MOwNiT - interpolacja, zagadnienie Hermite'a

Paweł Podedworny

10.04.2024

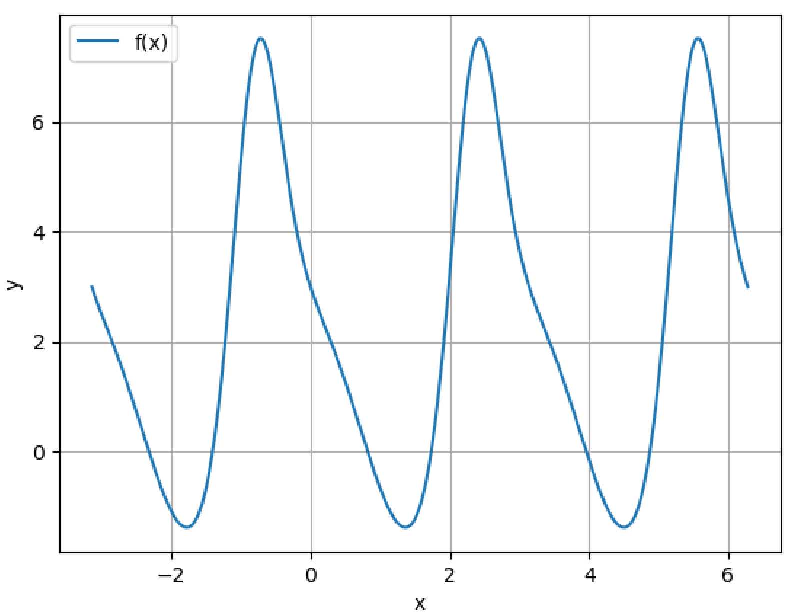
1 Opis ćwiczenia

Dla funkcji $f(x) = e^{-k \cdot sin(mx)} + k \cdot cos(mx)$, gdzie $k = 2, m = 2$ na przedziale $x \in [-\pi, 2\pi]$, wyznaczyć interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego i drugiego stopnia, zwracając uwagę na warunki brzegowe.
Przeprowadzić interpolację dla różnej liczby węzłów, wykonując obliczenia, korzystając przynajmniej z dwóch warunków brzegowych.
Określić dokładność interpolacji za pomocą maksymalnej różnicy oraz błędu średniego kwadratowego.
Pokazać narysowane wykresy oraz porównać ze sobą wyniki interpolacji różnych sposobów.

2 Dane techniczne

Komputer z systemem Windows 10 x64
Procesor: AMD Ryzen 5 3600 3.60GHz
Pamięć RAM: 16GB 3200MHz
Środowisko: DataSpell 2023.3.4
Język: Python 3.11 z biblioteką numpy oraz matplotlib

3 Wykres funkcji



Rys. 1: Wykres funkcji f(x) dla $x \in [-\pi, 2\pi], k = 2, m = 2$

4 Sposób obliczania funkcji sklejanej

4.1 Drugiego stopnia

Równanie funkcji sklejanej 2. stopnia możemy w ogólności zapisać jako

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i, \quad i \in [1, 2, ..., n-1]$$

gdzie każdy z segmentów funkcji określony jest na przedziale $[x_i, x_{(i+1)}]$ $i \in [1, 2, \ldots, n-1]$ – węzły indeksowane są od 1 do n, dlatego otrzymamy n-1 funkcji $S_i(x)$ opisanych powyższym wzorem. Aby był on funkcją sklejaną 2. stopnia, musi spełniać następujące warunki:

$$S_i(x_i) = y_i \qquad dla \quad i \in [1, 2, ..., n-1]$$

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}) \qquad dla \quad i \in [1, 2, ..., n-2]$$

$$S`_{i+1}(x_{i+1}) = S`_i(x_{i+1}) \qquad dla \quad i \in [1, 2, ..., n-2]$$

Z warunku 1. otrzymujemy:

$$S_i(x_i) = a_i(x_i - x_i)^2 + b_i(x_i - x_i) + c_i = c_i$$

$$y_i = c_i \quad i \in [1, 2, ..., n-1]$$

Różniczkując wyjściowe wyrażenie względem x, otrzymujemy:

$$S`_i(x) = 2a_i(x - x_i) + b_i$$

To z kolei pozwala nam na wykorzystanie warunku 3.:

$$S`_{i+1}(x_{i+1}) = S`_i(x_{i+1})$$

$$2a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + b_i + 1 = 2a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i$$

$$2a_i(x_{i+1}) - x_i = b_{i+1} - b_i$$

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)} \quad i \in [1, 2, ..., n-1]$$

Wykorzystując 1. oraz 2. warunek otrzymujemy:

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})$$

$$a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i$$

$$y_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i$$

$$y_{i+1} = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i$$

$$y_{i+1} = (x_{i+1} - x_i)(\frac{b_{i+1} - b_i}{2} + b_i) + y_i$$

$$b_i + b_{i+1} = 2\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Przesuwając indeks o 1 w dół, uzyskujemy:

$$b_{i-1} + b_i = 2\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$b_{i-1} + b_i = 2\gamma_i, \quad \text{gdzie } \gamma_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \text{dla } i \in [2, 3, ..., n]$$

Jedynymi niewiadomymi są teraz wartości współczynników b_i, ponieważ wartości c_i są znane, a wartości a_i obliczymy znając wartości b_i. Otrzymujemy więc układ równań:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\ ... \\ b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1} \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases}$$

Układ ten ma n niewiadomych, ale tylko $n-1$ równań. Jak widzimy, w powyższym układzie równań obliczać także będziemy b_n, mimo że nie jesteśmy w stanie wyznaczyć $S_n(x)$. Takie podejście ma na celu umożliwienie obliczenia współczynnika a_{n-1}. Musimy więc skorzystać z warunku brzegowego w celu wyznaczenia brakującego równania.

4.1.1 Warunki brzegowe

- Natural Spline (Free Boundary)

$$S`_1(x_1) = 0 \text{ lub } S`_{n-1}(x_n) = 0$$

Ponieważ brakuje nam jednego równania, wystarczy że uwzględnimy jeden z powyższych warunków, dalsze przekształcenia wykonuję dla $S_1'(x_1) = 0$. Korzystając z wyprowadzonego wzoru otrzymujemy:

$$2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = 0$$

$$b_1 = 0$$

Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego otrzymujemy układ równań, dzięki któremu możemy obliczyć współczynniki b_i:

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_1 + b_2 = 2\gamma_3 \\ b_3 + b_3 = 2\gamma_3 \\ ... \\ b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1} \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases}$$

Patrząc na wartości w powyższym układzie możemy spostrzec, że po odpowienich przekształceniach da się go rozwiązać w sposób iteracyjny:

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 2\gamma_2 - b_1 = 2\gamma_2$$

$$b_3 = 2\gamma_3 - b_2 = 2(\gamma_3 - \gamma_2)$$

$$b_4 = 2\gamma_4 - b_3 = 2(\gamma_4 - \gamma_3 + \gamma_2)$$

$$\vdots$$

$$b_n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} + \gamma_{n-3} - \ldots)$$

- Clamped Boundary

Dla tego warunku brzegowego przyjmujemy, że jedna z pierwszych pochodnych na krańcach jest znana lub przybliżona przy pomocy ilorazów różnicowych, tzn.:

$$S`_1(x_1) = f`_1 \text{ lub } S`_{n-1}(x_n) = f`_{n-1}$$

Do wyznaczenia przybliżonej wartości pochodnej (jeżeli dokładna wartość nie jest znana) najlepiej skorzystać z ilorazu różnicowego.

$$S`_1(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Korzystając z wyprowadzonego wzoru możemy przekształcić powyższe równanie do następującej postaci:

$$2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \gamma_2$$

Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego otrzymujemy układ równań, przy pomocy którego już jesteśmy w stanie wyliczyć szukane wartości współczynników b_i:

$$\begin{cases} b_1 = \gamma_2 \\ b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\ ... \\ b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1} \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases}$$

Powyższy układ równań możemy znów obliczyć w sposób iteracyjny, otrzymując równania postaci:

$$b_1 = \gamma_2$$

$$b_2 = 2\gamma_2 - b_1 = \gamma_2$$
$$b_3 = 2\gamma_3 - b_2 = 2(\gamma_3 - \gamma_2)$$
$$b_4 = 2\gamma_4 - b_3 = 2(\gamma_4 - \gamma_3 + \gamma_2)$$
$$\vdots$$
$$b_n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} + \gamma_{n-3} - ...)$$

4.2 Trzeciego stopnia

Równanie funkcji sklejanej 3. stopnia możemy w ogólności zapisać jako:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad i \in [1, 2, ..., n - 1]$$

gdzie każdy z segmentów funkcji, określony na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ $i \in [1, 2, \dots, n-1]$ opisany jest podanym wzorem. Aby funkcja była funkcją sklejaną 3. stopnia, musi spełniać następujące warunki:

$$1. \quad S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$

$$2. \quad S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$
$$3. \quad S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$$
$$4. \quad S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$$

Ponieważ funkcja $S_i(x)$ jest funkcją sześcienną, $S_i''(x)$ jest liniowa na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$. Wprowadźmy oznaczenia $h_i = x_{i+1} - x_i$. Funkcję $S_i''(x)$ możemy więc zapisać w postaci zależności liniowej:

$$S_i''(x) = S_i''(x_i)\frac{x_{i+1} - x}{h_i} = S_i''(x_{i+1})\frac{x - x_i}{h_i}$$

Całkując obustronnie funkcję $S_i''(x)$, otrzymujemy:

$$S_i(x) = \frac{S_i''(x_i)}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{S_i''(x_{i+1})}{6h_i}(x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x)$$

Korzystając z warunków interpolacji, możemy wyznaczyć wartości stałych całkowania. Po ich wyznaczeniu, otrzymujemy wzór postaci:

$$S_i(x) = \frac{S_i''(x_i)}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{S_i''(x_{i+1})}{6h_i}(x - x_i)^3 + (\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{S_i''(x_ii+1)h_i}{6})(x - x_i) + (\frac{y_i}{h_i} - \frac{S_i''(x_ii)h_i}{6})(x_{i+1} - x)$$

Zauważmy, że w powyższym wzorze jedynie nie znamy $S_i''(x)$. W celu jego wyznaczenia korzystamy z warunku ciągłości pierwszej pochodnej, a więc różniczkujemy $S_i(x)$:

$$S`_i(x) = -\frac{h_i}{3}S_i^{``}(x_i) - \frac{h_i}{6}S_i^{``}(x_{i+1}) - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

Dla przejrzystości wprowadzamy symbole $\sigma_i = \frac{1}{6}S_i^{''}(x_i)$ oraz $\Delta_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$. Po wstawieniu uzyskujemy:

$$S_i^{`}(x) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$

Natomiast z drugiej strony:

$$S_{i-1}^{`}(x) = \Delta_{i-1} + (2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$

Z warunku ciągłości $S_{i-1}^{'}(x_i) = S_i^{'}(x_i)$ otrzymujemy finalną postać równania:

$$\Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) = \Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}, \quad i \in 2, 3, \ldots, n-1$$

Jak możemy zauważyć, mamy n niewiadomych σ_i, ale tylko $n-2$ równań. Musimy więc określić dwa dodatkowe warunki.

4.2.1 Warunki brzegowe

Przyjmujemy, że:
$C_1(x)$ - funkcja sześcienna przechodząca przez pierwsze 4 punkty
$C_n(x)$ – funkcja sześcienna przechodząca przez ostatnie 4 punkty
Z powyższych założeń wynika więc, że:

$$S^{```}(x_1) = C_1^{```} \text{ oraz } S^{```}(x_n) = C_n^{```}$$

Korzystając z metody ilorazów różnicowych, możemy wyznaczyć przybliżoną wartości 3. pochodnych funkcji $C_1(x)$ i $C_n(x)$:

$$\Delta_i^{(1)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(1)} - \Delta_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i} \quad \Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i}$$

Przybliżenie pochodnej $f_i^{(n)}$ otrzymujemy mnożąc $n! * \Delta_i^{(n)}$, więc:

$$S^{```}(x_1) = C_1^{```} = 3! * \Delta_1^{(3)} = 6 * \Delta_1^{(3)}$$

$$S^{```}(x_n) = C_n^{```} = 3! * \Delta_{n-3}^{(3)} = 6 * \Delta_{n-3}^{(3)}$$

Przekształcając powyższe równania, otrzymujemy 2 brakujące warunki:

$$\begin{cases} -h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ h_{n-1}\sigma_{n-1} + h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{cases}$$

Finalnie, układ równań, który otrzymujemy, po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, ma następującą postać macierzową:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ ... \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ ... \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{bmatrix}$$

- Natural Spline (Free Boundary)

  $$S^{``}(x_1) = S^{``}(x_n) = 0$$

  Korzystając z poprzednich przekształceń, mamy $\sigma_i = \frac{1}{6}S_i^{''}(x_i)$. Uwzględniając powyższe równanie, otrzymujemy:

  $$S^{''}(x_1) = S_1^{''}(x_1) = 0 \Leftrightarrow \sigma_1 = 0$$

$$S^{''}(x_n) = S_n^{''}(x_n) = 0 \Leftrightarrow \sigma_n = 0$$

Znamy więc już 2 wartości niewiadomych ($\sigma_1 = \sigma_n = 0$). Po dodaniu powyższych 2 równań do $n-2$ równań, otrzymujemy układ równań postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ ... \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ ... \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Clamped Boundary

$$S^{`}(x_1) = f_1^{`}$$

$$S^{`}(x_n) = f_{n-1}^{`}$$

Korzystając z poprzednich obliczeń, mamy:

$$S^{`}(x_1) = S_1^{`}(x_1) = \Delta_1 - h_1(\sigma_2 + 2\sigma_1) = f_1^{`}$$

$$S^{`}(x_n) = S_{n-1}^{`}(x_n) = \Delta_{n-1} - h_{n-1}(\sigma_n + 2\sigma_{n-1}) = f_{n-1}^{`}$$

Przekształcając powyższe równania, otrzymujemy:

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\Delta_1 - f_1^{`}}{h_1}$$

$$2\sigma_{n-1} + \sigma_n = \frac{\Delta_{n-1} - f_{n-1}^{`}}{h_{n-1}}$$

Pierwsze pochodne $f_1^{'}$ oraz $f_n^{'}$ możemy przybliżyć, przy pomocy metody ilorazów różnicowych, a więc finalnie otrzymujemy:

$$f_1^{`} = \Delta_1$$

$$f_{n-1}^{`} = \Delta_{n-1}$$

Wstawiając do wyznaczonyh równań, otrzymujemy:

$$2 * \sigma_1 + \sigma_2 = 0$$

$$2 * \sigma_{n-1} + \sigma_n = 0$$

Otrzymane w ten sposób równania pozwolą na wyznaczenie interpolacyjnej funkcji sklejanej 3. stopnia. Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego układ n równań wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ ... \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ ... \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

5 Obliczanie dokładności przybliżeń

5.1 Maksymalna różnica

Największa różnica jaka występuje pomiędzy funkcją, a wielomianem interpolującymm:

$$\max_k |f(x_k) - P_n(x_k)|$$

5.2 Błąd średni kwadratowy

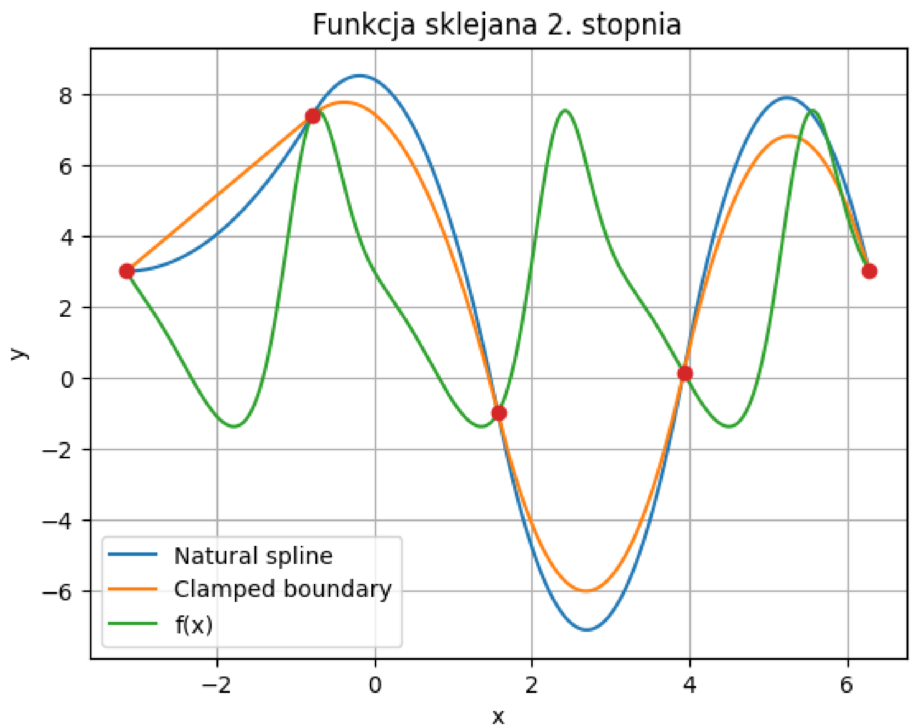
Suma kwadratów różnic pomiędzy wartościami funkcji i funkcji sklejanych podzielonych przez liczbę punktów N, gdzie $N = 1000$:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - P_n(x_i))^2$$

6 Wyniki dla funkcji sklejanych 2. stopnia

6.1 5 węzłów

6.1.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 2: Wykres funkcji f(x) oraz funkcji sklejanych 2. stopnia dla 5 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Natural spline	14.334544894577931	34.81563214783479
Clamped boundary	13.302202992565025	30.107091518445483

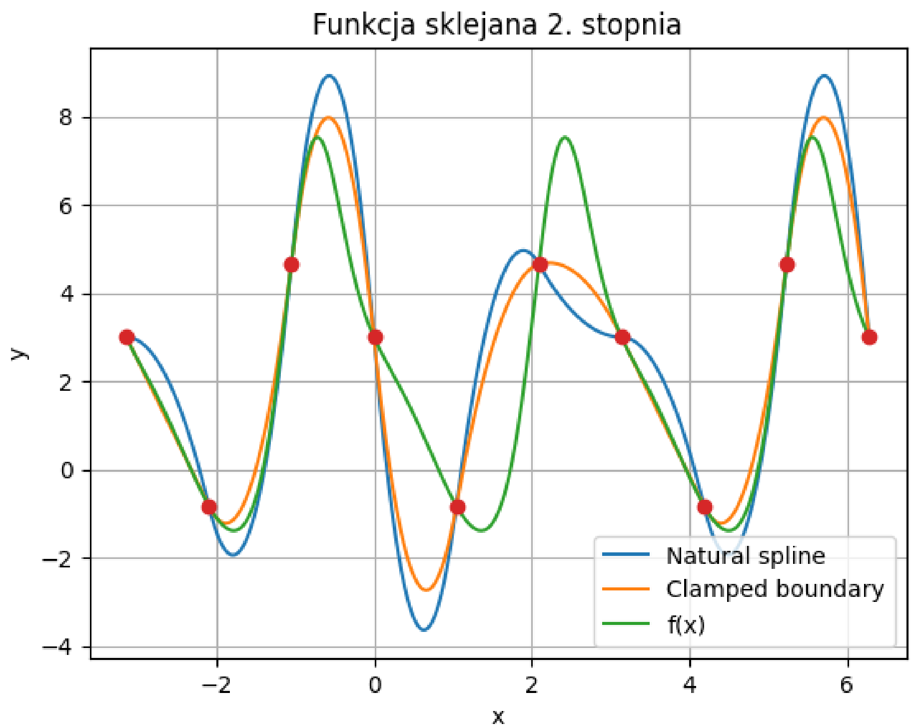
Tabela 1: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla obu warunków brzegowych przy 5 węzłach

6.1.2 Komentarz

Dla takich niskich wartości n możemy zauważyć, że funkcja interpolowana w obu warunkach brzegowych nie pokrywa się z zadaną funkcją. Zarazem jednak ładnie uwidaczniają nam się warunki brzegowe. Dla clamped boundary uzyskujemy, zgodnie z podstawieniem, funkcję linową a dla natural spline funkcję kwadratowa o środku paraboli w początkwym węźle.

6.2 10 węzłów

6.2.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 3: Wykres funkcji f(x) oraz funkcji sklejanych 2. stopnia dla 10 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Natural spline	5.127989660810031	4.27720951081636
Clamped boundary	4.176021010617911	2.4992535527364064

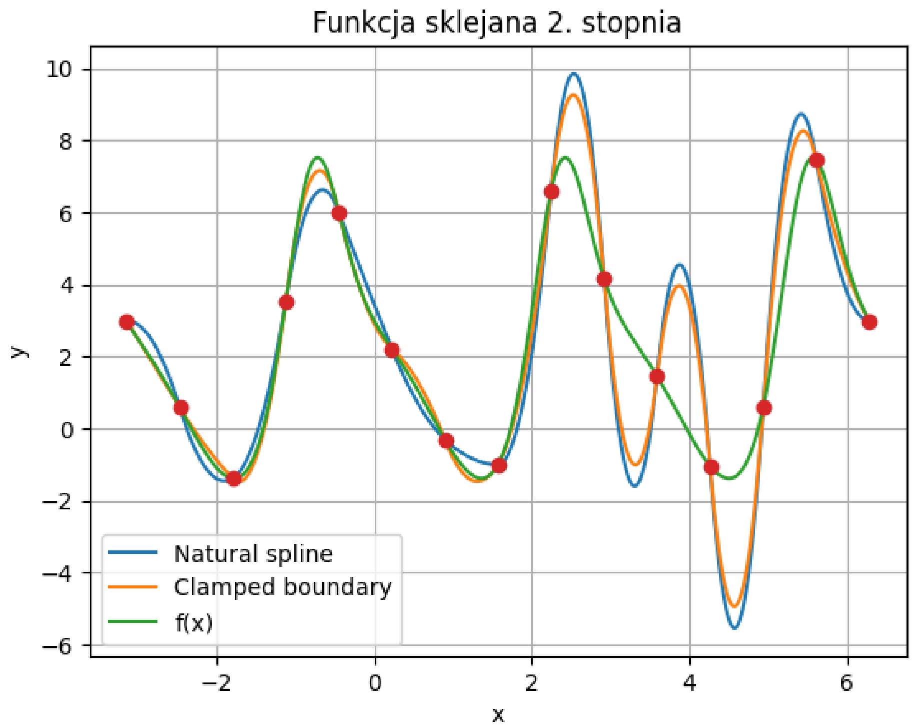
Tabela 2: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla obu warunków brzegowych przy 10 węzłach

6.2.2 Komentarz

Dla 10 węzłów możemy zauważyć, że funkcje interpolowane koło prawego i lewego brzegu nawet dobrze pokrywają się z zadaną funkcją. W środku za to dalej odbiegają od poprawności.

6.3 15 węzłów

6.3.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 4: Wykres funkcji f(x) oraz funkcji sklejanych 2. stopnia dla 15 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Natural spline	4.324986133559379	2.805985296340989
Clamped boundary	3.7220867758649323	1.8991573290559358

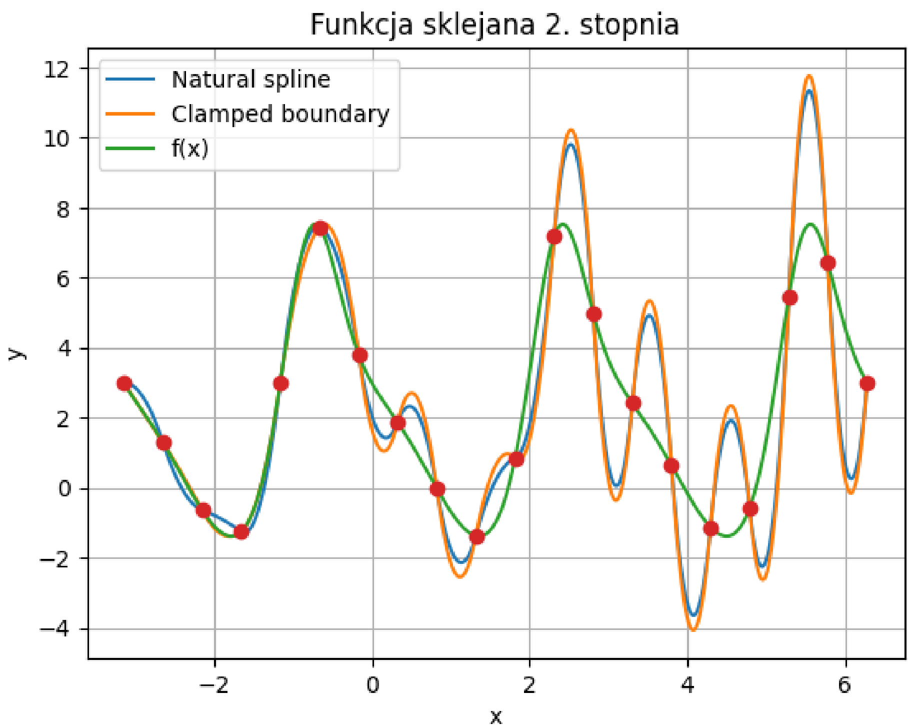
Tabela 3: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla obu warunków brzegowych przy 15 węzłach

6.3.2 Komentarz

Przy 15 węzłach widzimy, że funkcje interpolowane na brzegach przedziału coraz lepiej dopasowują się do zadanej funkcji. W środku jednak możemy zauważyć występowanie nawet dużych oscylacji dla obu warunków brzegowych.

6.4 20 węzłów

6.4.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 5: Wykres funkcji f(x) oraz funkcji sklejanych 2. stopnia dla 20 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Natural spline	3.9200613287116353	2.858034661628057
Clamped boundary	4.349415103586513	3.7382618618598453

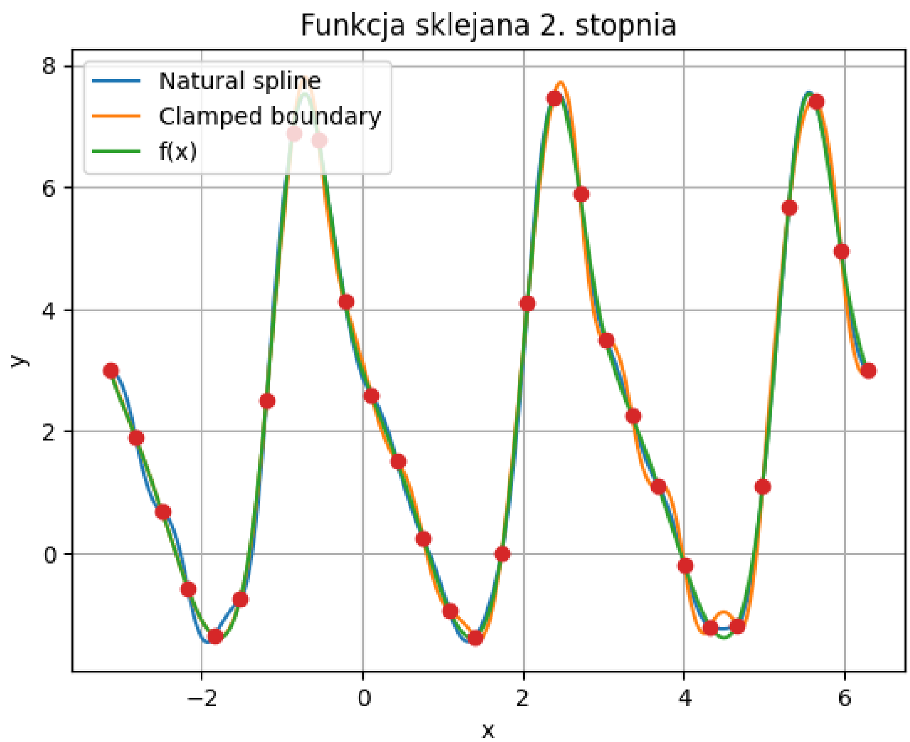
Tabela 4: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla obu warunków brzegowych przy 20 węzłach

6.4.2 Komentarz

Dla 20 węzłów możemy zobaczyć dziwną sytuację. Otóż wykresy funkcji interpolowanej w porównaniu z poprzednią wartością okazują się nie poprawiać, a wręcz sprawiają wrażenie mniej dokładnych. Oscylacje uwypukliły się na prawie całym przedziale.

6.5 30 węzłów

6.5.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 6: Wykres funkcji f(x) oraz funkcji sklejanych 2. stopnia dla 30 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Natural spline	0.32577900984153463	0.01725424995833126
Clamped boundary	0.4975259310160567	0.04280181368729739

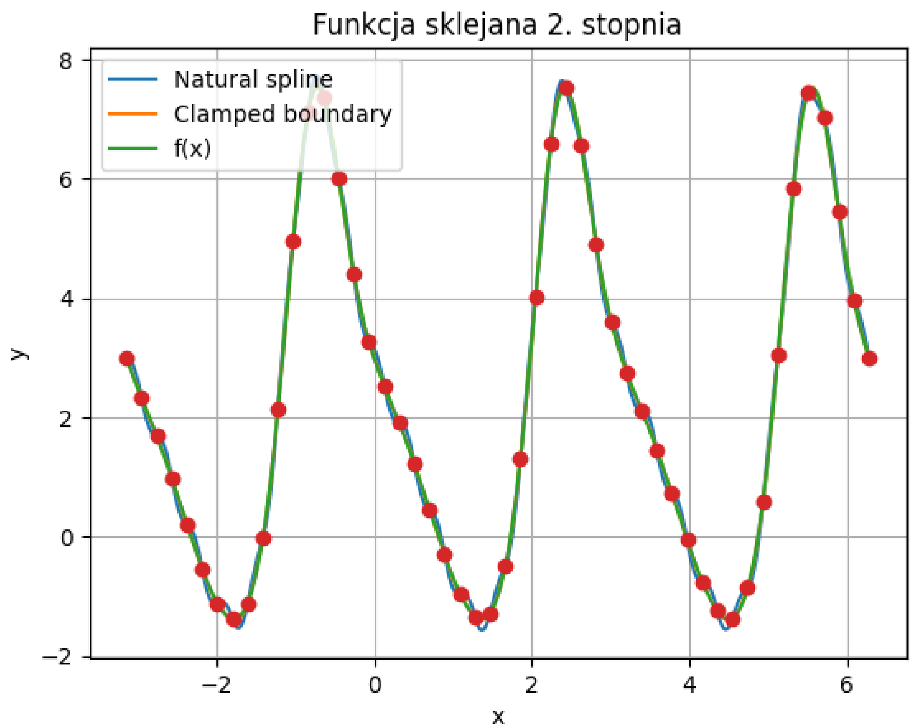
Tabela 5: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla obu warunków brzegowych przy 30 węzłach

6.5.2 Komentarz

Dla n=30 uzyskujemy już całkiem dobre przybliżenie funkcji interpolowanej. Dalej jednak możemy spostrzec małe oscylacje.

6.6 50 węzłów

6.6.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 7: Wykres funkcji f(x) oraz funkcji sklejanych 2. stopnia dla 50 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Natural spline	0.20691882387666283	0.01826294860106171
Clamped boundary	0.03866456038935251	0.0001894900847401843

Tabela 6: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla obu warunków brzegowych przy 50 węzłach

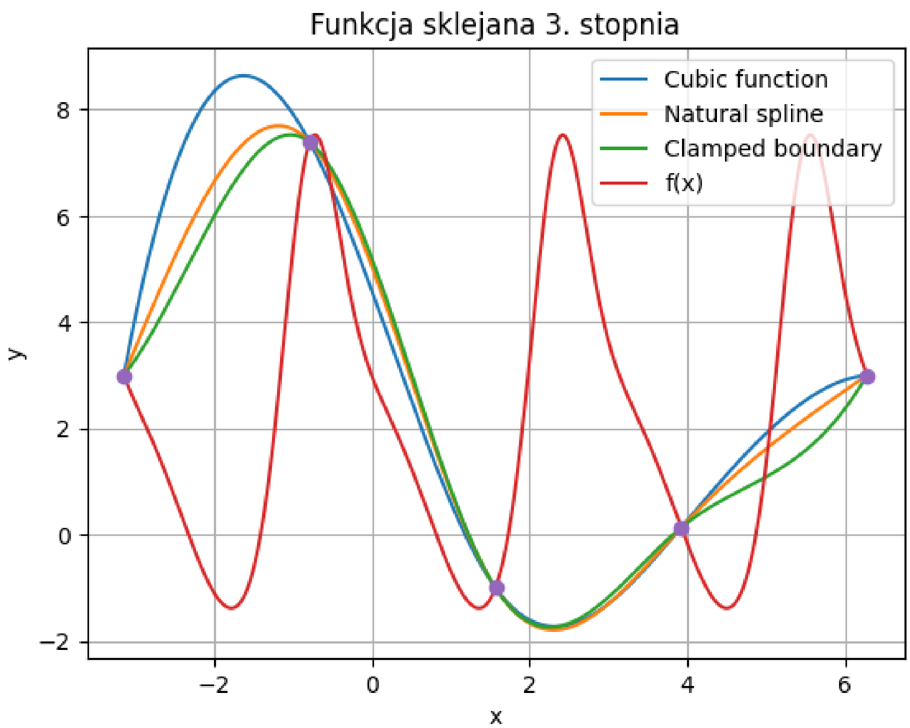
6.6.2 Komentarz

Przy 50 węzłach dostajemy już bardzo dobrze przybliżenie ze względu na wartości błędów. Patrząc jednak na wykres dalej możemy ujrzeć pewne odstępstwa od zadanej funkcji w niektórych miejscach.

7 Wyniki dla funkcji sklejanych 3. stopnia

7.1 5 węzłów

7.1.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 8: Wykres funkcji f(x) oraz funkcji sklejanych 3. stopnia dla 5 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Cubic function	9.983076043313151	21.10236363125399
Natural Spline	9.30175695687594	17.858709984188437
Clamped boundary	9.233241712952461	16.909041303062544

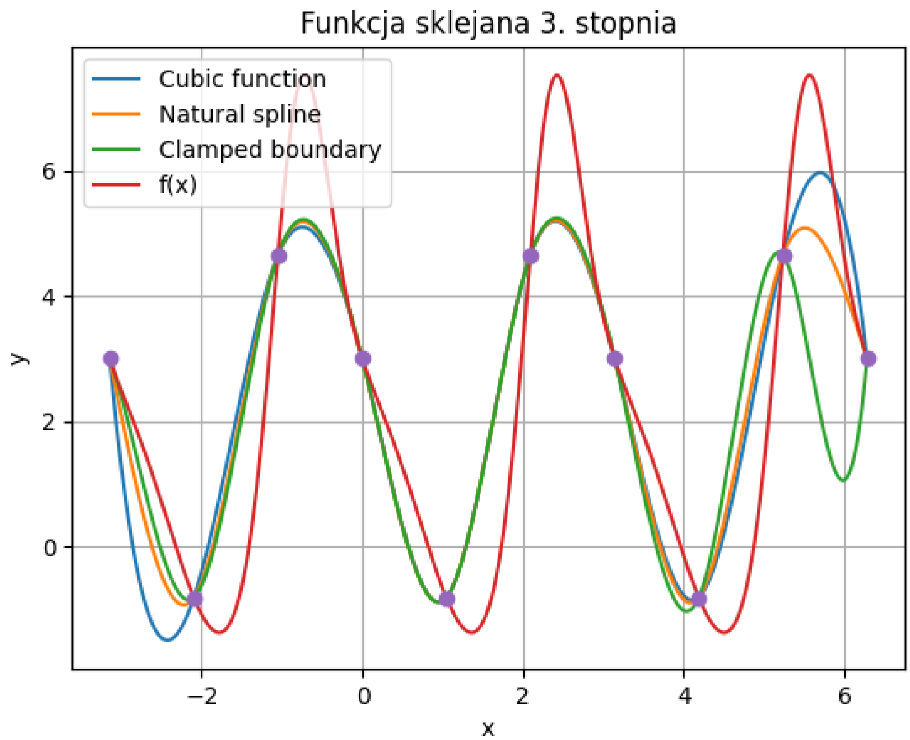
Tabela 7: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 3. stopnia dla trzech warunków brzegowych przy 5 węzłach

7.1.2 Komentarz

Podobnie jak dla poprzednich interpolacji, wynik operacji na takiej małej liczbie węzłów nie daje nam dokładnych wyników.

7.2 10 węzłów

7.2.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 9: Wykres funkcji f(x) oraz funkcji sklejanych 3. stopnia dla 10 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Cubic function	3.1079813285366145	2.2524660529417577
Natural Spline	2.8311593791027017	2.1157853245553364
Clamped boundary	4.971020902917099	3.508715597210336

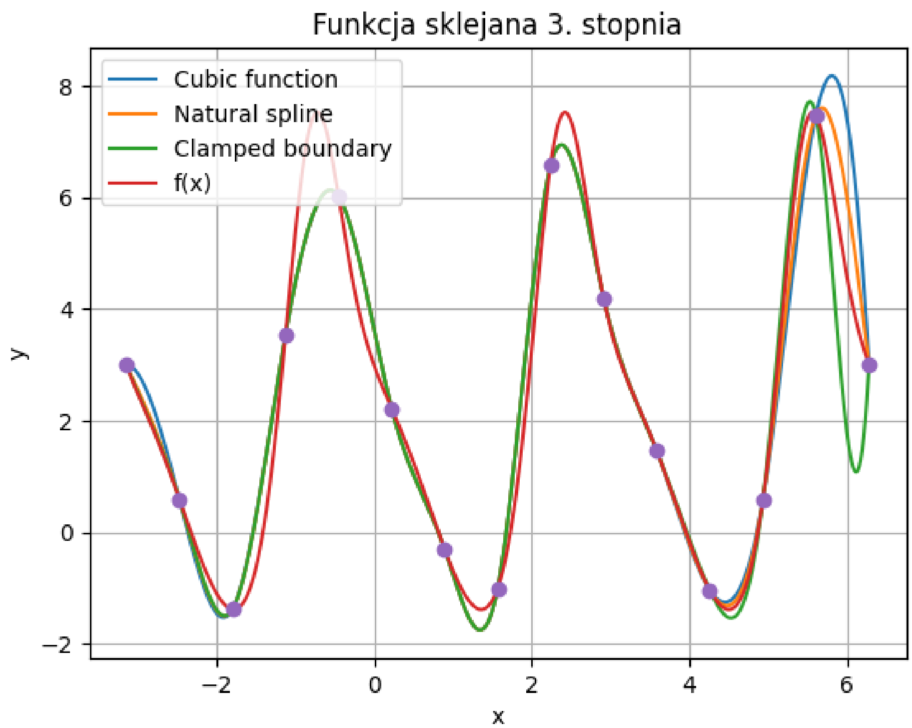
Tabela 8: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 3. stopnia dla trzech warunków brzegowych przy 10 węzłach

7.2.2 Komentarz

Przy n=10 widzimy, że oprócz miejsc, o których funkcja interpolacyjna nie miała wystarczająco informacji, wykresy coraz lepiej zaczynają sie pokrywać. Wyjątkiem jest prawy brzeg przedziału dla clamped boundary, gdzie wyznaczono źle zwróconą funkcję.

7.3 15 węzłów

7.3.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 10: Wykres funkcji f(x) oraz funkcji sklejanych 3. stopnia dla 15 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Cubic function	2.8364406139068983	0.5689442879126848
Natural Spline	1.7457015976091288	0.321074952635678
Clamped boundary	2.8936202976111325	0.5087973349188912

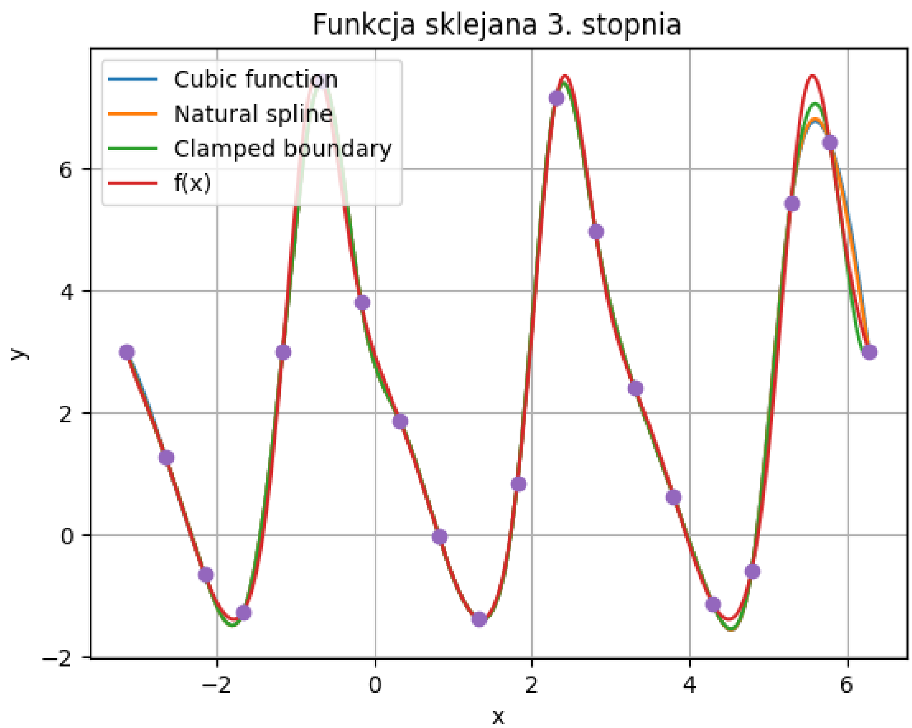
Tabela 9: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 3. stopnia dla trzech warunków brzegowych przy 15 węzłach

7.3.2 Komentarz

Przy 15 węzłach widzimy, że uzyskane przez nas wyniki są całkiem satysfakcjonujące. Jedynym wyjątkiem jest prawy brzeg, gdzie możemy zauważyć lekkie odstępstwa.

7.4 20 węzłów

7.4.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 11: Wykres funkcji f(x) oraz funkcji sklejanych 3. stopnia dla 20 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Cubic function	0.77479158964079	0.055546941882494‌51
Natural Spline	0.7325055874803548	0.048304261457774576
Clamped boundary	0.5082219221074427	0.03065166596511985

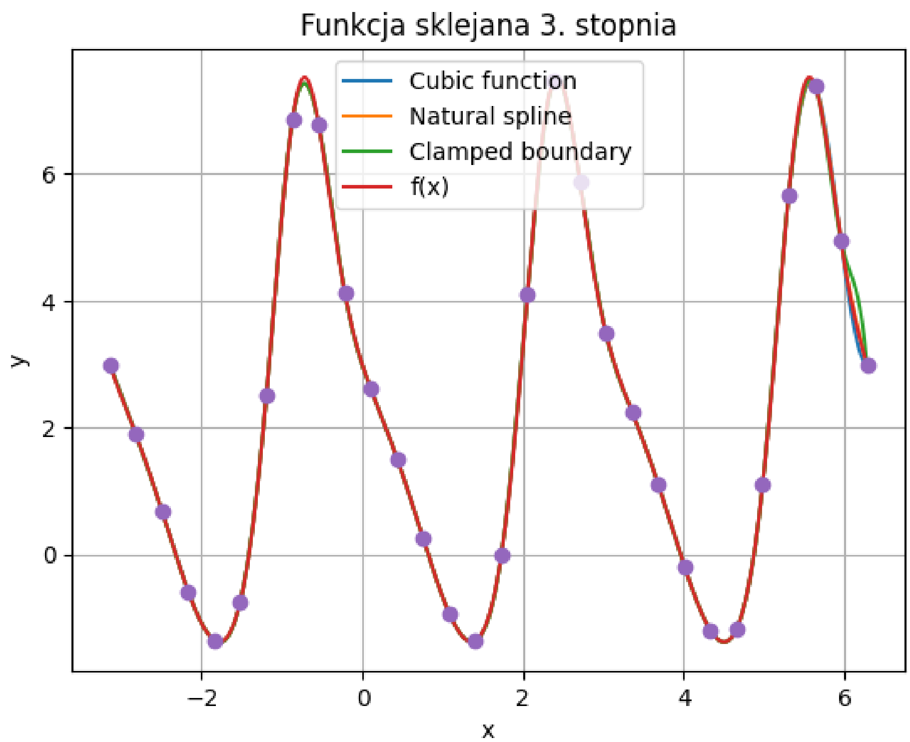
Tabela 10: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 3. stopnia przy 20 węzłach

7.4.2 Komentarz

Dla 20 węzłów, oprócz pojedynczych zaburzeń, dostajemy prawie idealne wyznaczone funkcje interpolujące.

7.5 30 węzłów

7.5.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 12: Wykres funkcji f(x) oraz funkcji sklejanych 3. stopnia dla 30 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Cubic function	0.2207191643532025	0.002030344821588474
Natural Spline	0.11761005253441681	0.0009423413615543926
Clamped boundary	0.5229777172553556	0.005391098313717543

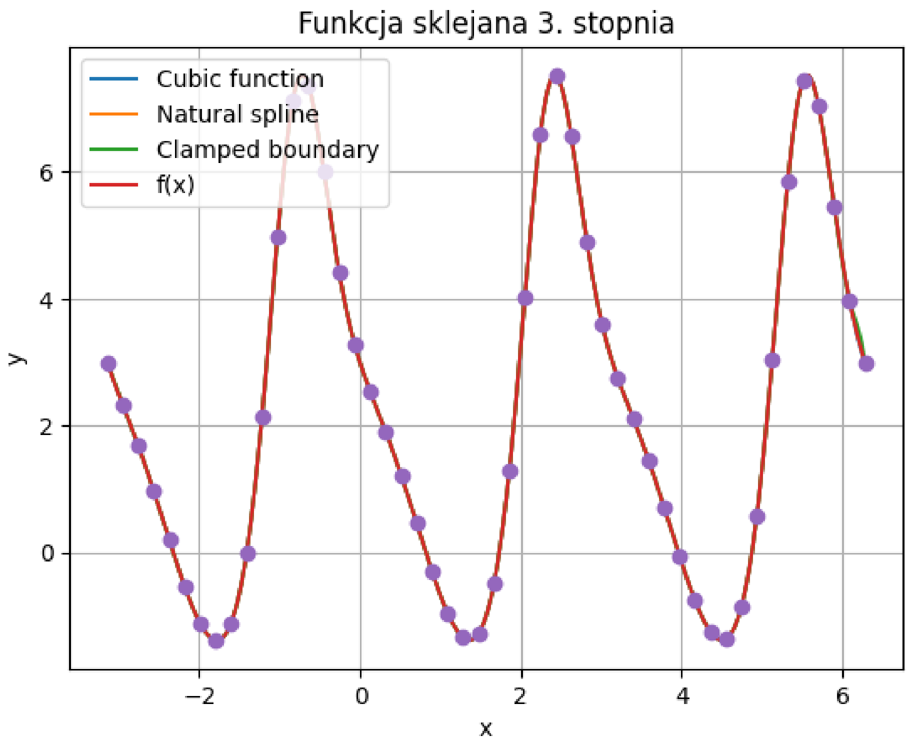
Tabela 11: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 3. stopnia dla trzech warunków brzegowych przy 30 węzłach

7.5.2 Komentarz

Przy 50 węzłach dostajemy funkcje wręcz idealnie pokrywające się z zadaną funkcją. Patrząc po wykresie można odnieść wrażenie, że jedynym miejscem generującym błąd jest lekkie odstępstwo od normy w prawym brzegu.

7.6 50 węzłów

7.6.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 13: Wykres funkcji f(x) oraz funkcji sklejanych 3. stopnia dla 50 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Cubic function	0.028910290014262152	1.4072356038706349e-05
Natural Spline	0.01444570706316739	8.330569817766636e-06
Clamped boundary	0.16275509849790915	0.0002875036663231031

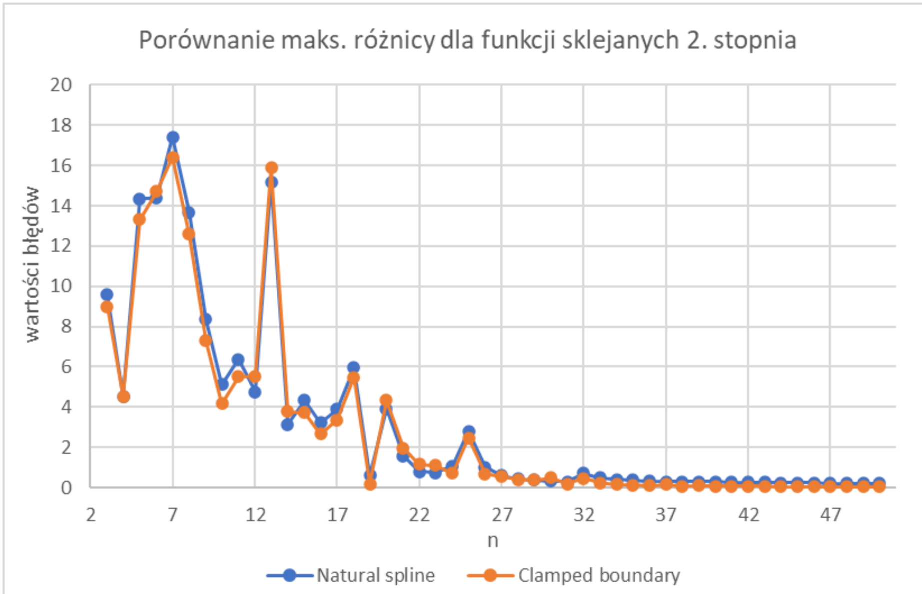
Tabela 12: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 3. stopnia dla trzech warunków brzegowych przy 50 węzłach

7.6.2 Komentarz

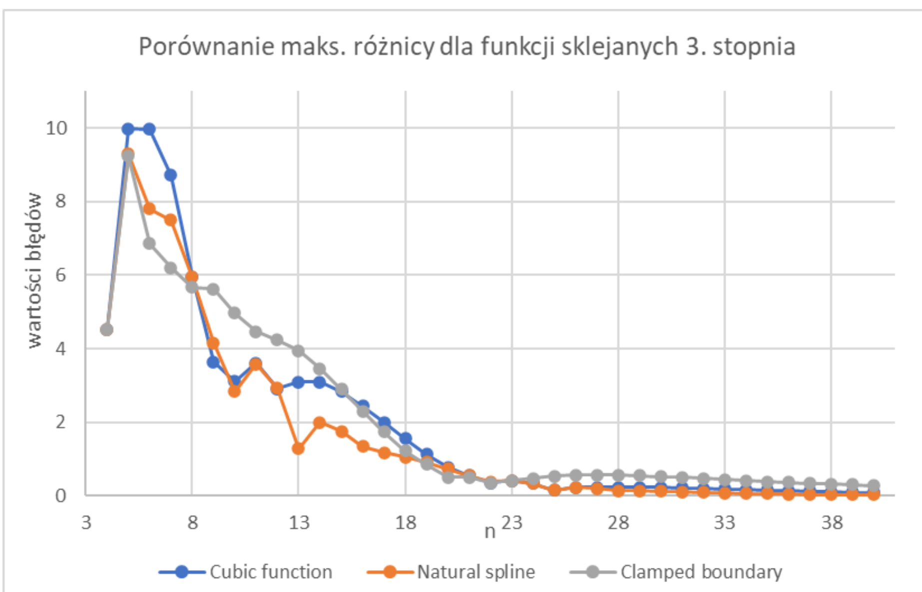
Przy 50 węzłach można prawie nie dostrzec różnicy pomiędzy zadaną funkcją a interpolacją, co potwierdzają również wartości błędów.

8 Porównanie błędów

Testy zostały przeporwadzone do 100 węzłow jednak z kwestii, że wyniki od ok 40 zaczynały być bardzo bliskie zeru, to dla lepszego zobrazowania postanowiłem obciąć zakres wyników do ok. połowy.



Rys. 14: Porównanie wartości maksymalnej różnicy dla obu warunków brzegowych dla funkcji sklejanej 2. stopnia w zależności od liczby węzłów n



Rys. 15: Porównanie wartości maksymalnej różnicy dla trzech warunków brzegowych dla funkcji sklejanej 3. stopnia w zależności od liczby węzłów n

9 Wnioski

Porównując wyniki interpolacji za pomocą funkcji sklejanych 2. oraz 3. stopnia oraz różnych rodzaji warunków brzegowych możemy dojść do kilku konkluzji.
Po pierwsze, w porównaniu z poprzedniejszymi interpolacjami nie doświadczamy tutaj efektu Rungeg'o i wraz z coraz większymi liczbami węzłów dokładność zaczyna się tylko zwiększać.
Patrząc na funkcje sklejane 2. stopnia nie ma za bardzo znaczenia jakiego warunku brzegowego użyjemy. Oba dla tych samych n uzyskują podobne wartości błędów oraz same wykresy za bardzo od siebie nie odbiegają. Jednak podczas testów można było zobaczyć, że jeszcze dla nie tak dużych wartości n, mimo małego błędu, dla danych przedziałów funkcje doznawały oscylacji. Raz większych a raz mniejszych.
Dla funkcji sklejanych 3. stopnia takie problemy nie występowały i dla coraz większych n funkcje zaczynały się idealnie pokrywać z zadaną funkcją. Na przestrzeni pierwszych 25 liczby węzłow można zobaczyć, że również nie ma większego znaczenia jakiego warunku brzegowego użyjemy. Dla jednych n clamped boundary uzyskuje lepsze wyniki, za to dla innych pozostałe dwa. Przypuszczam, że wszystko zależy od zadanej funkcji i jej kształtu.