

MOwNiT - interpolacja, zagadnienie Lagrange'a

Paweł Podedworny

20.03.2024

1 Opis ćwiczenia

Dla funkcji $f(x) = e^{-k \cdot \sin(mx)} + k \cdot \cos(mx)$, gdzie $k = 2, m = 2$ na przedziale $x \in [-\pi, 2\pi]$, wyznaczyć dla zagadnienia Lagrange'a wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a i Newtona.

Przeprowadzić interpolację dla różnej liczby węzłów (np. 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20). Dla każdego przypadku interpolacji porównać wyniki otrzymane dla różnego rodzaju rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa.

Ocenić dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję.

Poszukać wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję.

Wyszukać stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównać z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

2 Dane techniczne

Komputer z systemem Windows 10 x64

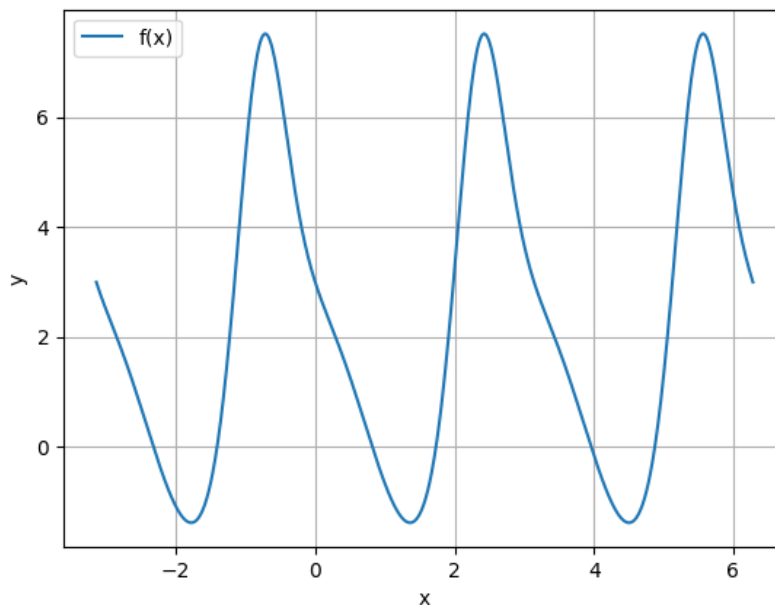
Procesor: AMD Ryzen 5 3600 3.60GHz

Pamięć RAM: 16GB 3200MHz

Środowisko: DataSpell 2023.3.4

Język: Python 3.11 z biblioteką numpy oraz matplotlib

3 Wykres funkcji



Rys. 1: Wykres funkcji $f(x)$ dla $x \in [-\pi, 2\pi], k = 2, m = 2$

4 Metody interpolacji

4.1 Metoda Lagrange'a

Do wyznaczenia wielomianu interpolującego n. stopnia metodą Lagrange'a został użyty wzór:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot L_k(x)$$

gdzie $L_k(x)$ to baza Lagrange'a opisana wzorem:

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{(x_k - x_i)}$$

4.2 Metoda Newtona

Do wyznaczenia wielomianu interpolującego n. stopnia metodą Newtona został użyty wzór:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

gdzie $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ jest ilorazem różnicowym względem x_0, x_1, \dots, x_k , opisanym wzorem rekurencyjnym:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

zakładając, że:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

5 Obliczanie dokładności przybliżeń

5.1 Maksymalna różnica

Największa różnica jaka występuje pomiędzy funkcją, a wielomianem interpolującym:

$$\max_k |f(x_k) - P_n(x_k)|$$

5.2 Błąd średni kwadratowy

Suma kwadratów różnic pomiędzy wartościami funkcji i wielomianów interpolujących podzielonych przez liczbę punktów N , gdzie $N = 1000$:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - P_n(x_i))^2$$

5.3 Zera wielomianu Czebyszewa

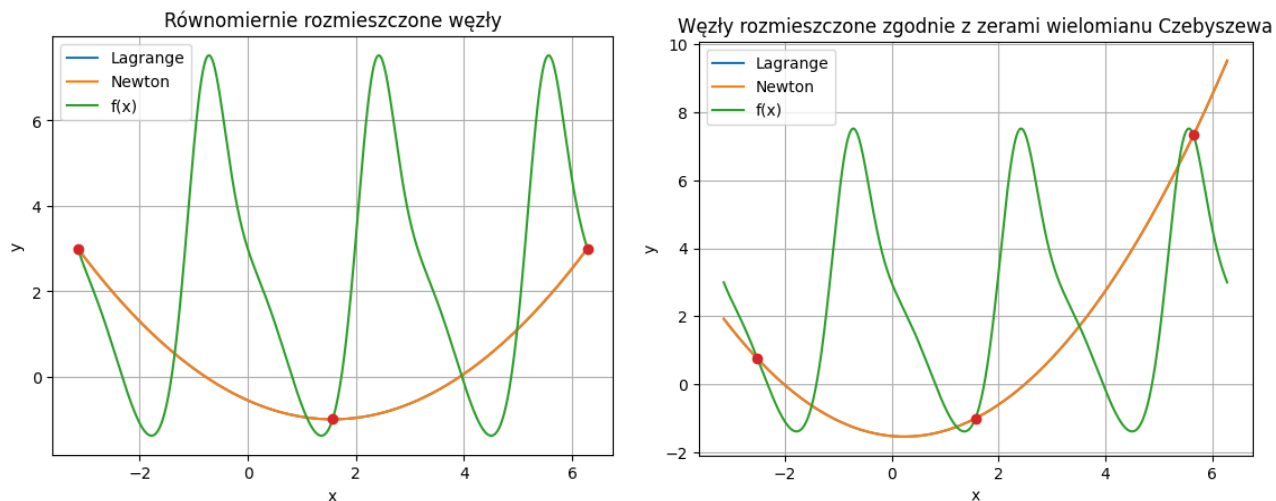
Aby obliczyć pierwiastki wielomianu Czebyszewa dla dowolnego przedziału $[a, b]$ korzystamy z przekształcenia:

$$x_k = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a) \cos\left(\frac{2k - 1}{2n} \pi\right)$$

6 Wyniki dla poszczególnej liczby węzłów

6.1 3 węzły

6.1.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 2: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 3 węzłów

	Węzły równoodległe	Węzły wg zer wielomianu Czebyszewa		
	Hermit	Lagrange	Newton	Hermi
Maksymalna różnica	8.601023312831462	10.82196771586059	10.821967715860593	6.758748184
Średni błąd kwadratowy	7.464246116213026	23.675605514145005	23.675605514145005	5.436193875

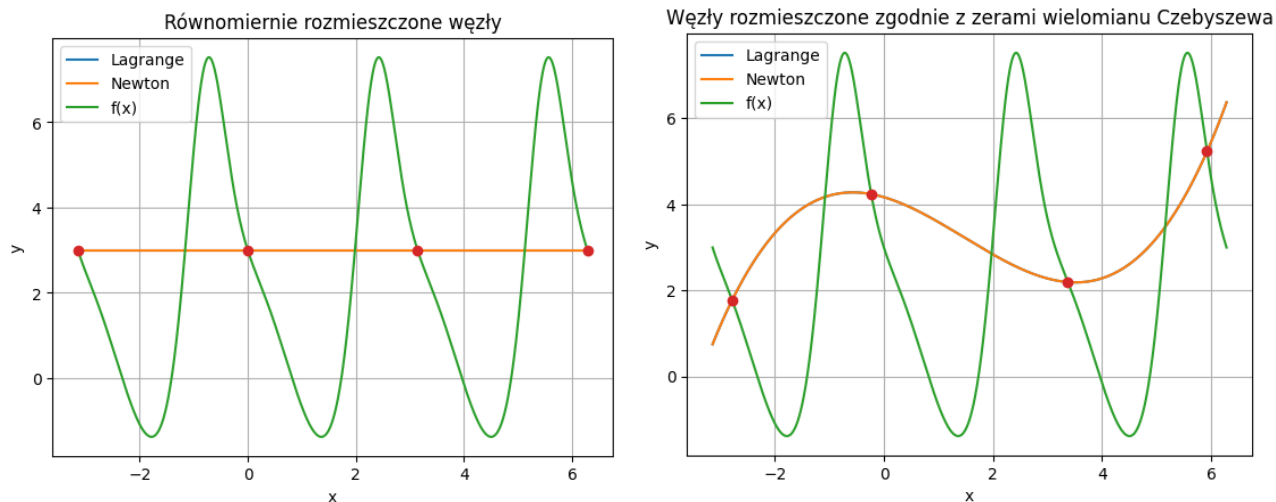
Tabela 1: Porównanie błędów i maksymalnych różnic przy użyciu różnych metod interpolacji dla $n=5$

6.1.2 Komentarz

Jak można zobaczyć z rysunku 2. dla trzech węzłów otrzymujemy wielomian, który bardzo odbiega od zadanej funkcji. Równocześnie obie metody przeprowadzają interpolację w identyczny sposób, przez co maksymalna różnica i błędy są takie same.

6.2 4 węzły

6.2.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 3: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 4 węzłów

	Metoda	Lagrange'a	Newtona
Węzły równoodległe	Maksymalna różnica	4.525020343757953	4.525020343757953
	Średni błąd kwadratowy	8.615785727981798	8.615785727981798
Węzły wg zer wielomianu Czebyszewa	Maksymalna różnica	5.0473214070195915	5.0473214070195915
	Średni błąd kwadratowy	8.555278691715593	8.555278691715596

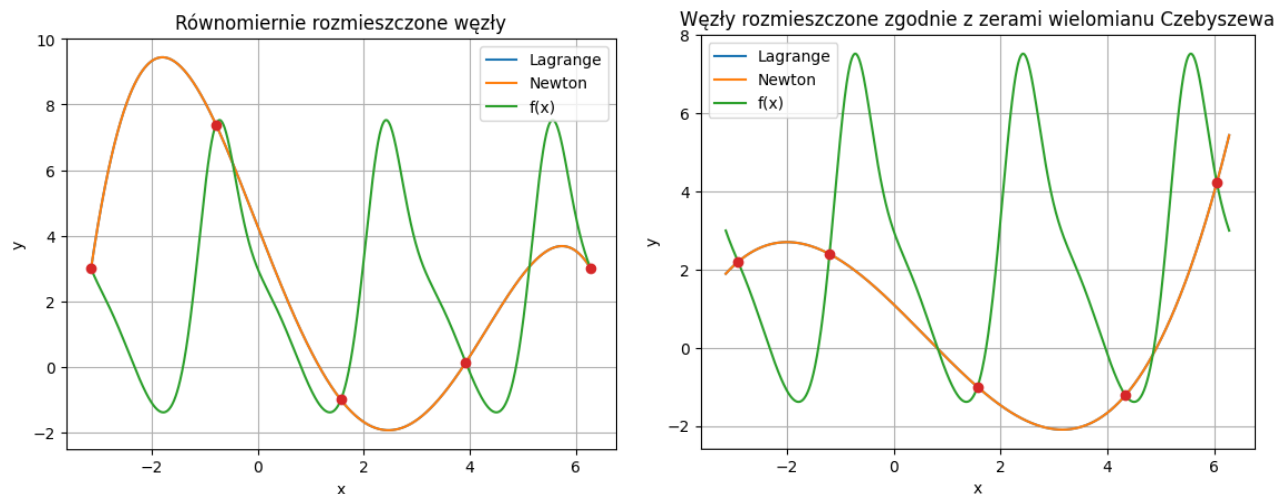
Tabela 2: Porównanie błędów i maksymalnych różnic przy użyciu obu metod i rozkładów węzłów dla $n=4$

6.2.2 Komentarz

Podobnie jak w poprzednim przypadku obie metody z takim samym błędem i różnicą wyznaczyły wielomian. Co ciekawe dla węzłów rozmieszczonych równomiernie trafiliśmy na miejsca, gdzie funkcja przyjmowała takie same wartości, przez co otrzymaliśmy linię prostą. Ponownie otrzymaliśmy wynik daleki od oczekiwanego.

6.3 5 węzłów

6.3.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 4: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 5 węzłów

	Metoda	Lagrange'a	Newtona
Węzły równoodległe	Maksymalna różnica	10.82196771586059	10.821967715860593
	Średni błąd kwadratowy	23.675605514145005	23.675605514145005
Węzły wg zer wielomianu Czebyszewa	Maksymalna różnica	9.354852240912068	9.354852240912068
	Średni błąd kwadratowy	13.594786709150872	13.594786709150874

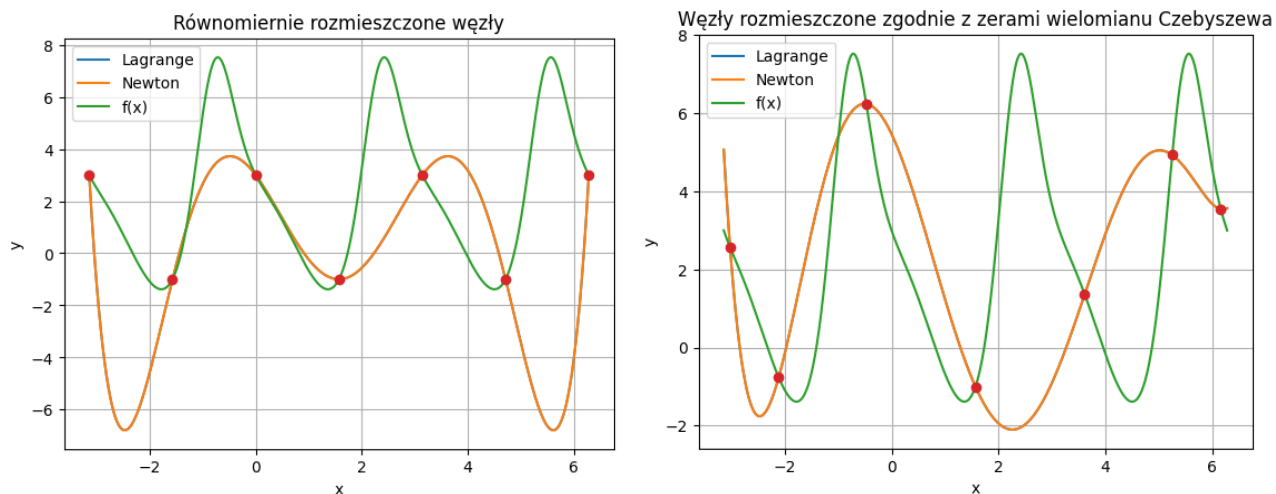
Tabela 3: Porównanie błędów i maksymalnych różnic przy użyciu obu metod i rozkładów węzłów dla $n=5$

6.3.2 Komentarz

W dalszym ciągu wyznaczone wielomiany odbiegają od zadanych funkcji. Przykłady dla małej ilości węzłów, przy tak zróżnicowanej funkcji, pokazują nam, że aby uzyskać w miarę dokładny wynik musimy poszukać rozwiązania dla większych n .

6.4 7 węzłów

6.4.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 5: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 7 węzłów

	Metoda	Lagrange'a	Newtona
Węzły równoodległe	Maksymalna różnica	14.301405581282228	14.30140558128224
	Średni błąd kwadratowy	24.72120040868956	24.72120040868956
Węzły wg zer wielomianu Czebyszewa	Maksymalna różnica	9.567346045572602	9.567346045572613
	Średni błąd kwadratowy	12.655197409260028	12.655197409260037

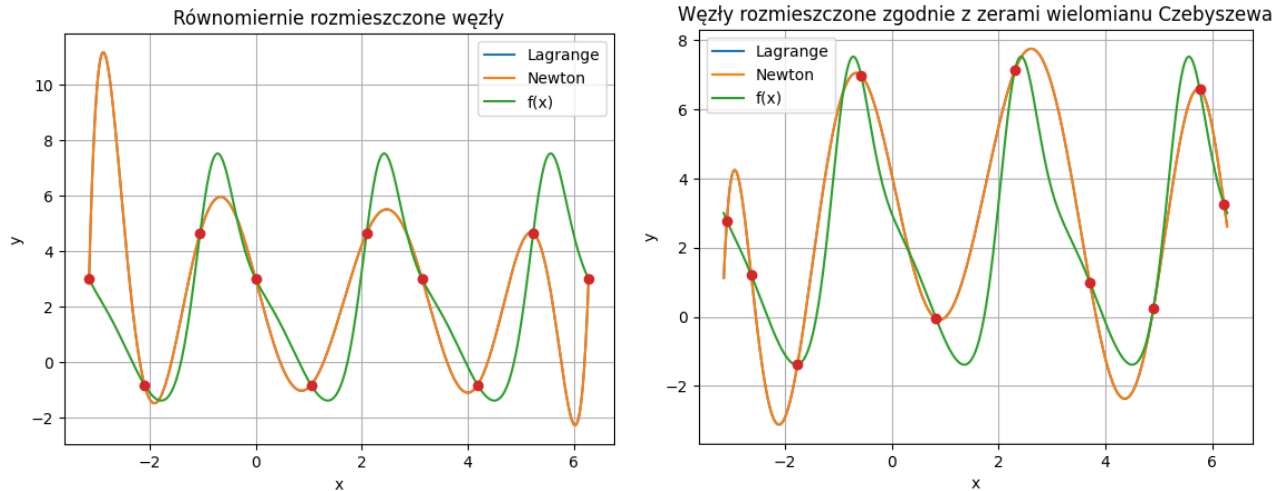
Tabela 4: Porównanie błędów i maksymalnych różnic przy użyciu obu metod i rozkładów węzłów dla $n=7$

6.4.2 Komentarz

Przy $n=7$ możemy zauważyć, że dla wielomianów korzystających z węzłów na bazie zer wielomianu Czebyszewa, wykres zaczyna powoli, przynajmniej z jednej strony, dopasowywać się do zadanej funkcji. Za to dla węzłów równomiernie rozmieszczonych na brzegach przedziałów możemy dostrzec początek efektu Rungego.

6.5 10 węzłów

6.5.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 6: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 10 węzłów

	Metoda	Lagrange'a	Newtona
Węzły równoodległe	Maksymalna różnica	9.130733689673296	9.130733689673301
	Średni błąd kwadratowy	8.412687362178366	8.412687362178309
Węzły wg zer wielomianu Czebyszewa	Maksymalna różnica	3.646291076525155	3.6462910765251433
	Średni błąd kwadratowy	2.399210328243638	2.399210328243664

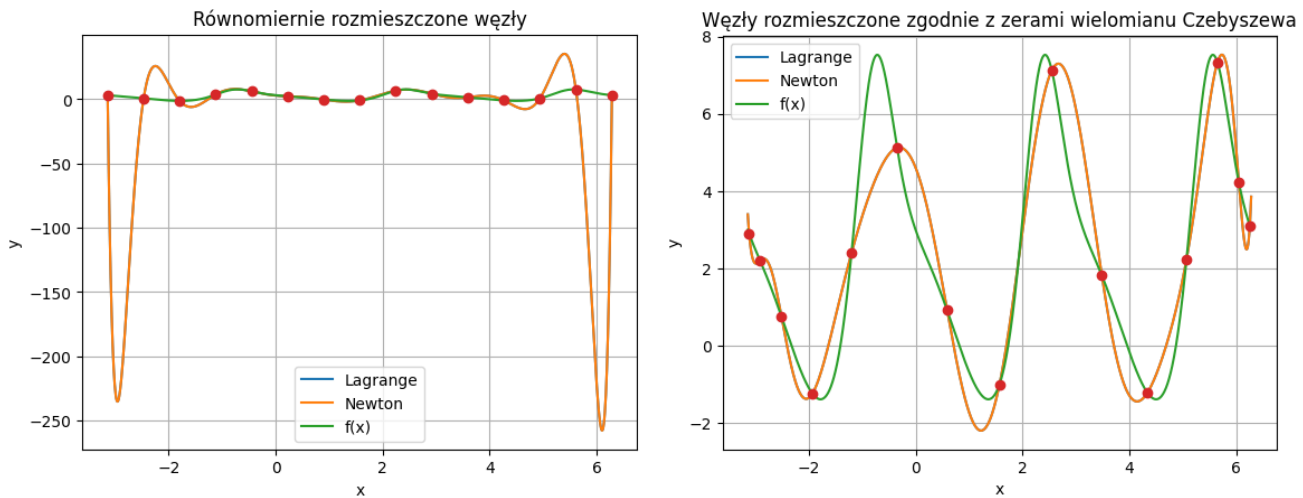
Tabela 5: Porównanie błędów i maksymalnych różnic przy użyciu obu metod i rozkładów węzłów dla $n=10$

6.5.2 Komentarz

Dla 10 węzłów rozmieszczonych wg zer Czebyszewa wykres wielomianu zaczyna coraz lepiej przybliżać się do oryginalnej funkcji, co wskazują też coraz mniejsze błędy. Za to dla punktów równomiernie oddalonych bardziej uwidacznia się wcześniej wspomniany efekt Rungego. Dodatkowo możemy zauważyć, że wyniki błędów pomiędzy obiema metodami zaczynają się bardzo powoli od siebie różnić. Wskazuje to na powstawanie minimalnych rozbieżności między nimi.

6.6 15 węzłów

6.6.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 7: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 15 węzłów

	Metoda	Lagrange'a	Newtona
Węzły równoodległe	Maksymalna różnica	261.55550944407656	261.55550944432304
	Średni błąd kwadratowy	3779.73809994504	3779.7380999450115
Węzły wg zer wielomianu Czebyszewa	Maksymalna różnica	3.20128791213871	3.201287912138712
	Średni błąd kwadratowy	1.2847562407315347	1.284756240731285

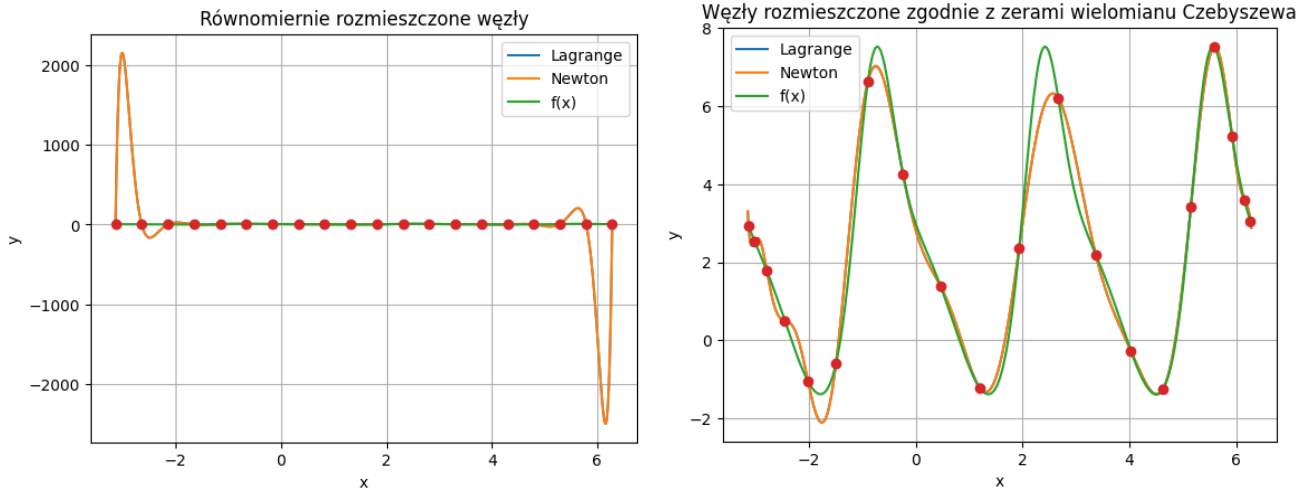
Tabela 6: Porównanie błędów i maksymalnych różnic przy użyciu obu metod i rozkładów węzłów dla $n=15$

6.6.2 Komentarz

Przy 15 równoodległych węzłach dokładnie już możemy zobaczyć działanie efektu Rungego. Na krańcach przedziału wielomian kompletnie odbiega od wartości rzeczywistych, za to pośrodku w miarę zbiega się z oryginalną funkcją. W przypadku zer wielomianu Czebyszewa, wyznaczone wielomiany coraz dokładniej zaczynają odzwierciedlać stan rzeczywisty, wartości błędów zmniejszają się.

6.7 20 węzłów

6.7.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 8: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 20 węzłów

	Metoda	Lagrange'a	Newtona
Węzły równoodległe	Maksymalna różnica	2500.879794356098	2500.8797943424574
	Średni błąd kwadratowy	230142.5547129364	230142.55471269364
Węzły wg zer wielomianu Czebyszewa	Maksymalna różnica	1.610729103232626	1.6107291032279436
	Średni błąd kwadratowy	0.20866032298472917	0.20866032294099604

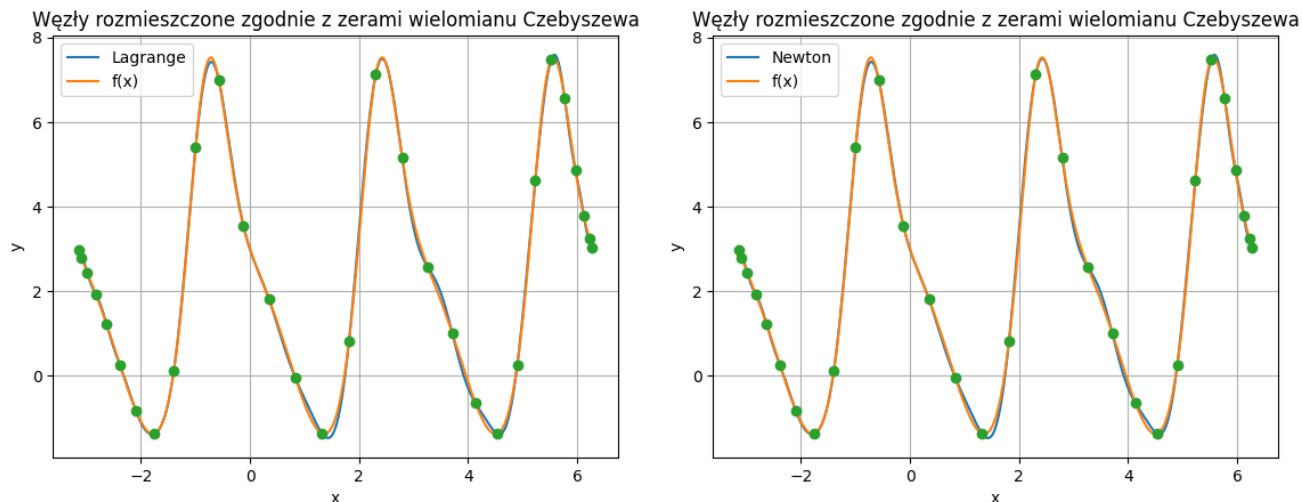
Tabela 7: Porównanie błędów i maksymalnych różnic przy użyciu obu metod i rozkładów węzłów dla $n=20$

6.7.2 Komentarz

Dla 20 węzłów rozmieszczonych równomiernie wyniki na brzegach przedziałów kompletnie psują wielomian. Za to dla zer Czebyszewa przedstawiony wielomian coraz dokładniej pokrywa się z oryginalną funkcją. Można jednak zauważyć, że przy lewym brzegu wykres trochę zaczyna falować w zły sposób.

6.8 30 węzłów

6.8.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 9: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 30 węzłów

Metoda	Lagrange'a	Newtona
Maksymalna różnica	0.22718120692845334	0.22718120700894873
Średni błąd kwadratowy	0.007787000685605445	0.007787043467799464

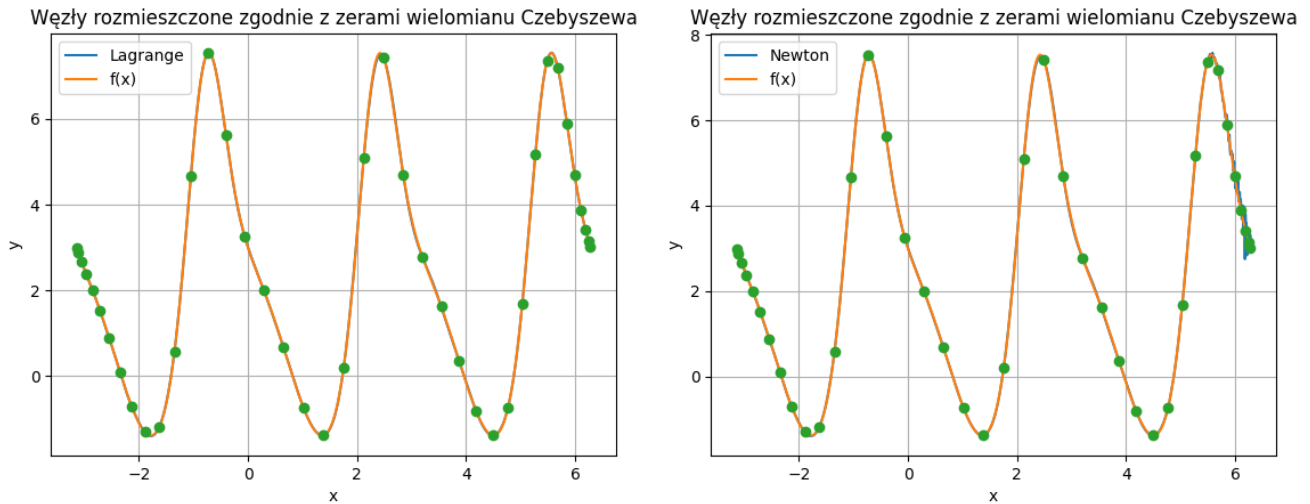
Tabela 8: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla obu metod i rozmieszczeniem węzłów zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa dla $n=30$

6.8.2 Komentarz

Z racji, że dla równomiernego rozkładu węzłów błędy dla coraz większych n były za duże teraz przyglądać będziemy się tylko wielomianom interpolującym na bazie węzłów z zer wielomianu Czebyszewa. Dla nich zaś przy $n=30$ błędy zaczynają być znikome, a patrząc na wykres tylko w niektórych miejscach można dostrzec różnice.

6.9 40 węzłów

6.9.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 10: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 40 węzłów

Metoda	Lagrange'a	Newtona
Maksymalna różnica	0.06495999255807838	0.7223367485082646
Średni błąd kwadratowy	0.00032603318054181857	0.00278026450090013

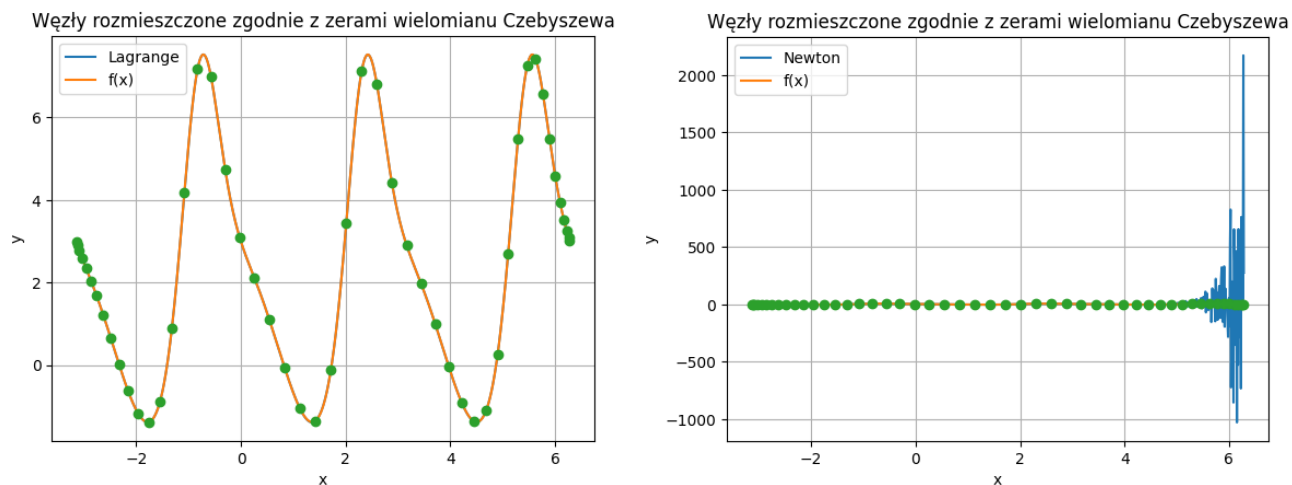
Tabela 9: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla obu metod i rozmieszczeniem węzłów zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa dla $n=40$

6.9.2 Komentarz

Przy $n=40$ możemy dostrzec, iż mimo korzystając z metody Lagrange'a błędy idą cały czas w dół, to dla metody Newtona wartości te zaczynają rosnąć. Zobaczyć to możemy przyglądając się wykresowi wielomianu przy prawym brzegu.

6.10 50 węzłów

6.10.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 11: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 50 węzłów

Metoda	Lagrange'a	Newtona
Maksymalna różnica	0.007789427147282035	2169.3190277280746
Średni błąd kwadratowy	6.5239303658950075e-06	13137.33132360544

Tabela 10: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla obu metod i rozmieszczeniem węzłów zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa dla $n=50$

6.10.2 Komentarz

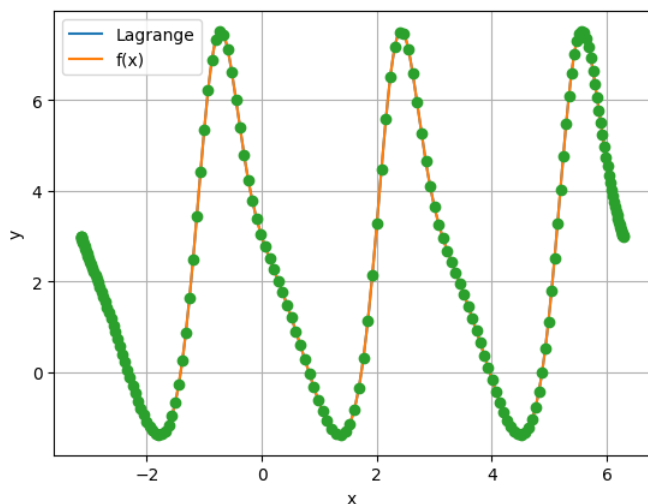
Dla $n=50$ widzimy, że metoda Lagrange'a daje nam coraz lepsze wyniki, zaś Newton kompletnie stracił dokładność przy prawym brzegu przedziału.

7 Wielomian najlepiej przybliżający zadaną funkcję

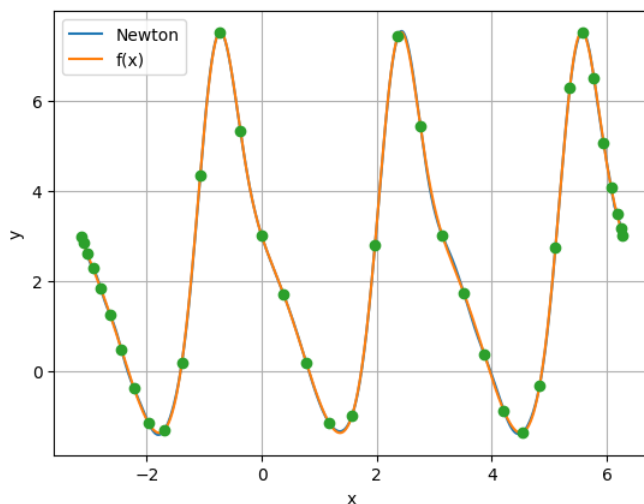
7.1 Wyjaśnienie

Aby znaleźć wielomian, który najlepiej przybliży funkcję $f(x)$ porównałem ze sobą wyniki maksymalnej różnicy dla liczby węzłów od 3 do 200. Skorzystałem tylko z rozmieszczenia wg zer wielomianu Czebyszewa, ponieważ w przeprowadzonych testach (umieszczone na końcu załączonego jupyter notebook'a) wykazały się większą dokładnością.

7.2 Wykresy



Rys. 12: Wykres z wielomianem interpolującym metodą Lagrange'a przy $n=188$



Rys. 13: Wykres z wielomianem interpolującym metodą Newtona przy $n=37$

7.3 Komentarz

Okazało się, że najlepsze przybliżenie wyszło w przypadku metody Lagrange'a dla $n=188$, a dla metody Newtona dla $n=37$.

8 Wnioski

Po przeprowadzonych testach możemy zobaczyć, że wybór odpowiedniej metody oraz sposoby rozłożenia węzłów ma znaczenie, jeżeli chcemy jak najdokładniej dopasować wielomian interpolujący do zadanej funkcji.

W moim przypadku rozłożenie węzłów dla zer wielomianu Czebyszewa okazało się o wiele dokładniejsze od równomiernego rozkładu.

Przy badanych wartościach n efekt Rungego zaczął pojawiać się przy 7 węzłach, gdzie przy 15 wykres na brzegach przedziału zaczyna znacznie odbiegać od zadanej funkcji.

Patrząc na węzły wg zer Czebyszewa dokładność okazała się większa. Jednak z testów wyszło, że metoda miała tutaj znaczenie. Korzystając z metody Lagrange'a najlepiej dopasowany wielomian uzyskałem dla $n=188$ zaś, dla Newtona $n=37$.

Z przeprowadzonych testów wynika, że dla zadanej funkcji $f(x)$ najdokładniejszym połączeniem okazały się węzły wg zer wielomianu Czebyszewa wraz z metodą Lagrange'a.