MOwNiT - aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Paweł Podedworny

17.04.2024

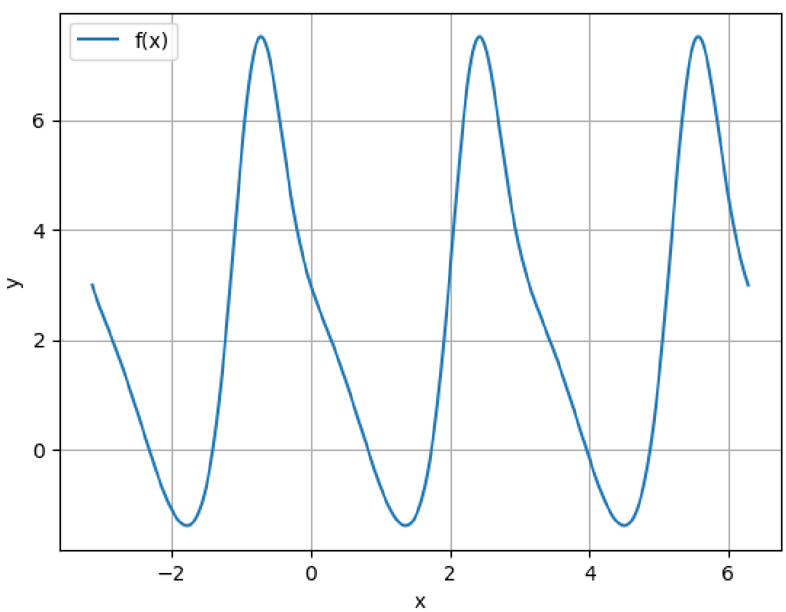
1 Opis ćwiczenia

Dla funkcji $f(x) = e^{-k \cdot sin(mx)} + k \cdot cos(mx)$, gdzie $k = 2, m = 2$ na przedziale $x \in [-\pi, 2\pi]$, wyznaczyć jej wartości w n dyskretynych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymacje średniokwadratową wielomianami algebraicznymi.
Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

2 Dane techniczne

Komputer z systemem Windows 10 x64
Procesor: AMD Ryzen 5 3600 3.60GHz
Pamięć RAM: 16GB 3200MHz
Środowisko: DataSpell 2023.3.4
Język: Python 3.11 z biblioteką numpy oraz matplotlib

3 Wykres funkcji



Rys. 1: Wykres funkcji f(x) dla $x \in [-\pi, 2\pi], k = 2, m = 2$

4 Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraiczynymi

4.1 Szukanie wielomianu uogólnionego

Rozważamy następujące dane:

- Węzły aproksymacji dane przez: $(x_i, y_i = F(x_i))$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$, gdzie mamy $n + 1$ węzłów.
- Układ funkcji bazowych $\varphi_j(x)$ dla $j = 0, 1, \ldots, m$.

Szukamy wielomianu uogólnionego:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x)$$

czyli $\{a_j\}_{j=0}^{m}$, dla których:

$$\min ||F(x) - f(x)|| = \min \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i)]^2$$

gdzie:

- $F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) \Leftrightarrow F(x_i) - f(x)$ - odchylenie wartości funkcji aproksymującej od wartości funkcji aproksymowanej
- $w(x_i)$ - waga danego węzła (im większy błąd tym mniejsza waga, zwykle waga jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu błędu lub ma wartość 1)

4.2 Obliczanie wartości współczynników a_j

Zakładając, że:

$$H(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) \right]^2$$

współczynniki $\{a_j\}$ znajdujemy z warunku:
$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m \Rightarrow$ Układ (m + 1) równań liniowych o (m + 1) niewiadomych.
$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2 \sum\limits_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - \sum\limits_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i)]\varphi_k(x_i) = 0 \ dla \ k = 0, 1, \ldots, m$
Powyższy układ równań zwany jest układem normalnym.

Układ normalny:

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j \right] x_i^k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i) x_i^k \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i) x_i^k, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=0}^{m} (\sum_{i=0}^{n} w(x_i) x_i^{j+k}) a_j = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i) x_i^k$$

W postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \cdots & \sum w_i x_i^m \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \cdots & \sum w_i x_i^{m+1} \\ \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \sum w_i x_i^4 & \cdots & \sum w_i x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum w_i x_i^m & \sum w_i x_i^{m+1} & \sum w_i x_i^{m+2} & \cdots & \sum w_i x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_i F_i \\ \sum w_i F_i x_i \\ \sum w_i F_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum w_i F_i x_i^m \end{pmatrix}$$

5 Obliczanie dokładności przybliżeń

5.1 Maksymalna różnica

Największa różnica jaka występuje pomiędzy funkcją, a wielomianem interpolującym:

$$\max_k |f(x_k) - P_n(x_k)|$$

5.2 Błąd średni kwadratowy

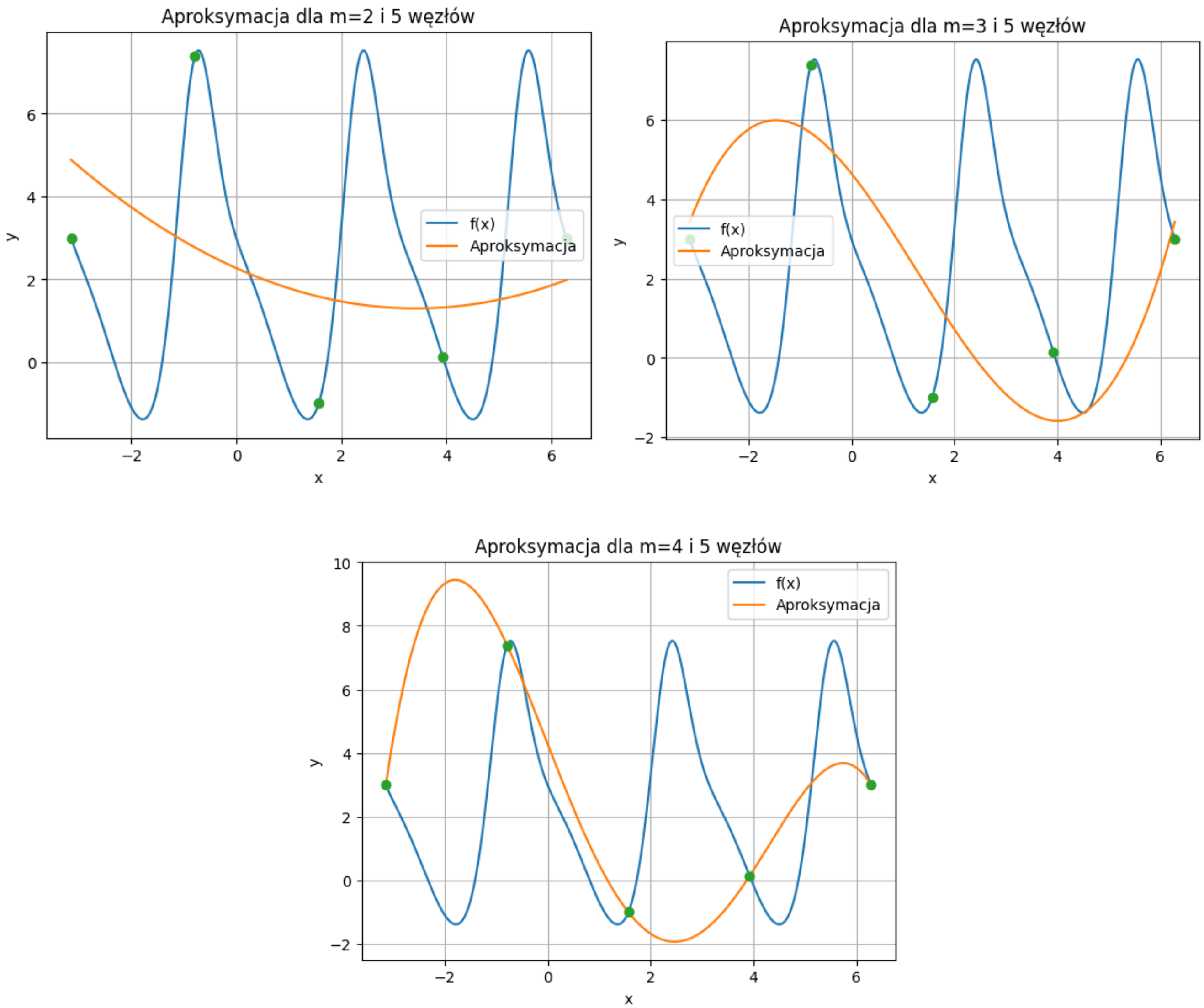
Suma kwadratów różnic pomiędzy wartościami funkcji i funkcji sklejanych podzielonych przez liczbę punktów N, gdzie $N = 1000$:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - P_n(x_i))^2$$

6 Wyniki aproksymacji

6.1 5 węzłów

6.1.1 m = 2, 3, 4



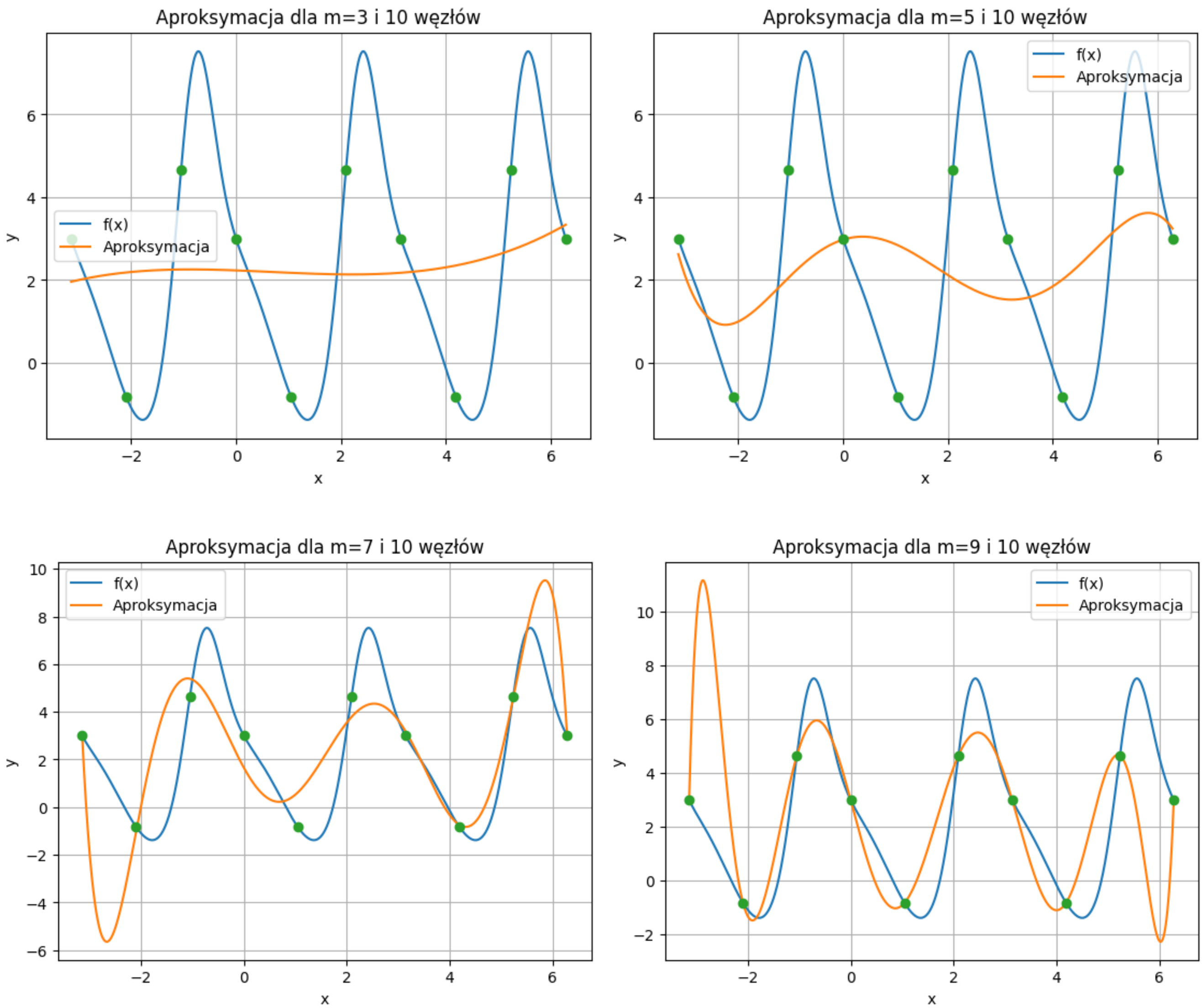
Rys. 2: Wykresy aproksymacji dla 5 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
2	6.1473	9.9090
3	7.6054	15.8282
4	10.8220	23.6756

Tabela 1: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 5 węzłach

6.2 10 węzłów

6.2.1 m = 3, 5, 7, 9



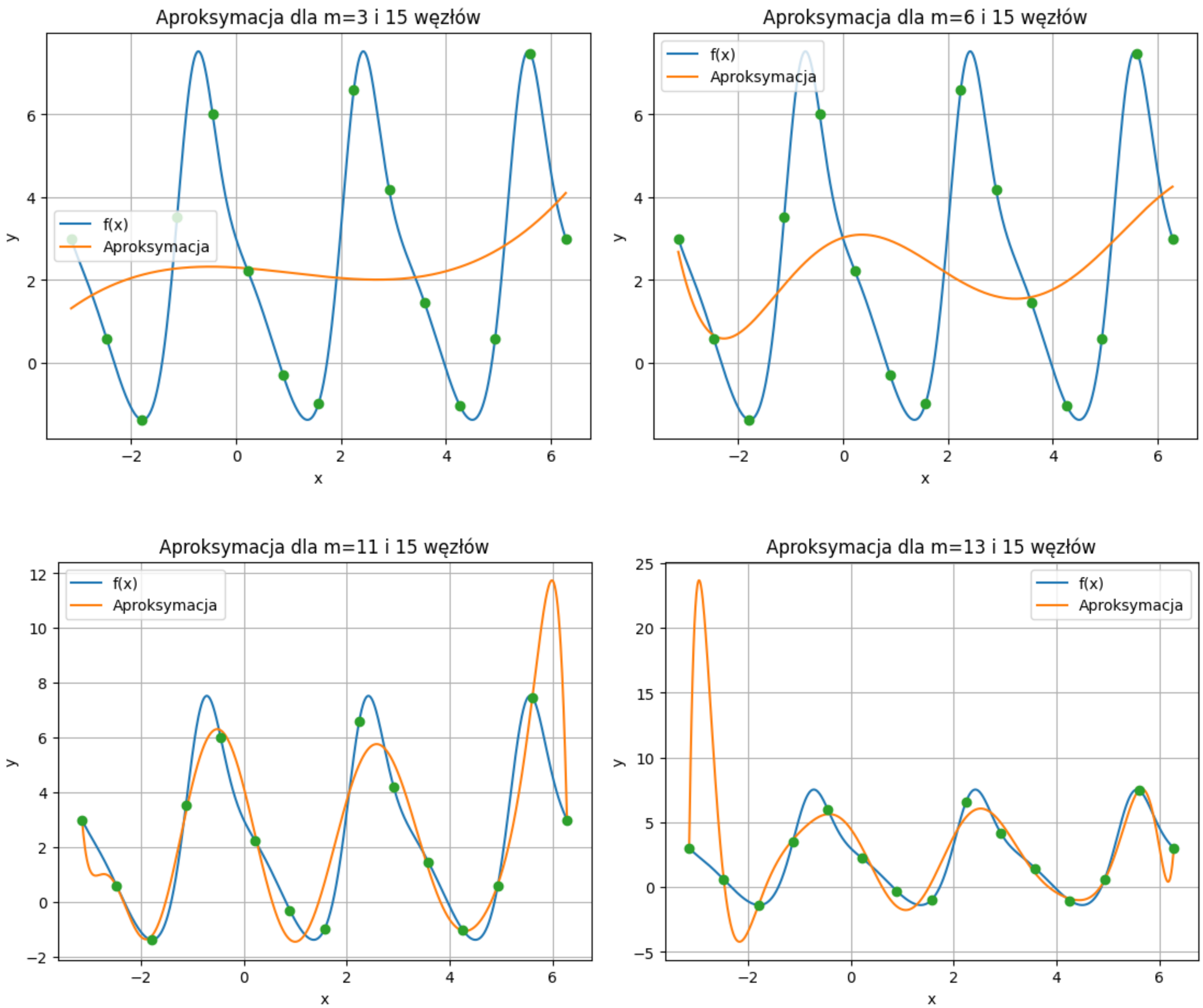
Rys. 3: Wykresy aproksymacji dla 10 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
3	5.3914	7.7346
5	5.7269	7.3345
7	7.1219	6.7681
9	9.1307	8.4127

Tabela 2: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 10 węzłach

6.3 15 węzłów

6.3.1 m = 3, 6, 11, 13



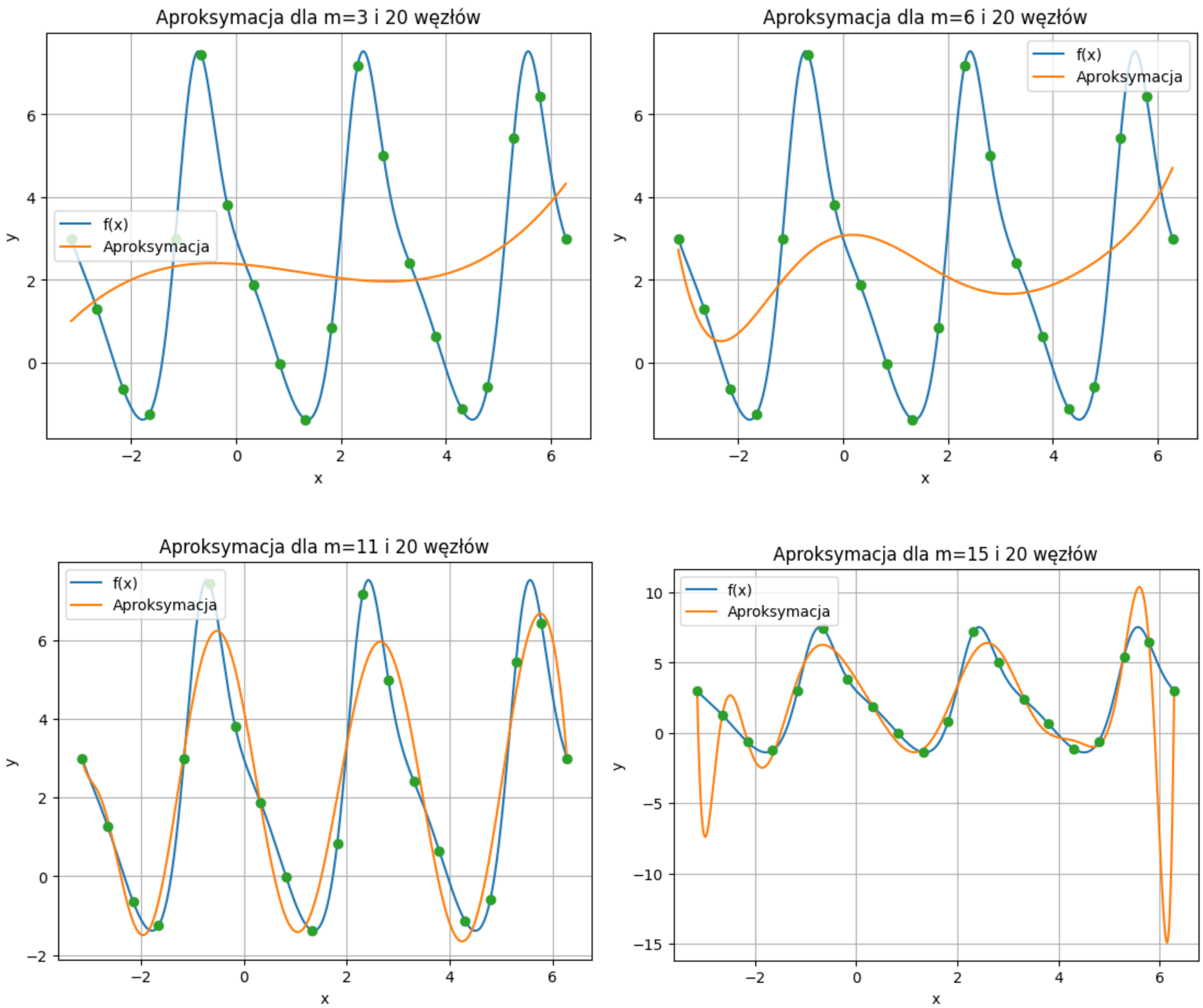
Rys. 4: Wykresy aproksymacji dla 15 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
3	5.5129	7.4866
6	5.6880	7.1496
11	7.2633	2.6888
13	21.3519	15.7913

Tabela 3: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 15 węzłach

6.4 20 węzłów

6.4.1 m = 3, 6, 11, 15



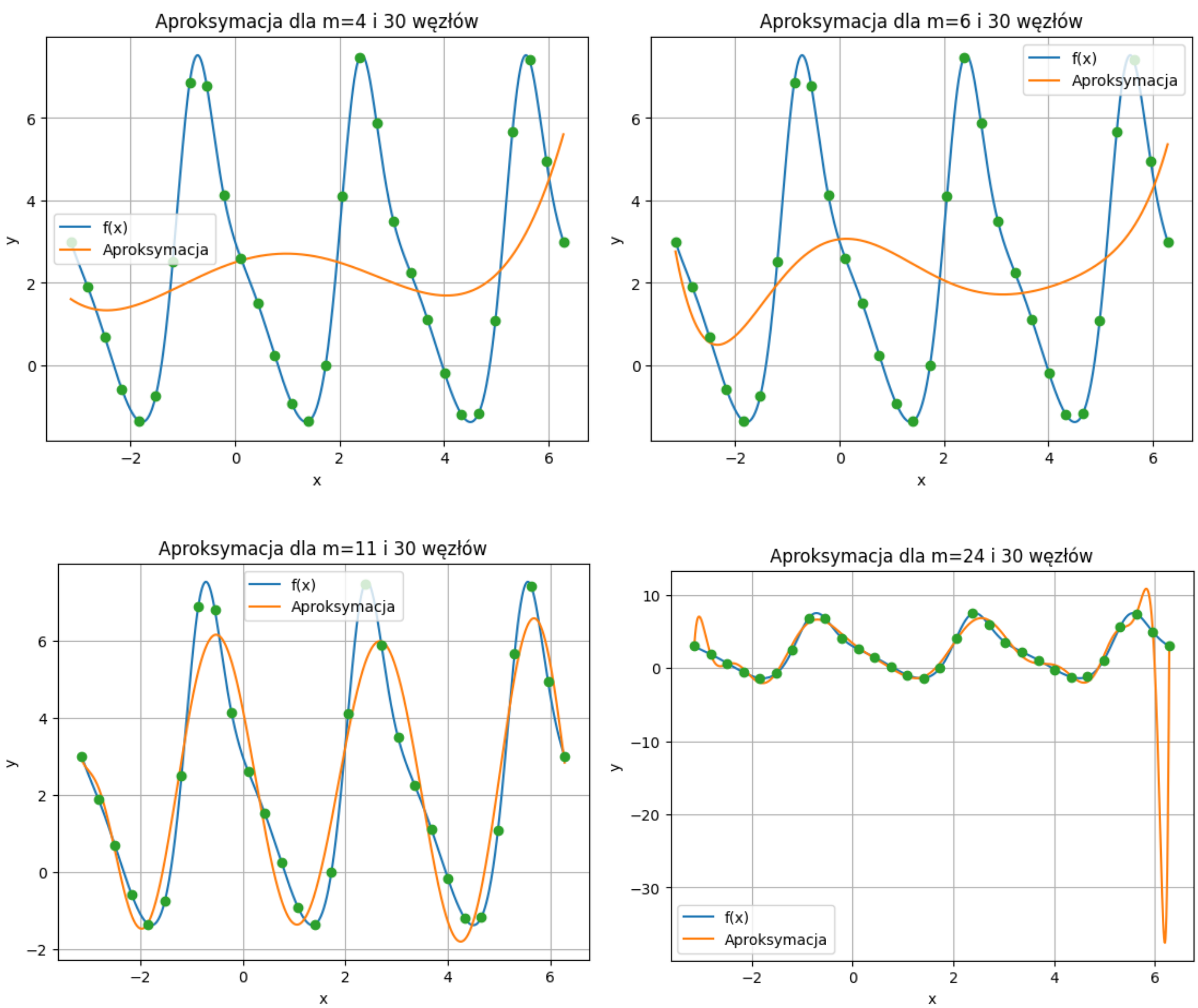
Rys. 5: Wykresy aproksymacji dla 20 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
3	5.5422	7.4153
6	5.7025	7.0727
11	2.0552	0.8720
15	18.5805	11.0334

Tabela 4: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 20 węzłach

6.5 30 węzłów

6.5.1 m = 4, 6, 11, 24



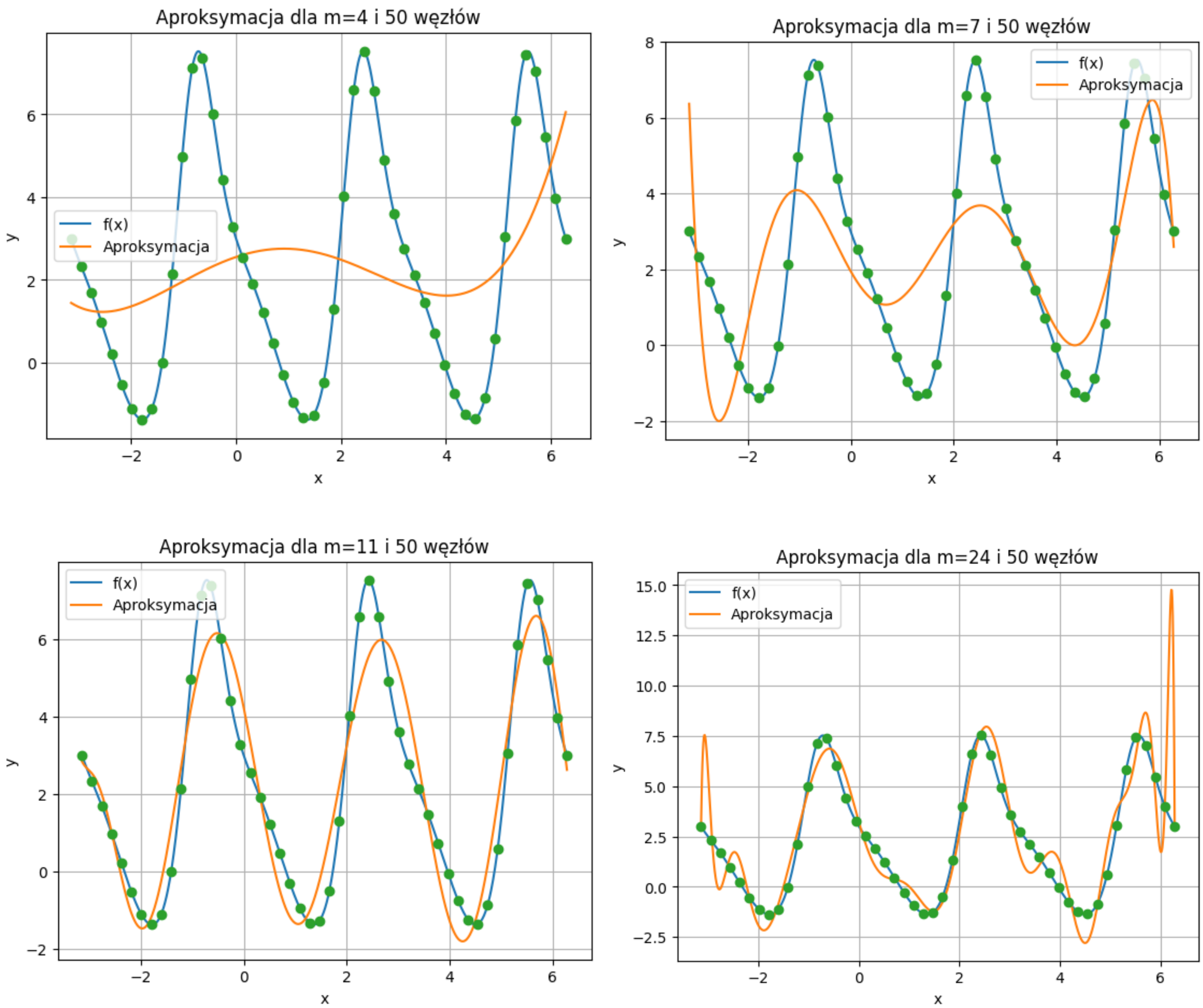
Rys. 6: Wykresy aproksymacji dla 30 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
4	5.4055	7.1236
6	5.6760	6.9942
11	2.1092	0.8437
24	40.9339	25.2773

Tabela 5: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 30 węzłach

6.6 50 węzłów

6.6.1 m = 4, 7, 11, 24



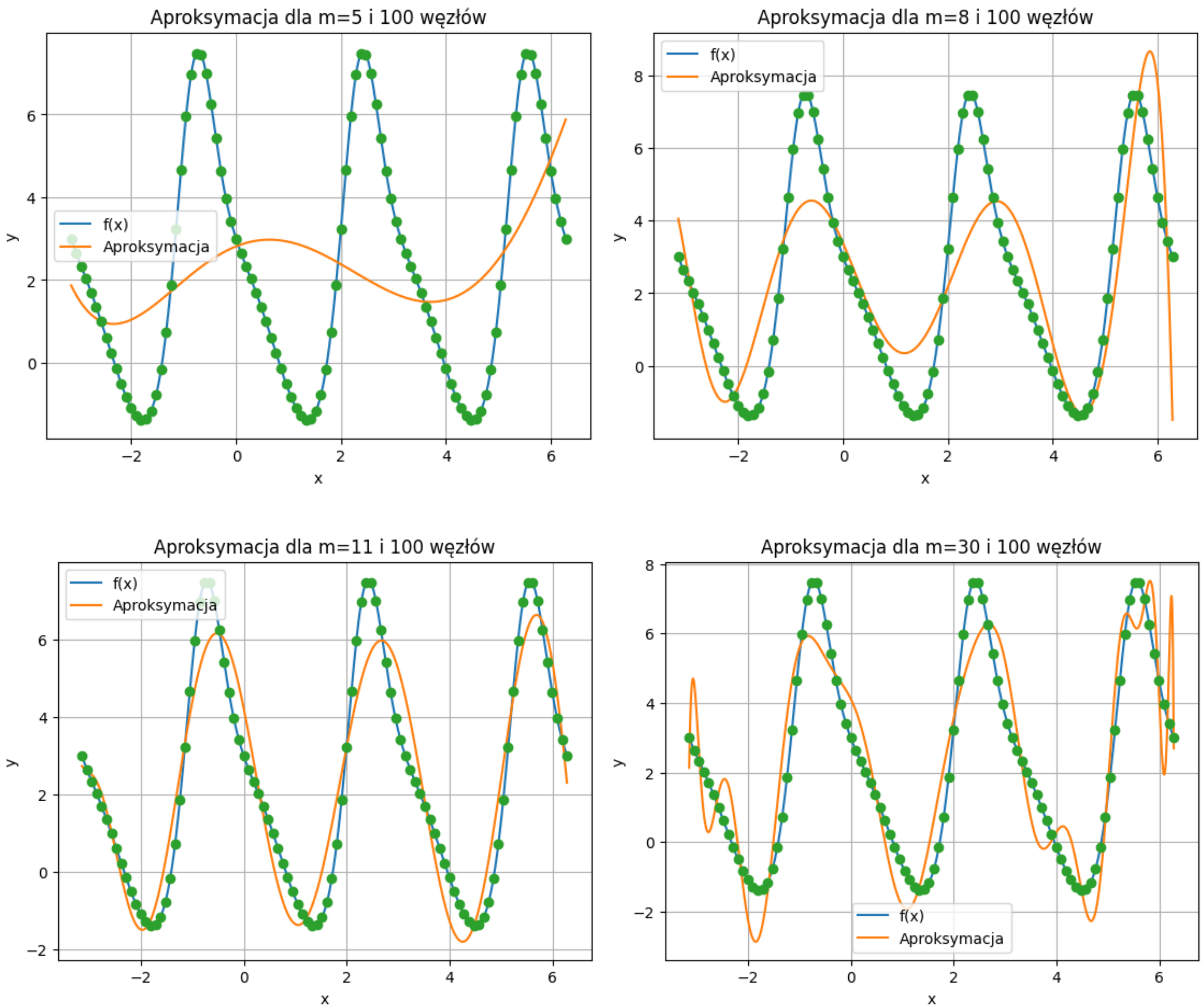
Rys. 7: Wykresy aproksymacji dla 50 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
4	5.3731	7.0770
7	4.0113	4.2386
11	2.1134	0.8400
24	11.5081	2.2773

Tabela 6: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 50 węzłach

6.7 100 węzłów

6.7.1 m = 4, 7, 11, 24



Rys. 8: Wykresy aproksymacji dla 100 węzłów i różnych stopni wielomianów

m	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
5	5.4670	7.0423
8	4.4903	2.5151
11	2.1133	0.8361
30	3.8813	1.1994

Tabela 7: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla aproksymacji wielomianowej dla różnych wartości m przy 100 węzłach

6.8 Komentarz

6.8.1 5 węzłów

Dla tak małej liczby węzłów możemy zobaczyć, że aproksymacje nie do końca dobrze przybliżyły zadaną funkcję. Jeżeli jednak byśmy patrzyli tylko na same określone punkty, wtedy wyznaczone krzywe dosyć dobrze oddają ich położenie. W przypadku $m = 4$ zaszło zjawisko interpolacji, co możemy stwierdzić po tym, że wyznaczony wielomian przechodzi przez wszystkie węzły.

6.8.2 10 węzłów

Dla 10 równomiernie rozmieszczonych węzłów możemy zobaczyć, że dla pewnych wartości stopnia wielomianu uzyskaliśmy niemal prostą funkcję, która dobrze uśrednia nam zadane węzły. Dla wyższego stopnia wielomianu $m = 7$ możemy zobaczyć powolne początki efektu Rungego. Zaś dla $m = 9$ uzyskaliśmy ponownie interpolację.

6.8.3 15 węzłów

Dla 15 węzłów widzimy, że dla stopni równych około 11 dostajemy nawet całkiem dobrą aproksymacje funkcji. Przy niższych stopniach dostajemy wielomian, który nie oddaje kształtu $f(x)$. Za to dla 13 stopnia pojawia się efekt Rungego, który psuje nam wykres.

6.8.4 20 węzłów

Tak jak w poprzednich przypadkach, dla niskich stopni wielomianu uzyskujemy aproksymacje dalekie od poprawnego kształtu naszej funkcji. Ponownie dla stopni około 11. aproksymacja całkiem skutecznie przybliża $f(x)$. Dla wyższych stopni pokazuje nam się całkiem okazały efekt Rungego.

6.8.5 30 węzłów

Ponownie, dla niskich stopni wielomianu dostajemy niedokładne aproksymacje, około stopnia 11. dobre przybliżenie, zaś dla wyższych stopni coraz bardziej uwidacznia nam się efekt Rungego.

6.8.6 50 węzłów

Dla 50 węzłów w przeciwieństwie do poprzednich badań, dla wyższych stopni oprócz efektu Rungego możemy zobaczyć, że funkcja zaczyna wpadać w dziwnie oscylacje. Dodatkowo, dla w miarę niskiego stopnia 7. aproksymacja przybrała nawet podobny kształt. Dalej okazuje się, że około stopnia 11. dostajemy całkiem dobre wyniki aproksymacji.

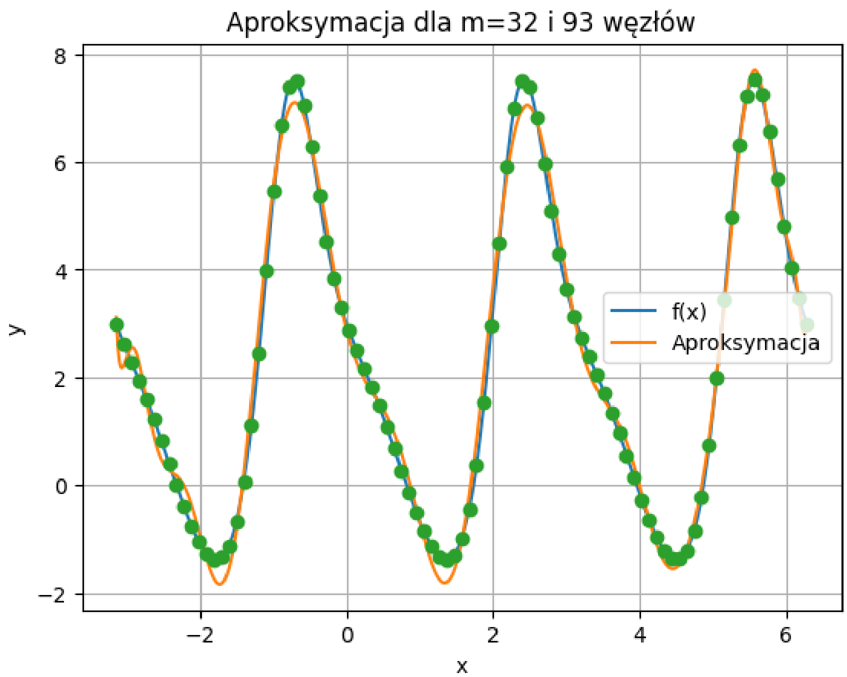
6.8.7 100 węzłów

W tym przypadku widzimy, że dla wysokich stopni ponownie dostajemy błędne wykresy ze zbyt dużą ilościa oscylacji. Najlepiej radzą sobie wielomiany o m w okolicach 11. Niskie stopnie dalej przybliżają za bardzo ogólnikowo.

7 Wielomian najlepiej przybliżający funkcję

Przeprowadzono testy dla różnych kombinacji n i m takich że $3 <= m < n <= 100$ i wyszukano najlepsze przybliżenie patrząc na a) najmniejszą wartość bezwzględnej różnicy oraz b) najmniejszy błąd średniokwadratowy. Dodatkowo dla wyliczonego stopnia wielomianu sprawdzono czy dla okolicznych -5 i $+5$ węzłów błąd faktycznie jest stopniowo mniejszy, czy mamy doczynienia z błędem arytmetyki komputera.

7.1 Bezwględna różnica

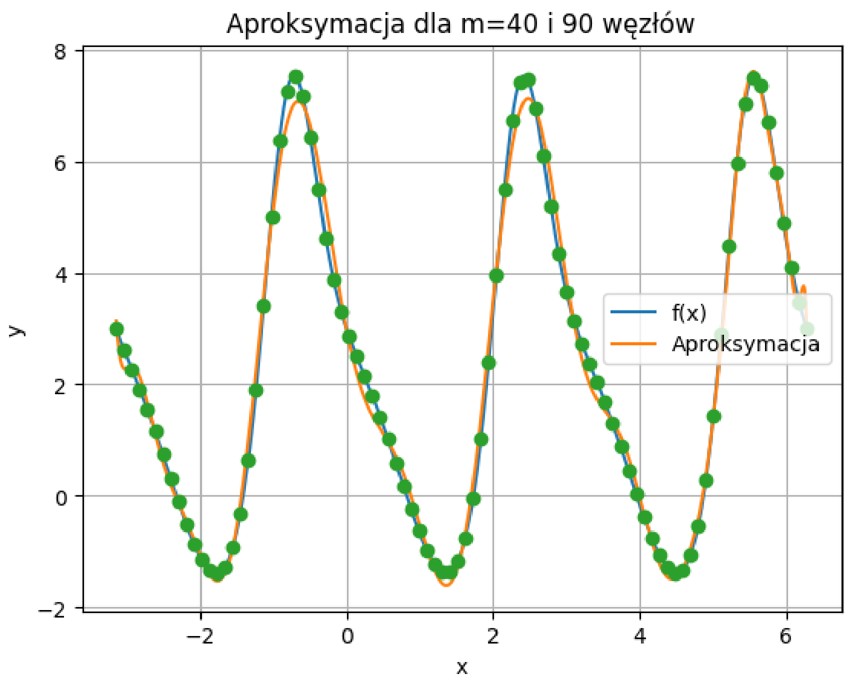


Rys. 9: Aproksymacja dla 93 węzłów i 32 stopnia wielomianu

n	Maksymalna różnica
88	0.7400
89	7.9840
90	108.0166
91	0.9112
92	2.5016
93	0.5689
94	28.0413
95	2.0696
96	1.1087
97	2.0999
98	2.0668

Tabela 8: Porównanie maksymalnych różnic dla 32 stopnia wielomianu od 88 do 98 węzłów

7.2 Błąd średniokwadratowy



Rys. 10: Aproksymacja dla 90 węzłów i 40 stopnia wielomianu

n	Maksymalna różnica
85	0.0999
86	0.3134
87	0.1985
88	0.1232
89	0.1560
90	0.0618
91	0.1989
92	0.7014
93	0.0721
94	0.3103
95	5.5670

Tabela 9: Porównanie średniego błędu kwadratowego dla 40 stopnia wielomianu od 85 do 95 węzłow

7.3 Komentarz

Po przeprowadzonych testach możemy zobaczyć, że najlepsze przybliżenie pod względem maksymalnej różnicy dostajemy dla 37 stopnia wielomianu przy 93 węzłach oraz pod względem średniego błędu kwadratowego dla 45 stopnia wielomianu przy 90 węzłach. Po dodatkowych obliczeniach z tabeli 9. możemy wywnioskować, że dla błędu średnio kwadratowego znalezione przybliżenie faktycznie może być najlepszym dopasowaniem, ponieważ w okolicy wynzaczonych wartości, poziom błędów znacząco od siebie nie odbiega. Pod wątpliwość jednak możemy wziąć wyniki z tabeli 8. gdzie w obrębie -5 i $+5$ węzłów maksymalna różnica bardzo oscyluje. Wpływ na to mogą mieć błędy arytmetyki komputera albo pesymistyczny przypadek, w którym wyznaczony wielomian w jednym miejscu znacząco odbiega od zadanej funkcji $f(x)$ i powoduje tak spory błąd.

8 Porównanie błędów

8.1 Maksymalna różnica

m\n	5	10	15	20	30	50	100
2	6.1473	5.4795	5.6498	5.6652	5.6992	5.7238	5.7409
3	7.6054	5.3914	5.5129	5.5422	5.5833	5.6180	5.6458
4	10.8220	5.4512	5.5164	5.4447	5.4055	5.3731	5.3485
5	X	5.7269	5.6414	5.6044	5.5606	5.5117	5.4670
6	X	5.8497	5.6880	5.7025	5.6760	5.6465	5.6197
7	X	7.1219	4.2514	4.1125	4.0431	4.0113	4.6953
8	X	6.6174	6.1450	4.4480	4.0522	4.0035	4.4903
9	X	9.1307	3.8236	2.8533	2.5709	2.5746	2.5610
10	X	X	3.7846	2.4431	2.4684	2.4749	2.4658
11	X	X	7.2633	2.0552	2.1092	2.1134	2.1133
15	X	X	X	18.5805	3.1992	1.9952	2.0018
24	X	X	X	X	40.9339	11.5081	1.0880
30	X	X	X	X	X	2.2377	3.8813

Tabela 10: Porównanie maksymalnej różnicy dla różnych kombinacji liczby węzłów (n) i stopni wielomianu (m)

8.2 Średni błąd kwadratowy

m\n	5	10	15	20	30	50	100
2	9.9090	7.8613	7.7894	7.7822	7.7751	7.7718	7.7706
3	15.8282	7.7346	7.4866	7.4153	7.3478	7.3070	7.2879
4	23.6756	7.5859	7.2748	7.1999	7.1236	7.0770	7.0549
5	X	7.3345	7.1898	7.1518	7.1038	7.0654	7.0423
6	X	7.3275	7.1496	7.0727	6.9942	6.9253	6.8807
7	X	6.7681	4.7508	4.5362	4.3848	4.2386	4.1359
8	X	5.4909	3.4145	2.9572	2.7897	2.6322	2.5151
9	X	8.4127	1.5792	1.2924	1.2225	1.1682	1.1231
10	X	X	1.5605	0.9818	0.9573	0.9479	0.9388
11	X	X	2.6888	0.8720	0.8437	0.8400	0.8361
15	X	X	X	11.0334	0.8379	0.7027	0.6929
24	X	X	X	X	25.2773	2.2773	0.1780
30	X	X	X	X	X	0.2496	1.1994

Tabela 11: Porównanie średniego błędu kwadratowego dla różnych kombinacji liczby węzłów (n) i stopni wielomianu (m)

8.3 Komentarz

Dla wyników błędów z tabel 10. i 11. możemy zauważyć, że w obrębie danego stopnia wielomianu wartości błędów nie odbiegają znacząco od siebie dla różnej liczby węzłów. Jedynym wyjątkiem od tej reguły jest aspekt, kiedy liczba n jest bardzo zbliżona do liczby m. Jednak w takim wypadku bliżej nam do interpolacji niż aproksymacji, więc wyniki takich działań mogą być lekko zniekształcone.

9 Wnioski

Po przeprowadzonych testach dla różnych liczby węzłów oraz stopnia wielomianów możemy zauważyć, że najlepsze wyniki aproksymacji dostajemy dla niskich wartości m.
Dla zadanej funkcji wynika jednak, że stosowanie stopni mniejszych niż 8 nie ma większego sensu, ponieważ ilość punktów zwrotnych jest za duża, aby wielomian o takim m sobie z nią poradził.
Dla coraz wyższych stopni wielomianów dokłaność aproksymacji zaczyna spadać, a dla niektórych kombinacji zaczyna pojawiać się efekt Rungego.
Z testów dla zadanej funkcji $f(x)$ wynika, że w zależności od liczby węzłów najlepiej korzystać ze stopni większych niż 8 oraz mniejszych od 15.
Dodatkowo, z analizy w punkcie 8. możemy zobaczyć, że w ogólności wyznaczanie aproksymacji dla takiego samego stopnia przy różnej liczbie węzłów daje nam bardzo podobne wyniki błędów.
Patrząc bardziej ogólnie, dobór stopnia i liczby węzłów powinien zależeć od zadanej funkcji i dla każdej trzeba by było przeprowadzić osobne testy.