

层次分析法

层次分析法（analytic hierarchy process），简称AHP。是建模比赛中比较基础的模型之一，其主要解决评价类的问题。如选择哪种方案最好，哪位员工表现最好等。

它是一个较为 主观 的评价方法，其在赋权得到权重向量的时候，主观因素占比很大。因而在建模比赛中，常常与客观方法得到的权重向量方法进行综合，而得出一个综合的权重向量，进行后续操作。

来自 清风数学建模：<https://www.bilibili.com/video/BV1DW411s7wi>

一、建模步骤

层次分析法进行建模，大致分为以下四步：

- ① 分析系统中各因素之间的关系，建立系统的递阶层次结构。
- ② 对于同一层次个元素关于上一层次中某一准则的重要性两两比较，构造两两比较矩阵（判断矩阵）
- ③ 由判断矩阵计算被比较元素对于该准则的相对权重，并进行一致性检验（检验通过权重才能用）。
- ④ 填充权重矩阵，根据矩阵计算得分，得出结果。

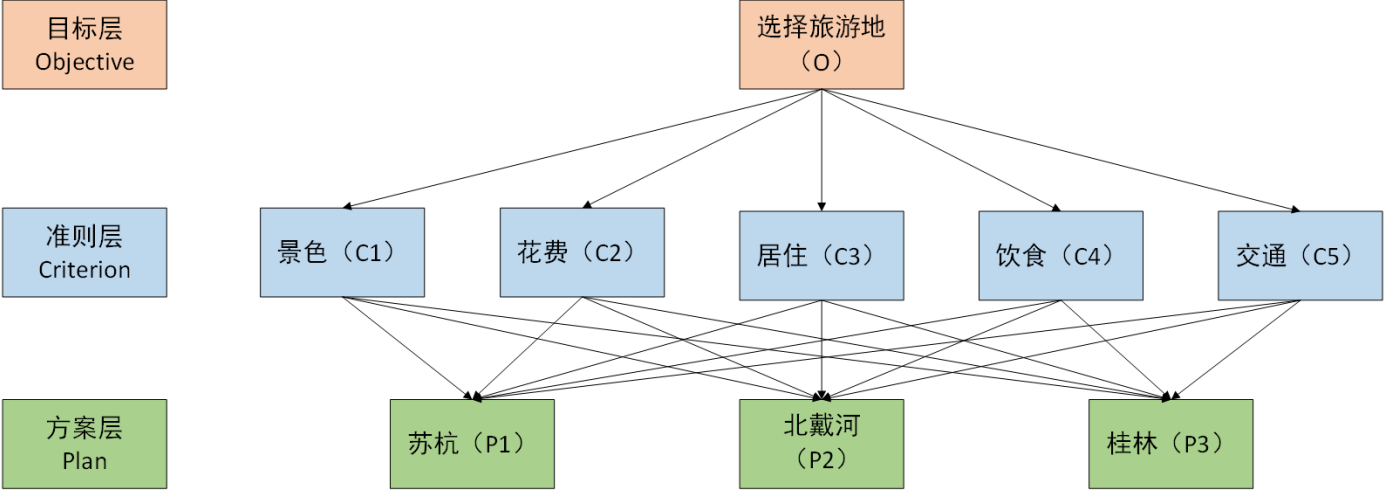
二、模型实现

例：小明同学想出去旅游。在查阅了网上的攻略后，他初步选择了苏杭、北戴河和桂林三地之一作为目标景点。请你确定评价指标、形成评价体系来为小明同学选择最佳的方案。

1. 分析系统中各因素之间的关系，建立系统的递阶层次结构。

首先，需要明确以下三个问题：

- 1. 我们评价的目标是什么？ 答：为小明同学选择最佳的旅游景点。
- 2. 我们为了达到这个目标有哪几种可选的方案？ 答：三种，分别是去苏杭、去北戴河和去桂林。根据以上问题，建立层次结构图，旅游地选择层次结构图如下：
- 3. 评价的准则或者说指标是什么？（我们根据什么东西来评价好坏） 答：题目没给相关数据支撑，需要我们查阅相关的资料=>景色、花费、居住、饮食、交通。



结合题目中的背景材料、常识以及网上搜集到的参考资料进行结合，从中筛选出最合适的指标。

优先选择知网(或者万方、百度学术、谷歌学术等平台)搜索相关的文献。[显的专业]

虫部落-快搜: <https://search.chongbuluo.com/>

优先级：
谷歌搜索
微信搜索
知乎搜索

如本题我们可以搜索关键字：

旅游选择因素、根据什么因素选择旅游景点、旅游景点评价指标等。

2.对于同一层次个元素关于上一层次中某一准则的重要性两两比较，构造两两比较矩阵（判断矩阵）。

那么如何构造这个判断矩阵呢？

首先，我们先来看看层次分析法最终要得出的结果是什么样子的：

	指标权重	苏杭	北戴河	桂林
景色				
花费				
居住				
饮食				
交通				

实际上的建模结果就是要填满权重矩阵，即这个表格：

- 其中，蓝色一列代表景色、花费、居住、饮食以及交通的权重，加和为1。（实际上就是准则层关于上一层目标层的重要性）
- 然后同一颜色每一横行，就是三种方案相对于准则层的重要性。如：**橙色一行** 代表的就是苏杭、北戴河以及桂林关于景色的权重，以此类推。

如何填满这个表格，就需要用判断矩阵得出，这也是构造判断矩阵的意义！

然后，我们看一下如何构造这个判断矩阵，要构造几个？

由上文可知得到这个判断矩阵实际上要分别得出准则层关于目标层的一组权重向量，方案层关于准则层的五组权重向量，实际上我们就需要构造出一个准则层关于目标层的判断矩阵以及五个方案层关于准则层的矩阵，一共六个判断矩阵。（这里采用分治的思想）最终在经过权重计算每组得出一组权重向量，填到相应的表格中。构造的6个判断矩阵如下：

选择旅游地	景色	花费	居住	饮食	交通									
景色						景色	苏杭	北戴河	桂林		花费	苏杭	北戴河	桂林
花费						苏杭					苏杭			
居住						北戴河					北戴河			
饮食						桂林					桂林			
交通														
居住	苏杭	北戴河	桂林			饮食	苏杭	北戴河	桂林		交通	苏杭	北戴河	桂林
苏杭						苏杭					苏杭			
北戴河						北戴河					北戴河			
桂林						桂林					桂林			

接下来，我们看一下，每个位置应该怎么填。

注意：这个位置不是随便填的，因为影响因子占比很大，有可能第一天我们看重景色，把景色权重写的占比大一些，第二天我们看重饮食了，就把饮食占比大一些，因而常常考虑不周全，而使得不易定量化。所以需要两两比较得出判断矩阵，而两两比较得出重要性填到矩阵中。重要程度如下表：

标度	含义
1	表示两个因素相比，具有同样重要性
3	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素稍微重要
5	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素明显重要
7	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素强烈重要
9	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素极端重要
2、4、6、8	上述两相邻判断的中值
倒数	A和B相比如果标度为3，那么B和A相比就是1/3

根据以上这个表格，我们人为的进行填充，得到了下面这个判断矩阵：（实际情况下都是专家填的，但是比赛中大都是我们自己填的，最好有一些理论的依据支撑）

选择旅游地	景色	花费	居住	饮食	交通
景色	1	1/2	4	3	3
花费	2	1	7	5	5
居住	1/4	1/7	1	1/2	1/3
饮食	1/3	1/5	2	1	1
交通	1/3	1/5	3	1	1

- Q1：根据右边这个表，请你比较景色和花费的重要程度。
- A1：我认为花费比景色略微重要(介于同等重要1和稍微重要3之间吧)
- Q2：根据右边这个表，请你比较景色和居住的重要程度。
- A2：我认为景色比居住要重要一点(介于稍微重要3和明显重要5之间吧)

就这样，小明回答了10次【组合数C（5，2）】，你根据他所回答的填好了上面这张表。

注：实际情况下没有小明帮我们回答，层次分析法中这张表是交给"专家"填的，具体我们等后面再说。

观察一下：上面这个判断矩阵有如下特点：

- 1. a_{ij} 表示的意义是，与指标j相比，i的重要程度。
- 2. 当 $i=j$ 时，两个指标相同，因此同等重要记为1，这就解释了主对角线元素为1
- 3. $a_j > 0$ 且满足 $a_{ij} \times a_{ji} = 1$ (我们称满足这一条件的矩阵为**正互反矩阵**)

其余五个矩阵如下图：

居住	苏杭	北戴河	桂林			饮食	苏杭	北戴河	桂林			交通	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	1	3			苏杭	1	3	4			苏杭	1	1	1/4
北戴河	1	1	3			北戴河	1/3	1	1			北戴河	1	1	1/4
桂林	1/3	1/3	1			桂林	1/4	1	1			桂林	4	4	1

3. 由判断矩阵计算被比较元素对于该准则的相对权重，并进行一致性检验（检验通过权重才能用）。

思考一个问题，拿方案层关于景色的矩阵说明，假设我们填写的判断矩阵是这个样子：

景色	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	2	1
北戴河	1/2	1	2
桂林	1	1/2	1

假设：苏杭 = A、北戴河 = B、桂林 = C，
那么由矩阵可以看出，苏杭比北戴河景色好一点 $A > B$ ，苏杭和桂林景色一样好 $A = C$ ，北戴河比桂林景色好一点 $B > C$ ，出现了**矛盾**！

这里就不得不提出一个概念叫做**一致矩阵**，它在正互反矩阵性质的基础上没有以上的矛盾，可以说：**一致矩阵是正互反矩阵的特例**。

将上面的矩阵进行改良，得到一致矩阵：

景色	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	2	4
北戴河	1/2	1	2
桂林	1/4	1/2	1

它比正互反矩阵多出两个性质：

- 1. $a_{ij} = \frac{i\text{的重要程度}}{j\text{的重要程度}}$ ， $a_{jk} = \frac{j\text{的重要程度}}{k\text{的重要程度}}$ ， $a_{ik} = \frac{i\text{的重要程度}}{k\text{的重要程度}} = a_{ij} \times a_{jk}$ 。
- 2. 矩阵各行（各列）之间成倍数关系。

我们进行构造矩阵大多是正互反矩阵，难免会出现矛盾，即不容易构造出一致性矩阵，但是我们可以向一致性矩阵靠拢，只要这个差距（CR）不超过一个范围（0.1）那么这个判断矩阵也是可以使用的。这个判断差距的过程叫做**一致性检验**。

接下来正式讲解下一致性检验。

证明过程（只需要了解，可以直接看步骤）：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

为一致性矩阵的充要条件：

$$\begin{cases} a_{ij} > 0 \\ a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1 \\ [a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}] = k_i[a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}] \end{cases}$$

注：也可以定义为列与列

引理：A 为 n 阶方阵，且 A 的秩 $r(A) = 1$ ，则 A 有一个特征值为 A 的迹 $\text{tr}(A)$ ，其余特征值均为 0。因为一致矩阵的各行成比例且不是零矩阵，所以一致矩阵的秩一定为 1。

由引理可知：一致矩阵有一个特征值为 n，其余特征值均为 0。

另外，我们很容易可以得到，特征值为 n 时，对应的特征向量刚好为： $k[a_{111}, a_{121}, \cdots, a_{1n1}]^T (k = 0)$

此外，n 阶正互反矩阵 A 为一致矩阵时当且仅当最大特征值 $\lambda_{max} > n$ ，且当正互反矩阵 A 非一致时，一定满足 $\lambda_{max} > n$ 。总而言之，判断矩阵越不一致时，最大特征值与 n 相差就越大。

一致性检验步骤：

第一步：计算一致性指标 CI

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

第二步：查找对应的平均随机一致性指标 RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59

注：在实际运用中，n 很少超过 10，如果指标的个数大于 10，则可考虑建立二级指标体系，或使用我们以后要学习的模糊综合评价模型。此外，RI 可以直接查表使用即可。

第三步：计算一致性比例 CR

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

如果 $CR < 0.1$ ，则可认为判断矩阵的一致性可以接受；否则需要对判断矩阵进行修正。

当然本道例题上面的 6 个矩阵已经通过了一致性检验，然后接下来要根据判断矩阵计算权重。

4. 填充权重矩阵，根据矩阵计算得分，得出结果。

计算权重的方法有三种：算数平均法求权重、几何平均法求权重和特征值法求权重。

一般情况下：第三种特征值法求权重是最常用的，但是建议可以综合三种方法来求得一个综合的权重向量。

下面拿下面这个判断矩阵进行说明：

景色	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	2	5
北戴河	1/2	1	2
桂林	1/5	1/2	1

方法1：算术平均法求权重

第一步： 将判断矩阵按照列归一化（每个元素除以其所在列的和，如1/(1+0.5+0.2)=0.5882）

景色	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	0. 5882	0. 5714	0. 625
北戴河	0. 2941	0. 2857	0. 25
桂林	0. 1177	0. 1429	0. 125

第二步： 将归一化的列相加（按行求和）

景色	未归一化的权重
苏杭	0. 5882+0. 5714+0. 625 = 1. 7846
北戴河	0. 2941+0. 2857+0. 25 = 0. 8298
桂林	0. 1177+0. 1429+0. 125 = 0. 3856

第三步： 将相加后得到的向量中的每个元素除以 n 即可得到权重向量

景色	权重
苏杭	1. 7846/3 = 0. 5949
北戴河	0. 8298/3 = 0. 2766
桂林	0. 3856/3 = 0. 1285

以表达式进行解释：

假设判断矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

那么算术平均法求得的权重向量 $\omega_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^n a_{kj}}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ (ω 读作Omega)

方法2：几何平均法求权重

第一步： 将A的元素按照行相乘得到一个新的列向量

第二步： 将新的向量的每个分量开n次方

第三步： 对该列向量进行归一化即可得到权重向量

以表达式进行解释：

假设判断矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{*11} & a_{*12} & \cdots & a_{*1n} \\ a_{*21} & a_{*22} & \cdots & a_{*2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{*n1} & a_{*n2} & \cdots & a_{*nn} \end{bmatrix}$,

那么几何平均法求得的权重向量 $\omega_i = \frac{\sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=1}^n a_{kj} \right)}{\sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=1}^n a_{ij} \right)}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$

求得权重结果如图：

景色	权重
苏杭	0. 5954
北戴河	0. 2764
桂林	0. 1283

方法3：特征值法求权重

上文在证明一致性检验的时候，提到过如下内容：

由引理可知：一致矩阵有一个特征值为 n，其余特征值均为 0。

另外，我们很容易可以得到，特征值为 n 时，对应的特征向量刚好为： $k \left[\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{12}}, \cdots, \frac{1}{a_{1n}} \right]^T$, $(k \neq 0)$

那么我们直接可以将特征向量归一化即可求得特征向量。

求的结果为：

最大特征值为 3.0055,一致性比例 CR = 0.0053

对应的 特征向量:[-0.8902,-0.4132,-0.1918]

归一化后得到权重向量 : [0.5954,0.2764,0.1283]

我们将三种方法求得的权重向量如下图所示：

景色	算术平均法	几何平均法	特征值法
苏杭	0. 5949	0. 5954	0. 5954
北戴河	0. 2776	0. 2764	0. 2764
桂林	0. 1285	0. 1283	0. 1283

但在实际建模中建议综合三种方法求得的权重得到一个综合的权重向量更具有说服力！

填充权重矩阵

这里只拿第三种的结果填充权重矩阵

	指标权重	苏杭	北戴河	桂林
景色		0.5954	0.2764	0.1283
花费				
居住				
饮食				
交通				

其余的矩阵以此类推，最终得到如下图所示的权重矩阵：

	指标权重	苏杭	北戴河	桂林
景色	0.2636	0.5954	0.2764	0.1283
花费	0.4758	0.0819	0.2363	0.6817
居住	0.0538	0.4286	0.4286	0.1429
饮食	0.0981	0.6337	0.1919	0.1774
交通	0.1087	0.1667	0.1667	0.6667

计算得分，得出最终结果

苏杭得分：指标权重×苏杭与其他两种方案中的权重，即前两列相乘：
 $0.5954 \times 0.2636 + 0.0819 \times 0.4758 + 0.4286 \times 0.0538 + 0.6337 \times 0.0981 + 0.1667 \times 0.1087 = 0.299$
同理：北戴河得分为0.245，桂林得分为0.455。

因此最佳的旅游景点是桂林。

三、模型扩展 (★)

- 1. 评价的决策层不能太多，太多的话n会很大，判断矩阵和一致矩阵差异可能会很大。因为平均随机一致性指标RI的表格中n最多是15，因此应该根据实际情况选择是否应用此方法。
- 2. 如果决策层中指标的数据是已知的，那么层次分析法不容易将这些已知数据应用在其中。如拿上面的例题举例：如果已知景色、花费、居住、饮食以及交通在三个旅游景点的一些数据，那么如何将这些数据转化为构造判断矩阵的依据，只能为其提供一定的文字说明，而不容易将数据应用到其中。
- 3. 在实际建模中，判断矩阵的数值都是人为填的，具有一定的主观性存在，这时应该搜寻相应的数据让人信服，不能空口无凭。
- 4. 如果说只想拿到的决策因素的权重向量，那大可不必这么麻烦，在第一步递阶层次结构的时候，只需要目标层和准则层即可，构造判断矩阵也只需要构造出一个，并进行检验，检验通过了，差不多就拿到了权重向量。

四、模型总结

总结一下步骤：

1. 分析系统中各因素之间的关系，**建立系统的递阶层次结构**。
2. 对于同一层次个元素关于上一层次中某一准则的重要性两两比较，**构造两两比较矩阵（判断矩阵）**。
3. 由判断矩阵计算被比较元素对于该准则的相对权重，并**进行一致性检验**（检验通过权重才能用）。
4. **填充权重矩阵**，根据矩阵计算得分，得出结果。
5. **画图**：亿图图示