

Глава 6. ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОЙ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ В МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ МОРЕЙ И ОКЕАНОВ

Данная глава посвящена применению изучаемых методов и подходов к численному решению обратных задач и соответствующих им задач вариационной ассимиляции данных наблюдений для нелинейной системы уравнений математической модели гидротермодинамики океанов и морей. В данной главе показано как с привлечением современных методов вычислительной математики, в т.ч. методов расщепления, излагаемая в данной книге общая методология может быть применена к практическому решению сложных прикладных задач.

В качестве конкретной задачи вариационной ассимиляции здесь сформулирована и численно исследована задача вариационной ассимиляции данных спутниковых наблюдений о температуре поверхности океана с целью восстановления потоков тепла на поверхности с использованием разработанной в ИВМ РАН глобальной трехмерной модели гидротермодинамики океана и данных наблюдений, приближенными к реально наблюдаемым (по временным интервалам). В настоящей главе разработаны алгоритмы численного решения рассматриваемой задачи и представлены результаты численных экспериментов на примере акватории Индийского океана. В качестве данных наблюдений использовались данные о температуре поверхности океана за 2000 г.

Настоящая глава написана в целом по материалам статьи [131].

§ 1. О задачах ассимиляции данных надлюдений

Многочисленные трудности при моделировании процессов климатической изменчивости происходят вследствие целого ряда причин. Одной из них является плохое знание или отсутствие данных, требуемых для задания начальных и граничных условий в уравнениях движения, а также ошибки при численном расчете, влияние подсеточных масштабов осреднения и многое другое. Поэтому дальнейшее усложнение уравнений, методов их численной реализации и быстродействия компьютеров не обязательно будет приводить к существенному улучшению качества моделей и позволяет сделать следующее предположение: для того, чтобы существенно улучшить наши знания о климатических и вообще геофизических процессах, необходимо "сочетать" математическое моделирование и реально наблюдаемые данные.

Задача сочетания модельных данных (т.е. результатов численных расчетов по математической модели)и данных наблюдений получила в литературе название *задачи усвоения (ассимиляции) данных* или просто *задача усвоения (ассимиляции)* и представляет собой нетривиальную научную проблему.

В метеорологии и океанологии, климатологии и в других науках о Земле работы по усвоению появились во второй половине XX века. По-видимому, один из первых результатов здесь был получен Л. Гандиным [100]. Им был предложен метод объективного анализа, основанный на оптимальной линейной интерполяции. Метод оказался весьма плодотворным и в настоящее время используется довольно часто.

При решении задач усвоения рассматриваются в основном две группы методов: вариационные и статистические.

Идея первого подхода состоит в том, что для заданного оператора модели (заданной системы уравнений) ищется такое начальное или граничное условие, при котором траектория решения системы уравнений проходит "максимально близко" от наблюдаемых значений в заданной метрике. Задачи усвоения в вариационном подходе в конечном итоге сводятся к решению обратных задач (или задач управления) и минимизации заданных функционалов. Исследование и решение подобных проблем затрудняется сложностью математических моделей, границ областей (например, реальной конфигурацией океанов и морей), большим количеством узлов дискретизации и большими объемами информации, необходимой для обеспечения рассматриваемых математических моделей данными. Все указанное требует решения целого комплекса вычислительных и информационных проблем.

Вариационный подход является одним из основных при усвоении данных эксперимента в геофизических моделях вследствие наглядности постановки задачи, ясности физической интерпретации результата и хорошо разработанной математической составляющей данного направления. Большой вклад внесли в разработку и применение данного метода отечественные ученые Г.И. Марчук и его ученики [68–77], [93–99], [102–108]. Среди зарубежных работ отметим работы И. Навона [109], Ж. Талаграна, Ф. Ле Диме [110]. Последние версии вариационного направления, известные как "3D-var" и "4D-var" используются в гидрометеослужбах Франции, Великобритании, и во многих научно-исследовательских организациях и центрах прогноза погоды других стран ([130] и др.).

Другим, в некотором роде альтернативным подходом к усвоению данных служит схема, основанная на теории статистического оценивания и фильтрации случайных процессов. Наибольшую известность получила схема, предложенная Р. Калманом [112]. Схема в дальнейшем была усовершенствована в ряде работ (см., например [113]).

Метод Калмана оказался весьма удобным для последовательного усвоения данных. Однако в отличие от вариационного метода, в методе Калмана оптимальное решение рассматривается как случайный процесс (поле). При применении даже "стандартного" фильтра Калмана можно встретить целый ряд трудностей и строгая теория метода разработана только для случая линейного оператора. Однако современные геофизические модели динамики нелинейны, что делает затруднительным применение в полной мере теории фильтров Калмана. Существующее обобщение теории на нелинейный случай, так называемый "ансамблевый фильтр Калмана" [113, 114], за исключением нескольких простых примеров требует больших вычислительных ресурсов.

В настоящей главе рассматривается задача четырехмерного вариационного усвоения данных спутниковых наблюдений температуры поверхности океана. На каждом шаге по времени производные по t основной математической модели заменяются разностными аппроксимациями, а процесс ассимиляции осуществляется последовательно на всех подинтервалах по t . В этом случае процесс усвоения становится локально трехмерным, что позволяет существенно сократить объем усваиваемой информации, и, следовательно, вычислительные затраты. С другой стороны, несмотря на такого рода упрощение, такая задача усвоения данных о температуре поверхности океана является актуальной и остается четырехмерной на всем расчетном промежутке.

В качестве тестовой области в данной работе при проведении численных экспериментов используется акватория Индийского океана, для которой была использована версия математической модели циркуляции океана, разработанная в ИВМ РАН. В настоящей работе данные наблюдений сопровождались специальной "маской" – характеристической функцией, которая зависила от временной переменной t и носитель которой не совпадает со всей тестовой акваторией. Таким образом, данные наблюдений приближены к реально

наблюдаемой температуре поверхности океана в данный момент времени (без дополнительно интерполяции на подобласти, где данные спутниковых наблюдений отсутствовали в рассматриваемый момент времени).

Описание постановок задач, рассматриваемых ниже и алгоритмы их решения и дано в [131]. Поэтому они, так же как и используемые ниже обозначения, в настоящей работе приводятся в краткой форме.

§ 2. Математическая модель

Введем основные обозначения и уравнения, которые используются в рассматриваемых задачах.

2.1. Рассмотрим сферическую систему координат (λ, θ, r) , где λ – географическая долгота, увеличивающаяся с запада на восток, θ – географическая широта, растущая с юга на север ($\theta = \varphi - \pi/2, \varphi \in [0, \pi]$), r – расстояние точки от центра Земли, средний радиус которой принимается равным R_3 . Долгота λ изменяется от 0 до 2π , широта θ от $-\pi/2$ (Южный полюс) до $\pi/2$ (Северный полюс). Часто вместо r удобно вводить координату $z = R_3 - r$ оси Oz , направленной по нормали от поверхности сферы S_R радиуса R_3 к ее центру. Единичные вектора в λ -, θ - и z -направлениях обозначим соответственно через e_λ, e_θ, e_z . Тогда вектор скорости в океане записывается в форме $\vec{U} = ue_\lambda + ve_\theta + we_z \equiv (\vec{u}, w)$, или в координатной форме $\vec{U} = (u, v, w) \equiv (\vec{u}, w)$, где $\vec{u} = (u, v)$ – “горизонтальный вектор” скорости в координатной форме, а w – “вертикальная скорость”.

Обозначим через Ω часть поверхности сферы S_R , которую будем называть также “поверхностью отсчета”. Поверхность океана будем задавать уравнением $z = \xi(\lambda, \theta, t)$ или $f_0(\lambda, \theta, z, t) \equiv \xi(\lambda, \theta, t) - z = 0$, где $(\lambda, \theta, R_3) \in \Omega$, а t – временная переменная, $t \in [0, \bar{t}]$ ($\bar{t} < \infty$). Функцию рельефа дна определим как $z = H(\lambda, \theta)$ или $F_H(\lambda, \theta, z, t) \equiv -H(\lambda, \theta) + z = 0$ при $(\lambda, \theta, R_3) \in \Omega$, где $H(\lambda, \theta) > 0$. В дальнейшем мы будем

использовать также следующие обозначения: $\lambda \equiv x$, $\theta \equiv y$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$, $U \equiv (u_1, u_2, u_3) \equiv (u, v, w) \equiv (\vec{u}, w)$, $\vec{u} \equiv (u_1, u_2) \equiv (u, v)$, $u_3 \equiv w$. Элемент объема в области $D(t)$: $D(t) = \{(x, y, z) : (\lambda, \theta, R_3) \in \Omega, \xi(\lambda, \theta, t) < z < H(\lambda, \theta)\}$, $t \in [0, \bar{t}]$ есть $dD = (R_3 - z)^2 \cos y dx dy dz$, а элемент поверхности Ω имеет вид $d\Omega = R_3^2 \cos y dx dy$.

Одно из общих упрощений, принимаемых в описании крупномасштабной динамики океана, состоит в приближенной замене $r = R_3 - z$ на R_3 , что базируется на том факте, что глубина океана намного меньше радиуса Земли. В этом случае $dD \cong R_3^2 \cos y dx dy dz$. Однако, как будет видно из дальнейшего, мы будем пользоваться этим приближением для преобразования лишь некоторых уравнений и соотношений.

Введем следующие дифференциальные операции градиента, дивергенции и полной производной в сферической системе координат при $r \equiv r(z) \equiv R_3 - z \cong R_3$, $n \equiv 1/r$, $m \equiv 1/(r \cos y)$ (оставив за этими операциями известные обозначения из векторного анализа):

$$\begin{aligned} \mathbf{Grad} \varphi &\equiv (\mathbf{grad} \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial z}), \quad \mathbf{grad} \varphi \equiv (m \frac{\partial \varphi}{\partial x}, n \frac{\partial \varphi}{\partial y}), \\ \mathbf{Div} \vec{U} &\equiv \mathbf{div} \vec{u} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 w}{\partial z}, \quad \mathbf{div} \vec{u} \equiv m \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{n}{m} v \right], \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{U}, \nabla \varphi), \quad (\vec{U}, \nabla) \equiv (\vec{u}, \mathbf{grad}) + w \frac{\partial}{\partial z}, \\ (\vec{u}, \mathbf{grad}) &= um \frac{\partial}{\partial x} + vn \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Далее используются также следующие дифференциальные операторы второго порядка:

$$\begin{aligned}\mathbf{Div}(\mathbf{Grad}\varphi) &\equiv \mathbf{div}(\mathbf{grad}\varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \mathbf{div}(\mathbf{grad}\varphi) &\equiv \Delta\varphi \equiv m^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + mn \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{n}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ A_\varphi \varphi &\equiv -\mathbf{Div}(\hat{a}_\varphi \mathbf{Grad}\varphi), \quad A_u = A_v \equiv A,\end{aligned}$$

где $\hat{a}_\varphi = \text{diag}((a_\varphi)_{ii})$, $(a_\varphi)_{11} = (a_\varphi)_{22} \equiv \mu_\varphi$, $(a_\varphi)_{33} \equiv \nu_\varphi$, а индекс φ может принимать значения u, v, T, S (т.е. обозначения компонентов вектора горизонтальной скорости, температуры T и солёности S). Принимается также: $\mu_u = \mu_v \equiv \mu$, $\nu_u = \nu_v \equiv \nu$ и предполагается, что $\mu, \nu, \mu_T, \mu_S, \nu_T, \nu_S$ являются заданными положительными и ограниченными функциями.

В последующем будет рассматриваться также оператор четвертого порядка $(A_k)^2$, где оператор второго порядка A_k введен выше при $A_\varphi = A_k$ и определяется матрицей $\hat{k} = \text{diag}\{k_{ii}\}$ с неотрицательными диагональными элементами k_{ii} . Далее через $l = l(y)$ обозначается Кориолисов параметр: $l = 2\omega \sin y$, где ω — угловая скорость вращения Земли, а также $f(u) = l + mu \sin y \equiv l + f_1(u)$.

Отметим еще одно общее упрощение, используемое при описании крупномасштабной динамики океана. Функция уровня $\xi = \xi(x, y, t)$ является также одной из неизвестных функций, подлежащих определению. Таким образом, область $D(t)$ является областью с неизвестной границей (или областью с движущейся границей). Поэтому часто, после того, как записаны уравнения гидротермодинамики океана в области $D(t)$ с соответствующими краевыми условиями, переходят к системе уравнений, рассматриваемой уже в фиксированной области $D = \{(\lambda, \theta, z) : (\lambda, \theta, R_3) \in \Omega, 0 < z < H(\lambda, \theta)\}$. Границу области $\Gamma \equiv \partial D$ мы будем представлять как объединение четырех непересекающихся частей $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}, \Gamma_H$, где $\Gamma_S \equiv \Omega$ — “невозмущенная поверхность”, $\Gamma_{w,op}$ —

жидкая (открытая) часть вертикальной боковой границы, $\Gamma_{w,c}$ – твердая часть вертикальной боковой границы, Γ_H – дно океана. Характеристические функции Γ_S , $\Gamma_{w,op}$, $\Gamma_{w,c}$, Γ_H -частей границы Γ будем обозначать соответственно m_S , $m_{w,op}$, $m_{w,c}$, m_H . Отметим, что некоторые из частей Γ_S , $\Gamma_{w,op}$, $\Gamma_{w,c}$, Γ_H могут отсутствовать. Так, например, если рассматривать случай всего Мирового океана, то можно считать, что $\Gamma = \Gamma_S \cup \Gamma_H$, т.е. здесь не вводится предположение, что $H \geq H_0 = const$, и на “береговых линиях” имеем “ $H = 0$ на $\partial\Omega$ ”, а поэтому вертикальная боковая граница $\Gamma_w = \Gamma_{w,op} \cup \Gamma_{w,c}$ в данном случае отсутствует. Если предположить, что $H \geq H_0 = const > 0$ и $D(t)$ есть весь Мировой океан, то тогда $\Gamma = \Gamma_S \cup \Gamma_{w,c} \cup \Gamma_H$. Случай, когда $H \geq H_0 = const > 0$ при $(\lambda, \theta, R_3) \in \Omega$ (что далее будет просто обозначаться как “ $(\lambda, \theta) \in \Omega$!”) каждый раз будет оговариваться особо.

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что Ω является многосвязным многообразием на S_R , а границы $\partial\Omega$, Γ считаем кусочно-гладкими класса $C^{(2)}$, локально удовлетворяющими условию Липшица. Единичный вектор внешней нормали к Γ обозначаем через $\vec{N} \equiv (N_1, N_2, N_3)$. Отмечаем, что $\vec{N} = (0, 0, -1)$ на Γ_S и $\vec{N} = (N_1, N_2, 0)$ на $\Gamma_w = \Gamma_{w,op} \cup \Gamma_{w,c}$ при этом вектор $\vec{n} \equiv (N_1, N_2) \equiv (n_1, n_2)$ является единичным вектором внешней нормали к $\partial\Omega$. Выражение компонентов N_1, N_2, N_3 определяется выбираемым параметрическим представлением той или иной части границы.

При рассмотрении вектора скорости $\vec{U} = (u, v, w)$ на границе Γ мы будем обозначать его составляющую по нормали через $U_n : U_n = \vec{U} \cdot \vec{N} = uN_1 + vN_2 + wN_3$. И пусть далее $U_n^{(+)} \equiv (|U_n| + U_n)/2$, $U_n^{(-)} \equiv (|U_n| - U_n)/2$. Отмечаем, что $U_n = U_n^{(+)} - U_n^{(-)}$ на Γ .

2.2. Запишем в области $D(t)$ в переменных (λ, θ, z) при $t \in (0, \bar{t})$ систему уравнений гидротермодинамики в “приближении Буссинеска и гидростатики”, но сохраняя коэффи-

циенты Ламе соответствующими сферической системе координат [107,131]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \vec{u} + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} P + A_u \vec{u} + (A_k)^2 \vec{u} = \vec{f}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \rho g + f_P, \\ \mathbf{div} \vec{u} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} r^2 w = 0, \\ \frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \\ \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \\ \rho = \rho_0 (1 + \beta_T (T - T^{(0)}) + \beta_S (S - S^{(0)}) + \gamma \beta_{TS} (T, S)), \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\vec{f} = (f_1, f_2)$, f_T , f_S , f_P - заданные функции “внутренних” источников, $g = \text{const} > 0$, ρ_0 , $T^{(0)}$, $S^{(0)}$ - “невозможные” значения плотности воды, температуры, солености, β_T , β_S - коэффициенты разложения (считающиеся постоянными), $\beta_{TS}(T, S)$ - сумма всех других членов разложения функции состояния $\rho = \rho(T, S)$, а γ - числовой параметр, введенный формально в выражение для плотности. Если принять $\gamma = 0$, то получим “линейное по T, S приближение” для ρ ; если же $\gamma = 1$, то приходим к “общему случаю”. Заметим также, что путем введения в (1) функции f_P можно в той или иной степени учесть зависимость функции состояния от давления. Так, если $\rho \equiv \rho(T, S, P)$, то запишем ρ следующим образом: $\rho(T, S, P) = \rho(T, S) + f_P/g$, где функция $\rho(T, S) \equiv \rho(T, S, 0)$ представлена в форме из (1), $f_P(T, S, P) \equiv g(\rho(T, S, P) - \rho(T, S, 0))$. Если в выражении для f_P заменить T, S, P их подходящими приближениями, то f_P в (1) будет уже заданной.

2.3. Введем некоторые предположения и осуществим упрощение системы (1). Пусть все рассматриваемые функции и коэффициенты определены при $z \in (0, H)$ и $\rho = \rho_0$, $f_P \equiv 0$ при $z \in (\xi, 0)$.

Будем рассматривать уравнения (1) лишь в области D при $t \in (0, \bar{t})$, которая уже не зависит от ξ . Границу этой области обозначаем через $\Gamma \equiv \partial D$ и представим ее вновь как объединение непересекающихся частей $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}, \Gamma_H$, которые определяются (и обозначаются) так же, как и в случае рассмотрения области $D(t)$.

2.4. Переформулируем теперь задачу (1) с использованием лишь функций u, v, ξ, T, S . С помощью известных преобразований [105,107] получаем следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \vec{u} - g \cdot \mathbf{grad}\xi + A_u \vec{u} + (A_k)^2 \vec{u} = \vec{f} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad}P_a \\ \quad - \frac{g}{\rho_0} \mathbf{grad} \int_0^z \rho_1(T, S) dz', \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - m \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^H \Theta(z) u dz \right) - m \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^H \Theta(z) \frac{n}{m} v dz \right) = f_3, \\ \frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \end{array} \right. \quad (2)$$

где второе уравнение рассматривается на Ω , а остальные – в D при $t > 0$. Здесь и в дальнейшем используется следующая весовая функция: $\Theta(z) \equiv r(z)/R$. Граничные условия для системы (2) имеют вид:

Граничные условия на Γ_S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\int_0^H \Theta \vec{u} dz \right) \vec{n} + \beta_0 m_{op} \sqrt{gH} \xi = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega, \\ U_n^{(-)} u - \nu \frac{\partial u}{\partial z} - k_{33} \frac{\partial}{\partial z} A_k u = \tau_x^{(a)} / \rho_0, \quad U_n^{(-)} v - \nu \frac{\partial v}{\partial z} - k_{33} \frac{\partial}{\partial z} A_k v = \tau_y^{(a)} / \rho_0, \\ A_k u = 0, \quad A_k v = 0, \\ -\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = Q, \\ U_n^{(-)} S - \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S (S - S_a) = Q_S + U_n^{(-)} d_S. \end{array} \right. \quad (3)$$

где

$$Q \equiv Q_T + U_n^{(-)} d_T - \gamma_T (T - T_a) - U_n^{(-)} T.$$

Граничные условия на $\Gamma_{w,c}$ (на “твёрдой боковой стенке”):

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n = 0, \quad A_k \tilde{U} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial N_u} \cdot \tau_w + \left(\frac{\partial}{\partial N_u} A_k \tilde{U} \right) \cdot \tau_w = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial N_S} = 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

где $\tau_w = (-N_2, N_1, 0)$.

Граничные условия на $\Gamma_{w,op}$ (на “жидкой части боковой стенке”):

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n^{(-)} (\tilde{U} \cdot \vec{N}) + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial N_u} \cdot \vec{N} = U_n^{(-)} d, \quad A_k \tilde{U} = 0 \\ U_n^{(-)} (\tilde{U} \cdot \tau_w) + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial N_u} \cdot \tau_w + \left(\frac{\partial}{\partial N_u} A_k \tilde{U} \right) \cdot \tau_w = 0, \\ U_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} = U_n^{(-)} d_T + Q_T, \quad U_n^{(-)} S + \frac{\partial S}{\partial N_S} = U_n^{(-)} d_S + Q_S, \end{array} \right. \quad (5)$$

где d, d_T, d_S, Q_T, Q_S - некоторые функции, которые здесь мы также считаем известными.

Граничные условия на Γ_H (“на дне”):

$$\left\{ \begin{array}{l} w = um \frac{\partial H}{\partial x} + vn \frac{\partial H}{\partial y}, \quad A_k \tilde{U} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial N_u} \cdot \tau_x + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \tilde{U} \right) \cdot \tau_x = \tau_x^{(b)} / \rho_0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial N_u} \cdot \tau_y + \left(\frac{\partial}{\partial N_u} A_k \tilde{U} \right) \cdot \tau_y = \tau_y^{(b)} / \rho_0 \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial N_S} = 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

где $\tau_x^{(b)}, \tau_y^{(b)}$ - проекции вектора придонного трения соответственно на оси Ox, Oy . Отметим, что первое из (6) эквивалентно условию “ $U_n = 0$ на Γ_H ”.

Отметим, что некоторые из приведенных выше граничных условий могут быть модифицированы или заменены другими (см. ниже). Однако для определенности мы здесь приводим лишь граничные условия, сформулированные выше.

Начальные условия ставятся для функций u, v, T, S, ξ :

$$u = u^0, v = v^0, T = T^0, S = S^0, \xi = \xi^0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (7)$$

где $u^0, v^0, T^0, S^0, \xi^0$ - заданные функции.

Отмечаем, что функция $P = P(u, v, \xi, T, S)$ уже не входит ни в систему уравнений (2), ни в граничные условия (3). Эта функция по “заданным” u, v, ξ, T, S определяется по формуле

$$P(x, y, z, t) = P_a(x, y, t) + \rho_0 g(z - \xi) + \int_0^z g \rho_1(T, S) dz', \quad (8)$$

которая дает решение задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial z} = \rho g + f_P \quad 0 < z < H, \\ P = P_a - \rho_0 g \xi \quad z = 0, \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, \bar{t}). \end{array} \right. \quad (9)$$

В (3) также: $U_n|_{z=0} = -w|_{z=0}$, а $w = w(u, v)$ вводится из уравнения непрерывности согласно формуле

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{r} \left(m \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^H r u dz' \right) + m \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{n}{m} \int_z^H r v dz' \right) \right), \quad (10)$$

$$(x, y, t) \in \Omega \times (0, \bar{t})$$

и можно считать, что $w = w(u, v)$ задана, если известны функции u, v . Отметим, что при функции w , определяемой по формуле (10), выполняется не только одно из уравнений (1) – уравнение непрерывности, но и одно из граничных условий при $z = H$ – кинематическое условие, которое эквивалентно условию “ $U_n = 0$ при $z = H$ ”, где $\vec{U} = (u, v, w(u, v))$. Задача крупномасштабной динамики океана в терминах функций u, v, ξ, T, S формулируется так: *найти u, v, ξ, T, S , удовлетворяющие (2), (3), (4)–(7)*.

Если функции u, v, ξ, T, S найдены, то функции P и w вводятся по формулам (8), (10).

§ 3. Метод расщепления и основные особенности численной модели

Для численной аппроксимации модели динамики океана (2), (3), (4)–(7) возможно одновременное применение метода расщепления и σ - системы координат [115, 125]. С использованием данных подходов в ИВМ РАН разработана численная модель динамики океана, которая применялась также и при проведении численных экспериментов (см. ниже).

Приведем сначала схему расщепления, используемую для аппроксимации исходной математической модели динамики океана, в которой в последующем рассматривается случай, когда $\vec{f} \equiv g \cdot \text{grad} G$ при некоторой скалярной функции $G = G(\lambda, \theta, t)$.

3.1. Пусть на $[0, \bar{t}]$ введена сетка: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{j-1} < t_j = \bar{t}$, $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$. Рассмотрим задачу (2), (3), (4)–(7) на (t_{j-1}, t_j) , считая, что вектор приближенного решения $\phi_k \equiv (u_k, v_k, \xi_k, T_k, S_k)$, $k = 1, 2, \dots, j-1$ на предыдущих интервалах уже определен. Применим для аппроксимации получаемой задачи одну из схем метода суммарной аппроксимации, заключающуюся в реализации следующих шагов (для упрощения обозначений индекс j у всех компонентов решений подзадач на этих шагах опускается).

ШАГ 1. На этом шаге рассматривается задача вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_t + (\bar{U}, \mathbf{Grad})T - \mathbf{Div}(\hat{a}_T \cdot \mathbf{Grad} T) = f_T \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ T = T_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \\ -\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = Q \text{ на } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \bar{U}_n^{(-)}T + \frac{\partial T}{\partial N_T} = \bar{U}_n^{(-)}d_T + Q_T \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j), \\ T_j \equiv T \text{ на } D \times (t_{j-1}, t_j). \end{array} \right. \quad (11)$$

После решения задачи (11) функция T_j принимается в качестве приближения к компоненту точного решения T на $D \times (t_{j-1}, t_j)$. В (11) и последующих подзадачах схемы расщепления в качестве $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v}, w(\bar{u}, \bar{v}))$ принимается вектор, вычисленный, например, на основе приближенного решения задачи с предыдущих интервалов или другим подходящим образом (на основе “климатических моделей” и т.д.).

ШАГ 2. Здесь решаем задачу вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_t + (\bar{U}, \mathbf{Grad})S - \mathbf{Div}(\hat{a}_S \cdot \mathbf{Grad} S) = f_S \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ S = S_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \\ \bar{U}_n^{(-)}S - \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S(S - S_a) = Q_S + \bar{U}_n^{(-)}d_S \text{ на } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial S}{\partial N_S} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \bar{U}_n^{(-)}S + \frac{\partial S}{\partial N_S} = \bar{U}_n^{(-)}d_S + Q_S \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial S}{\partial N_S} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j), \\ S_j \equiv S \text{ на } D \times (t_{j-1}, t_j). \end{array} \right. \quad (12)$$

После этого шага S_j принимается в качестве приближения к S на $D \times (t_{j-1}, t_j)$.

Третий шаг схемы расщепления состоит из трех подэтапов и заключается в решении трех подзадач.

ШАГ 3. Сначала решается задача

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_t^{(1)} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \underline{u}^{(1)} - g \cdot \mathbf{grad} \xi^{(1)} = g \cdot \mathbf{grad} G - \\ \frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} \left(P_a + g \int_0^z \rho_1(\bar{T}, \bar{S}) dz' \right) \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \xi_t^{(1)} - \mathbf{div} \left(\int_0^H \Theta \underline{u}^{(1)} dz \right) = f_3 \text{ в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{u}^{(1)} = \underline{u}_{j-1}, \quad \xi^{(1)} = \xi_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1}, \\ \left(\int_0^H \Theta \underline{u}^{(1)} dz \right) \cdot n + \beta_0 m_{op} \sqrt{gH} \xi^{(1)} = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{u}_j^{(1)} \equiv \underline{u}^{(1)}(t_j) \text{ в } D \end{array} \right. \quad (13)$$

и функция $\xi_j \equiv \xi^{(1)}$ принимается в качестве приближения к

ξ на (t_{j-1}, t_j) ; затем решаются следующие подзадачи

$$\begin{cases} \underline{u}_t^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 & -f_1(\bar{u}) \\ f_1(\bar{u}) & 0 \end{bmatrix} \underline{u}^{(2)} = 0 \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{u}^{(2)} = \underline{u}_j^{(1)} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \\ \underline{u}_j^{(2)} \equiv \underline{u}^{(2)}(t_j) \text{ в } D, \end{cases} \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_t^{(3)} + (\bar{U}, \mathbf{Grad}) \underline{u}^{(3)} - \mathbf{Div}(\hat{a}_u \cdot \mathbf{Grad}) \underline{u}^{(3)} + (A_k)^2 \underline{u}^{(3)} = 0 \\ \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{u}^{(3)} = \underline{u}^{(2)} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \\ \bar{U}_n^{(-)} \underline{u}^{(3)} - \nu_u \frac{\partial \underline{u}^{(3)}}{\partial z} - k_{33} \frac{\partial}{\partial z} (A_k \underline{u}^{(3)}) = \frac{\tau^{(a)}}{\rho_0}, A_k \underline{u}^{(3)} = 0 \\ \text{на } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(3)} = 0, \frac{\partial U^{(3)}}{\partial N_u} \cdot \bar{\tau}_w + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \underline{u}^{(3)} \right) \cdot \bar{\tau}_w = 0, \\ A_k \underline{u}^{(3)} = 0 \\ \text{на } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \bar{U}_n^{(-)} (\tilde{U}^{(3)} \cdot \underline{N}) + \frac{\partial \tilde{U}^{(3)}}{\partial N_u} \cdot \bar{N} + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \underline{u}^{(3)} \right) \cdot \bar{N} = \bar{U}_n^{(-)} d, \\ A_k \underline{u}^{(3)} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \bar{U}_n^{(-)} (\tilde{U}^{(3)} \cdot \bar{\tau}_w) + \frac{\partial \tilde{U}^{(3)}}{\partial N_u} \cdot \bar{\tau}_w + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \underline{u}^{(3)} \right) \cdot \bar{\tau}_w = 0, \\ A_k \underline{u}^{(3)} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial \underline{u}^{(3)}}{\partial N_u} = \frac{\tau^{(b)}}{\rho_0} \text{ на } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j), \end{array} \right. \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} u^{(3)} &= (u^{(3)}, v^{(3)}), \quad \tau^{(a)} = (\tau_x^{(a)}, \tau_y^{(a)}), \\ U^{(3)} &= (u^{(3)}, w^{(3)}(u^{(3)}, v^{(3)})), \quad \tilde{U}^{(3)} = (u^{(3)}, 0), \\ \tau^{(b)} &= (\tau_x^{(b)}, \tau_y^{(b)}). \end{aligned}$$

После решения (15) вектор $u^{(3)} \equiv u_j \equiv (u_j, v_j)$ принимается в качестве приближения к точному вектору u на $D \times (t_{j-1}, t_j)$ и вычисляется приближение $w_j \equiv w(u_j, v_j)$ к вертикальному компоненту вектора скорости.

Заметим, что решение задачи (13) можно осуществить путем представления $\underline{u}^{(1)}$ в виде:

$$\underline{u}^{(1)} = \underline{U}^{(1)}(\lambda, \theta, t) + \underline{u}'_1(\lambda, \theta, z, t), \quad (16)$$

где

$$\underline{U}^{(1)} = \frac{1}{H_1} \int_0^H \Theta \underline{u}^{(1)} dz, \quad H_1 = \int_0^H \Theta dz.$$

Легко заметить, что функции $\underline{U}^{(1)}$, \underline{u}'_1 удовлетворяют следующим системам уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{U}_t^{(1)} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \underline{U}^{(1)} - g \cdot \mathbf{grad} \xi^{(1)} = g \cdot \mathbf{grad} G - \underline{I} \\ \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \xi_t^{(1)} - \mathbf{div}(H_1 \underline{U}^{(1)}) = f_3 \text{ в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{U}^{(1)}(t_{j-1}) = \frac{1}{H_1} \int_0^H \Theta \underline{u}_{j-1} dz, \quad \xi^{(1)}(t_{j-1}) = \xi_{j-1} \text{ в } \Omega, \\ (H_1 \underline{U}^{(1)}) \cdot \underline{n} + \beta_0 m_{op} \sqrt{gH} \xi^{(1)} = m_{op} \sqrt{gH} d_S, \end{array} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\underline{u}'_1)_t + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \underline{u}'_1 = \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{1}{H_1} \int_0^H \Theta dz \int_0^z \mathbf{grad} \rho_1(\bar{T}, \bar{S}) dz' - \right. \\ \left. \int_0^z \mathbf{grad} \rho_1(\bar{T}, \bar{S}) dz' \right), \\ \underline{u}'_1(t_{j-1}) = \underline{u}_{j-1} - \frac{1}{H_1} \int_0^H \Theta \underline{u}_{j-1} dz, \end{array} \right. \quad (18)$$

где

$$\underline{I} = (I_\lambda, I_\theta) = \frac{1}{\rho_0} \left(\mathbf{grad} P_a + g \frac{1}{H_1} \int_0^H \Theta dz \int_0^z \mathbf{grad} \rho_1(\bar{T}, \bar{S}) dz' \right).$$

Таким образом, при реализации шагов 1–3 после первого шага получаем приближение к T , после второго – к S , а после третьего – приближения к $\underline{u} = (u, v)$, ξ , т.е. *подзадачи на этих шагах независимы друг от друга и могут решаться в "параллельном режиме"*. Однако, *подзадачи внутри третьего шага являются "сцепленными", и связь этих подзадач осуществляется через начальные условия*. Это обстоятельство следует учитывать в дальнейшем при исследовании и решении задач вариационной ассимиляции данных.

Заметим также, что, если для численного решения задач (11)–(15) будет использоваться метод конечных разностей, то уже на этом этапе во всех уравнениях можно принять $\Theta(z) \cong 1$. Если же предполагается использование, например, метода конечных элементов, то сначала необходимо перейти к обобщенным постановкам задач (11)–(15), а затем положить $\Theta(z) \cong 1$. Возможен также смешанный подход, когда некоторые из этих задач могут решаться с помощью разностных схем, а остальные – другими методами.

3.2. Как отмечалось ранее, одной из особенностей численного решения полной задачи (2),(3),(4)–(7) является использование σ -системы координат. Переход к σ -системе можно осуществить на этапе рассмотрения полной задачи перед применением подходящих схем расщепления и других численных процедур. Однако, переход к σ -системам возможен также после применения схем расщепления, т.е., в нашем случае, в применении к задачам (11)–(15) (или даже к некоторым из этих подзадач). Мы здесь не обсуждаем преимущества и недостатки каждого из двух указанных подходов использования σ -системы координат.

Записывая задачи из (11)–(15) в σ -системе координат, в дальнейшем можно применить для их численной аппроксимации подходящие численные методы.

3.3. В связи с рассматриваемой далее задачей вариаци-

онной ассимиляции данных о поверхностной температуре сформулируем дальнейшие шаги по численному решению задачи (11). Запишем оператор

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} (r^2 w T)$$

следующим образом

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} (r^2 w T) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} (r^2 w_1 T) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} (r^2 W T),$$

где $W = \frac{z}{H} (m u \frac{\partial H}{\partial \lambda} + n v \frac{\partial H}{\partial \theta})$, $w_1 = w - W$.

Представим (11) в форме операторного уравнения

$$T_t + L T = f_T, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \quad (19)$$

$$T = T_{j-1}, \quad \text{при } t = t_{j-1}, \quad (j = 1, 2, \dots, J)$$

Применить для аппроксимации (19) один из *методов суммарной аппроксимации* :

$$(T_1)_t + L_1 T_1 = 0, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \quad (20)$$

$$T_1 = T_{j-1} \quad \text{при } t = t_{j-1}$$

$$(T_2)_t + L_2 T_2 = f_T, \quad t \in (t_{j-1}, t_j), \quad (21)$$

$$T_2(t_{j-1}) = T_1(t_{j-1}),$$

с соответствующими граничными условиями. Здесь

$$L_1 T_1 = \frac{1}{2} (u, \mathbf{grad}) T_1 + \frac{1}{2} \mathbf{div} (u T_1) + \frac{1}{2} W \frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{1}{2 r^2} \frac{\partial r^2 W T}{\partial z} -$$

$$\mathbf{div} \mu_T \mathbf{grad} T_1$$

$$L_2 T_2 = \frac{1}{2} \left(w_1 \frac{\partial T_2}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 w_1 T_2)}{\partial z} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} r^2 \nu_T \frac{\partial T_2}{\partial z}$$

Граничные условия для T_1 естественным образом следуют из граничных условия для T . После решения подзадачи (21)

функция $T_2(t_j)$ принимается в качестве приближенного решения (11) при $t = t_j$:

$$T_2(t_j) \equiv T_j \cong T \quad \text{при } t = t_j. \quad (22)$$

Отметим, что оператор L_1 также можно представить в виде суммы более "элементарных" операторов, а затем сформулировать подходящий метод для решения подзадачи (20). Описание возможных приближений по методу расщепления приводится например в .

Классическая форма записи (21) имеет вид (при $T_2 \equiv T$):

$$\left\{ \begin{array}{l} T_t + \frac{1}{2} \left(w_1 \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 w_1 T)}{\partial z} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} r^2 \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = f_T \quad \text{в } D \\ \quad \text{при } t \in (t_{j-1}, t_j), \\ \\ T = T_1(t_j) \\ \quad \text{при } t = t_{j-1}, \\ \\ -\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = Q \quad \text{при } z = 0 \\ \\ \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H, \end{array} \right. \quad (23)$$

где $\bar{U}_n^{(-)} = \frac{|\bar{U}_n| - \bar{U}_n}{2} = \frac{1}{2}(|\bar{w}_1| + \bar{w}_1) = \frac{1}{2}(|\bar{w}| + \bar{w})$ при $z = 0$, а функцию Q :

$$Q \equiv Q_T - \gamma_T(T - T_a) - \bar{U}_n^{(-)}T + \bar{U}_n^{(-)}d_T \quad (24)$$

можно рассматривать как суммарный приток тепла.

Система уравнений (20), (21), (12)–(15), рассматриваемая на $\{(t_{j-1}, t_j)\}$ задает аппроксимацию исходной задачи (1)–(7), построенную по методу расщепления, и эту задачу в последующем мы будем называть **Задачей I**.

Если для (20), (21), (12)–(15) ввести те или иные аппроксимации по временной переменной (неявная схема, схема

Кранка-Николсон, "схемы с весами" и др.), то мы получим *полудискретный аналог задачи (1)–(7)*.

§ 4. Задача ассимиляции данных о температуре поверхности океана

В данном разделе мы рассмотрим задачу об ассимиляции данных о температуре поверхности океана [105,119,131].

4.1. Будем предполагать, что каждому $t \in (0, \bar{t})$ соответствует некоторое подмножество Ω_0 из Ω , характеристическую функцию которого обозначим через $m_0 \equiv m_0(t)$. Условимся также, что на каждом интервале $t \in (t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, 2, \dots, J$ подмножество $\Omega_0 \equiv \Omega_0^{(j)}$ неизменно (а также $m_0 \equiv m_0^{(j)}$), т.е. изменение Ω_0 возможно при переходе к другому интервалу (t_j, t_{j+1}) и т.д.

При рассмотрении граничного условия для T при $z = 0$ из задачи (11) мы будем записывать его следующим образом:

$$-\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = Q \text{ при } z = 0 \text{ на } \Omega_0^{(j)} \times (t_{j-1}, t_j),$$

где Q есть обозначение суммарного притока тепла

$$Q = Q_T + \bar{U}_n^{(-)} d_T - \gamma_T (T - T_a) - \bar{U}_n^{(-)} T,$$

тогда как на $(\Omega \setminus \Omega_0^{(j)}) \times (t_{j-1}, t_j)$ форма записи граничных условий остается прежней:

$$\bar{U}_n^{(-)} T - \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T (T - T_a) = Q_T + \bar{U}_n^{(-)} d_T$$

$$\text{при } z = 0 \text{ на } (\Omega \setminus \Omega_0^{(j)}) \times (t_{j-1}, t_j)$$

Примем теперь функцию Q на $\Omega_0^{(j)} \times (t_{j-1}, t_j)$ за "дополнительную неизвестную которая подлежит определению вместе со всеми компонентами задачи. Обращаем внимание, что на $(\Omega \setminus \Omega_0^{(j)}) \times (t_{j-1}, t_j)$ все функции, входящие в граничное условие (кроме T) считаем заданными.

Предположим, что единственной функцией, которая при $t \in (t_{j-1}, t_j)$ получена путем обработки данных спутниковых наблюдений есть функция T_{obs} на подмножестве $\Omega_0^{(j)}$ из Ω .

Пусть функция $T_{obs} \equiv T_{obs}^{(j)}$ при $t \in (t_{j-1}, t_j)$ по своему физическому смыслу есть приближение к функции поверхностной температуры на $\Omega_0^{(j)}$ при $t \in (t_{j-1}, t_j)$, т.е. к $T|_{z=0}$. Вне подмножества $\Omega_0^{(j)}$ при $t \in (t_{j-1}, t_j)$ для определенности считаем $T_{obs}^{(j)}$ тривиальной.

Сформулируем теперь следующую обратную задачу – **Задачу О**: *требуется найти решение $\phi = (u, v, \xi, T, S)$ Задачи I и функцию Q на $\{\Omega_0^{(j)}\}$, такие, что выполнены граничные условия на Ω ($\forall t \in (t_{j-1}, t_j)$):*

$$-\nu_T \frac{\partial T_2}{\partial z} = Q \text{ при } z = 0 \text{ на } \Omega_0^{(j)} \times (t_{j-1}, t_j),$$

$$\bar{U}_n^{(-)} T_2 - \nu_T \frac{\partial T_2}{\partial z} + \gamma_T (T_2 - T_a) = Q_T + \bar{U}_n^{(-)} d_T$$

$$\text{при } z = 0 \text{ на } (\Omega \setminus \Omega_0^{(j)}) \times (t_{j-1}, t_j)$$

и дополнительном условии вида

$$T_2 = T_{obs}^{(j)} \text{ на } \Omega_0^{(j)} \times (t_{j-1}, t_j) \text{ при } j = 1, 2, \dots, J.$$

Отметим, что сформулированную задачу можно также интерпретировать как задачу "точного управления", если функция Q на $\{\Omega_0^{(j)}\}$ рассматривается как управление. Эту задачу можно свести к задаче вариационной ассимиляции данных.

4.2. Итак, дополнительной неизвестной ("управлением") является функция полного потока Q на $\{\Omega_0^{(j)}\}$, задаваемого в (3), тогда как на множествах $\{\Omega \setminus \Omega_0^{(j)}\}$ функция Q считается заданной (см. (3)). Введем функционал стоимости вида:

$$J_\alpha \equiv J_\alpha(Q, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega_0(t)} \alpha |Q - Q^{(0)}|^2 d\Omega dt + J_0(\phi) = \sum_{j=1}^J J_{\alpha,j}, \quad (25)$$

где

$$J_0(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega_0(t)} m_0 |T - T_{obs}|^2 d\Omega dt.$$

$$J_{\alpha,j} = \frac{1}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega_0^{(j)}} \alpha |Q - Q^{(0)}|^2 d\Omega dt + \frac{1}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega_0^{(j)}} m_0^{(j)} |T - T_{obs}^{(j)}|^2 d\Omega dt$$

Здесь: $\alpha \equiv \alpha(\lambda, \theta, t)$ – функция, играющая роль "регуляризатора" или "штрафной функции" (возможен случай, когда $\alpha(\lambda, \theta, t) = \text{const} \geq 0$) и которая может быть размерной величиной, а $Q^{(0)} \equiv Q^{(0)}(\lambda, \theta, t)$ – заданная функция (которая может быть также и тривиальной).

Задача вариационной ассимиляции формулируется следующим образом: *требуется найти решение $\phi = (u, v, \xi, T, S)$ Задачи I и функцию Q на $\{\Omega_0^{(j)}\}$, такие, чтобы на них функционал (25) принимал наименьшее значение.*

Следуя [119, 131] показывается, что решение системы оптимальности, которая определяет решение сформулированной задачи вариационной ассимиляции данных, сводится к последовательному решению некоторых подзадач на $t \in (t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, 2, \dots, J$.

Эти подзадачи мы также распределим по Шагам 1-3, которые мы приведем лишь для интервала (t_0, t_1) .

ШАГ 1. На данном шаге необходимо решить систему вариационных уравнений, возникающую при минимизации J_α на решениях уравнений метода расщепления, системы сопряженных уравнений вида:

$$\begin{cases} (T_2^*)_t + L_2^* T_2^* = B^* m_0^{(1)} (T - T_{obs}^{(1)}) & \text{в } D \times (t_0, t_1), \\ T_2^* = 0 & \text{при } t = t_1, \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} (T_1^*)_t + L_1^* T_1^* = 0 & \text{в } D \times (t_0, t_1), \\ T_1^* = T_2^*(t_0) & \text{при } t = t_1 \end{cases} \quad (27)$$

и следующего условия оптимальности

$$\alpha(Q - Q^{(0)}) + T_2^* = 0 \quad \text{на } \Omega_0^{(1)} \times (t_0, t_1). \quad (28)$$

где L_1^*, L_2^* – операторы сопряженные к L_1, L_2 соответственно, а T_1^*, T_2^* – решение сопряженных задач (26), (27). После чего функции $T_2, Q(t_1)$ принимаются в качестве приближения к компонентам T, Q полного решения Задачи I при $t = t_1$, а $T_2(t_1) \cong T(t_1)$ берется в качестве начального условия для T при решении задач на (t_1, t_2) .

ШАГ 2. Решается задача для S :

$$S_t + (\bar{U}, \mathbf{Grad})S - \mathbf{Div}(\hat{a}_S \cdot \mathbf{Grad} S) = f_S \quad \text{в } D \times (t_0, t_1) \quad (29)$$

при соответствующих граничных и начальном условиях. После этого функция S принимается за приближенное решение, а $S(t_1)$ – в качестве начального состояния при решении задачи на (t_1, t_2) .

ШАГ 3. На данном шаге необходимо решить систему уравнений (17), (18), (14), (15).

4.3. Сформулируем некоторые из алгоритмов решения рассматриваемой задачи ассимиляции данных.

Построение приближенных решений всей полной численной модели с одновременным определением Q посредством процедуры вариационной ассимиляции T_{obs} может быть осуществлено следующим итерационным алгоритмом: если $Q^{(k)}$ есть уже построенное приближение к Q , то решается подзадача метода расщепления по вертикали при $Q \equiv Q^{(k)}$, соответствующая ей сопряженная задача, а затем определяется следующее приближение $Q^{(k+1)}$:

$$Q^{(k+1)} = Q^{(k)} - \gamma_k(\alpha(Q^{(k)} - Q^{(0)}) + T_2^*) \quad \text{на } \Omega_0^{(1)} \times (t_0, t_1) \quad (30)$$

с параметром γ_k , который выбирается так, чтобы рассматриваемый итерационный процесс сходил . После определения $Q^{(k+1)}$ решение повторяется уже с новым приближением

$Q^{(k+1)}$, а затем вычисляется $Q^{(k+2)}$ и т.д. Итерации повторяются до выполнения подходящего критерия сходимости процесса.

После определения T, Q с необходимой точностью реализуются Шаги 2-3 в рассмотренной ранее схеме расщепления, что завершает определение приближенного решения полной задачи в D при $t = t_1$.

Решение полной задачи с доопределением Q на других множествах $\Omega_0^{(j)} \times (t_{j-1}, t_j)$ при $j > 1$ осуществляется аналогичным образом.

Отмечаем, что в приведенной выше итерационной процедуре минимизируется функционал J_α , а параметры γ_k , выбираемые соответствующим образом, обеспечивают сходимость $Q^{(k)} \rightarrow Q$, $T^{(k)} \rightarrow T_{obs}$ при $k \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow +0$ по норме пространства $L_2(\Omega_0^{(j)} \times (t_{j-1}, t_j))$.

Рассмотренная выше задача вариационной ассимиляции относится к классу "4-мерных задач вариационной ассимиляции". Метод расщепления здесь рассматривается как метод аппроксимации исходной модели, а сама же задача вариационной ассимиляции решается на множестве $D \times (t_0, t_1)$ (или на $D \times (t_{j-1}, t_j)$, $j > 1$).

Заметим, что алгоритмы численного решения этой задачи при предположении что T_{obs} задана на всем множестве Ω , $t \in (t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, 2, \dots, J$ изучались в [119].

§ 5. Результаты численного решения задачи вариационной ассимиляции

В этом параграфе приводятся результаты численных экспериментов (на примере Индийского океана) по решению обратной задачи о восстановлении функции Q на $\Omega_0^{(j)} \times (t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, 2, \dots, J$ путем вариационной ассимиляции данных о температуре поверхности океана.

5.1. При проведении численных экспериментов были выбраны следующие модификации граничных условий и коэф-

фициентов в них .

Пусть $d_T \equiv 0$, $d_S \equiv 0$ и на поверхности $z = 0$ в качестве начального приближения для Q и в качестве Q_S были выбраны следующие функции

$$Q = (Q_0 - 0.4Q_{SW})/(\rho_0 c_0) + \gamma_T(T_a - T),$$

$$Q_S = -Q_{FW}S + \gamma_S(S_a - S),$$

где ρ_0 , c_0 – плотность и теплоемкость морской воды, соответственно; γ_T и γ_S – коэффициенты, моделирующие отрицательные обратные связи, имеющиеся при реальном взаимодействии атмосферы и океана. Они “привязывают” модельные значения температуры T и солёности S к значениям температуры и солёности на поверхности, полученным из наблюдений T_a и S_a ; Q_0 – баланс тепла на поверхности океана; Q_{SW} – баланс коротковолновой радиации на поверхности; Q_{FW} – поток пресной воды, включающий в себя разность осадков и испарений, а также сток рек. Коэффициент -0.4 при Q_{SW} объясняется тем, что эта часть потока коротковолновой радиации проникает вглубь океана, экспоненциально затухая по глубине с параметром 20 м.

Напряжение трения о дно параметризуется согласно формуле

$$\frac{1}{\rho_0} (\tau_\lambda^b, \tau_\theta^b) = -C_d \sqrt{(u^2 + v^2 + e_b^2)} (u, v),$$

где $C_d = 2.5 \times 10^{-3}$ – коэффициент квадратичного трения, $e_b = 5$ см/с – эмпирическая добавка, характеризующее придонное трение при малых скоростях.

Коэффициент k_{33} в операторе четвертого порядка полагался равным нулю, что формально в математической постановке задачи допустимо. Коэффициенты же k_{11} и k_{22} подбирались таким образом, чтобы при пространственно-временной аппроксимации уравнений они содержали “сеточный фильтр”, позволяющий ослабить высокочастотные гар-

моники для компонент скорости примерно в 2 раза за шаг интегрирования и, следовательно, снизить “шумы”.

Во всех численных экспериментах принималось $\Theta(z) \cong 1$, а также $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z}(r^2 \varphi) \cong \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

На всей боковой границе и на дне ставилось условие $U_n = 0$, в силу которого вид ряда граничных условий в исходной задаче упрощался.

Кроме того, в условиях для T, S на “жидких” участках береговой границы вместо приведенных ранее ставятся условия так называемых “теплых” и “соленых” стенок:

$$T = T_{obs}, \quad S = S_{obs},$$

где T_{obs} и S_{obs} – наблюдаемые значения температуры и солености на жидких границах.

Таким образом при проведении численных экспериментов в прямой модели к системе уравнений присоединяются соответствующие граничные и начальные условия. Граничные условия на поверхности океана $z = 0$ были взяты следующими :

$$-\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = Q, \quad -\nu_S \frac{\partial S}{\partial z} = \gamma_S(S_0 - S) + S(E - P)$$

где γ_T и γ_S коэффициенты, определяющие степень близости температуры T и солености S к заданным на поверхности значениям T_0 и S_0 ; Q_0 поток тепла в океан; $E - P$ разница испарений E и осадков P ;

$$-\nu_u \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_1}{\rho_0}, \quad -\nu_v \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_2}{\rho_0},$$

где τ_1, τ_2 компоненты напряжения трения ветра, ν_u, ν_v коэффициенты вертикальной вязкости. На дне $z = H$ задаются следующие условия :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w_1 = 0$$

Граничные условия на боковой цилиндрической поверхности имеют вид :

$$\frac{\partial T}{\partial N} = \frac{\partial S}{\partial N} = 0, \quad (\vec{u}, n) = 0, \quad \vec{u} = (u, v)$$

где N направление конормали. В начальный момент времени задаются начальные значения горизонтальных компонент скорости, температуры и солёности:

$$u = u^{(0)}, v = v^{(0)}, T = T^{(0)}, S = S^{(0)}.$$

5.2. Для экспериментов использовалась разработанная в ИВМ РАН глобальная трехмерная модель гидротермодинамики океана . Эта модель была дополнена описанным выше блоком ассимиляции температуры поверхности T_{obs} .

В качестве объекта моделирования рассматривается акватория Индийского океана. Параметрами рассматриваемой области и ее географических координат являются: сетка 120x131x33 точки (широта×долгота×глубина); первая точка сетки – точка с координатами 22.5 (градусов восточной долготы) и -35.5 (градусов южной широты). Шаги сетки по x и по y постоянны и равны соответственно 1.0 и 0.5 градуса. Шаг по времени $\Delta t = 1$ час.

В качестве T_{obs} использовались данные поверхностной температуры Индийского океана за 2000 г., полученные в ГЦ РАН.

В качестве $Q^{(0)}$ использовался среднеклиматический поток за январь, полученный по данным реанализа NCEP (National Centers for Environmental Prediction), а также поток, вычисляемый в прямой модели динамики океана .

На рисунке 1 мы приведем вид "маски" для данных спутниковых наблюдений о поверхностной температуре океана. Так в первый и 15-ый расчетный час данные наблюдений известны и представлены на рисунке 1 ((а),(б), соответственно).

Количество данных наблюдений за 8 расчетных часов и 1 месяц приведены на рисунке 2.

Из графиков видна неравномерность распределения данных как по пространству (акватории Индийского океана), так и по времени. В среднем можно считать что в произвольной точке акватории данные известны с периодом в 6-8 часов.

С помощью представленной модели гидротермодинамики океана, дополненной “блоком ассимиляции” температуры поверхности T_{obs} , были проведены расчеты на акватории Индийского океана, в которых работала процедура усвоения. Расчеты включали в себя ассимиляцию T_{obs} сроком на 28 суток и 3 месяца (за начало эксперимента бралось 1 января 2000 г.). В данной работе считалось что данные наблюдений, представленные для расчетов не имеют ошибок.

Приведем некоторые результаты численных экспериментов.

5.3. В первой серии экспериментов исследовалась зависимость восстанавливаемой поверхностной температуры и потока от параметра регуляризации. Как известно расчет потока тепла – важная характеристика теплообмена атмосфера и океана. Поэтому иногда более важной становится задача отыскания приемлемого потока тепла из океана в атмосферу, что приводит к адекватной работе совместной модели атмосфера-океан. При рассматриваемой постановке задачи одним из параметров, который оказывает влияние на "точность" процесса усвоения является параметр регуляризации. Например, при решении задачи с параметром $\alpha = 10^{-5}$ в функционале (25) доминирующими являются члены с температурой и как следствие поверхностная температура океана будет отличаться от наблюдаемой температуры на 0.2 градуса, однако при этом поток может отличаться от среднеклиматического в 10 и более раз.

Если же решать задачу с параметром $\alpha = 10^5$, то разность между восстановленной температурой и наблюдаемой

в среднем становиться не лучше чем 0.5 градуса, а поток может отличаться от среднеклиматического лишь в 2-3 раза. В качестве иллюстрации к вышесказанному на рисунке 3 показаны результаты двух экспериментов проведенных с различными параметрами регуляризации. Так на рисунке 3(a) представлено значение потока при $\alpha = 10^3$, а на рисунке 3(b) при $\alpha = 10^4$ (Полученные значения можно сравнить со значением среднеклиматического потока представленного на рисунке 8(b)). Соответствующие значения разности восстановленной поверхностной температуры океана и данными наблюдений представлены на рисунках 3(c) ($\alpha = 10^3$) и 3(d) ($\alpha = 10^4$). Как видно из этих рисунков увеличение параметра регуляризации в 10 раз приводит к уменьшению потока тепла в 2 раза. При этом разность между восстановленной температурой поверхности океана и данными наблюдений ухудшается в среднем на 0.5 градуса.

Таким образом с помощью параметра регуляризации можно влиять на процесс восстановления поверхностной температуры и величину потока. Если целью эксперимента является восстановление температуры поверхности океана, то необходимо проводить эксперимент с малым значением параметра α (например, α может выбираться в диапазоне от 10^{-4} до 10^{-6}), если же цель расчета использовать поток тепла для дальнейших вычислений, например в совместной модели атмосфера-океан, то параметр α следует выбирать достаточно большим (в этом случае α может варьироваться от 10^4 до 10^7). Целью дальнейших экспериментов будет восстановление поверхностной температуры с максимальной возможной точностью для прогноза от нескольких часов до нескольких дней, поэтому в дальнейшем параметр регуляризации выбирается малым.

5.4. В данной серии экспериментов расчет с усвоением проводился на период 29 суток. При этом усвоение температуры поверхности океана проводилось в течении 28 дней с параметром регуляризации $\alpha = 10^{-5}$, а затем проходил

расчет по модели без усвоения на следующие 2 суток. В качестве потока для расчета без усвоения выбирались следующие схемы: (1) выбирался поток, рассчитываемый по прямой модели; (2) выбирался поток, полученный по окончанию процесса усвоения температуры поверхности океана; (3) первые 6 часов в качестве потока брался поток, полученный в процессе усвоения температуры поверхности океана, далее поток считался равным потоку, пересчитываемому в прямой модели.

На рисунке 4 представлены данные наблюдений о поверхностной температуре океана на моменты прогноза: 28 дней и 6 часов и на 30 день.

На рисунке 5 приведены результаты расчета по схеме (1). На данном рисунке показано значение прогнозируемой поверхностной температуры на 6-ой час и 2-ой день после окончания работы процедуры усвоения. Точность прогноза в данном эксперименте варьируется от 0.5 градуса (для прогноза на 6 часов) до 1 градуса (для прогноза на 2-е суток).

На рисунке 6 приведены результаты расчета по схеме (2). На данном рисунке, также как и на рисунке 5, показано значение предсказываемой поверхностной температуры за 6 часов и 2 день после окончания работы процедуры усвоения. В данном случае точность 6 часового прогноза составила 0.2 градуса, а точность прогноза на 2-е суток составила в среднем 0.8 градуса.

На рисунке 7 приведены результаты расчета по схеме (3). В случае комбинированного потока точность прогноза составила 0.2 градуса для 6 часового прогноза и около 1 градуса для прогноза на 2-е суток.

Следует отметить, что в среднем схема с комбинированным потоком (3) оказалась лучше схемы с потоком, рассчитываемым по модели (1). Однако точнее всего была схема (2), где использовался поток после усвоения поверхностной температуры.

Значение потока, полученного после процесса усвоения,

с которым производится прогноз на 6 часов приведен на рисунке 8 (а). На рисунке 8 (b) показан поток, рассчитываемый в прямой модели, с которым производится прогноз на оставшееся время (с 6 часов до 2 дней).

Этот расчет показал возможность усвоения данных о поверхностной температуре с одновременным отысканием потоков. Представленные численные эксперименты также показали возможность использовать потоки, полученные в ходе усвоения данных о поверхностной температуры, для прогноза температуры на несколько часов. Для более точного прогноза возможно следует с некоторого момента времени использовать среднеклиматический поток или брать средние потоки за несколько часов (например, 6 часов), что может улучшить результат прогноза на более длительный срок.

5.5. В следующей серии экспериментов расчет проводился на период 3 месяца и 3 дня. При этом усвоение температуры поверхности океана проводилось в течении 3 месяцев с параметром регуляризации $\alpha = 10^{-5}$, а затем проходил расчет по модели без усвоения на следующие 3 суток. В качестве потока для расчета без усвоения выбирались следующие схемы: (1) выбирался поток полученный в процессе усвоения температуры поверхности океана; (2) первые 9 часов в качестве потока использовался поток, полученный в процессе усвоения температуры поверхности океана, далее поток считался равным потоку, пересчитываемому в прямой модели. Также был проведен расчет по прямой модели на весь период эксперимента, то есть на 3 месяца и 3 дня.

Вначале приведем данные наблюдений о поверхностной температуре океана на моменты прогноза: 3 месяца и 9 часов и на 3 месяца и 3 дня (см. рисунок 9).

Данные полученные в ходе расчета по прямой модели приведены на рисунке 10. В данном случае ошибка при вычислении температуры поверхности океана привысила 1 градус как для расчета на 3 месяца и 9 часов, так и при расчете

на 3 месяца и 3 дня.

Результаты эксперимента по схеме (1), когда в качестве потока для расчета прогноза выбирается поток, полученный в ходе процесса усвоения показаны на рисунке 11. При использовании данной схемы улучшение при ассимиляции поверхностной температуры произошло для прогноза на 9 часов (ошибка менее 0.25 градуса), однако при прогнозе на 3 дня ошибка была больше 1-ого градуса.

В третьей части данного эксперимента задавался "комбинированный" поток по схеме (2). Результаты данного эксперимента представлены на рисунке 12. По результатам численного моделирования можно сделать вывод, что предсказание на короткий промежуток времени возможно проводить с потоком, полученным в результате применения процедуры усвоения температуры поверхности океана. Однако для прогноза на более длительный срок необходимо использовать дополнительную информацию о потоке, например, на определенное время возвращаться к потоку рассчитываемому в прямой модели или использовать среднеклиматический поток. В результате применения данной схемы удалось уменьшить ошибку при прогнозе температуры поверхности океана на 3 суток до 0.5 градуса.

Таким образом, в настоящей главе с применением методов и подходов, изложенных в настоящем курсе лекций, сформулирована и численно исследована задача вариационной ассимиляции данных о температуре поверхности океана с целью восстановления потоков тепла на поверхности с использованием разработанной в ИВМ РАН глобальной трехмерной модели гидротермодинамики океана и данных спутниковых наблюдений, приближенными к реально наблюдаемым (по временным интервалам).

Следует отметить, что расчет потока тепла является важной характеристикой теплообмена между атмосферой и океаном и его правильное воспроизведение также является одной из задач, требующей пристального внимания. Вариаци-

ей параметра регуляризации можно добиться лучшего соответствия получаемого потока средне-климатическому, однако необходимо привлекать и другие средства, повышающие точность воспроизведения потока. Например, использовать в качестве $Q^{(0)}$ данные о потоке, полученные по результатам реанализа за 6 часов. Другая возможность повышения качества прогноза на более длительные сроки состоит в решении дополнительной задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений о потоках тепла (при условии, что они имеются или рассчитываются по атмосферному воздействию или по эмпирическим формулам) и "вертикального профиля температуры". Однако здесь необходимо решить задачу построения функций вертикального распределения температуры, для чего могут быть привлечены разнообразные данные наблюдений (спутниковые, буйковые, климатические), использованы специальные методологии проведения расчетов в динамике океана, а также необходимо создать соответствующий математический аппарат по решению всех этих задач.

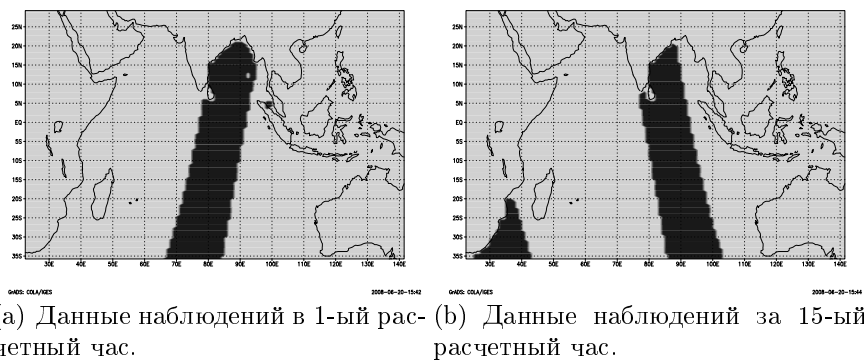


Рис. 1: Данные наблюдений в отдельные моменты времени.

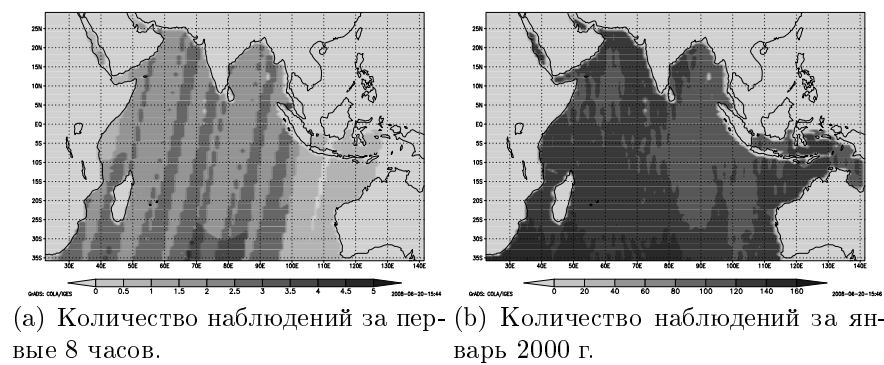


Рис. 2: Количество наблюдений за определенный период.

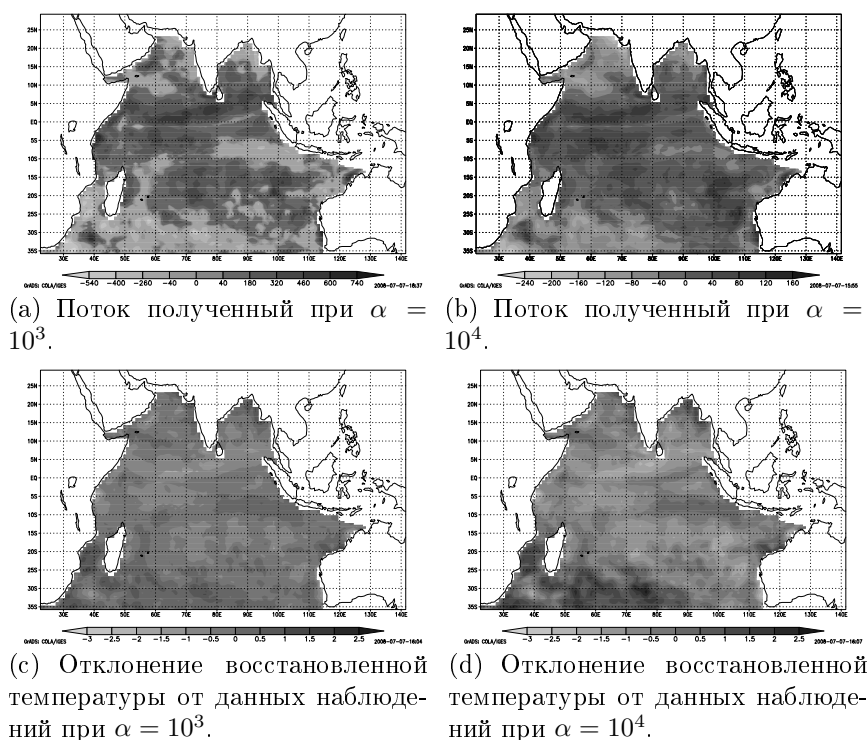


Рис. 3: Зависимость усваиваемых величин от параметра регуляризации.

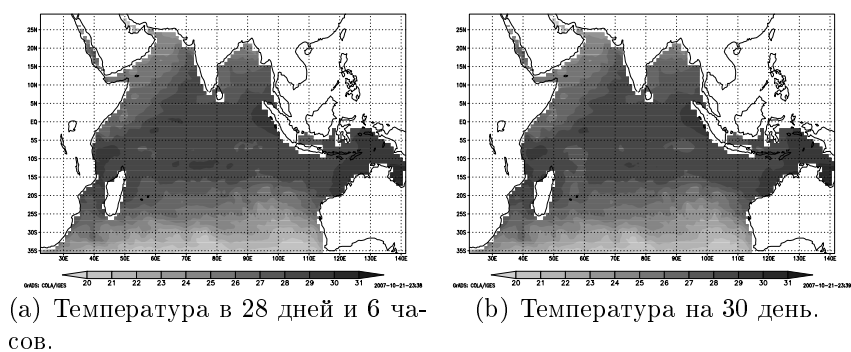
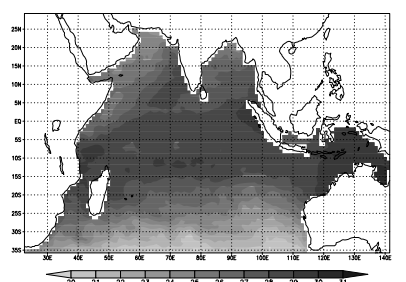
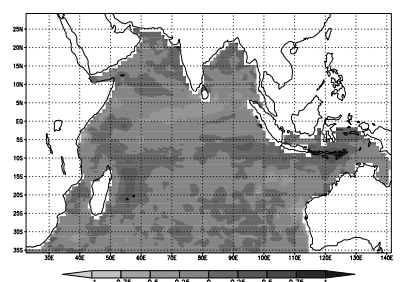


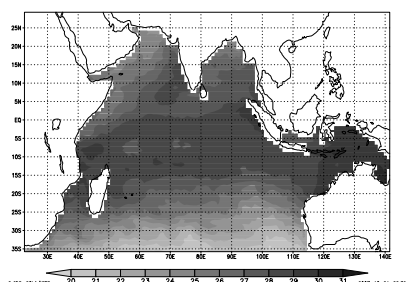
Рис. 4: Данные наблюдений о поверхностной температуре.



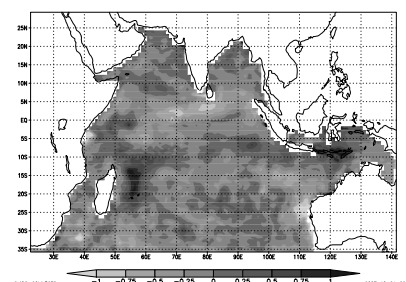
(а) Прогноз на 6 часов. Темпера-
тура.



(б) Прогноз на 6 часов. Отклоне-
ние от данных наблюдений.

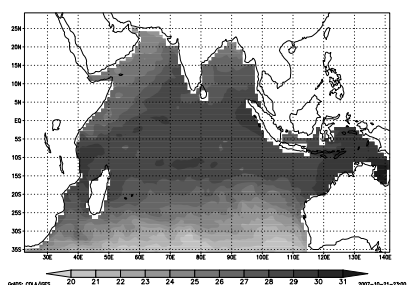


(с) Прогноз на 2-ой день. Темпера-
тура.

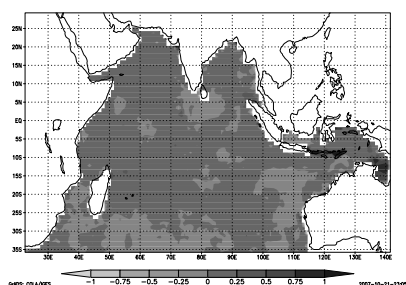


(д) Прогноз на 2-ой день. Откло-
нение от данных наблюдений

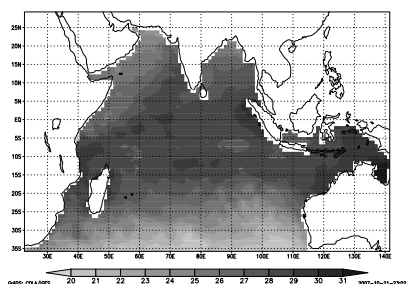
Рис. 5: Эксперимент с потоком, рассчитанный по прямой модели.



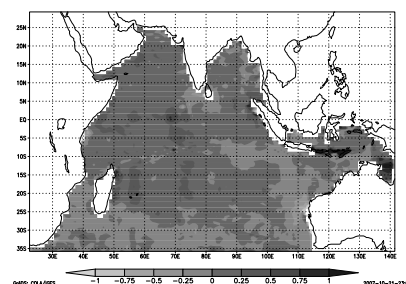
(а) Прогноз на 6 часов. Температура.



(б) Прогноз на 6 часов. Отклонение от данных наблюдений.



(с) Прогноз на 2-ой день. Температура.



(д) Прогноз на 2-ой день. Отклонение от данных наблюдений.

Рис. 6: Эксперимент с потоком, полученным после усвоения температуры.

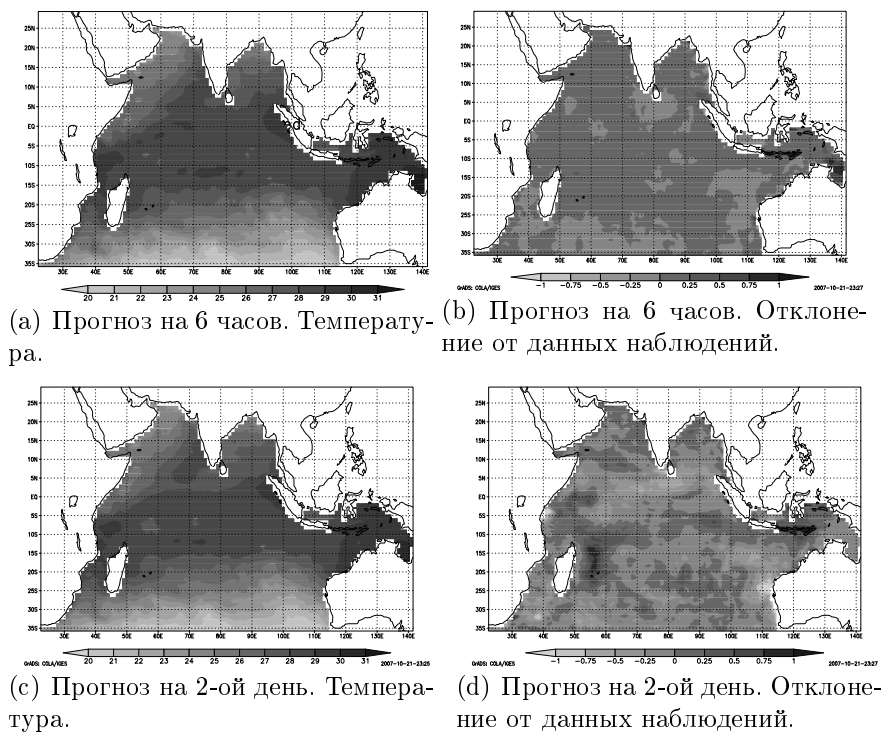


Рис. 7: Эксперимент с переключением потоков.

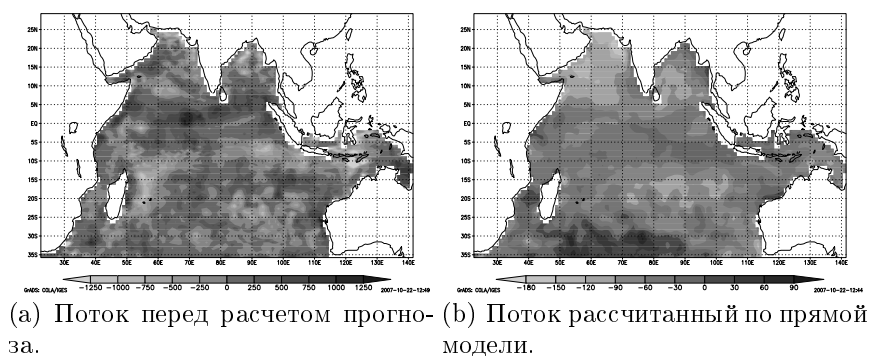
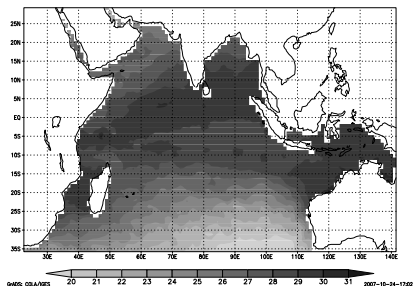
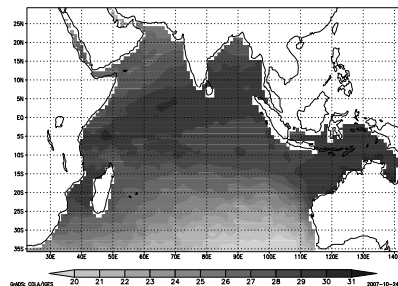


Рис. 8: Потоки используемые при прогнозе.

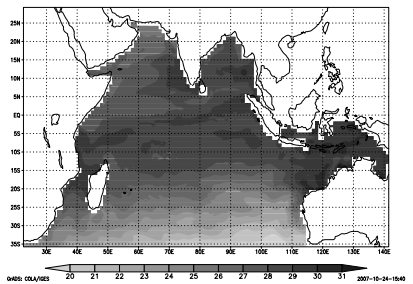


(а) Температура на момент времени 3 месяца и 9 часов.

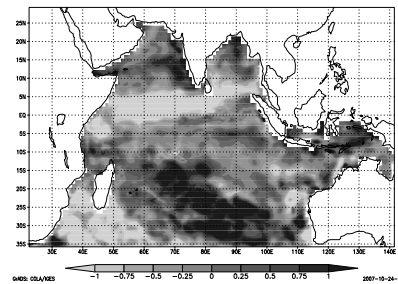


(б) Температура на момент времени 3 месяца и 3 дня.

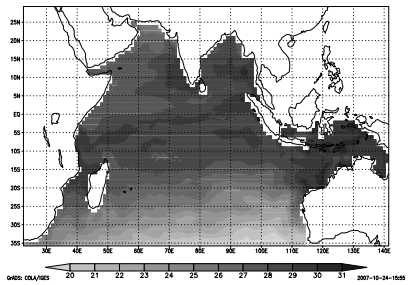
Рис. 9: Данные наблюдений о поверхностной температуре.



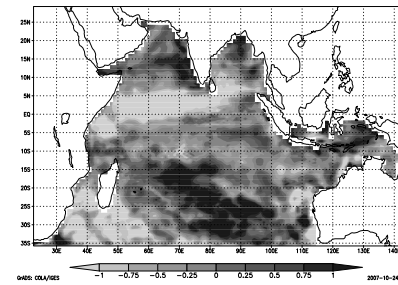
(а) Температура рассчитанная по модели. $t = 2169$ часов.



(б) Температура рассчитанная по модели. $t = 2169$ часов. Отклонение от данных наблюдений.

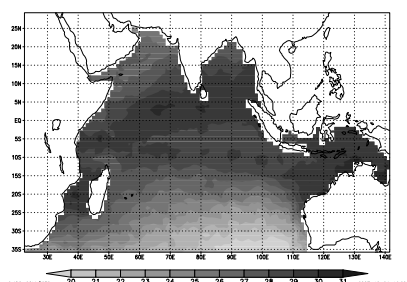


(с) Температура рассчитанная по модели. $t = 2232$ часа

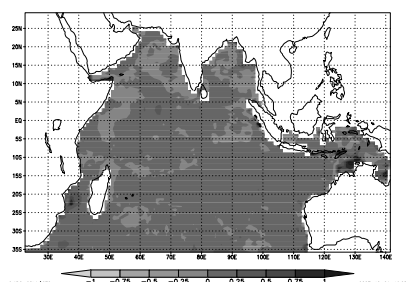


(д) Температура рассчитанная по модели. $t = 2232$ часа. Отклонение от данных наблюдений.

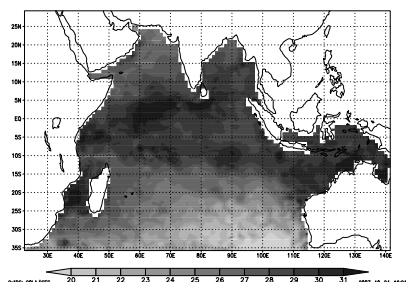
Рис. 10: Расчет по модели без усвоения данных.



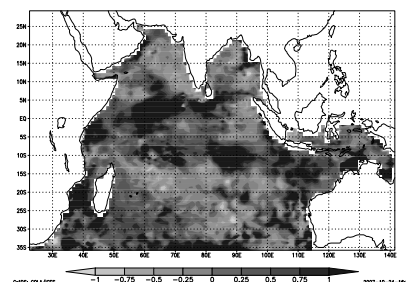
(а) Прогноз на 9 часов. Температура.



(б) Прогноз на 9 часов. Отклонение от данных наблюдений.

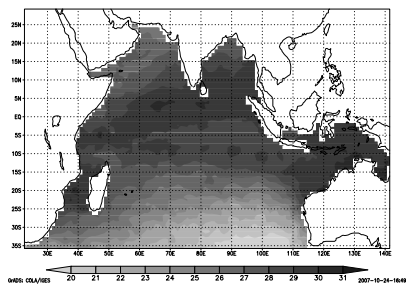


(с) Прогноз на 3 дня. Температура.

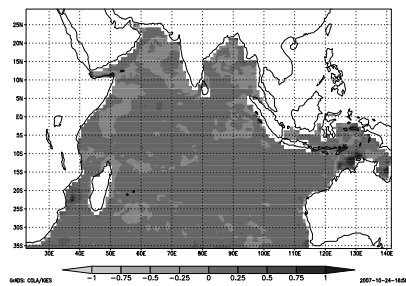


(д) Прогноз на 3 дня. Отклонение от данных наблюдений

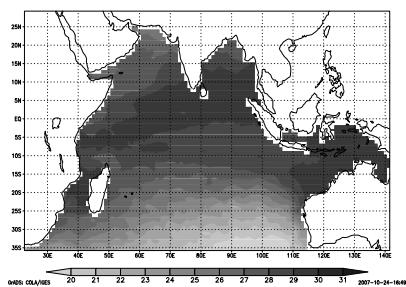
Рис. 11: Эксперимент с потоком, полученным в ходе усвоения.



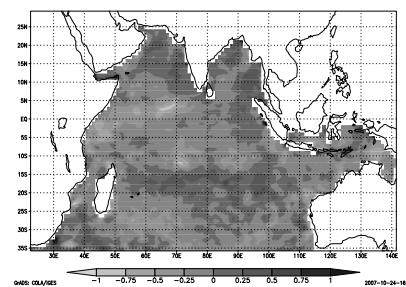
(а) Прогноз на 9 часов. Температура.



(б) Прогноз на 9 часов. Отклонение от данных наблюдений.



(с) Прогноз на 3 дня. Температура.



(д) Прогноз на 3 дня. Отклонение от данных наблюдений.

Рис. 12: Эксперимент с комбинированным потоком.