). Покажем, что при достаточно малом α пара ϕ_α, u_α может быть принята в качестве приближённого решения задачи (32) в том смысле, что будет удовлетворять уравнению $L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha$; при этом будем иметь $\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le \varepsilon$ для любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$, т.е. пара ϕ_α, u_α решает проблему о плотной разрешимости (32).

Лемма 1. *Пусть заданы $\varphi_{ob} \in H_{ob}$, $f \in Y^*$, $\varepsilon > 0$. Тогда если задача* (32) *плотно разрешима, то существуют $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$ такие, что для пары ϕ_α, u_α, входящей в решение системы* (26), *имеют место соотношения*

$$L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \quad \|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le \varepsilon \tag{36}$$

при любом положительном $\alpha \le \alpha_0$.

Доказательство. Пусть $\overline{D(B)} = X_C$ или $D(B) = X_C$. Поскольку ϕ_α, u_α есть единственная критическая точка функционала $J_\alpha(v, \phi(v))$, то $J_\alpha(u_\alpha, \phi(u_\alpha)) \le J_\alpha(w, \phi(w))$

$\forall\, w \in D(B)$. Поскольку задача (32) предполагается плотной разрешимой, то $N(A^*) = \{0\}$, $\overline{R(A)} = H_{ob}$ и существует $w \in D(B)$ такой, что

$$\|C\phi(w) - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} = \|Aw - g\|^2_{H_{ob}} \leq \varepsilon_1$$

для заданного $\varepsilon_1 > 0$. Тогда

$$J_\alpha(u_\alpha, \phi(u_\alpha)) \leq \alpha\|w - u_C\|^2_{X_C} + \varepsilon_1.$$

Фиксируем ε_1, w и выбираем $\alpha = \alpha_0$ достаточно малым, чтобы $\alpha\|w - u_C\|^2_{X_C} \leq \varepsilon_1$. В этом случае имеем

$$\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} \leq J_\alpha(u_\alpha, \phi(u_\alpha)) \leq 2\varepsilon_1.$$

Считая $\varepsilon \equiv (2\varepsilon_1)^{1/2}$, получаем (36).

Соотношения (36) будут иметь место при любом положительном $\alpha \leq \alpha_0$, поскольку согласно теории метода регуляризации А.Н.Тихонова (см. п. 4.3, гл. 2) имеем

$$\|C\phi_{\alpha_1} - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} = \|Au_{\alpha_1} - g\|_{H_{ob}} \leq \|Au_{\alpha_2} - g\|_{H_{ob}} =$$
$$= \|C\phi_{\alpha_2} - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}}$$

при $\alpha_1 \leq \alpha_2$, что завершает доказательство утверждений леммы. ■

Замечание. Если предположить, что $N(A) = \{0\}$, то в дополнение к утверждениям леммы имеет место монотонное убывание величины $\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}}$ при $\alpha \to +0$. Кроме того, можно сделать заключение, что если задача (32) имеет решение ϕ_0, u_0, то $\phi_0 \neq \phi_\alpha$, $u_0 \neq u_\alpha$ при $\forall\, \alpha > 0$. Эти утверждения также следуют из поведения функционала J_α и его составляющих в зависимости от параметра α (см. п.4.3, гл.2). ■

Пусть теперь φ_{ob} принадлежит шару $U(\varphi^{(0)}_{ob}; \delta)$. Справедливо следующее следствие.

Следствие. Если выполнены условия леммы 1 для любого $\varepsilon > 0$, существует $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$ такое, что для решений ϕ_α, u_α системы (26) при любом $\varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)}; \delta)$ имеет место оценка

$$\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \leq \varepsilon + \delta \tag{37}$$

при $0 < \alpha \leq \alpha_0$. Если $\varphi_{ob}^{(0)} \in R(A\Lambda_C^{-1/2})$ и ϕ_0, u_0 есть решение задачи (32) при $\varphi_{ob} \equiv \varphi_{ob}^{(0)}$, причём $\|u_0\|_{X_C} \leq C_0 < \infty$, то также

$$\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \leq C_0\sqrt{\alpha} + \delta. \tag{38}$$

Сформулируем установленные выше утверждения в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть операторы L, B, C, Λ_C таковы, что оператор $A \equiv A\Lambda_C^{-1/2}$ непрерывен, а задача* (32) *рассматривается при $f \in Y^*$, $\varphi_{ob} \in H_{ob}$. Тогда:*

1. *Задача* (32) *плотно разрешима тогда и только тогда, когда система* (34) *имеет только тривиальное решение.*

2. *Если задача* (32) *плотно разрешима, а ϕ_α, q_α есть решение системы вариационных уравнений* (26) *при $\varphi_{ob} \in H_{ob}$, то для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$, что имеют место соотношения* (36) *при $0 < \alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$; если $N(A) = \{0\}$, то также $\|C\phi_{\alpha_1} - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} < \|C\phi_{\alpha_2} - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}}$ при $\alpha_1 < \alpha_2$.*

3. *Если ϕ_0, u_0 есть нормальное решение задачи* (32) *при $\varphi_{ob} \equiv \varphi_{ob}^{(0)} \in R(CL^{-1}B\Lambda_C^{-1/2})$, причём $\|u_0\|_{X_C} \leq C_0 < \infty$, а $\phi_\alpha, q_\alpha, u_\alpha$ есть решение* (26) *при $\varphi_{ob} \in U(\varphi_{ob}^{(0)}; \delta)$, то справедлива оценка* (38).

Из теоремы 2 можно сделать следующее заключение: если задача (32) плотно разрешима, то в качестве приближённого решения этой задачи снова (как и в предыдущем параграфе) можно брать решения системы (26), если только параметр регуляризации α положителен, но достаточно мал; для исследования плотной разрешимости задачи (32) достаточно установить, тривиально ли решение системы сопряжённых уравнений (34). Обратим внимание, что при наличии плотной разрешимости (32) можно утверждать о малости невязки $(C\phi_\alpha - \varphi_{ob})$, тогда как в предыдущем параграфе обсуждается в первую очередь величина ошибки $(u_\alpha - u_0)$. И если какой-либо итерационной процедурой будет построено приближённое решение $\phi_\alpha^k, q_\alpha^k, u_\alpha^k$, то пара $\phi_\alpha^k, u_\alpha^k$ может быть снова принята за приближённое решение задачи (32).

§ 4. Условие корректной разрешимости задачи

Задача (32) может оказаться корректно разрешимой относительно обоих неизвестных ϕ, u. Рассмотрим некоторые условия корректной разрешимости (32), изучая для простоты лишь случай, когда $\Lambda_C = I$, $X_C = H_C$, а также $\overline{D(B)} = H_C$, или $D(B) = H_C$, или $D(B) = H_C^{(0)}$ — подпространство из H_C.

4.1. Корректная разрешимость

Рассмотрим задачу (32) и уравнение (33). Предположим, что операторы L, B, C такие, что при некоторой системе пространств $W, \ldots, H_{ob}$ имеет место неравенство

$$C_0\|v\|_{H_C}^2 \leq \|CL^{-1}Bv\|_{H_{ob}}^2 \quad \forall\, v \in D(B), \tag{39}$$

где постоянная $C_0 > 0$ не зависит от v. Тогда из теории операторных уравнений (см. п. 2.2 из § 2, гл. 2) уравнение (33) корректно разрешимо при любом $g \equiv (\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in$ $\in R(CL^{-1}B)$, причём

$$\|u\|_{H_C} \leq C\|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|_{H_{ob}} \tag{40}$$

где $C = 1/\sqrt{C_0}$. Следовательно, если $g \in R(A)$, где $A \equiv$ $\equiv CL^{-1}B$, то уравнение $Au = g$ корректно разрешимо и справедлива оценка (40). В силу ограничений на оператор L уравнение $L\phi = f + Bu$ также корректно разрешимо, и также имеем неравенство

$$\|\phi\|_W \leq C(\|f\|_{Y^*} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|_{H_{ob}}). \tag{41}$$

Итак, *при* $g \in R(A)$ *задача* (32) *корректно разрешима и для решения* ϕ, u *справедливы оценки* (40), (41).

Если g есть элемент из H_{ob} (вообще говоря, не принадлежащий $D(B)$), то задача (32) имеет единственное обобщённое решение $u \in H_C$, $\phi = \phi(u) \in W$ такое, что

$$\|\phi\|_W + \|u\|_{H_C} \leq C(\|f\|_{Y^*} + \|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|_{H_{ob}}), \qquad (42)$$

где $C = const > 0$. Здесь u есть обобщённое решение уравнения $A^*Au = A^*g$, удовлетворяющее равенству

$$(Au, Aw)_{H_{ob}} = (g, Aw)_{H_{ob}} \quad \forall\, w \in H_C, \qquad (43)$$

где A есть замыкание оператора $CL^{-1}B$ на H_C, $H_{ob} = \overline{R(A)}$, $H_C = \overline{R(A^*)}$ и $N(A) = N(A^*) = \{0\}$. Если $g \in R(CL^{-1}B)$, то обобщённое решение ϕ, u совпадает с классическим решением задачи (32).

4.2. Сходимость регуляризированных решений

Если постоянная C_0 в (39) достаточно мала, то в этом случае может оказаться целесообразным отыскивать решения u_α регуляризированного уравнения

$$\alpha\, u_\alpha + A^*A\, u_\alpha = A^*g \qquad (44)$$

с малым положительным параметром α. При подходящем выборе этого параметра элементы u_α, $\phi_\alpha = L^{-1}(f + Bu_\alpha)$ могут быть приближениями приемлемой точности к решению (классическому или обобщённому) задачи (32), которые будем обозначать u_0, ϕ_0. Чтобы оценить допускаемые при этом погрешности, рассмотрим уравнение (44) при $\alpha = 0$

$$A^*A\, u_0 = A^*g. \qquad (45)$$

Теперь из (44), (45) получаем оценку (см., например, § 2 данной главы)

$$\alpha\|u_\alpha - u_0\|^2_{H_C} + 2\|Au_\alpha - g\|^2_{H_{ob}} \leq \alpha\|u_0\|^2_{H_C}.$$

Отсюда с привлечением (40) имеем

$$
\begin{aligned}
&\alpha\|u_\alpha - u_0\|^2_{H_C} + \|Au_\alpha - g\|^2_{H_{ob}} \le \frac{\alpha}{C_0}\,\|g\|^2_{H_{ob}},\\
&\|C\phi_\alpha - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}} \le \frac{\alpha}{C_0}\,\|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|^2_{H_{ob}},
\end{aligned}
\tag{46}
$$

где u_α, ϕ_α — пара, входящая в решение $\phi_\alpha, q_\alpha, u_\alpha$ системы вариационных уравнений (которая эквивалентна уравнению (44)):

$$
\begin{cases}
L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha,\\
L^* q_\alpha = C^*(C\phi_\alpha - \varphi_{ob}),\\
\alpha\, u_\alpha + B^* q_\alpha = 0.
\end{cases}
\tag{47}
$$

Для разности $(\phi_\alpha - \phi_0)$ справедлива оценка

$$
\|\phi_\alpha - \phi_0\|^2_W \le C\frac{\alpha}{C_0}\,\|\varphi_{ob} - CL^{-1}f\|^2_{H_{ob}},
\tag{48}
$$

где постоянная C не зависит от α.

Сформулируем некоторые из полученных выше утверждений в виде следующей теоремы

Теорема 3. *Пусть операторы L, B, C и выбранная система пространств $W, \ldots, H_{ob}$ таковы, что справедлива априорная оценка* (39). *Тогда задача* (32) *является корректно разрешимой. Если $g \equiv (\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}B)$, то* (32) *имеет единственное решение ϕ, u, для которого справедлива оценка* (42). *Если же $g \in H_{ob}$, то ϕ, u — обобщённое решение задачи* (32), *для которого также справедлива оценка* (42).

4.3. О приближённом решении задач

Как отмечалось в первом и втором параграфах данной главы, если $D(B) = H_C^{(0)}$ есть конечномерное подпространство из H_C размерности $K < \infty$, то оценка (39) может оказаться выполненной при условии $N(A) = \{0\}$, но с постоянной $C_0 = C_0(K) > 0$, которая в общем случае может быть сколь угодно малой при $K \to \infty$ (например, если $A = CL^{-1}B$ вполне непрерывен). Это обстоятельство является полезным при приближённом решении рассматриваемых здесь задач. Рассмотрим один из возможных здесь подходов, когда неизвестное u ищется в конечномерном подпространстве $H_C^{(0)}$ размерности K с некоторым базисом $\varphi_k, k = 1, \ldots, K$.

Пусть выполнены следующие предположения:
1) $N(A) = \{0\}$, A — непрерывен и задача (32) имеет единственное решение ϕ_0, u_0, причём $u_0 \in X_C \subset H_C^{(0)}$, где X_C — некоторое пространство, непрерывно и плотно вложенное в H_C; 2) при $u_0 \in X_C$ справедлива оценка аппроксимации вида

$$\inf_{v \in H_C^{(0)}} \|u_0 - v\|_{H_c} \le \varepsilon(K)\|u_0\|_{X_C} \to 0,\ K \to \infty, \tag{49}$$

где $\varepsilon(K)$ — оценка погрешности (обратим внимание, что оператор $A = CL^{-1}B$ может быть здесь вполне непрерывен). Будем искать приближённое решение $\tilde{\phi}, \tilde{u}$ задачи (32) как решение следующей задачи оптимального управления

$$L\tilde{\phi} = f + B\tilde{u}, \quad J_0(\tilde{u}, \tilde{\phi}(\tilde{u})) = \inf_{v \in H_C^{(0)}} J_0(v, \phi(v)), \tag{50}$$

где $J_0(v, \phi(v)) = \|Av - g\|^2_{H_{ob}}$. Задача (50) имеет единственное решение, причём $\tilde{u}$ удовлетворяет уравнению вида

$$P_C A^* A P_C \tilde{u} = P_C A^* g, \tag{51}$$

где P_C — оператор ортогонального проектирования на $H_C^{(0)}$. (Заметим, что $P_C\tilde{u} = \tilde{u}$ при $\tilde{u} \in H_C^{(0)}$, однако мы будем использовать запись $P_C\tilde{u}$.) Оператор уравнения (51) симметричен и положительно определён, при этом

$$C_0(K)\|\tilde{u}\|^2_{K_C} \le \|AP_C\tilde{u}\|^2_{H_{ob}}\ \forall\, \tilde{u} \in H_C^{(0)},$$

где $C_0(K)$ — положительная постоянная (и возможно, что $C_0(K) \to +0$ при $K \to \infty$). Следовательно,

$$\|\tilde{u}\|^2_{H_C} \le \|g\|^2_{H_{ob}} \,/\, C_0(K). \tag{52}$$

Оценим невязку $(A\tilde{u} - g)$:

$$\|A\tilde{u} - g\|^2_{H_{ob}} \le \|Av - g\|^2_{H_{ob}} = \|A(v - u_0)\|^2_{H_{ob}} \le$$

$$\le \|A\|^2 \|v - u_0\|^2_{H_{ob}} \quad \forall\, v \in H_C^{(0)}.$$

Из последних соотношений в силу (49) получаем

$$\|A\tilde{u} - g\|^2_{H_{ob}} \le \varepsilon^2(K),$$

где $C = \|A\|^2 \|u_0\|^2_{X_C} < \infty$.

От уравнения (51) перейдём к возмущённому уравнению вида

$$\alpha P_C \tilde{u}_\alpha + P_C A^* A P_C \tilde{u}_\alpha = P_C A^* g, \tag{53}$$

где $\tilde{u}_\alpha \in H_C^{(0)}$, $\alpha = const \ge 0$. Из (51), (53) получаем следующие оценки:

$$\alpha \|\tilde{u}_\alpha - \tilde{u}\|^2_{H_C} + 2\|AP_C(\tilde{u}_\alpha - \tilde{u})\|^2_{H_{ob}} \le \alpha \|\tilde{u}\|^2_{H_C} \le$$

$$\le \alpha \cdot \|g\|^2_{H_{ob}} / C_0(K), \tag{54}$$

$$\|A\tilde{u}_\alpha - g\|^2_{H_{ob}} \le C(\varepsilon^2(K) + \frac{\alpha}{C_0(K)}),$$

где постоянная C не зависит от $\varepsilon(K)$ и α.

Итак, *при* $\alpha \to 0$, $K \to \infty$, $(\alpha / C_0(K)) \to 0$ *имеем*

$$\|C\tilde{\phi}_\alpha - \varphi_{ob}\|_{H_{ob}} \le C\Big(\varepsilon(K) + \Big(\frac{\alpha}{C_0(K)}\Big)^{1/2}\Big) \to 0, \tag{55}$$

где $C = const$, $\tilde{\phi}_\alpha = L^{-1}(f + B\tilde{u}_\alpha)$.

Построение $\tilde{\phi}_\alpha, \tilde{u}_\alpha$ можно осуществить, например, применив подходящий итерационный метод к системе

$$\begin{gathered} L\tilde{\phi}_\alpha = f + BP_C\tilde{u}_\alpha, \quad L^*\tilde{q}_\alpha = C^*(C\tilde{\phi}_\alpha - \varphi_{ob}), \\ \alpha P_C\tilde{u}_\alpha + P_C B^*\tilde{q}_\alpha = 0, \end{gathered} \tag{56}$$

которая эквивалентна уравнению (53). (Отметим, что элементы $\tilde{\phi}_\alpha, \tilde{q}_\alpha$ здесь принадлежат, вообще говоря, бесконечномерным пространствам, тогда как $\tilde{u}_\alpha$ — конечномерному $H_C^{(0)}$!)

§ 5. Задачи на собственные значения в обратных задачах и оптимальном управлении

Обратные задачи и задачи управления приводят к задачам на собственные значения специального вида, которые будут введены в данном параграфе.

5.1. Задачи на собственные значения

Пусть $A = CL^{-1}B$ есть оператор, рассматриваемый в предыдущих параграфах, $A^* = B^*L^{*-1}C^*$ — сопряжённый оператор. Предположим, что оператор $A * A$ обладает дискретным спектром (например, когда A^*A является вполне непрерывным). Рассмотрим задачу на собственные значения вида (см. п. 2.4, § 2, гл. 2)

$$A^*Af_k = \sigma_k^2 f_k, \tag{57}$$

где $\sigma_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — сингулярные числа оператора A. В (57) возможно присутствие собственного значения $\sigma_0 = 0$, кратность которого может быть бесконечной. Систему $\{f_k\}$ считаем ортогональной в $H_{ob} :$ $(f_k, f_m)_{H_{ob}} = \delta_{k,m}$, где $\delta_{k,m}$ — символ Кронекера. Введя элементы $g_k \equiv Af_k/\sigma_k$, задачу (57) можно переписать в виде системы

$$A^*g_k = \sigma_k f_k, \quad Af_k = \sigma_k g_k. \tag{58}$$

Отмечаем, что для системы $\{g_k\}$ имеем

$$AA^* g_k = \sigma_k^2 g_k, \quad (g_k, g_m) = \delta_{k,m}. \tag{59}$$

Введём ϕ_k, q_k следующим образом: $\phi_k = L^{-1}Bf_k$, $q_k = L^{*-1}C^*C\phi_k$ и будем называть их *фундаментальными функциями,* соответствующими A и A^*. Тогда задача (57) может быть переписана в виде системы

$$\begin{gathered} L\phi_k = Bf_k, \quad L^*q_k = C^*Cf_k, \quad B^*q_k = \sigma_k^2 f_k \\ k = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{60}$$

которая является *задачей на собственные значения специального вида* и соответствует вариационной системе уравнений (47) при $\alpha = 0$. Если задача (57) имеет нетривиальные решения $\{f_k\}$, то и задача вида (60) имеет также набор нетривиальных решений $\{\phi_k\}$, $\{q_k\}$, $\{f_k\}$.

Система (58) приводит к следующей задаче на собственные значения:

$$\begin{gathered} L\phi_k = Bf_k, \quad C\phi_k = \sigma_k f_k, \\ L^*\tilde{q}_k = C^*g_k, \quad B^*\tilde{q}_k = \sigma_k f_k, \\ k = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{61}$$

где элементы $\{q_k\}$ связаны с $\{\tilde{q}_k\}$ равенствами $q_k = \sigma_k \tilde{q}_k$.

Свойства фундаментальных функций $\{\phi_k\}$, $\{q_k\}$ можно изучать, например, путём переформулировки ряда свойств собственных элементов $\{f_k\}$ и собственных значений $\{\sigma_k^2\}$ задачи (57) с привлечением общих утверждений спектральной теории операторов.

В некоторых задачах (например, когда $A = A^*$ — вполне непрерывный оператор) можно вводить фундаментальные функции $\{\phi_k\}$ как решения задач вида

$$L\phi_k = Bf_k, \quad C\phi_k = \sigma_k f_k, \tag{62}$$

где $\{f_k\}$, $\{\sigma_k\}$ собственные функции и собственные значения задачи

$$Af_k = \sigma_k f_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(естественно, при условии, что последняя задача имеет нетривиальные решения $\{f_k\}$).

Задачи, аналогичные (62), можно записать для A^*(если $A \neq A^*$).

В случае регуляризированных задач (44), (47) с $\alpha > 0$ система (60) заменяется следующей:

$$\begin{gathered} L\phi_k = Bf_k, \quad L^*q_k = C^*C\phi_k, \\ \alpha f_k + B^*q_k = \sigma_k^2 f_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{63}$$

где f_k — собственные элементы оператора $\mathcal{A} = \alpha I + A^*A$, а собственные значения здесь: $\sigma_k^2 = (\sigma_k^2 + \alpha) > 0$ $k = 0, 1, 2 \ldots$.

Отыскание явного вида систем $\{\phi_k\}$, $\{q_k\}$, $\{f_k\}$, $\{g_k\}$ во многих практически интересных задачах невозможно. Но иногда это можно сделать на основе собственных функций операторов L, B, C, возникающих в задачах математической физики, относительно которых имеются обширные результаты. Приведём несколько примеров, иллюстрирующих изложенное.

Пример 1. Рассмотрим задачу из примера 1 из п. 2.1 (§ 2, гл. 2). Здесь $B = C = I$, $L\phi \equiv -\Delta\phi$ при условии, что $\phi = 0$ на $\partial\Omega$. Рассмотрим классическую задачу на собственные значения

$$L\varphi_k \equiv -\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k, \quad \varphi_k = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad \|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} = 1. \tag{64}$$

Легко заметить, что для задач (57)–(60) имеем

$$\phi_k = q_k = f_k = g_k = \varphi_k(x), \quad \sigma_k^2 = 1/\lambda_k^2, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а также $\sigma_k \to 0$, $k \to \infty$. Кроме того, из теории эллиптических операторов известен ряд результатов относительно оценок для собственных чисел $\{\lambda_k\}$ и асимптотического их поведения. Эти результаты можно применить для изучения поведения σ_k. ■

Пример 2. Рассмотрим задачу из примера 2 из п. 2.1 (§ 2, гл. 2). Задача (60) здесь имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_k}{\partial t} - \Delta \phi_k = 0 \text{ в } Q_T, \quad \phi_k = 0 \text{ на } \partial\,\Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \phi_k(0,x) = f_k(x), \\ -\dfrac{\partial q_k}{\partial t} - \Delta q_k = 0 \text{ в } Q_T, \;\; q_k(T,x) = \phi_k(T,x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad q_k = 0 \text{ на } \partial\,\Omega, \\ q_k(0,x) = \sigma_k^2 f_k(x). \end{cases} \tag{65}$$

Если воспользоваться собственным функционалом задачи (64), то легко получаем, что

$$\begin{gathered} f_k(x) = \varphi_k(x), \quad \phi_k(t,x) = e^{-\lambda_k t}\varphi_k(x), \\ q_k(t,x) = e^{-\lambda_k(2T-t)}\varphi_k(x) \quad \sigma_k^2 = e^{-2\lambda_k T}, \\ k = 1, 2, \dots . \blacksquare \end{gathered} \tag{66}$$

Пример 3. Пусть $L_0 : \, L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — симметричный эллиптический оператор второго порядка, определённый на соответствующей области определения $D(L)$ при одном из "классических"граничных условий. Пусть $\{\varphi_k\}$, $\{\lambda_k\}$ есть собственные функции и собственные значения оператора L_0:

$$L_0 \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad \|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} = 1. \tag{67}$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \frac{\partial \phi_k}{\partial t} + L_0 \phi_k = 0 \text{ в } Q_T, \quad \phi_0(0,x) = f_k(x), \\ -\frac{\partial q_k}{\partial t} + L_0 q_k = 0 \text{ в } Q_T, \;\; q_k(T,x) = \phi_k(T,x), \\ q_k(0,x) = \sigma_k^2 f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, \end{gathered} \tag{68}$$

где $q_t = (0,t) \times \Omega$. Так же как и в предыдущем примере, $\phi_k, \dots, f_k$ выражается через φ_k с помощью соотношений (66), а также $\sigma_k^2 = e^{-2\lambda_k T}$, $k = 1, 2, \dots$. ■

Ряд примеров задач и их решений рассматривается в [63]. Отметим также, что в некоторых задачах функции $\phi_k, \dots, f_k$ выражаются (или даже совпадают) с фундаментальными и собственными функциями операторов Пуанкаре–Стеклова или операторов отражения [1].

5.2. Некоторые приложения фундаментальных и собственных функций

Фундаментальные функции $\{\phi_k\}$, $\{q_k\}$ и собственные элементы $\{f_k\}$,$\{g_k\}$, введённые в предыдущем пункте, могут применяться для теоретического анализа обратных задач, задач управления, задач оптимального управления и др., а иногда для их приближённого решения. Проиллюстрируем их возможные приложения следующими примерами.

5.2.1. Представление решений задач. Рассмотрим задачу (47) и уравнение (44). Предположим, что набор собственных элементов $\{f_k\}$ есть замкнутая ортонормальная система в H_C. Отыскивая u_α методом разложения по собственным функциям, легко получаем из (44) следующие выражения для u_α:

$$u_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A^* g, f_k)_{H_C}}{\alpha + \sigma_k^2} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{ob} - CL^{-1} f, C\phi_k)_{H_{ob}}}{\alpha + \sigma_k^2} f_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k (\varphi_{ob} - CL^{-1} f, g_k)_{H_{ob}}}{\alpha + \sigma_k^2} f_k, \qquad (69)$$

а также представления для $\phi_\alpha = L^{-1}(f + Bu_\alpha)$:

$$\phi_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{ob} - CL^{-1} f, C\phi_k)_{H_{ob}} \phi_k}{\alpha + \sigma_k^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k (\varphi_{ob} - CL^{-1} f, g_k)_{H_{ob}} \phi_k}{\alpha + \sigma_k^2}. \qquad (70)$$

Элементы u_α, ϕ_α дают решение также задачи (47). Если φ_{ob}, f таковы, что ряды из (69), (70) сходятся также при $\alpha = 0$, то, полагая $\alpha = 0$ из (69), (70), получаем также решение ϕ_0, u_0 задачи (32).

5.2.2. Анализ влияния ошибок измерений. Предположим, что вместо элемента φ_{ob} известен приближённо (например, из измерений) элемент $\varphi_{ob,\delta}$, причём $\|\varphi_{ob} - \varphi_{ob,\delta}\|_{H_{ob}} \le \le \delta$ — точность измерений, но явный вид $\varphi_{ob,\delta}$ даже может не быть известен, т.е. φ_{ob} задан в условиях неопределённости. Если считать даже $(\varphi_{ob,\delta} - CL^{-1}f) \in R(A)$, то о коэффициентах разложений в (69), (70) при $\alpha = 0$ можно лишь утверждать то, что

$$\frac{|(\varphi_{ob}, g_k)_{H_{ob}} - (\varphi_{ob,\delta}, g_k)_{H_{ob}}|}{\sigma_k} \le \frac{\delta}{\sigma_k}.$$

При этом вклад g_k в разложение u_0 для малых σ_k нельзя вычислить с достаточной точностью. Таким образом, зная сингулярные числа σ_k и соответствующие им элементы g_k, можно судить о том, какие компоненты решения u_0, ϕ_0 задачи (32) вычисляются по приближению $\varphi_{ob,\delta}$, какие — нет, а также дать приближённый анализ влияния ошибок измерений на точность решения u_0, ϕ_0.

5.2.3. Оценка норм оператора A. Как уже отмечалось ранее, для анализа сходимости многих итерационных алгоритмов в применении к решению уравнения (44) с непрерывным оператором необходима оценка нормы $\|A\|$. Получить её можно, зная оценку σ_{sup} для максимального из сингулярных чисел σ_k. В ряде задач удаётся вычислить эти оценки, после чего принимаем: $\|A\| = \sup\limits_k \sigma_k \le \sigma_{sup}$ и используем полученные оценки для оптимизации скорости сходимости итерационных алгоритмов.

Пример 4. Пусть рассматриваются задача о финальном наблюдении из примера 2 из п. 2.1 (§ 2, гл. 2), задачи на собственные значения из примеров 2, 3 настоящего раздела и пусть $\{\varphi_k\}$, $\{\lambda_k\}$ — решения классической задачи (64) (или

(67)) для эллиптического оператора, которая хорошо изучена. Тогда:

1) решение задачи о финальном наблюдении есть

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k T}\Big((\varphi_{ob}, \varphi_k) - (L^{-1}f, \varphi_k)\Big)\varphi_k(x),$$

$$\phi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k T}\Big((\varphi_{ob}, \varphi_k) - (L^{-1}f, \varphi_k)\Big)e^{-\lambda_k t}\varphi_k(x),$$

где $(\cdot,\cdot) \equiv (\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$, а также

$$(L^{-1}f, \varphi_k) \equiv \int_0^T e^{-\lambda_k(T-t')}(f, \varphi_k)(t')\,dt';$$

2) если вместо φ_{ob} задаётся приближение $\varphi_{ob,\delta}$ такое, что $\|\varphi_{ob} - \varphi_{ob,\delta}\| \le \delta$, то для гармоник с номерами $k \to \infty$ можно ожидать значительной потери точности, поскольку

$$\big|(\varphi_{ob}, \varphi_k) - (\varphi_{ob,\delta}, \varphi_k)\big| \lesssim e^{\lambda_k T}\delta \to \infty,\ k \to \infty;$$

3) для первого собственного значения λ_1 во многих эллиптических задачах известны приближения $\lambda_1^h > 0$ снизу для λ_1 с достаточно хорошей точностью. А тогда имеем: $\|A\| = e^{-\lambda_1 T} \lesssim e^{-\lambda_1^h T} < 1$. ■

§ 6. Итерационные методы решения обратных задач и задач управления

Изучим итерационные алгоритмы решения задач, рассмотренных в предыдущих параграфах. Это задачи:

$$L\phi = f + Bu, \quad C\phi = \varphi_{ob}; \tag{71}$$

обобщённая постановка задачи (71):

$$L\phi = f + Bu, \quad J_0(u, \phi(u)) = \inf_{v \in D(B)} J_0(v, \phi(v)); \tag{72}$$

регуляризированная форма задач (71), (72):

$$L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \quad J_\alpha(u_\alpha, \phi_\alpha) = \inf_{v \in D(B)} J_\alpha(v, \phi(v)), \tag{73}$$

где $\phi(v) \equiv \phi,\ \phi_\alpha \equiv \phi(u_\alpha)$, а также

$$J_0(v, \phi(v)) = \|C\phi(v) - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}},$$

$$J_\alpha(v, \phi(v)) = \alpha\|v - u_C\|^2_{X_C} + \|C\phi(v) - \varphi_{ob}\|^2_{H_{ob}}.$$

Основной задачей, в применении к которой будут рассматриваться итерационные алгоритмы, есть система вариационных уравнений, соответствующая (73):

$$\begin{gathered} L\phi_\alpha = f + Bu_\alpha, \quad L^* q_\alpha = C^*(C\phi_\alpha - \varphi_{ob}), \\ \alpha\Lambda_C u_\alpha + B^* q_\alpha = \alpha\Lambda_C u_C. \end{gathered} \tag{74}$$

Одновременно с (71)–(74) будем рассматривать аналоги этих задач в форме операторных уравнений для u или u_α:

$$Au = g, \tag{75}$$

$$A^*Au = A^*g, \tag{76}$$

$$\mathcal{A}_\alpha u_\alpha \equiv \alpha\Lambda_C u_\alpha + A^*Au_\alpha = g_\alpha, \tag{77}$$

где

$$A = CL^{-1}B,\ g \equiv \varphi_{ob} - CL^{-1}f,\ g_\alpha \equiv A^*g + \alpha\Lambda_C u_C.$$

С использованием (76), (77) экстремальные задачи (72), (73) могут быть переписаны также в следующем виде:

$$J_0(u) = \inf_{v \in D(B)} J_0(v), \quad J_0(v) = \|Av - g\|^2_{H_{ob}}; \tag{78}$$

$$J_\alpha(u_\alpha = \inf_{v \in D(B)} J_\alpha(v), \quad J_\alpha(v) = \alpha\|v - u_C\|^2_{X_C} + \|Av - g\|^2_{H_{ob}}. \tag{79}$$

В дальнейшем мы считаем, что выполнены общие ограничения на L, B, C и пространства $W, \ldots, H_{ob}$, введённые в § 1 настоящей главы. Если не оговаривается особо, то предполагается, что оператор A является непрерывным, а задачи (71)–(73) имеют решения.

Среди итерационных методов, которые могут применяться к рассматриваемым задачам, выделим три группы методов, которые условно назовём *методами теории экстремальных задач, итерационными методами теории некорректных задач и методами общей теории итерационных процессов.*

К первой группе методов мы отнесём методы, которые базируются на процедурах минимизации функционалов J_0, J_α из общей теории решения экстремальных задач, т.е. на процедурах построения минимизирующих последовательностей для J_0, J_α [10].

Вторая группа итерационных методов использует подходы, применяемые в теории некорректных задач — решении операторных уравнений (74)–(76) [9].

Наконец, к третьей группе мы относим множество итерационных процедур, получаемых применением алгоритмов общей теории итерационных процессов [38, 56] к уравнению (76) с симметричным и положительно определённым оператором.

В ряде случаев алгоритмы из выделенных трёх групп могут формально совпадать. Однако идеи выбора параметров, обеспечивающих их сходимость, могут быть различными. Кроме того, обратим внимание на то, что многие подходы к выбору этих параметров из теории экстремальных задач и теории некорректных задач в задачах типа (71)–(74) не могут быть реализованы в силу трудоёмкости (или даже невозможности) их осуществления в силу отсутствия явного вида $L^{-1}, L^{*-1}, \ldots$, рассмотрения L, B, C достаточно общего вида и др. Поэтому мы вынуждены будем ограничиться рассмотрением лишь простых методов выбора данных параметров.

6.1. Методы теории экстремальных задач

Рассмотрим экстремальную задачу (79) при $\Lambda_C \equiv I$, $X_C \equiv H_C$, $u_C \equiv 0$, $\alpha > 0$. Решение этой задачи обозначим $u \equiv u_\alpha$. Для отыскания приближённого значения u воспользуемся градиентным методом (см. п.3.3.1, гл.2):

$$u_{k+1} = u_k - \tau_k J'_\alpha(u_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{80}$$

где u_0 — начальное приближение, $J'_\alpha(u_k) = 2\alpha u_k + 2A^*(Au_k - -g)$, τ_k — положительные параметры, априорное задание которых возможно из следующих условий (см. [10]):

$$\tau_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k^2 < \infty. \tag{81}$$

Например, можно принять $\tau_k = C(1+k)^{-\beta}$, $C = const > 0$, $1 \geq \beta > 1/2$.

В терминах уравнений системы (74) алгоритм (80) имеет вид

$$\begin{gathered} L\phi_k = f + Bu_k, \quad L^* q_k = C^*(C\phi_k - \varphi_{ob}), \\ u_{k+1} = u_k - 2\tau_k(\alpha u_k + B^* q_k), \quad k = 0, 1, \ldots \end{gathered} \tag{82}$$

Для установления сходимости (82) отмечаем, что при $\alpha > 0$ функционал $J_\alpha(u)$ сильно выпуклый, а также

$$(J'_\alpha(u) - J'_\alpha(v), u - v)_{H_C} \geq 2\alpha \|u - v\|^2_{H_C};$$

$$\|J'_\alpha(u) - J'_\alpha(v)\| \leq 2(\alpha + \|A\|^2)\|u - v\|_{H_C}.$$

Кроме того, множество $M(u_0) = \{v :\ J_\alpha(v \leq J_\alpha(u_0)\}$ ограничено, т.к. из условия $J_\alpha(v) \leq J_\alpha(u_0)$ имеем: $\|v\|^2_{H_C} \leq \leq J_\alpha(u_0)/\alpha < \infty$. Теперь достаточно воспользоваться результатами из теории экстремальных задач ([10], с. 70), откуда заключаем, что *если J_* есть минимальное значение* *функционала* J_α*, а параметры* $\{\tau_k\}$ *выбираются согласно* (81) *и* $u_0 \in H_C$*, то последовательность* $\{J_\alpha(u_k)\}$ *монотонно убывает, причём*

$$\begin{gathered} 0 \leq J(u_k) - J_* \leq (J_\alpha(u_0), -J_*)q^k \\ \|u_k - u\|_{H_C} \leq \frac{2}{\alpha}(J_\alpha)(u_0) - J_*)q^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{83}$$

где $0 \leq q = 1 - \alpha/(2\alpha + 2\|A\|)^2 < 1$. Из (83), как следствие, легко получить оценки скорости сходимости $\phi_k \to \phi$, $q \to 0$.

Если в дополнение к (82) решать задачу

$$L\psi_k = B(\alpha u_k + B^* q_k), \tag{84}$$

то, выбирая τ_k в (82) по формуле

$$\tau_k = \frac{1}{2} \frac{\|\alpha u_k + B^* q_k\|^2_{H_C}}{\|\alpha u_k + B^* q_k\|^2_{H_C} + \|C\psi_k\|^2_{H_{ob}}}, \tag{85}$$

получаем *метод наискорейшего спуска* для решения полной системы вариационных уравнений.

Выбирая параметры $\{\tau_k\}$ другим, подходящим для практической реализации способом (см. п. 3.3.1, гл. 2), можно получать другие модификации градиентного метода. Аналогичным образом можно строить итерационные алгоритмы решения рассматриваемых задач на основе других методов решения экстремальных задач. На основе оценок погрешностей этих алгоритмов (типа оценок (83)) и оценок, полученных нами ранее при переходе от задач (71), (72) к задачам (73), (74), несложно получить оценку общей погрешности, допускаемой при решении задачи (71) или (72).

6.2. Методы теории некорректных задач

В теории некорректных задач разработаны классы итерационных процедур для решения некорректных операторных уравнений вида (75)–(76), которые имеют специфику, и путём их применения осуществляется *итеративная регуляризация* исходной задачи, под которой будем понимать уравнение (75). На основе некоторых из этих процедур можно сформулировать соответствующие итерационные процессы для решения задач вида (71). Рассмотрим один из таких итерационных алгоритмов.

Пусть решается задача (71), являющаяся некорректной, с непрерывным оператором $A = CL^{-1}B$ и приближёнными φ_{ob} такими, что $\|\varphi_{ob} - \varphi_{ob}^{(0)}\|_{H_{ob}} \le \delta$, где $\varphi_{ob}^{(0)} \in R(A)$. Для формулировки алгоритма решения этой задачи применим к её обобщённой постановке, записанной в форме операторного уравнения (76), алгоритм (47). В терминах вариационных уравнений типа (74) данный алгоритм имеет вид

$$\begin{gathered} L\phi_k = f + Bu_k, \quad L^*q_k = C^*(C\phi_k - \varphi_{ob}), \\ u_k = u_{k-1} - \tau B^* q_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{86}$$

где u_0 — начальное приближение, а параметр τ выбирается удовлетворяющим соотношением $0 < \tau < (2/\|A\|^2)$. Число проводимых итераций здесь не может быть произвольным, а должно согласовываться с δ, что следует из результатов теории некорректных задач (см. п.4.4, гл.2), в силу которых справедливо следующее утверждение о сходимости (86): *если* $(\varphi_{ob} - CL^{-1}f) \in R(CL^{-1}B)$, $N(CL^{-1}B) = \{0\}$, $0 < \tau < (2/\|A\|^2)$, *а начальное приближение выбирается следующим образом:*

$$L\phi_0 = f, \quad L^*q_0 = C^*(\varphi_{ob} - C\phi_0), \quad u_0 = \tau B^* q_0, \tag{87}$$

то при $k = k(\delta) \to \infty$, $\delta \cdot k(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$ *имеет место сходимость* u_k, $\phi_k = L^{-1}(f + Bu_k)$ *к решению* u, ϕ *задачи* (71).

Аналогичным образом можно рассматривать другие итерационные процессы, базируясь на алгоритмах (45)–(48) теории некорректных задач, также и в случаях, когда L, B, C вычисляются приближённо.

6.3. Методы общей теории итерационных процессов

Основная идея построения, исследования и оптимизации скорости сходимости итерационных алгоритмов для (71) состоит в применении тех или иных методов общей теории итерационных процессов [38, 43, 56] к уравнению (77). Уравнение (77) является операторной формой записи регуляризированных задач (73), (74), решения которых в подходящем смысле сходятся к решению задачи (71) (см. §§ 2–4 настоящей главы). Здесь мы рассмотрим некоторые из этих итерационных алгоритмов с этапами их реализации в терминах уравнений системы (74).

6.3.1. Простейший итерационный процесс. Пусть оператор $A = CL^{-1}D$ является непрерывным. Считая $\Lambda_C = I$, $X_C = H_C$, $u_C = 0$, запишем для (77) простейший итерационный процесс (см. п. 2.6, гл. 2):

$$u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau(\mathcal{A}_\alpha u_\alpha^k - A^* g), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{88}$$

где u_0 выбирается согласно (87). Если выбирать τ по формуле

$$\tau = \tau_{opt} = \frac{2}{2\alpha + C_0 + C_1}, \tag{89}$$

то алгоритм (88) сходится, причём

$$\|u_\alpha^k - u_\alpha\|_{H_C} \le C \left(\frac{C_1 - C_0}{2\alpha + C_0 + C_1} \right)^k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{90}$$

где постоянная C не зависит от k. Здесь C_0, C_1 есть границы точечного спектра оператора $\mathcal{A}_0 \equiv A^* A$, т.е. $\mathrm{Sp}\,(\mathcal{A}_0) \in [C_0, C_1]$. Простейшим выбором C_0, C_1, является следующий: $C_0 = 0,\ C_1 = \|A\|^2$.

Для практической реализации (88) необходимо записать этот алгоритм в терминах уравнений системы (74), что здесь есть:

$$
\begin{aligned}
&L\phi_\alpha^k = f + Bu_\alpha^k, \quad L^* q_\alpha^k = C^*(C\phi_\alpha^k - \varphi_{ob}),\\
&u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau(\alpha u_\alpha^k + B^* q_\alpha^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
\tag{91}
$$

(где u_0 определяется согласно (87)) и применить к каждой из подзадач из (91) классические методы вычислительной математики [2, 41, 38, 66].

Сходимость решений системы (91) к решению задачи (74) является следствием (90) и корректной обратимости операторов L, L^*. В результате получаем следующее утверждение: *если $\alpha > 0$, а параметр τ выбирается согласно* (89), *то*

$$
\begin{aligned}
&\|\phi_\alpha - \phi_\alpha^k\|_W + \|q_\alpha - q_\alpha^k\|_Y + \|u_\alpha - u_\alpha^k\|_{H_C} \le \\
&\le C \left(\frac{C_1 - C_0}{2\alpha + C_0 + C_1} \right)^k \to 0, \quad k \to \infty,
\end{aligned}
\tag{92}
$$

где постоянная C не зависит от k.

Пусть теперь в рассматриваемой задаче элементы f, φ_{ob} задаются приближённо, т.е. заданы $f_\delta, \varphi_{ob,\delta}$ вместо f, φ_{ob}, причём $\|f - f_\delta\|_{Y^*} \le \delta_1$, $\|\varphi_{ob} - \varphi_{ob,\delta}\|_{H_{ob}} \le \delta_2$, где δ_1, δ_2 — оценки погрешностей считаются известными. Тогда итерационный процесс (91) будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&L\tilde{\phi}_\alpha^k = f_\delta + B\tilde{u}_\alpha^k, \quad L^* \tilde{q}_\alpha^k = C^*(C\tilde{\phi}_\alpha^k - \varphi_{ob,\delta}),\\
&\tilde{u}_\alpha^{k+1} = \tilde{u}_\alpha^k - \tau(\alpha \tilde{u}_\alpha^k + B^* \tilde{q}_\alpha^k), \quad k = 0, 1, \ldots,
\end{aligned}
\tag{93}
$$

причём $\tilde{u}_\alpha^0 \equiv u_0$ определяется из (87) при $f \equiv f_\delta$, $\varphi_{ob} \equiv \varphi_{ob,\delta}$. Пусть τ выбирается по формуле (90).

Для изучения сходимости решений, получаемых в (93), заметим, что (93) есть простейший итерационный алгоритм в применении к уравнению (88) с $g_\delta \equiv \varphi_{ob,\delta} - CL^{-1} f_\delta$ вместо

g, причём здесь $\|g - g_\delta\|_{H_{ob}} \le (\delta_2 + \|CL^{-1}\|\delta_1) \equiv \delta$. Воспользовавшись теперь утверждениями, доказанными в п. 4.4, гл. 2 (см. (52), (53) из § 4, гл. 2), получим следующее утверждение: *если в* (93) τ *выбирается по формуле* (89), *а параметр регуляризации* $\alpha \equiv \alpha(\delta)$ *и число итераций* $k \equiv k(\alpha, \delta)$ *выбираются такими, что*

$$\alpha(\delta) \to 0, \ k(\delta, \alpha) \cong \frac{|\ln \delta|}{\alpha(\delta)} \to \infty, \ \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0 \ \text{ при } \ \delta \to 0, \quad (94)$$

то

$$\|\phi_\alpha - \tilde{\phi}_\alpha^k\|_W + \|q_\alpha - \tilde{q}_\alpha^k\|_Y + \|u_\alpha - \tilde{u}_\alpha^k\|_{H_C} \le C \ \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0 \quad (95)$$

$$\text{при } \delta \to 0$$

где $C = const$.

На основе (95) и оценки для разности $(u_\alpha - u)$, где u — решение уравнения (75), несложно получить оценки для $(\phi - \tilde{\phi}_\alpha^k), (u - \tilde{u}_\alpha^k)$, где ϕ, u — решение задачи (71). Так, в частности, справедливо такое утверждение: *если* $g \in R(A)$, *$N(A)$, а гладкость решения* ϕ, u *задачи* (71) *такова, что* $\|u - u_\alpha\|_{H_C} \le C\alpha^\beta$, *где* $0 < \beta < 1$, *то при* $\alpha = \delta^{1/(1+\beta)}$ *выполнены условия (94) и справедлива оценка вида*

$$\|\phi - \tilde{\phi}_\alpha^k\|_W + \|u - \tilde{u}_\alpha^k\|_{H_C} \le C \cdot \delta^{\frac{\beta}{1+\beta}} \to 0 \quad \text{ при } \ \delta \to 0, \quad (96)$$

где $C = const$.

Обратим внимание на то, что *параметр* α *в* (93) *в общем случае нельзя брать сколь угодно малым независимо от значения* δ. Действительно, пусть это возможно. Тогда, полагая $\alpha = 0$ в (93), получаем итерационный процесс для уравнения вида (76), для которого в [18] приводится пример, когда итерационный процесс расходится при $k \to \infty$.

В заключение отметим, что если вместо L, B, C, u_C задаются приближения $L_\delta, \ldots, u_{C,\delta}$, то можно также рассматривать итерационный алгоритм вида (93). Изучение его сходимости при определённых ограничениях на $L_\delta, \ldots, u_{C,\delta}$ можно осуществить на базе теоремы 34 из п. 4.4, гл. 2.

6.3.2. Итерационный процесс с переобусловливанием. Рассмотрим задачу (71), когда $N(A) = \{0\}$, а оператор $\mathcal{A}_0 \equiv A^*A$ может быть неограниченным. Предположим, что удаётся подобрать самосопряжённый положительный оператор Λ_C такой, что $\mathrm{Sp}\,(\Lambda_C^{-1}A^*A) \subset [C_0, C_1]$, где $C_0, C_1 = const > 0$. Именно этот оператор Λ_C выберем в системе регуляризированных уравнений (74), эквивалентной одному уравнению (77). Для решения этого уравнения запишем итерационный процесс

$$\Lambda_C u_\alpha^{k+1} = \Lambda_C u_\alpha^k - \tau(\mathcal{A}_\alpha u_\alpha^k - g_\alpha), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{97}$$

где параметр τ выбираем по формуле

$$\tau = \tau_{opt} = \frac{2}{2\alpha + C_0 + C_1}. \tag{98}$$

Тогда $\mathrm{Sp}\,(\Lambda_C^{-1}\mathcal{A}_\alpha) \subset [\alpha + C_0, \alpha + C_1]$ и справедлива следующая оценка скорости сходимости (см. п. 2.6, гл. 2):

$$\|u_\alpha - u_\alpha^k\|_{X_C} \le C\left(\frac{C_1 - C_0}{2\alpha + C_0 + C_1}\right)^k \to 0 \quad \text{при} \;\; k \to \infty,$$

где $\|u\|_{X_C} \equiv \|\Lambda_C^{1/2} u\|_{H_C}$. Отмечаем, что оператор Λ_C в (97) играет роль переобусловливателя, т.е. такого оператора, для которого $\mathrm{Sp}\,(\Lambda_C^{-1}\mathcal{A}_\alpha) \subset [\alpha + C_0, \alpha + C_1]$. Если подобрать такой оператор Λ_C сложно, то можно в качестве Λ_C выбрать самосопряжённый положительно определённый оператор, порождающий пространство X_C, непрерывно вложенное в H_C. При этом оператор Λ_C должен быть таким, чтобы $(\mathcal{A}_\alpha v, v)_{H_C} \le C_1(\Lambda_C v, v)_{H_C} = C_1\|v\|_{X_C}^2 \; \forall\, v \in D(B)$, где $C_1 = const > 0$. Подобрать такой оператор Λ_C проще, для чего достаточно на $D(B)$ ввести достаточно "сильную"норму $\|v\|_{X_C}$. Отметим, что часто оператор $\Lambda_C^{-1}\mathcal{A}_\alpha$ бывает вполне непрерывным, а также $C_0 = 0$. Но и в этом случае алгоритм сходится при любом малом положительном α.

Для практической реализации алгоритм (97) записывается в виде системы

$$L\phi_\alpha^k = f + Bu_\alpha^k, \quad L^* q_\alpha^k = C^*(C\phi_\alpha^k - \varphi_{ob}),$$
$$\Lambda_C w_\alpha^k = B^* q_\alpha^k,\ u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau(\alpha u_\alpha^k + w_\alpha^k),\ k = 0, 1, \ldots \tag{99}$$

Из оценки скорости сходимости последовательности $\{u_\alpha^k\}$ к u получаем также более общую оценку вида

$$\|\phi_\alpha^k - \phi_\alpha\|_W + \|q_\alpha^k - q_\alpha\|_Y + \|u_\alpha^k - u_\alpha\|_{X_C} \le$$
$$\le C\left(\frac{C_1 - C_0}{2\alpha + C_0 + C_1}\right)^k, \quad k \to \infty. \tag{100}$$

Реализация этапов (99) осуществляется путём решения последовательности прямых задач с операторами L, L^*, Λ_C.

6.3.3. Метод минимальных невязок. Следующий итерационный алгоритм базируется на основе известного метода минимальных невязок (см. п. 2.6, гл. 2). Преимуществом этого алгоритма является сравнительно простой метод расчёта параметров $\{\tau_k\}$, не требующий знания оценок спектра операторов решаемого уравнения.

Пусть $H_{ob} = H_C$, рассматривается задача (71) и соответствующее ей уравнение (75). Предположим, что оператор A является непрерывным и самосопряжённым: $A = A^*$. Тогда регуляризация по М.М.Лаврентьеву для данного уравнения будет $\mathcal{A}_\alpha u \equiv (\alpha I + A)u_\alpha = g$. Метод минимальных невязок для этого уравнения имеет вид

$$u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau_k(\mathcal{A}_\alpha u_\alpha^k - g), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{101}$$

где

$$\tau_k = \frac{(\mathcal{A}_\alpha \xi^k, \xi^k)_{H_C}}{(\mathcal{A}_\alpha \xi^k, \mathcal{A}_\alpha \xi^k)_{H_C}}, \quad \xi^k = \mathcal{A}_\alpha u_\alpha^k - g,$$

или в терминах операторов задачи (71):

$$L\phi_\alpha^k = f + Bu_\alpha^k, \quad \xi^k = C\phi_\alpha^k - \varphi_{ob} + \alpha u_\alpha^k, \quad Lq_\alpha^k = B\xi^k,$$
$$\tau_k = \frac{\alpha\|\xi^k\|_{H_C}^2 + (Cq_\alpha^k, \xi^k)_{H_C}}{\|\alpha\xi^k + Cq_\alpha^k\|_{H_C}^2}, \tag{102}$$
$$u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau_k \xi^k, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Если оператор A не является симметричным, а задача (71) некорректна, то рассматривается система уравнений (74) и операторное уравнение (77).

Пусть $\Lambda_C \equiv I,\ u_C \equiv 0$. Метод минимальных невязок для (77) имеет вид

$$u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau_k(\mathcal{A}_\alpha u_\alpha^k - A^* g), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\mathcal{A}_\alpha = \alpha I + A^*A, \quad A = CL^{-1}B, \quad g = \varphi_{ob} - CL^{-1}f,$$
$$\tau_k = \frac{(\mathcal{A}_\alpha \xi^k, \xi^k)_{H_{ob}}}{(\mathcal{A}_\alpha \xi^k, \mathcal{A}_\alpha \xi^k)_{H_{ob}}}, \quad \xi^k = \mathcal{A}_\alpha u_\alpha^k - A^* g. \tag{103}$$

Для системы вариационных уравнений данный итерационный процесс имеет вид

$$L\phi_\alpha^k = f + Bu_\alpha^k,\ L^*q_\alpha^k = C^*(C\phi_\alpha^k - \varphi_{ob}),\ \xi^k = \alpha u_\alpha^k + B^* q_\alpha^k,$$
$$L\tilde{\phi}_\alpha^k = B\xi^k, \quad L^*\tilde{q}_\alpha^k = C^*C\tilde{\phi}_\alpha^k, \quad w_\alpha^k = B^*\tilde{q}_\alpha^k, \tag{104}$$
$$\tau_k = \frac{(w_\alpha^k, \xi^k)_{H_{ob}}}{\|w_\alpha^k\|_{H_{ob}}^2}, \quad u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k - \tau_k \xi^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Если операторы $A,\ A^*A$ корректно обратимы, то в (101)–(104) можно принимать $\alpha = 0$. Исследование сходимости итерационных процессов (102), (104) несложно провести на основе известных результатов для метода минимальных невязок [38, 43, 56] и методов регуляризации М.М.Лаврентьева и А.Н.Тихонова (см. также параграфы 2–4 настоящей главы).

Аналогично изложенному на основе общей теории итерационных процессов могут быть сформулированы многие другие итерационные алгоритмы для задач типа (71). Однако не все эти алгоритмы могут быть реализованы в практических вычислениях из-за возможной трудоёмкости решения возникающих систем (аналогичных системам (104)). По этой же причине могут оказаться трудно реализуемыми некоторые методы выбора параметров регуляризации в уравнениях (74), (77), известные из теории некорректных задач [4, 48, 59].