

MOwNiT - interpolacja, zagadnienie Hermite'a

Paweł Podedworny

03.04.2024

1 Opis ćwiczenia

Dla funkcji $f(x) = e^{-k \cdot \sin(mx)} + k \cdot \cos(mx)$, gdzie $k = 2, m = 2$ na przedziale $x \in [-\pi, 2\pi]$, wyznaczyć dla zagadnienia Hermite'a wielomian interpolujący w postaci Hermite'a, korzystając z pierwszej pochodnej.

Przeprowadzić interpolację dla różnej liczby węzłów (np. 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20). Dla każdego przypadku interpolacji porównać wyniki otrzymane dla różnego rodzaju rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa.

Ocenić dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję.

Poszukać wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję.

Wyszukać stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównać z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

2 Dane techniczne

Komputer z systemem Windows 10 x64

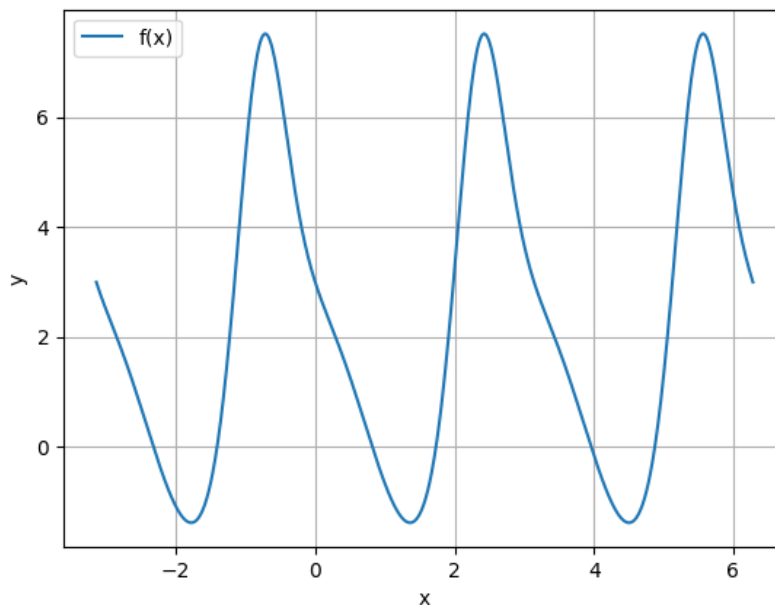
Procesor: AMD Ryzen 5 3600 3.60GHz

Pamięć RAM: 16GB 3200MHz

Środowisko: DataSpell 2023.3.4

Język: Python 3.11 z biblioteką numpy, sympy oraz matplotlib

3 Wykres funkcji



Rys. 1: Wykres funkcji $f(x)$ dla $x \in [-\pi, 2\pi], k = 2, m = 2$

4 Metody interpolacji

4.1 Metoda Hermite'a

Do wyznaczenia wielomianu interpolującego n. stopnia metodą Hermite'a został użyty wzór:

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^n b_l \cdot p_l(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{(s(i)+j)} \cdot p_{(s(i)+j)}(x)$$

gdzie $p_{(s(i)+j)}(x)$ jest wielomianem postaci:

$$p_{s(0)}(x) = 1$$

$$p_{(s(i)+j)}(x) = (x - x_0)^{m_0} (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_{i-1})^{m_{i-1}} (x - x_i)^j (*)$$

$$\text{gdzie: } i = 0, 1, \dots, k, \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

Aby odnaleźć współczynniki b_l tworzymy tablicę ilorazów różnicowych tak jak w metodzie Newtona. Natomiast tam, gdzie nie można utworzyć ilorazu, wykorzystujemy informacje o pochodnej. Następnie wartości na przekątnej będą odpowiadać kolejnym wartościom współczynników.

4.2 Obliczanie pochodnych

Do wyznaczenia funkcji pochodnej pierwszego rzędu skorzystałem z biblioteki *sympy* i funkcji *diff*, która symbolicznie wyznaczyła jej wzór a następnie z funkcji *lambdify*, dzięki której mogłem z niej skorzystać w kolejnych obliczeniach.

5 Obliczanie dokładności przybliżeń

5.1 Maksymalna różnica

Największa różnica jaka występuje pomiędzy funkcją, a wielomianem interpolującym:

$$\max_k |f(x_k) - P_n(x_k)|$$

5.2 Błąd średni kwadratowy

Suma kwadratów różnic pomiędzy wartościami funkcji i wielomianów interpolujących podzielonych przez liczbę punktów N , gdzie $N = 1000$:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - P_n(x_i))^2$$

5.3 Zera wielomianu Czebyszewa

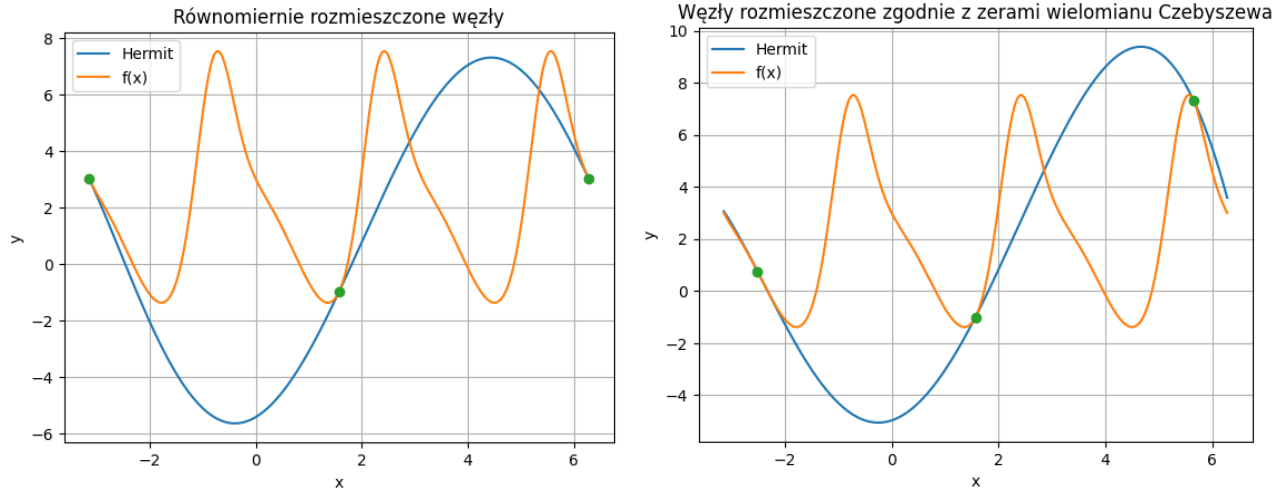
Aby obliczyć pierwiastki wielomianu Czebyszewa dla dowolnego przedziału $[a, b]$ korzystamy z przekształcenia:

$$x_k = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a) \cos\left(\frac{2k - 1}{2n} \pi\right)$$

6 Wyniki dla poszczególnej liczby węzłów

6.1 3 węzły (wielomian 5. stopnia)

6.1.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 2: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego dla 3 węzłów

Sposób rozmieszczenia węzłów	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
Równoodległe	13.039221806700855	31.093052941531624
Wg zer wielomianu Czebyszewa	12.295087294274012	33.91708169102011

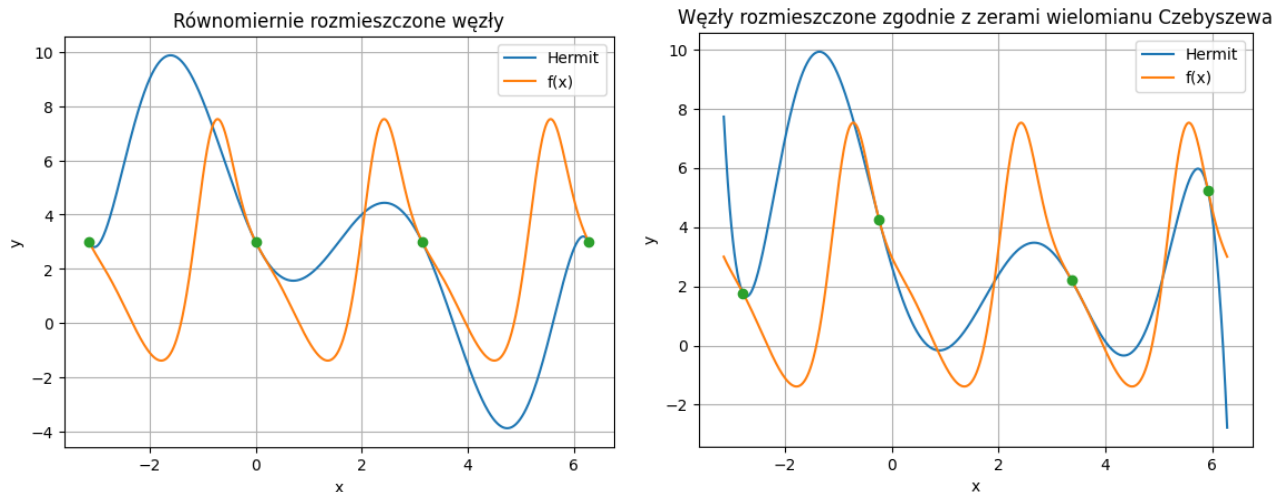
Tabela 1: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Hermite'a przy obu sposobach rozmieszczenia 3 węzłów

6.1.2 Komentarz

Z drugiego rysunku oraz pierwszej tabeli możemy zobaczyć, że interpolacja przy użyciu tak małej ilości węzłów przy skomplikowanej funkcji nie ma za bardzo sensu. Wykres kompletnie odbiega od poprawnej funkcji. Dodatkowo możemy jednak spostrzec, że wykres wielomianu interpolacyjnego dla dwóch sposobów rozmieszczenia węzłów jest bardzo do siebie podobny.

6.2 4 węzły (wielomian 7. stopnia)

6.2.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 3: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego dla 4 węzłów

Sposób rozmieszczenia węzłów	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
Równoodległe	11.162873578100978	20.092631028460424
Wg zer wielomianu Czebyszewa	10.582847475321254	12.075734517736521

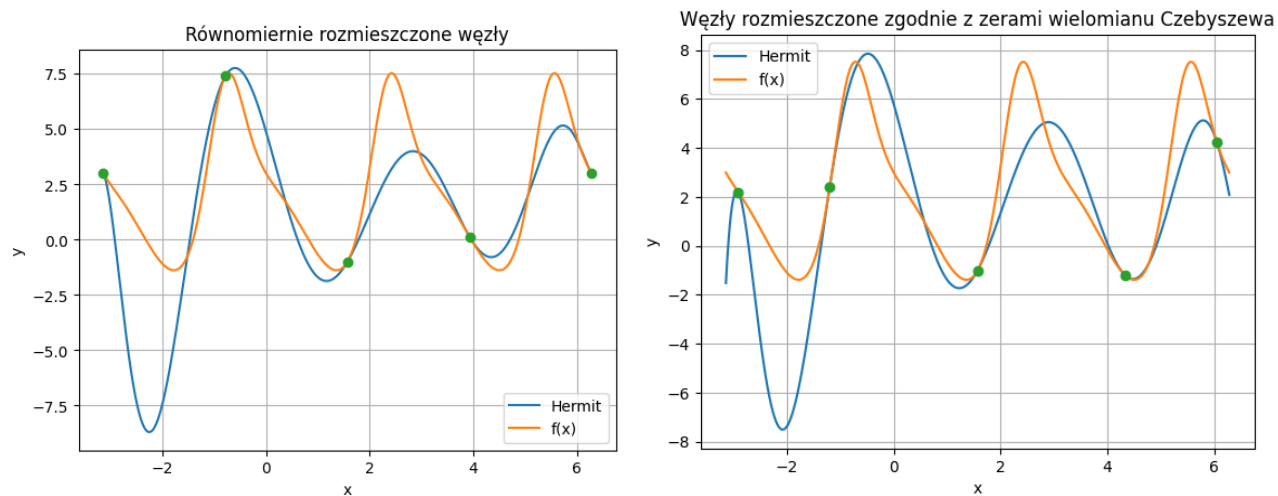
Tabela 2: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Hermite'a przy obu sposobach rozmieszczenia 4 węzłów

6.2.2 Komentarz

Korzystając z interpolacji Hermite'a możemy zauważyć, że dla 4 węzłów wyznaczony wielomian zaczyna bardzo powoli dopasowywać się w pojedynczych miejscach do zadanej funkcji. Jednakże widzimy, że przy lewym brzegu w obu przypadkach, wykres wielomianu trochę za bardzo rośnie w górę.

6.3 5 węzłów (wielomian 9. stopnia)

6.3.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 4: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego dla 5 węzłów

Sposób rozmieszczenia węzłów	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
Równoodległe	8.601023312831462	7.464246116213026
Wg zer wielomianu Czebyszewa	6.758748184177296	5.436193875773504

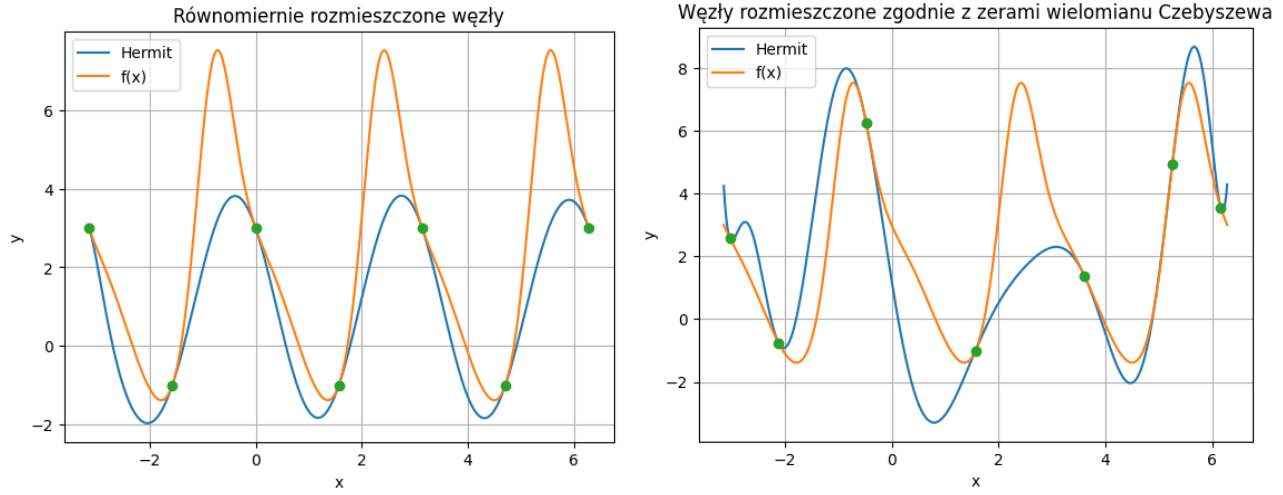
Tabela 3: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Hermite'a przy obu sposobach rozmieszczenia 5 węzłów

6.3.2 Komentarz

Przy $n=5$ możemy zauważyć, że wyznaczone wielomiany z dużym przybliżeniem zaczynają powoli pokrywać się z zadaną funkcją. W tym jednak przypadku wykres przy lewym brzegu trochę za bardzo odstaje w dół.

6.4 7 węzłów (wielomian 13. stopnia)

6.4.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 5: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego dla 7 węzłów

Sposób rozmieszczenia węzłów	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
Równoodległe	4.5045219207215315	3.588976920929562
Wg zer wielomianu Czebyszewa	6.027442504238194	4.789785617246491

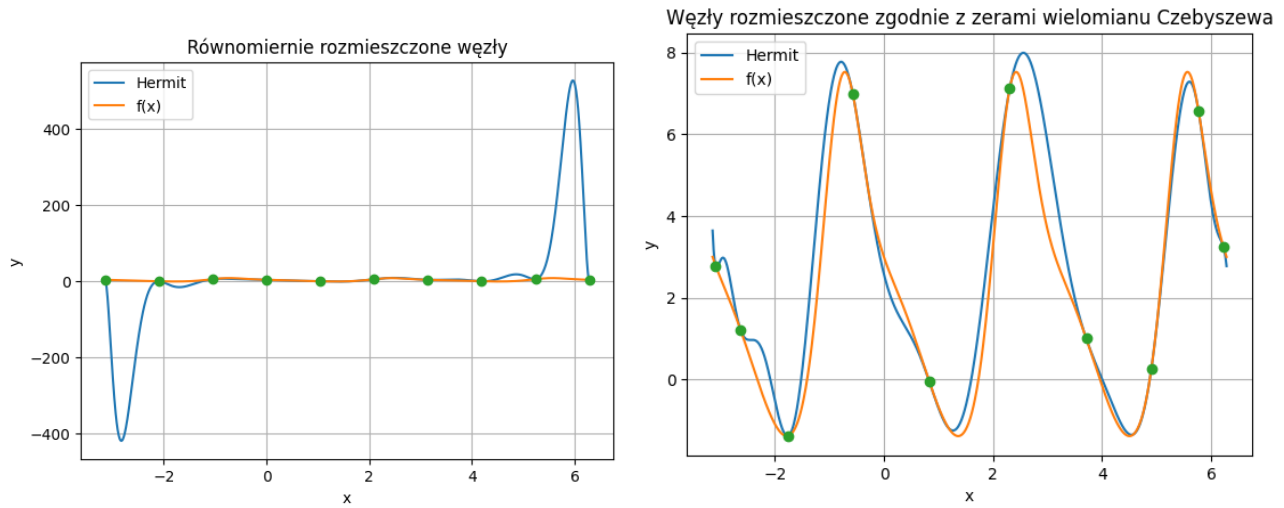
Tabela 4: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Hermite'a przy obu sposobach rozmieszczenia 7 węzłów

6.4.2 Komentarz

Przy $n=7$, jak się później okaże, dla równomiernie określonych węzłów, uzyskaliśmy najmniejszą różnicę w całości przedziału. Z rysunku 5. widzimy jednak, że górne partie funkcji nie są kompletnie pokryte. Wynika to z faktu, że węzły w ogóle nie pokrywają tych części funkcji. Za to dla węzłów określonych na podstawie zer wielomianu Czebyszewa wyznaczony wielomian przybrał dziwne kształty.

6.5 10 węzłów (wielomian 19. stopnia)

6.5.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 6: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego dla 10 węzłów

Sposób rozmieszczenia węzłów	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
Równoodległe	522.4823629510852	16448.683903891968
Wg zer wielomianu Czebyszewa	2.2837075983778226	0.5989220429477424

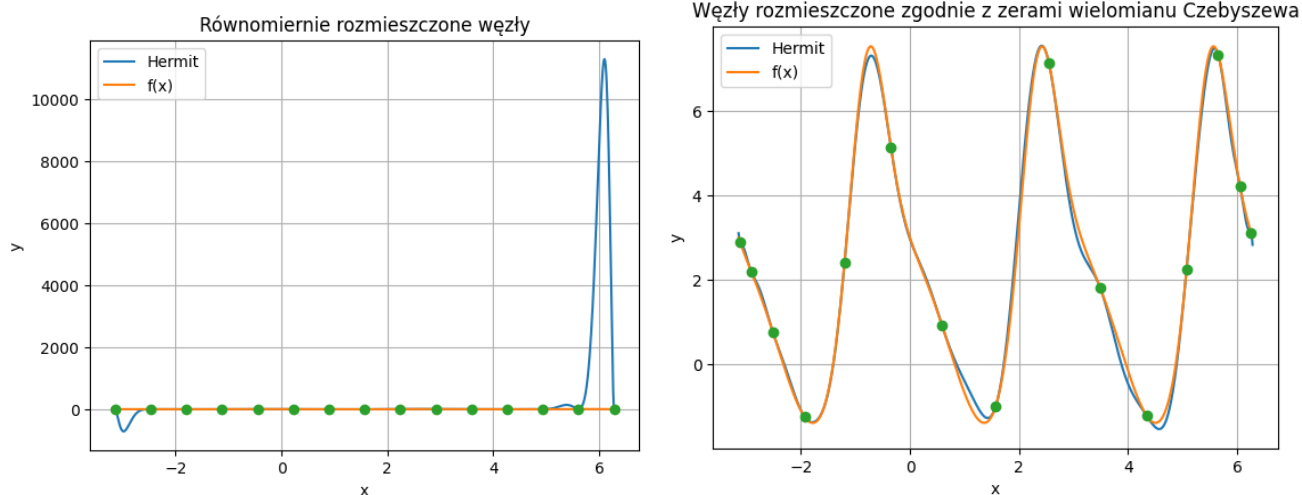
Tabela 5: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Hermite'a przy obu sposobach rozmieszczenia 10 węzłów

6.5.2 Komentarz

Dla 10 węzłów rozmieszczonych wg zer Czebyszewa wykres wielomianu zaczyna coraz lepiej przybliżać się do oryginalnej funkcji, na co wskazują też coraz mniejsze błędy. Jedynym wyjątkiem są lekkie odchylenia przy lewym brzegu funkcji. Za to dla punktów równomiernie oddalonych ukazał się efekt Rungego. Jest on tak okazały, że kompletnie nie można zobaczyć, co dzieje się w środku przedziału.

6.6 15 węzłów (wielomian 29. stopnia)

6.6.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 7: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego dla 15 węzłów

Sposób rozmieszczenia węzłów	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
Równoodległe	11272.167343384524	2770870.2272818037
Wg zer wielomianu Czebyszewa	0.404647378670973	0.02431854494377304

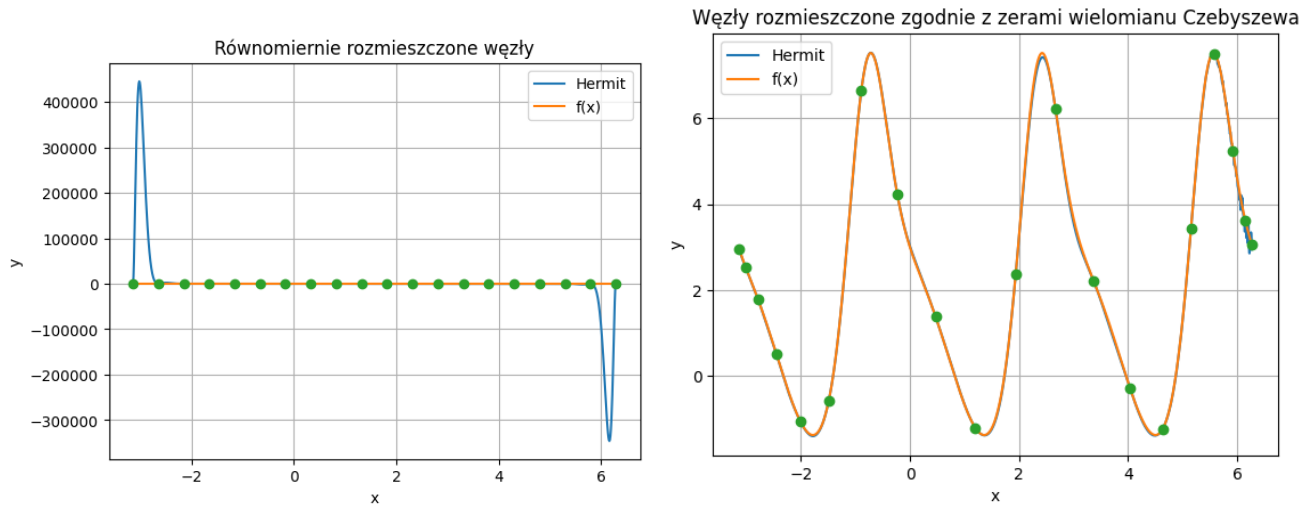
Tabela 6: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Hermite'a przy obu sposobach rozmieszczenia 15 węzłów

6.6.2 Komentarz

Przy 15 równoodległych węzłach efekt Rungego jeszcze bardziej deprawuje wyznaczony wielomian. W przypadku zer wielomianu Czebyszewa, wyznaczony wielomian prawie idealnie pokrywa się z zadaną funkcją.

6.7 20 węzłów (wielomian 39. stopnia)

6.7.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 8: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego dla 20 węzłów

Sposób rozmieszczenia węzłów	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
Równoodległe	445435.6168432821	4781364106.34861
Wg zer wielomianu Czebyszewa	0.38626778551509444	0.002085340951845285

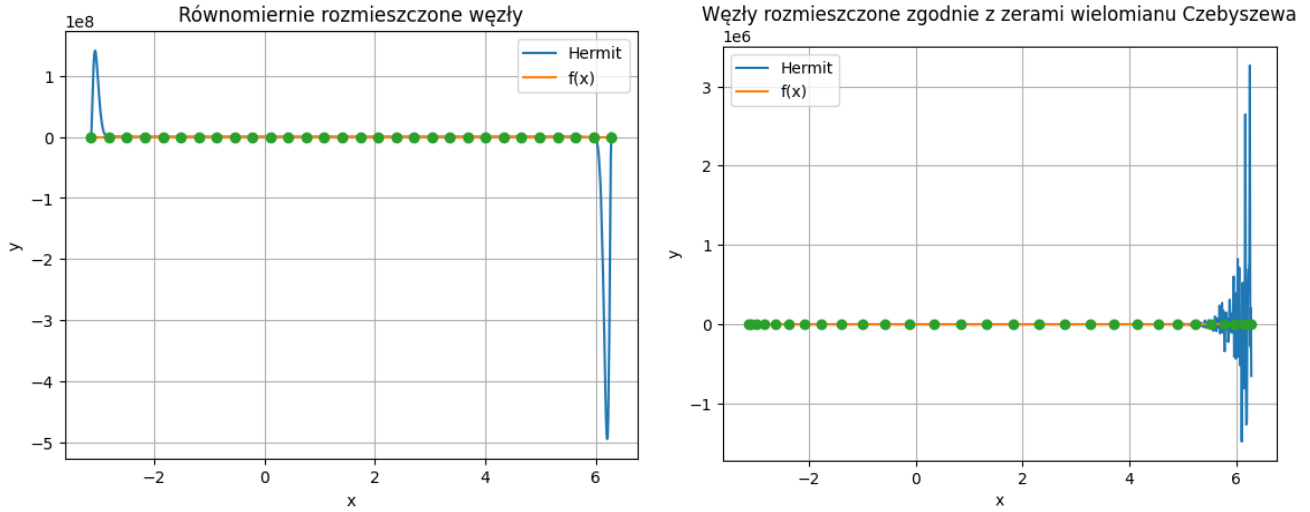
Tabela 7: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Hermite'a przy obu sposobach rozmieszczenia 20 węzłów

6.7.2 Komentarz

Dla 20 węzłów rozmieszczonych równomiernie wyniki na brzegach zaczynają uciekać do coraz większych wartości. Za to dla zer Czebyszewa przedstawiony wielomian ukazuje się z jeszcze mniejszym błędem w stosunku do poprzedniego przykładu. Wynika to z faktu, że węzły trafiły mniej więcej na punkty przegięcia funkcji. Uwagę jednak możemy zwrócić na prawy brzeg i powolne ustępstwa od zadanej funkcji.

6.8 30 węzłów

6.8.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 9: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolacyjnego dla 30 węzłów

Sposób rozmieszczenia węzłów	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
Równoodległe	495105853.37386745	2449063198170216.0
Wg zer wielomianu Czebyszewa	3264127.1527725034	30051906096.055134

Tabela 8: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Hermite'a przy obu sposobach rozmieszczenia 30 węzłów

6.8.2 Komentarz

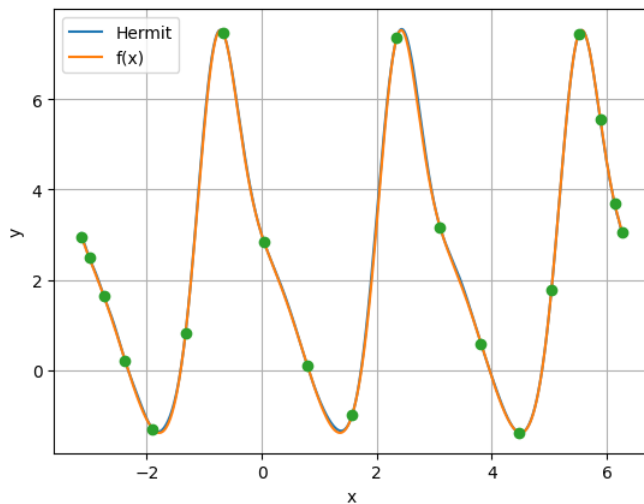
Dla $n=30$ przy rozmieszczeniu równomiernym czy wg zer Czebyszewa nie dostajemy poprawnych wielomianów interpolujących.

7 Wielomian najlepiej przybliżający zadaną funkcję

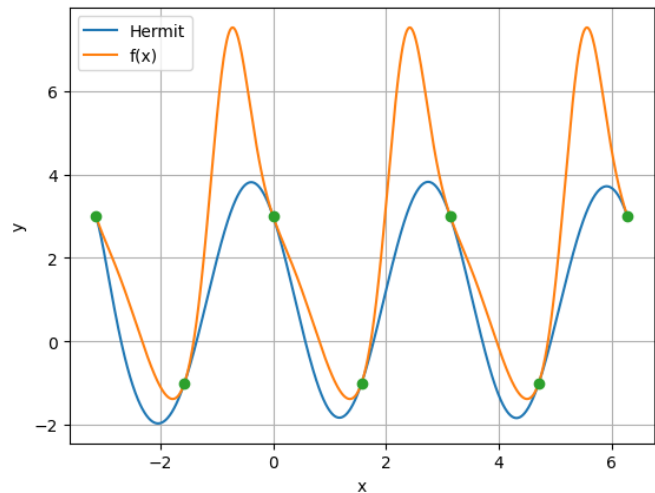
7.1 Wyjaśnienie

Aby znaleźć wielomian, który najlepiej przybliży funkcję $f(x)$ porównałem ze sobą wyniki maksymalnej różnicy dla liczby węzłów od 3 do 100. Tak zawężone pole obliczeń spowodowane jest faktem, że w poprzednich testach interpolacja Hermite'a szybko zaczynała tracić dokładność w stosunku do metod z poprzedniego ćwiczenia.

7.2 Wykresy



Rys. 10: Wykres z wielomianem interpolującym metodą Hermite'a przy $n=19$ dla węzłów rozmieszczonych wg zer Czebyszewa



Rys. 11: Wykres z wielomianem interpolującym metodą Hermite'a przy $n=7$ dla węzłów rozmieszczonych równolegle

7.3 Komentarz

Okazało się, że najlepsze przybliżenie wyszło w przypadku węzłów rozmieszczonych wg zer Czebyszewa dla $n=19$, a dla rozmieszczonych równolegle dla $n=7$.

8 Porównanie metod

8.1 Równomierny rozkład węzłów

Liczba węzłów n	Interpolacja Lagrange'a		Interpolacja Hermite'a
	Metoda Lagrange'a	Metoda Newtona	
3	8.394013927	8.394013927	13.03922181
4	4.525020344	4.525020344	11.16287358
5	10.82196772	10.82196772	8.601023313
7	14.30140558	14.30140558	4.504521921
10	9.13073369	9.13073369	522.482363
15	261.5555094	261.5555094	11272.16734
20	2500.879794	2500.879794	445435.6168
30	94527.81114	94527.81109	495105853.4
50	245756535.4	245757949.4	6.39E+19
100	6.41694E+14	1.53E+20	5.03E+61

Tabela 9: Porównanie maksymalnej różnicy dla wszystkich metod przy równomiernym rozmieszczeniu n węzłów

8.2 Rozkład węzłów wg zer wielomianu Czebyszewa

Liczba węzłów n	Interpolacja Lagrange'a		Interpolacja Hermite'a
	Metoda Lagrange'a	Metoda Newtona	
3	8.786379604	8.786379604	12.29508729
4	5.047321407	5.047321407	10.58284748
5	9.354852241	9.354852241	6.758748184
7	9.567346046	9.567346046	6.027442504
10	3.646291077	3.646291077	2.283707598
15	3.201287912	3.201287912	0.404647379
20	1.610729103	1.610729103	0.386267786
30	0.227181207	0.227181207	3264127.153
50	0.007789427	2169.319028	4.95E+19
100	1.00E-07	5.90E+19	1.86E+66

Tabela 10: Porównanie maksymalnej różnicy dla wszystkich metod przy rozmieszczeniu n węzłów wg zer wielomianu Czebyszewa

9 Wnioski

Porównując wyniki interpolacji za pomocą interpolacji Hermite'a w stosunku do interpolacji Lagrange'a oraz dwóch metod Lagrange'a oraz Newtona możemy zauważyć pewne zależności.

Zadana funkcja ma licznie punkty przegięcia, więc znalezienie idealnego dopasowania było dla interpolacji ciężkie. Jednakże można było zobaczyć, że dla węzłów wg zer wielomianu Czebyszewa dla pewnego n mogliśmy uzyskać w miarę dobre przybliżenie.

Po pierwsze, dla zadanej funkcji interpolacja Hermite'a swoje najlepsze dopasowanie uzyskała dla znacznie mniejszej liczby węzłów. Jednak jak się okazało, nie było one tak dokładne jak dla chociażby $n=188$ korzystając z metody Lagrange'a.

Po drugie, tak jak szybko dostawaliśmy najlepsze dopasowanie dla wyliczonego n, to tak szybko dla kolejnych liczb węzłów te zaczęły uciekać do nieskończoności.

Po przeprowadzonych wszystkich testach wynika, że jeżeli chcemy uzyskać jak najlepsze dopasowanie, powinniśmy skorzystać z metody Lagrange'a w połączeniu z rozkładem węzłów wielomianu wg zer wielomianu Czebyszewa.