MOwNiT - aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Paweł Podedworny

17.04.2024

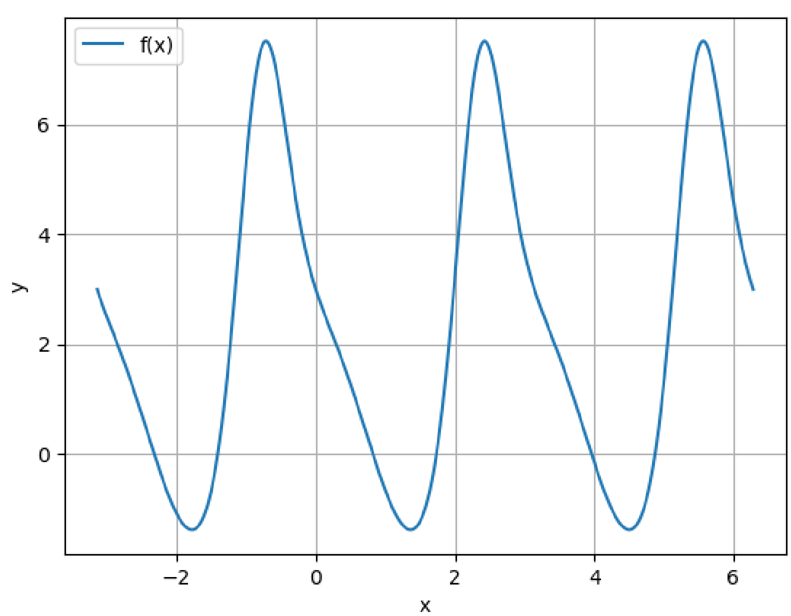
1 Opis ćwiczenia

Dla funkcji $f(x) = e^{-k \cdot sin(mx)} + k \cdot cos(mx)$, gdzie $k = 2, m = 2$ na przedziale $x \in [-\pi, 2\pi]$, wyznaczyć jej wartości w n dyskretynych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przyliżenie funkcji wykorzystując aproksymacje średniokwadratową wielomianami algebraicznymi.
Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

2 Dane techniczne

Komputer z systemem Windows 10 x64
Procesor: AMD Ryzen 5 3600 3.60GHz
Pamięć RAM: 16GB 3200MHz
Środowisko: DataSpell 2023.3.4
Język: Python 3.11 z biblioteką numpy oraz matplotlib

3 Wykres funkcji



Rys. 1: Wykres funkcji f(x) dla $x \in [-\pi, 2\pi], k = 2, m = 2$

4 Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraiczynymi

4.1 Szukanie wielomianu uogólnionego

Rozważamy następujące dane:

- Węzły aproksymacji dane przez: $(x_i, y_i = F(x_i))$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$, gdzie mamy $n + 1$ węzłów.
- Układ funkcji bazowych $\varphi_j(x)$ dla $j = 0, 1, \ldots, m$.

Szukamy wielomianu uogólnionego:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x)$$

czyli $\{a_j\}_{j=0}^{m}$, dla których:

$$\min ||F(x) - f(x)|| = \min \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i)]^2$$

gdzie:

- $F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) \Leftrightarrow F(x_i) - f(x)$ - odchylenie wartości funkcji aproksymującej od wartości funkcji aproksymowanej
- $w(x_i)$ - waga danego węzła (im większy błąd tym mniejsza waga, zwykle waga jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu błędu lub ma wartość 1)

4.2 Obliczanie wartości współczynników a_j

Zakładając, że:

$$H(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) \right]^2$$

współczynniki $\{a_j\}$ znajdujemy z warunku:
$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m \Rightarrow$ Układ (m + 1) równań liniowych o (m + 1) niewiadomych.
$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2 \sum\limits_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - \sum\limits_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i)]\varphi_k(x_i) = 0 \ dla \ k = 0, 1, \ldots, m$
Powyższy układ równań zwany jest układem normalnym.

Układ normalny:

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j \right] x_i^k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) x_i^k \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i) x_i^k, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=0}^{m} (\sum_{i=0}^{n} w(x_i) x_i^{j+k}) a_j = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i) x_i^k$$

W postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \cdots & \sum w_i x_i^m \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \cdots & \sum w_i x_i^{m+1} \\ \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \sum w_i x_i^4 & \cdots & \sum w_i x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum w_i x_i^m & \sum w_i x_i^{m+1} & \sum w_i x_i^{m+2} & \cdots & \sum w_i x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_i F_i \\ \sum w_i F_i x_i \\ \sum w_i F_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum w_i F_i x_i^m \end{pmatrix}$$

5 Obliczanie dokładności przybliżeń

5.1 Maksymalna różnica

Największa różnica jaka występuje pomiędzy funkcją, a wielomianem interpolującymm:

$$\max_k |f(x_k) - P_n(x_k)|$$

5.2 Błąd średni kwadratowy

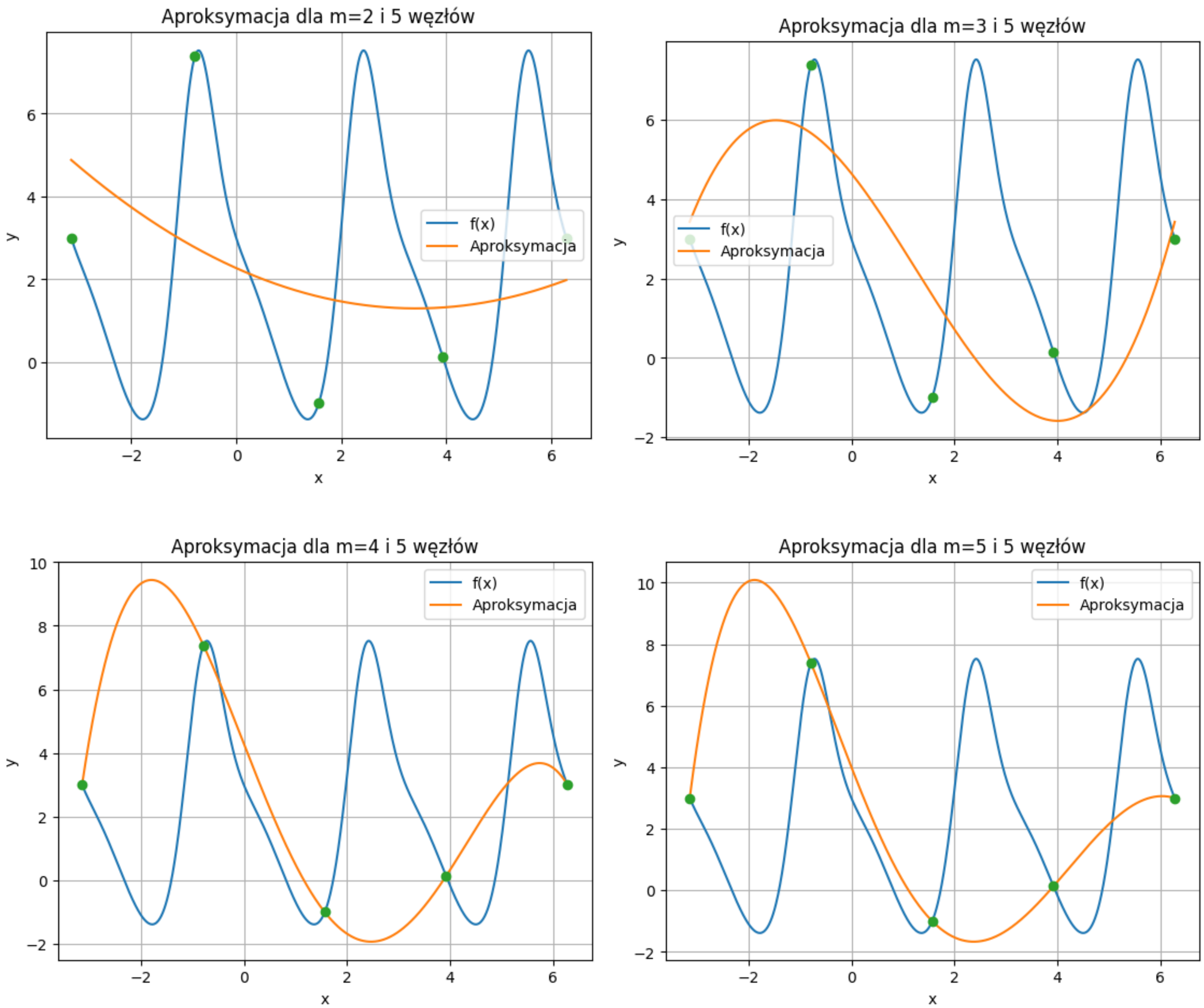
Suma kwadratów różnic pomiędzy wartościami funkcji i funkcji sklejanych podzielonych przez liczbę punktów N, gdzie $N = 1000$:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - P_n(x_i))^2$$

6 Wyniki aproksymacji

6.1 5 węzłów

6.1.1 m = 2, 3, 4, 5



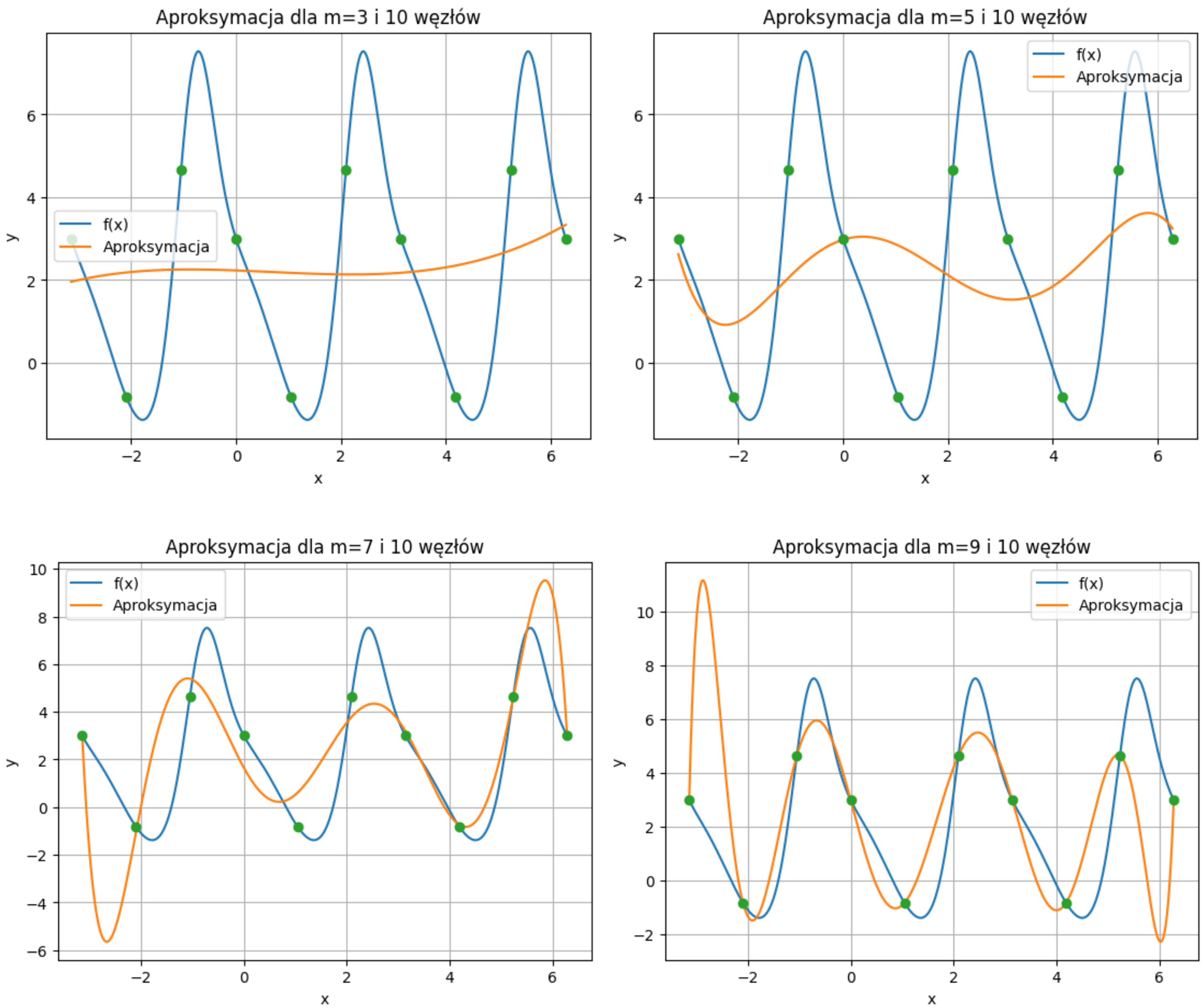
Rys. 2: Wykresy aproksymacji dla 5 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
2	6.1473	9.9090
3	7.6054	15.8282
4	10.8220	23.6756
5	11.4498	25.2709

Tabela 1: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 5 węzłach.

6.2 10 węzłów

6.2.1 m = 3, 5, 7, 9



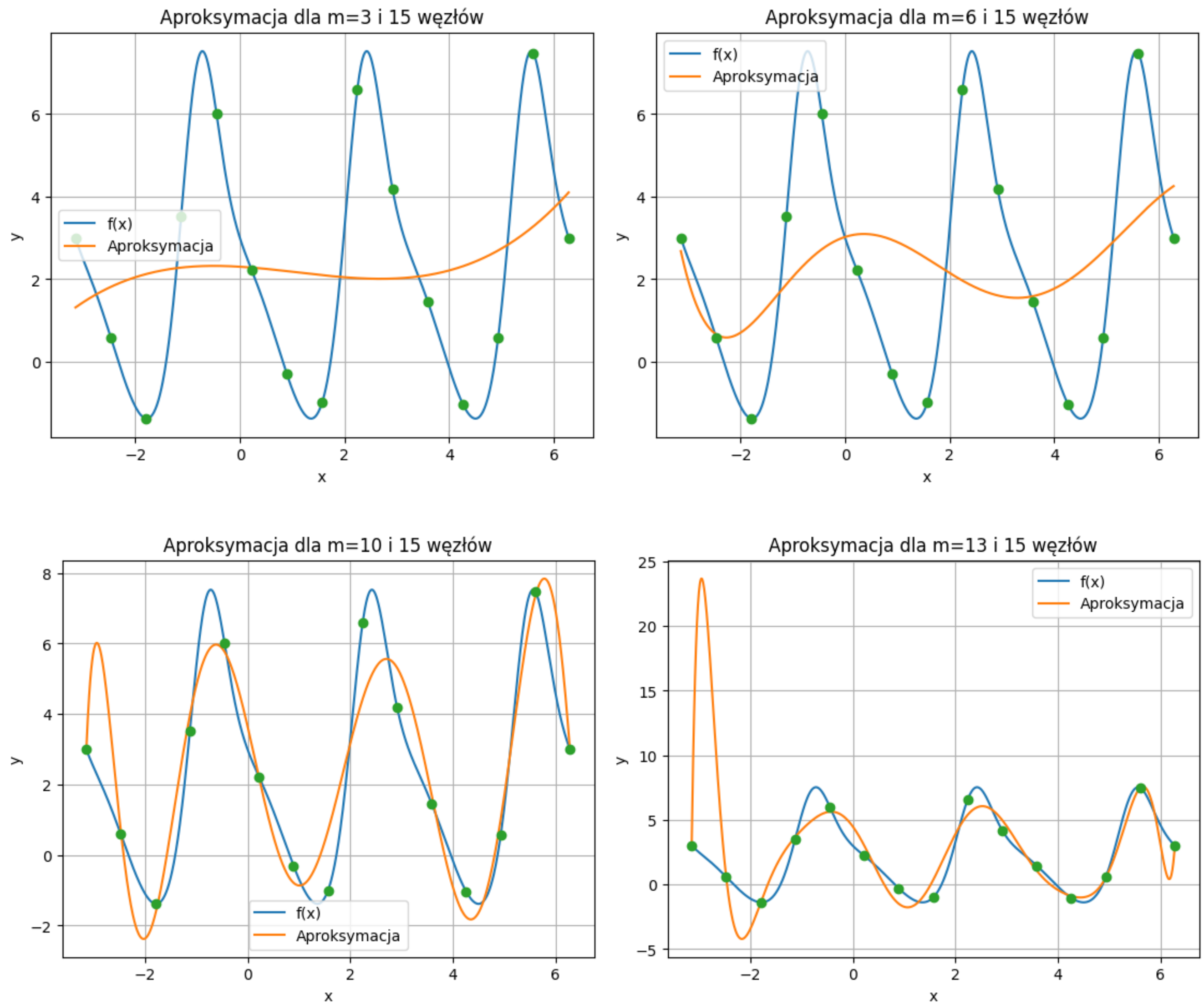
Rys. 3: Wykresy aproksymacji dla 10 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
3	5.3914	7.7346
5	5.7269	7.3345
7	7.1219	6.7681
9	9.1307	8.4127

Tabela 2: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 10 węzłach.

6.3 15 węzłów

6.3.1 m = 3, 6, 10, 13



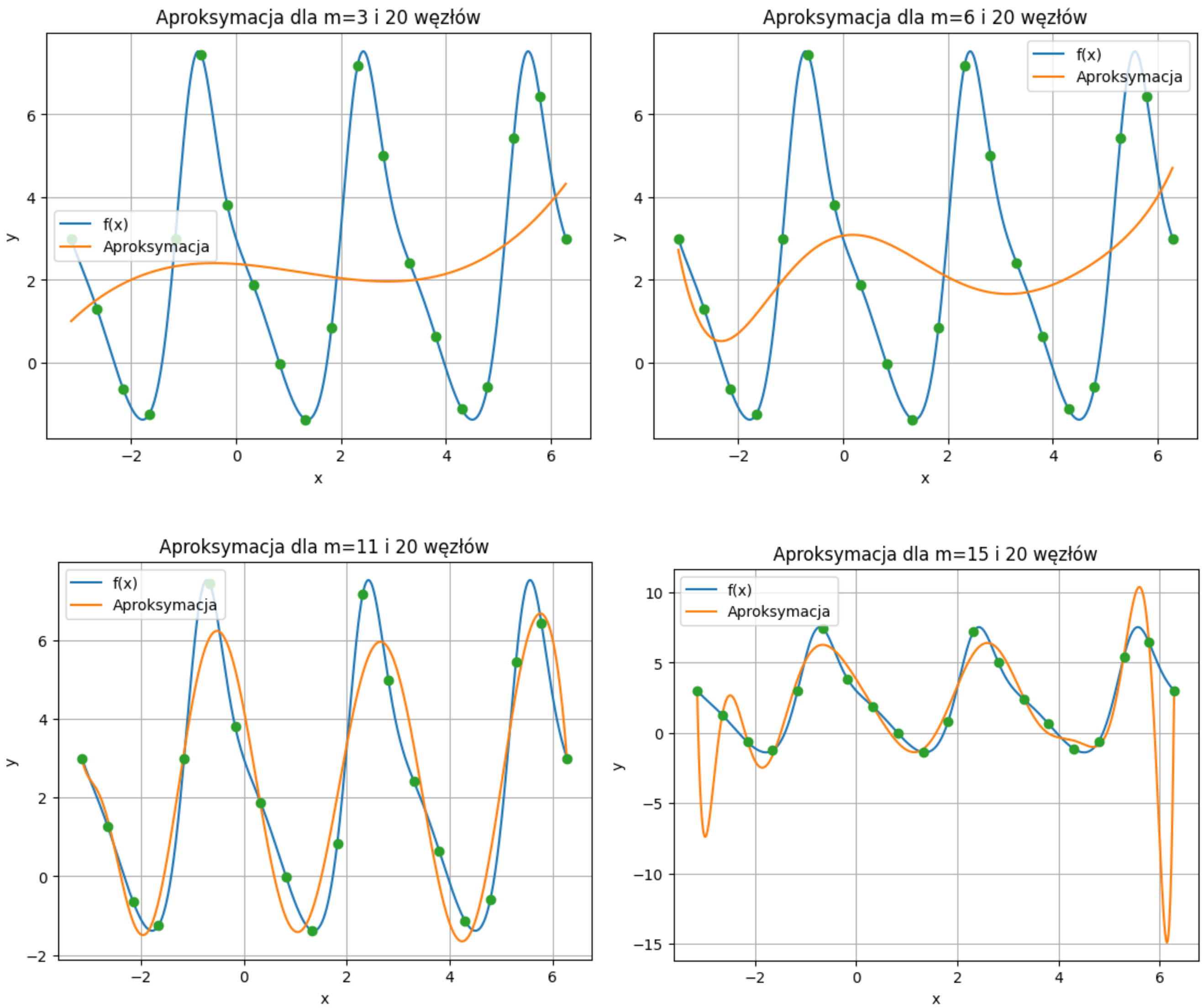
Rys. 4: Wykresy aproksymacji dla 15 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
3	5.5129	7.4866
6	5.6880	7.1496
10	3.7846	1.5605
13	21.3519	15.7913

Tabela 3: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 15 węzłach.

6.4 20 węzłów

6.4.1 m = 3, 6, 11, 15



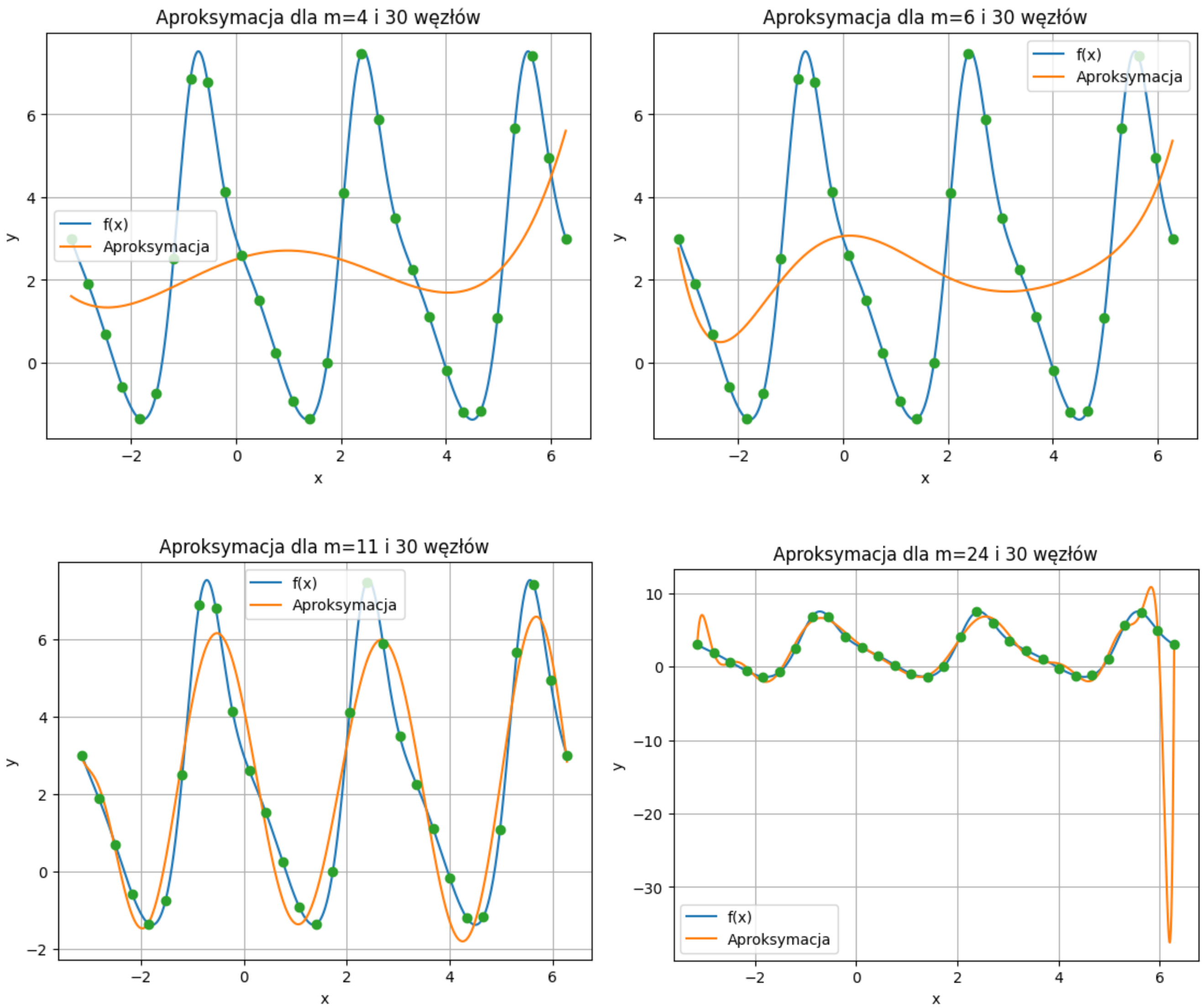
Rys. 5: Wykresy aproksymacji dla 20 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
3	5.5422	7.4153
6	5.7025	7.0727
11	2.0552	0.8720
15	18.5805	11.0334

Tabela 4: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 20 węzłach.

6.5 30 węzłów

6.5.1 m = 4, 6, 11, 24



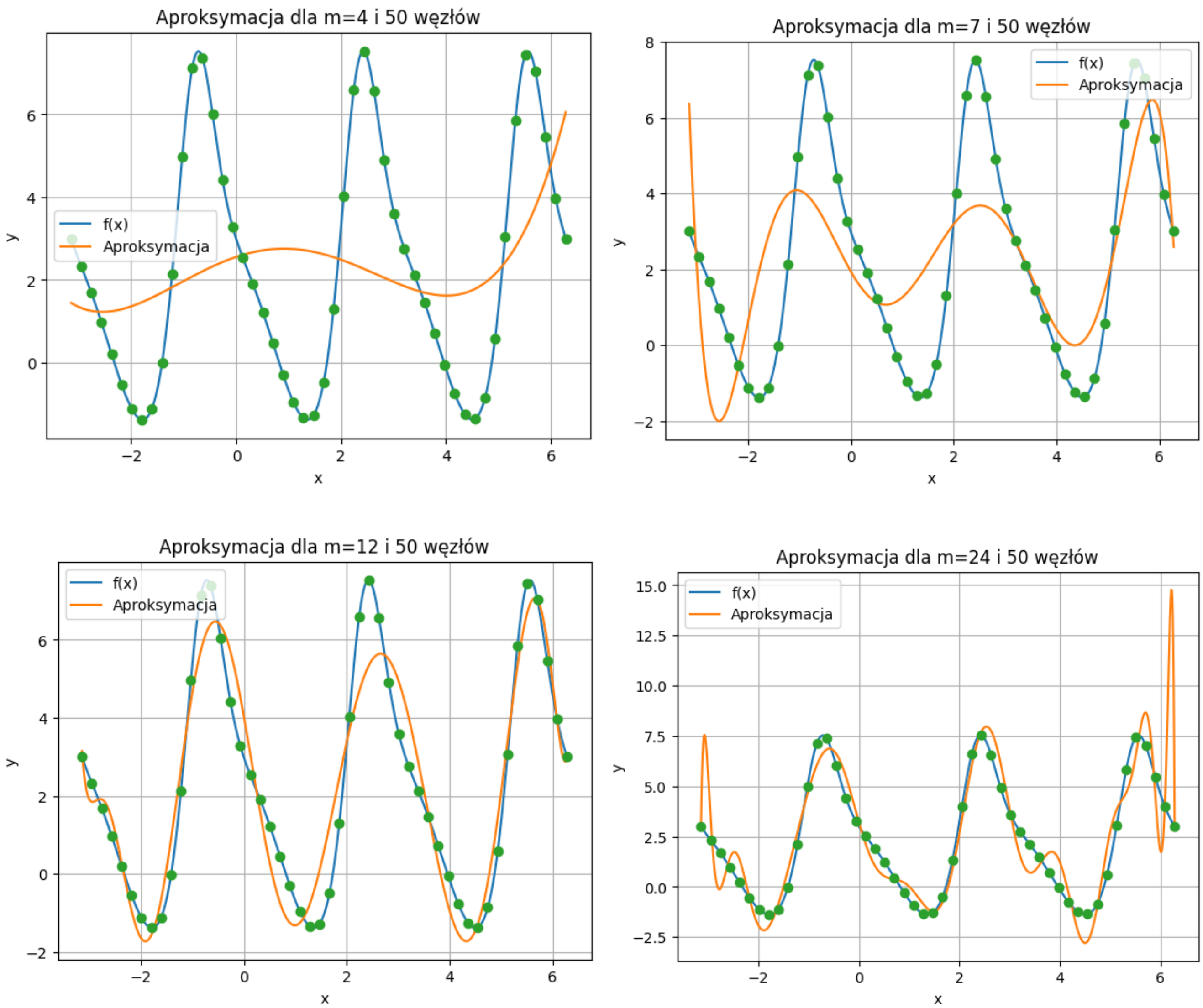
Rys. 6: Wykresy aproksymacji dla 30 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
4	5.4055	7.1236
6	5.6760	6.9942
11	2.1092	0.8437
24	40.9339	25.2773

Tabela 5: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 30 węzłach.

6.6 50 węzłów

6.6.1 m = 4, 7, 12, 24



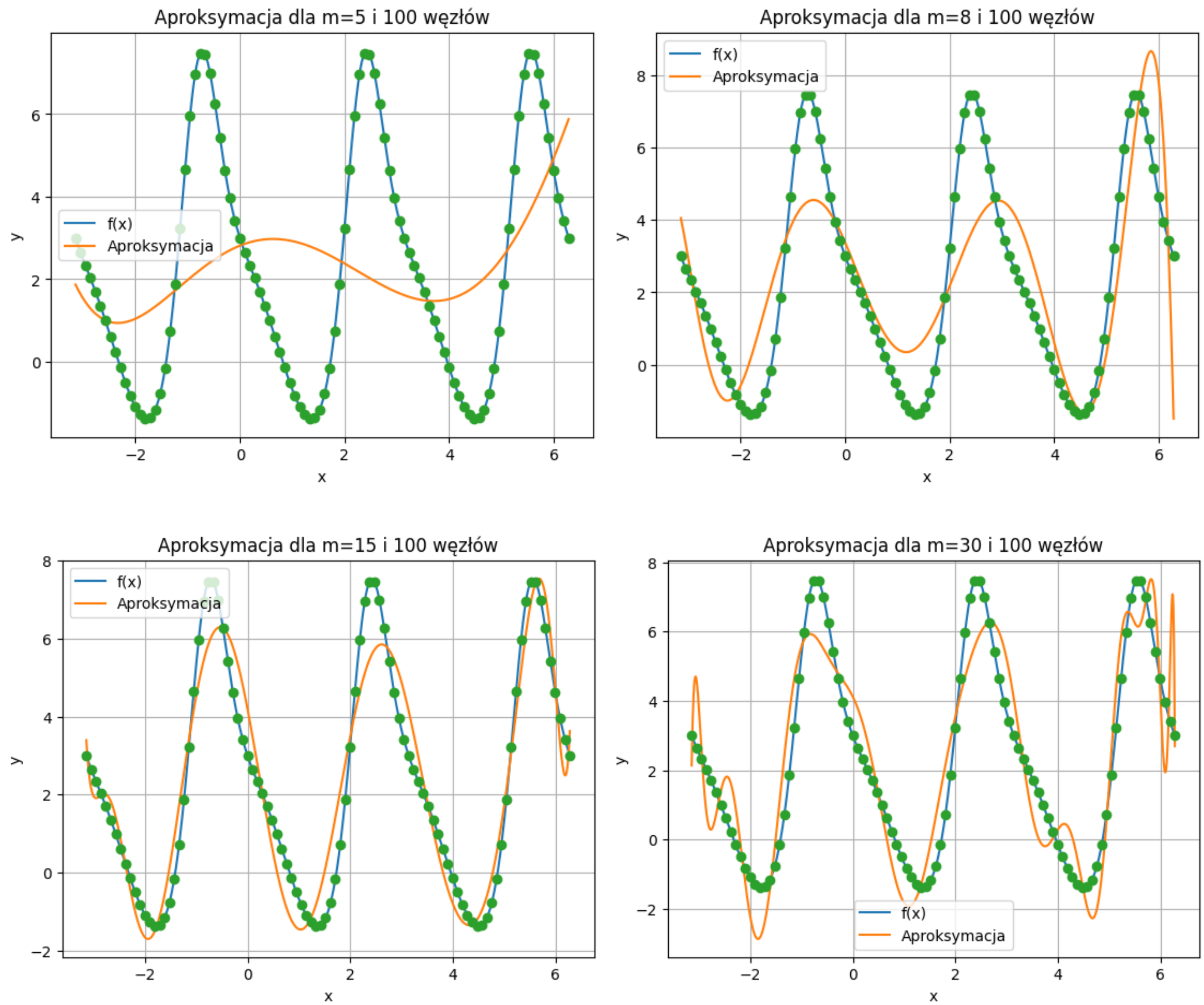
Rys. 7: Wykresy aproksymacji dla 50 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
4	5.3731	7.0770
7	4.0113	4.2386
12	2.2847	0.7526
24	11.5081	2.2773

Tabela 6: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 50 węzłach.

6.7 100 węzłów

6.7.1 m = 4, 7, 12, 24



Rys. 8: Wykresy aproksymacji dla 100 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
5	5.4670	7.0423
8	4.4903	2.5151
15	2.0018	0.6929
30	3.8813	1.1994

Tabela 7: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 100 węzłach.

6.8 Komentarz

6.8.1 5 węzłów

Dla tak małej liczby węzłow możemy zobaczyć, że aproksymacje nie do końca dobrze przybliżył zadaną funkcję. Jeżeli jednak byśmy patrzyli tylko na same określone punkty wtedy wyznaczone krzywe dosyć dobrze oddają ich położenie.

6.8.2 10 węzłów

Dla 10 równomiernie rozmieszczonych węzłów możemy zobaczyć, że dla pewnych wartości stopnia wielomianu uzyskaliśmy niemal prostą funkcję. Dla wyższego stopnia wielomianu (m=9) możemy zobaczyć powolne początki efektu Rungego.

6.8.3 15 węzłów

Dla 15 węzłów widzimy, że dla stopni równych około 10 dostajemy nawet całkiem dobrą aproksymacje funkcji. Przy niższych stopniach dostajemy wielomian, który nie oddaje kształtu f(x). Za to dla 13 stopnia pojawia się efekt Rungego, który psuje nam wykres.

6.8.4 20 węzłów

Tak jak w poprzednich przypadkach, dla niskich stopni wielomianu uzyskujemy aproksymacje dalekie od poprawnego kształtu naszej funkcji. Dla stopni około 10. aproksymacja całkiem skutecznie działa. Dla wyższych stopni pokazuje nam się całkiem okazały efekt Rungego.

6.8.5 30 węzłów

Ponownie, dla niskich stopni wielomianu dostajemy niedokładne aproksymacje, około stopnia 10. dobre przybliżenie, zaś dla wyższych stopni coraz bardziej uwidacznia nam się efekt Rungego.

6.8.6 50 węzłów

Dla 50 węzłów w przeciwieństwie do poprzednich badań, dla wyższych stopni oprócz efektu Rungego możemy zobaczyć, że funkcja zaczyna wpadać w dziwnie oscylacje. Dodatkowo dla w miarę niskiego stopnia 7. aproksymacja przybrała nawet podobny kształt.

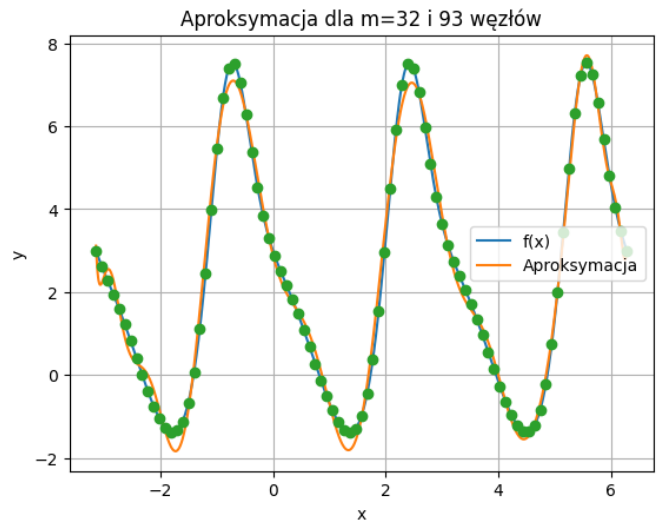
6.8.7 100 węzłów

W tym przypadku widzimy, że dla wysokich stopni ponownie dostajemy błędne wykresy z zbyt dużą ilościa oscylacji. Najlepiej radzą sobie wielomiany o m w okolicach 12. Niskie stopnie dalej przybliżają za bardzo ogólnikowo.

7 Wielomian najlepiej przybliżający funkcję

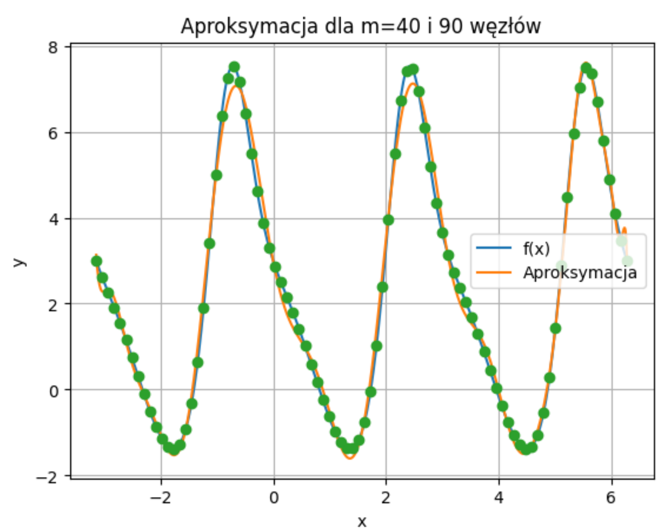
Przeprowadzono testy dla różnych kombinacji n i m takich że $3 <= m <= n <= 100$ i wyszukano najlepsze przybliżenie patrząc na a) najmniejszą wartość bezwględnej różnicy oraz b) najmniejszy błąd średniokwadratowy.

7.1 Bezwględna różnica



Rys. 9: Aproksymacja dla 93 węzłów i 32. stopnia wielomianu

7.2 Błąd średniokwadratowy



Rys. 10: Aproksymacja dla 90 węzłów i 40. stopnia wielomianu

8 Wnioski

Po przeprowadzonych testach dla różnych liczby węzłów oraz stopnia wielomianów możemy zauważyć, że najlepsze wyniki aproksymacji dostajemy dla niskich wartości m.
Dla zadanej funkcji wynika jednak, że stosowanie stopni mniejszych niż 8 nie ma większego sensu, ponieważ ilość punktów zwrotnych jest za duża aby wielomian o takim m sobie z nią poradził.
Dla coraz wyższych stopni wielomianów dokłaność aproksymacji zaczyna spadać, a dla niektórych kombinacji zaczyna pojawiać się efekt Rungego.
Z testów dla zadanej funkcji f(x) wynika, że w zależności od liczby węzłów najlepiej korzystać ze stopni większych niż 8 oraz mniejszych od 15.
Patrząc bardziej ogólnie, to dobór stopnia i liczby węzłów powinien zależeć od zadanej funkcji i dla każdej trzeba by było przeprowadzić osobne testy.