

# MOwNiT - interpolacja, zagadnienie Hermite'a

Paweł Podedworny

10.04.2024

## 1 Opis ćwiczenia

Dla funkcji  $f(x) = e^{-k \cdot \sin(mx)} + k \cdot \cos(mx)$ , gdzie  $k = 2, m = 2$  na przedziale  $x \in [-\pi, 2\pi]$ , wyznaczyć interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego i drugiego stopnia, zwracając uwagę na warunki brzegowe.

Przeprowadzić interpolację dla różnej liczby węzłów, wykonując obliczenia, korzystając przynajmniej z dwóch warunków brzegowych.

Określić dokładność interpolacji za pomocą maksymalnej różnicy oraz błędu średniego kwadratowego.

Pokazać narysowane wykresy oraz porównać ze sobą wyniki interpolacji różnych sposobów.

## 2 Dane techniczne

Komputer z systemem Windows 10 x64

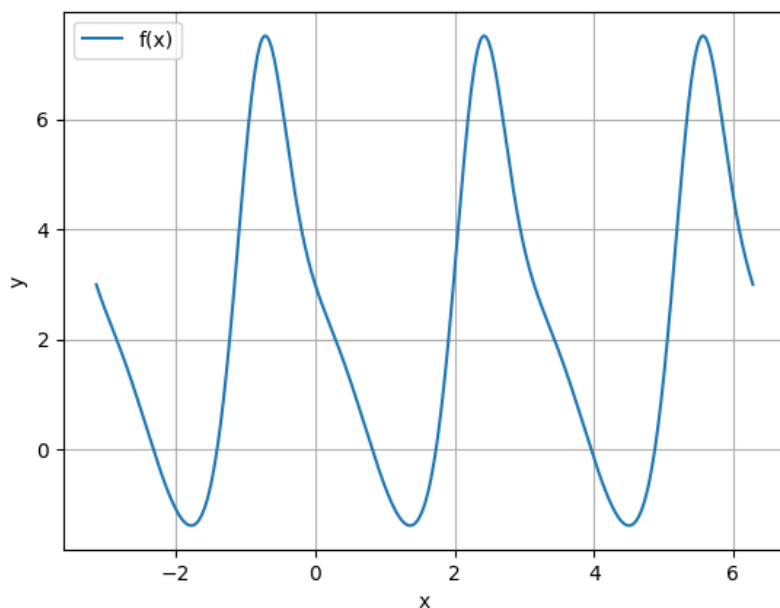
Procesor: AMD Ryzen 5 3600 3.60GHz

Pamięć RAM: 16GB 3200MHz

Środowisko: DataSpell 2023.3.4

Język: Python 3.11 z biblioteką numpy oraz matplotlib

## 3 Wykres funkcji



Rys. 1: Wykres funkcji  $f(x)$  dla  $x \in [-\pi, 2\pi], k = 2, m = 2$

## 4 Sposób obliczania funkcji sklejaney

### 4.1 Drugiego stopnia

Równanie funkcji sklejaney 2. stopnia możemy w ogólności zapisać jako

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i, \quad i \in [1, 2, \dots, n-1]$$

gdzie każdy z segmentów funkcji określony jest na przedziale  $[x_i, x_{(i+1)}]$   $i \in [1, 2, \dots, n-1]$  – węzły indeksowane są od 1 do  $n$ , dlatego otrzymamy  $n-1$  funkcji  $S_i(x)$  opisanych powyższym wzorem. Aby był on funkcją sklejaną 2. stopnia, musi spełniać następujące warunki:

$$S_i(x_i) = y_i \quad dla \quad i \in [1, 2, \dots, n-1]$$

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}) \quad dla \quad i \in [1, 2, \dots, n-2]$$

$$S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1}) \quad dla \quad i \in [1, 2, \dots, n-2]$$

Z warunku 1. otrzymujemy:

$$S_i(x_i) = a_i(x_i - x_i)^2 + b_i(x_i - x_i) + c_i = c_i$$

$$y_i = c_i \quad i \in [1, 2, \dots, n-1]$$

Różniczkując wyjściowe wyrażenie względem  $x$ , otrzymujemy:

$$S'_i(x) = 2a_i(x - x_i) + b_i$$

To z kolei pozwala nam na wykorzystanie warunku 3.:

$$S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1})$$

$$2a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + b_{i+1} = 2a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i$$

$$2a_i(x_{i+1}) - x_i = b_{i+1} - b_i$$

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)} \quad i \in [1, 2, \dots, n-1]$$

Wykorzystując 1. oraz 2. warunek otrzymujemy:

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})$$

$$a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i$$

$$y_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i$$

$$y_{i+1} = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i$$

$$y_{i+1} = (x_{i+1} - x_i)\left(\frac{b_{i+1} - b_i}{2} + b_i\right) + y_i$$

$$b_i + b_{i+1} = 2\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Przesuwając indeks o 1 w dół, uzyskujemy:

$$b_{i-1} + b_i = 2\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$b_{i-1} + b_i = 2\gamma_i, \quad \text{gdzie } \gamma_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \text{dla } i \in [2, 3, \dots, n]$$

Jedynymi niewiadomymi są teraz wartości współczynników  $b_i$ , ponieważ wartości  $c_i$  są znane, a wartości  $a_i$  obliczymy znając wartości  $b_i$ . Otrzymujemy więc układ równań:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\ \dots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1} \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases}$$

Układ ten ma  $n$  niewiadomych, ale tylko  $n - 1$  równań. Jak widzimy, w powyższym układzie równań obliczać także będziemy  $b_n$ , mimo że nie jesteśmy w stanie wyznaczyć  $S_n(x)$ . Takie podejście ma na celu umożliwienie obliczenia współczynnika  $a_{n-1}$ . Musimy więc skorzystać z warunku brzegowego w celu wyznaczenia brakującego równania.

#### 4.1.1 Warunki brzegowe

- Natural Spline (Free Boundary)

$$S'_1(x_1) = 0 \text{ lub } S'_{n-1}(x_n) = 0$$

Ponieważ brakuje nam jednego równania, wystarczy że uwzględnimy jeden z powyższych warunków, dalsze przekształcenia wykonujemy dla  $S'_1(x_1) = 0$ . Korzystając z wyprowadzonego wzoru otrzymujemy:

$$2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = 0$$

$$b_1 = 0$$

Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego otrzymujemy układ równań, dzięki któremu możemy obliczyć współczynniki  $b_i$ :

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\ \dots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1} \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases}$$

Patrząc na wartości w powyższym układzie możemy spostrzec, że po odpowiednich przekształceniach da się go rozwiązać w sposób iteracyjny:

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 2\gamma_2 - b_1 = 2\gamma_2$$

$$b_3 = 2\gamma_3 - b_2 = 2(\gamma_3 - \gamma_2)$$

$$b_4 = 2\gamma_4 - b_3 = 2(\gamma_4 - \gamma_3 + \gamma_2)$$

$$\vdots$$

$$b_n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - \gamma_{n-3} + \dots)$$

- Clamped Boundary

Dla tego warunku brzegowego przyjmujemy, że jedna z pierwszych pochodnych na krańcach jest znana lub przybliżona przy pomocy ilorazów różnicowych, tzn.:

$$S'_1(x_1) = f'_1 \text{ lub } S'_{n-1}(x_n) = f'_{n-1}$$

Do wyznaczenia przybliżonej wartości pochodnej (jeżeli dokładna wartość nie jest znana) najlepiej skorzystać z ilorazu różnicowego.

$$S'_1(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Korzystając z wyprowadzonego wzoru możemy przekształcić powyższe równanie do następującej postaci:

$$2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \gamma_2$$

Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego otrzymujemy układ równań, przy pomocy którego już jesteśmy w stanie wyliczyć szukane wartości współczynników  $b_i$ :

$$\begin{cases} b_1 = \gamma_2 \\ b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\ \dots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1} \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases}$$

Powyższy układ równań możemy znów obliczyć w sposób iteracyjny, otrzymując równania postaci:

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_2 \\ b_2 &= 2\gamma_2 - b_1 = \gamma_2 \\ b_3 &= 2\gamma_3 - b_2 = 2(\gamma_3 - \gamma_2) \\ b_4 &= 2\gamma_4 - b_3 = 2(\gamma_4 - \gamma_3 + \gamma_2) \\ &\vdots \\ b_n &= 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - \gamma_{n-3} + \dots) \end{aligned}$$

## 4.2 Trzeciego stopnia

Równanie funkcji sklejaną 3. stopnia możemy w ogólności zapisać jako:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad i \in [1, 2, \dots, n-1]$$

gdzie każdy z segmentów funkcji, określony na przedziale  $[x_i, x_{i+1}]$   $i \in [1, 2, \dots, n-1]$  opisany jest podanym wzorem. Aby funkcja była funkcją sklejaną 3. stopnia, musi spełniać następujące warunki:

1.  $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$
2.  $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$
3.  $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$
4.  $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$

Ponieważ funkcja  $S_i(x)$  jest funkcją sześcienną,  $S''_i(x)$  jest liniowa na przedziale  $[x_i, x_{i+1}]$ . Wprowadźmy oznaczenia  $h_i = x_{i+1} - x_i$ . Funkcję  $S''_i(x)$  możemy więc zapisać w postaci zależności liniowej:

$$S''_i(x) = S''_i(x_i) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} = S''_i(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{h_i}$$

Całkując obustronnie funkcję  $S''_i(x)$ , otrzymujemy:

$$S_i(x) = \frac{S''_i(x_i)}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''_i(x_{i+1})}{6h_i}(x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x)$$

Korzystając z warunków interpolacji, możemy wyznaczyć wartości stałych całkowania. Po ich wyznaczeniu, otrzymujemy wzór postaci:

$$S_i(x) = \frac{S''_i(x_i)}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''_i(x_{i+1})}{6h_i}(x - x_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{S''_i(x_i)h_i}{6}\right)(x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{S''_i(x_{i+1})h_i}{6}\right)(x_{i+1} - x)$$

Zauważmy, że w powyższym wzorze jedynie nie znamy  $S''_i(x)$ . W celu jego wyznaczenia korzystamy z warunku ciągłości pierwszej pochodnej, a więc różniczkujemy  $S_i(x)$ :

$$S'_i(x) = -\frac{h_i}{3}S''_i(x_i) - \frac{h_i}{6}S''_i(x_{i+1}) - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

Dla przejrzystości wprowadzamy symbole  $\sigma_i = \frac{1}{6}S''_i(x_i)$  oraz  $\Delta_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$ . Po wstawieniu uzyskujemy:

$$S'_i(x) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$

Natomiast z drugiej strony:

$$S'_{i-1}(x) = \Delta_{i-1} + (2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$

Z warunku ciągłości  $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$  otrzymujemy finalną postać równania:

$$\Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) = \Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}, \quad i \in 2, 3, \dots, n-1$$

Jak możemy zauważyć, mamy  $n$  niewiadomych  $\sigma_i$ , ale tylko  $n-2$  równań. Musimy więc określić dwa dodatkowe warunki.

#### 4.2.1 Warunki brzegowe

Przyjmujemy, że:

$C_1(x)$  - funkcja sześcienna przechodząca przez pierwsze 4 punkty

$C_n(x)$  - funkcja sześcienna przechodząca przez ostatnie 4 punkty

Z powyższych założeń wynika więc, że:

$$S'''(x_1) = C_1''' \text{ oraz } S'''(x_n) = C_n'''$$

Korzystając z metody ilorazów różnicowych, możemy wyznaczyć przybliżoną wartości 3. pochodnych funkcji  $C_1(x)$  i  $C_n(x)$ :

$$\Delta_i^{(1)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(1)} - \Delta_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i} \quad \Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i}$$

Przybliżenie pochodnej  $f_i^{(n)}$  otrzymujemy mnożąc  $n! * \Delta_i^{(n)}$ , więc:

$$S'''(x_1) = C_1''' = 3! * \Delta_1^{(3)} = 6 * \Delta_1^{(3)}$$

$$S'''(x_n) = C_n''' = 3! * \Delta_{n-3}^{(3)} = 6 * \Delta_{n-3}^{(3)}$$

Przekształcając powyższe równania, otrzymujemy 2 brakujące warunki:

$$\begin{cases} -h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ h_{n-1}\sigma_{n-1} + h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{cases}$$

Finalnie, układ równań, który otrzymujemy, po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, ma następującą postać macierzową:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{bmatrix}$$

- Natural Spline (Free Boundary)

$$S''(x_1) = S''(x_n) = 0$$

Korzystając z poprzednich przekształceń, mamy  $\sigma_i = \frac{1}{6}S''_i(x_i)$ . Uwzględniając powyższe równanie, otrzymujemy:

$$S''(x_1) = S''_1(x_1) = 0 \Leftrightarrow \sigma_1 = 0$$

$$S''(x_n) = S_n''(x_n) = 0 \Leftrightarrow \sigma_n = 0$$

Znamy więc już 2 wartości niewiadomych ( $\sigma_1 = \sigma_n = 0$ ). Po dodaniu powyższych 2 równań do  $n - 2$  równań, otrzymujemy układ równań postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Clamped Boundary

$$S'(x_1) = f_1'$$

$$S'(x_n) = f_{n-1}'$$

Korzystając z poprzednich obliczeń, mamy:

$$S'(x_1) = S_1'(x_1) = \Delta_1 - h_1(\sigma_2 + 2\sigma_1) = f_1'$$

$$S'(x_n) = S_{n-1}'(x_n) = \Delta_{n-1} - h_{n-1}(\sigma_n + 2\sigma_{n-1}) = f_{n-1}'$$

Przekształcając powyższe równania, otrzymujemy:

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\Delta_1 - f_1'}{h_1}$$

$$2\sigma_{n-1} + \sigma_n = \frac{\Delta_{n-1} - f_{n-1}'}{h_{n-1}}$$

Pierwsze pochodne  $f_1'$  oraz  $f_n'$  możemy przybliżyć, przy pomocy metody ilorazów różnicowych, a więc finalnie otrzymujemy:

$$f_1' = \Delta_1$$

$$f_{n-1}' = \Delta_{n-1}$$

Wstawiając do wyznaczonych równań, otrzymujemy:

$$2 * \sigma_1 + \sigma_2 = 0$$

$$2 * \sigma_{n-1} + \sigma_n = 0$$

Otrzymane w ten sposób równania pozwolą na wyznaczenie interpolacyjnej funkcji sklejaney 3. stopnia. Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego układ n równań wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 5 Obliczanie dokładności przybliżeń

### 5.1 Maksymalna różnica

Największa różnica jaka występuje pomiędzy funkcją, a wielomianem interpolującym:

$$\max_k |f(x_k) - P_n(x_k)|$$

### 5.2 Błąd średni kwadratowy

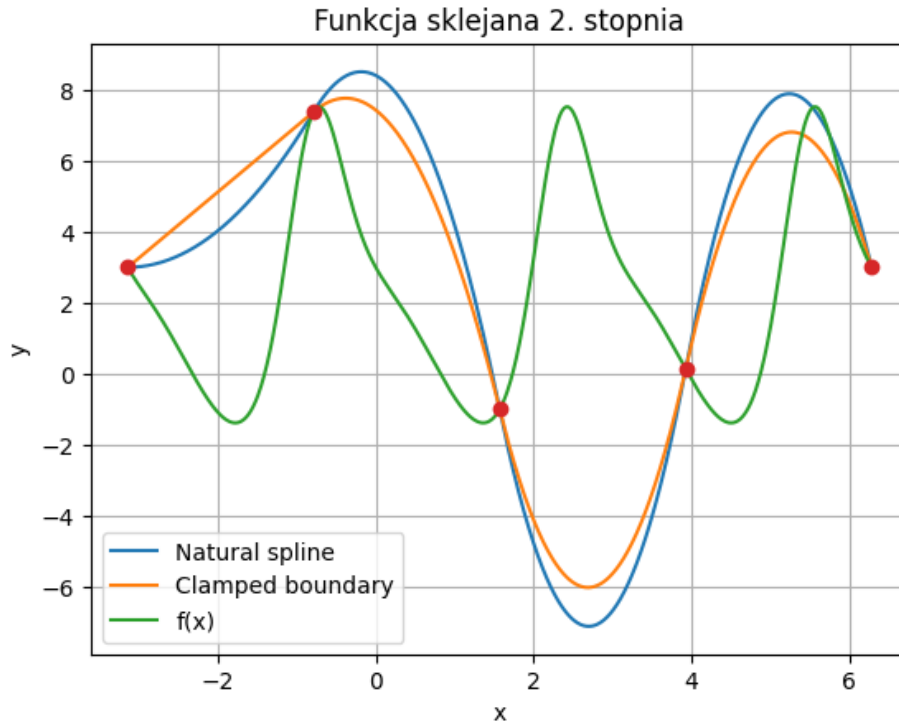
Suma kwadratów różnic pomiędzy wartościami funkcji i funkcji sklepanych podzielonych przez liczbę punktów  $N$ , gdzie  $N = 1000$ :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - P_n(x_i))^2$$

## 6 Wyniki dla funkcji sklejanych 2. stopnia

### 6.1 5 węzłów

#### 6.1.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 2: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz funkcji sklejanych 2. stopnia dla 5 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Natural spline	14.334544894577931	34.81563214783479
Clamped boundary	13.302202992565025	30.107091518445483

Tabela 1: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla obu warunków brzegowych przy 5 węzłach

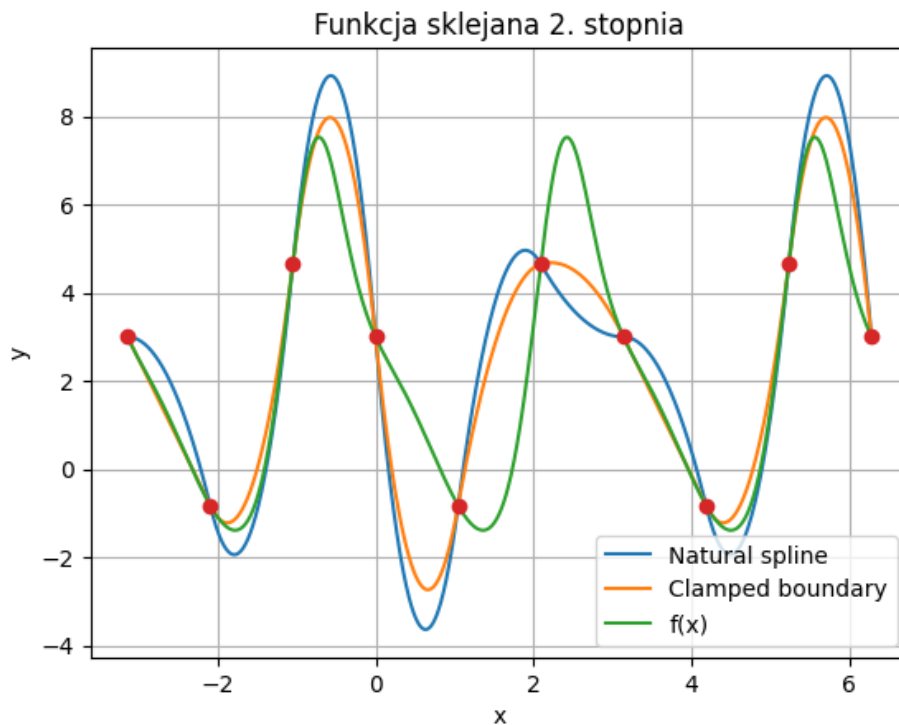
#### 6.1.2 Komentarz

Dla takich niskich wartości  $n$  możemy zauważyć, że funkcja interpolowana w obu warunkach brzegowych nie pokrywa się z zadaną funkcją. Zarazem jednak ładnie uwidaczniają nam się warunki brzegowe. Dla clamped boundary uzyskujemy, zgodnie z podstawieniem, funkcję liniową a dla natural spline funkcję kwadratową o środku paraboli w początkowym węźle.



## 6.2 10 węzłów

### 6.2.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 3: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz funkcji sklepanych 2. stopnia dla 10 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Natural spline	5.127989660810031	4.27720951081636
Clamped boundary	4.176021010617911	2.4992535527364064

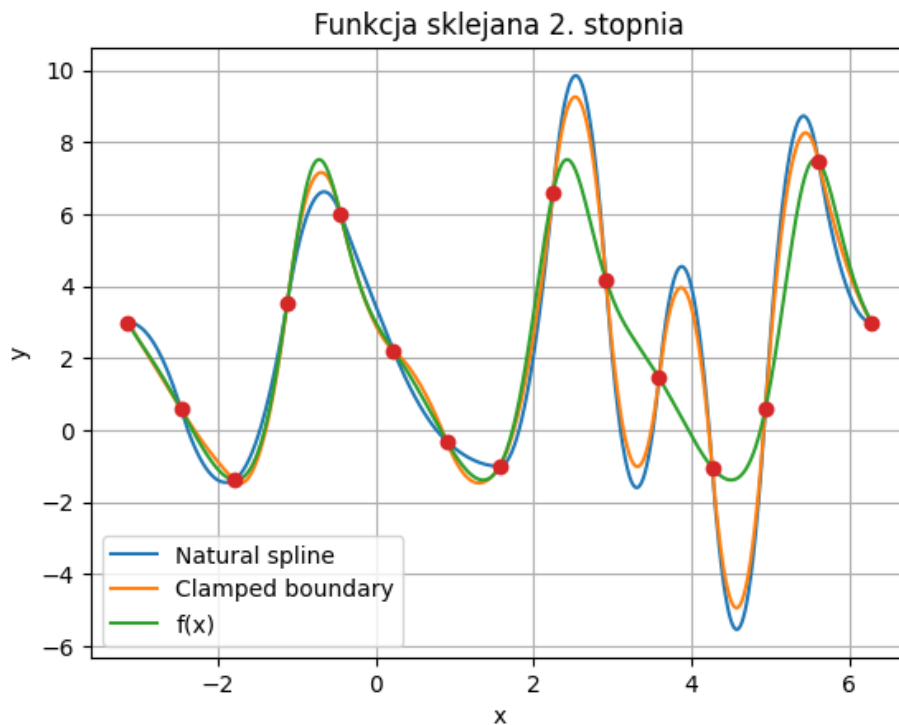
Tabela 2: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklepaną 2. stopnia dla obu warunków brzegowych przy 10 węzłach

### 6.2.2 Komentarz

Dla 10 węzłów możemy zauważyć, że funkcje interpolowane koło prawego i lewego brzegu nawet dobrze pokrywają się z zadaną funkcją. W środku za to dalej odbiegają od poprawności.

## 6.3 15 węzłów

### 6.3.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 4: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz funkcji sklepanych 2. stopnia dla 15 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Natural spline	4.324986133559379	2.805985296340989
Clamped boundary	3.7220867758649323	1.8991573290559358

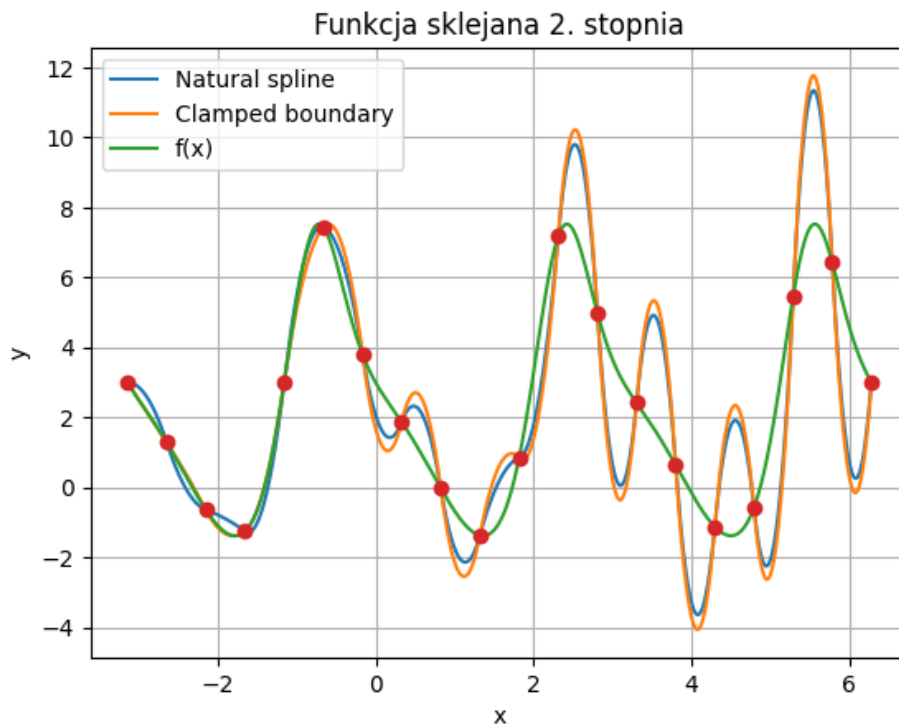
Tabela 3: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla obu warunków brzegowych przy 15 węzłach

### 6.3.2 Komentarz

Przy 15 węzłach widzimy, że funkcje interpolowane na brzegach przedziału coraz lepiej dopasowują się do zadanej funkcji. W środku jednak możemy zauważyć występowanie nawet dużych oscylacji dla obu warunków brzegowych.

## 6.4 20 węzłów

### 6.4.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 5: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz funkcji sklejanych 2. stopnia dla 20 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Natural spline	3.9200613287116353	2.858034661628057
Clamped boundary	4.349415103586513	3.7382618618598453

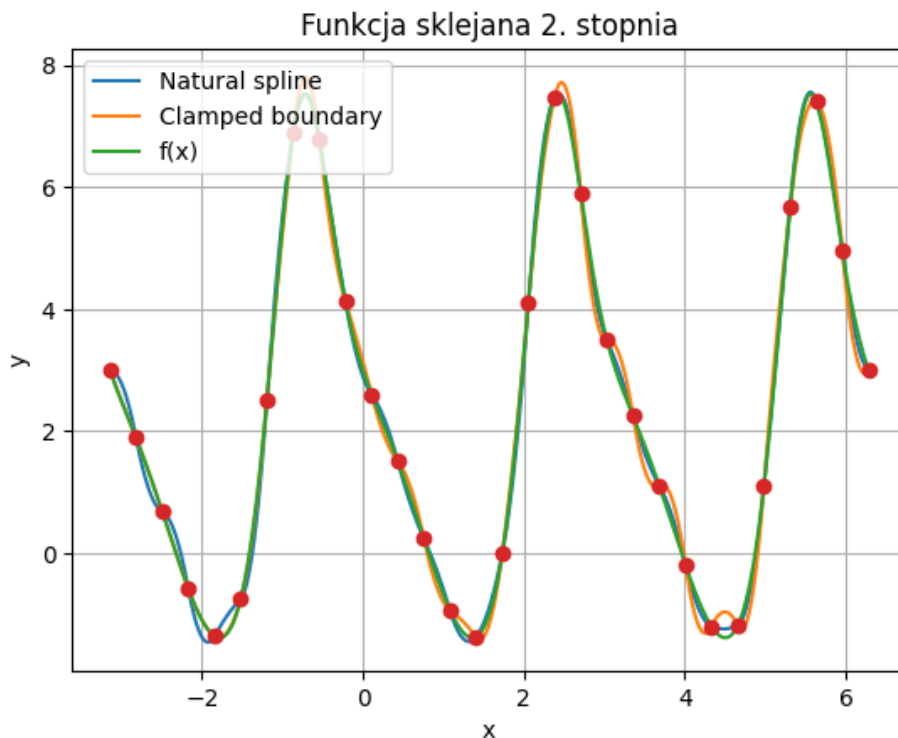
Tabela 4: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla obu warunków brzegowych przy 20 węzłach

### 6.4.2 Komentarz

Dla 20 węzłów możemy zobaczyć dziwną sytuację. Otóż wykresy funkcji interpolowanej w porównaniu z poprzednią wartością okazują się nie poprawiać, a wręcz sprawiają wrażenie mniej dokładnych. Oscylacje uwypukliły się na prawie całym przedziale.

## 6.5 30 węzłów

### 6.5.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 6: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz funkcji sklepanych 2. stopnia dla 30 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Natural spline	0.32577900984153463	0.01725424995833126
Clamped boundary	0.4975259310160567	0.04280181368729739

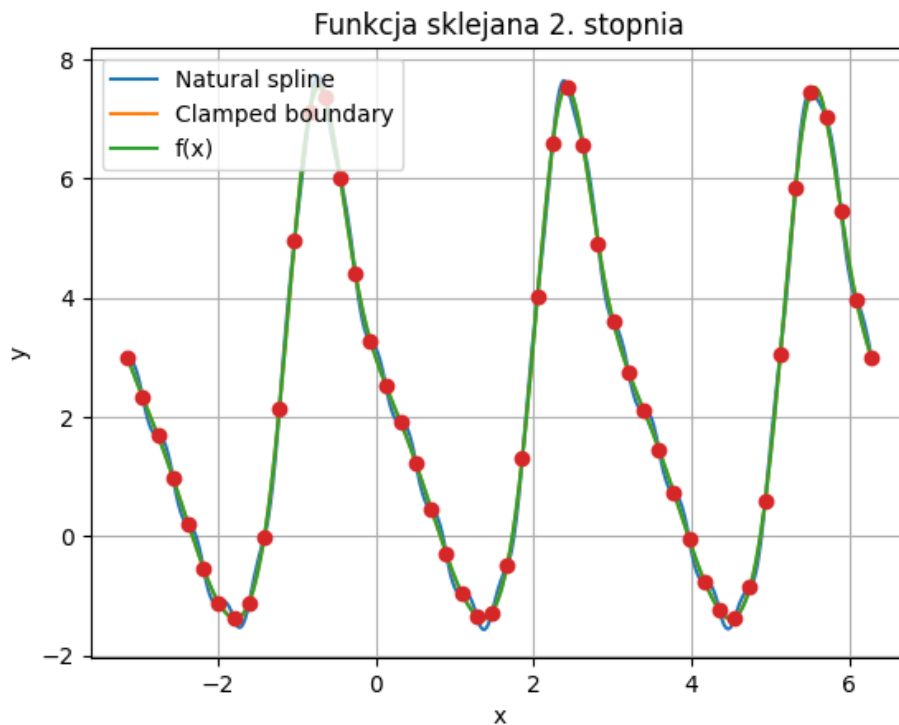
Tabela 5: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklepaną 2. stopnia dla obu warunków brzegowych przy 30 węzłach

### 6.5.2 Komentarz

Dla  $n=30$  uzyskujemy już całkiem dobre przybliżenie funkcji interpolowanej. Dalej jednak możemy spostrzec małe oscylacje.

## 6.6 50 węzłów

### 6.6.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 7: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz funkcji sklepanych 2. stopnia dla 50 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Natural spline	0.20691882387666283	0.01826294860106171
Clamped boundary	0.03866456038935251	0.0001894900847401843

Tabela 6: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla obu warunków brzegowych przy 50 węzłach

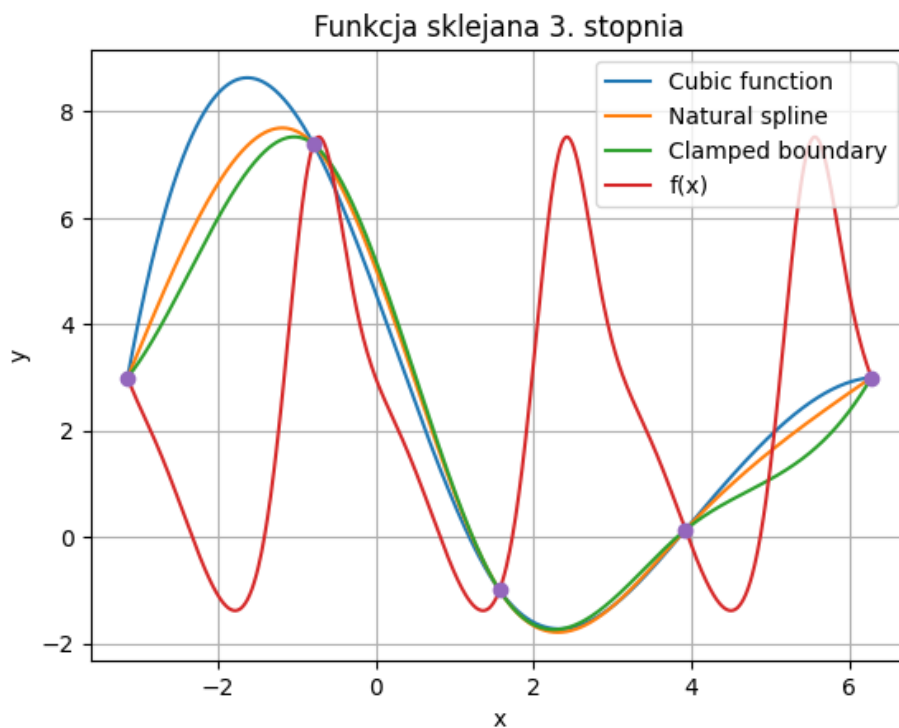
### 6.6.2 Komentarz

Przy 50 węzłach dostajemy już bardzo dobrze przybliżenie ze względu na wartości błędów. Patrząc jednak na wykres dalej możemy ujrzeć pewne odstępstwa od zadanej funkcji w niektórych miejscach.

## 7 Wyniki dla funkcji sklejanych 3. stopnia

### 7.1 5 węzłów

#### 7.1.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 8: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz funkcji sklejanych 3. stopnia dla 5 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Cubic function	9.983076043313151	21.10236363125399
Natural Spline	9.30175695687594	17.858709984188437
Clamped boundary	9.233241712952461	16.909041303062544

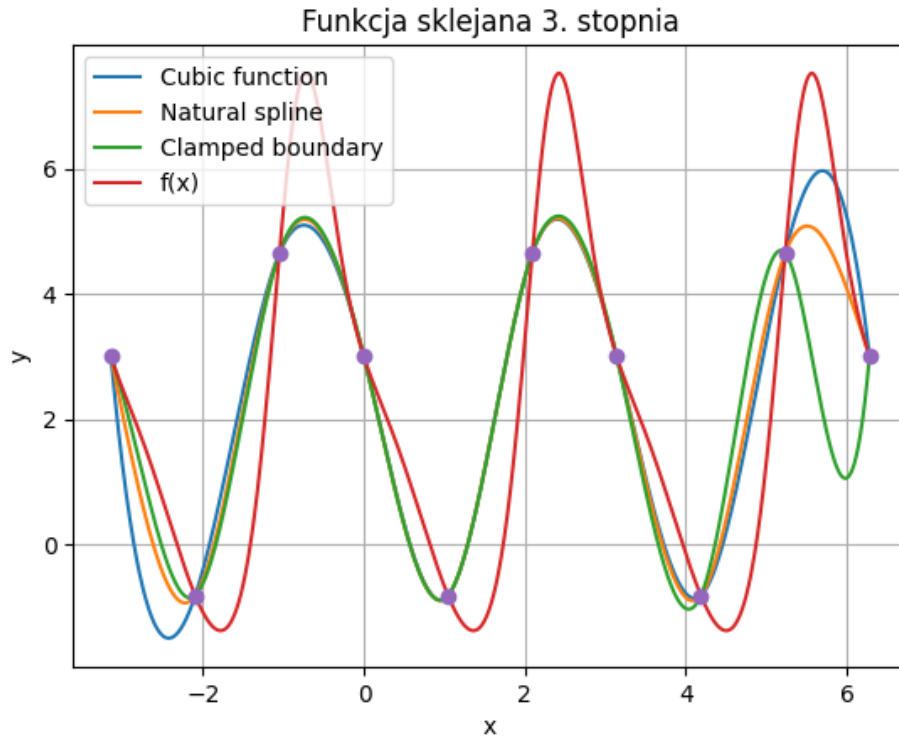
Tabela 7: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 3. stopnia dla trzech warunków brzegowych przy 5 węzłach

#### 7.1.2 Komentarz

Podobnie jak dla poprzednich interpolacji, wynik operacji na takiej małej liczbie węzłów nie daje nam dokładnych wyników.

## 7.2 10 węzłów

### 7.2.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 9: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz funkcji sklepanych 3. stopnia dla 10 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Cubic function	3.1079813285366145	2.2524660529417577
Natural Spline	2.8311593791027017	2.115785324555364
Clamped boundary	4.971020902917099	3.508715597210336

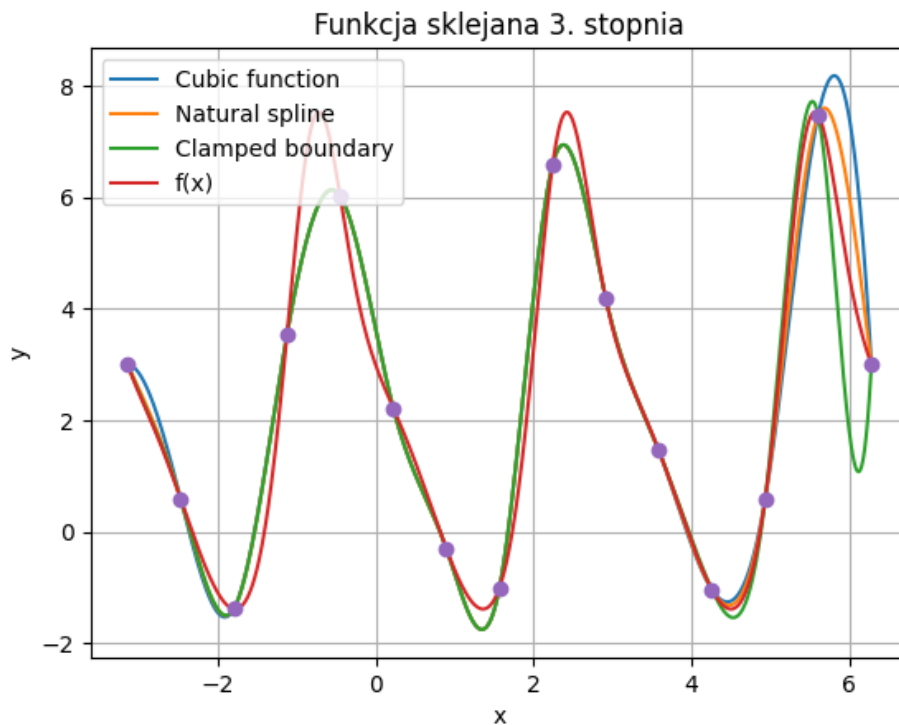
Tabela 8: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklepaną 3. stopnia dla trzech warunków brzegowych przy 10 węzłach

### 7.2.2 Komentarz

Przy  $n=10$  widzimy, że oprócz miejsc, o których funkcja interpolacyjna nie miała wystarczająco informacji, wykresy coraz lepiej zaczynają się pokrywać. Wyjątkiem jest prawy brzeg przedziału dla clamped boundary, gdzie wyznaczono źle zwróconą funkcję.

## 7.3 15 węzłów

### 7.3.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 10: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz funkcji sklepanych 3. stopnia dla 15 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Cubic function	2.8364406139068983	0.5689442879126848
Natural Spline	1.7457015976091288	0.321074952635678
Clamped boundary	2.8936202976111325	0.5087973349188912

Tabela 9: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklepaną 3. stopnia dla trzech warunków brzegowych przy 15 węzłach

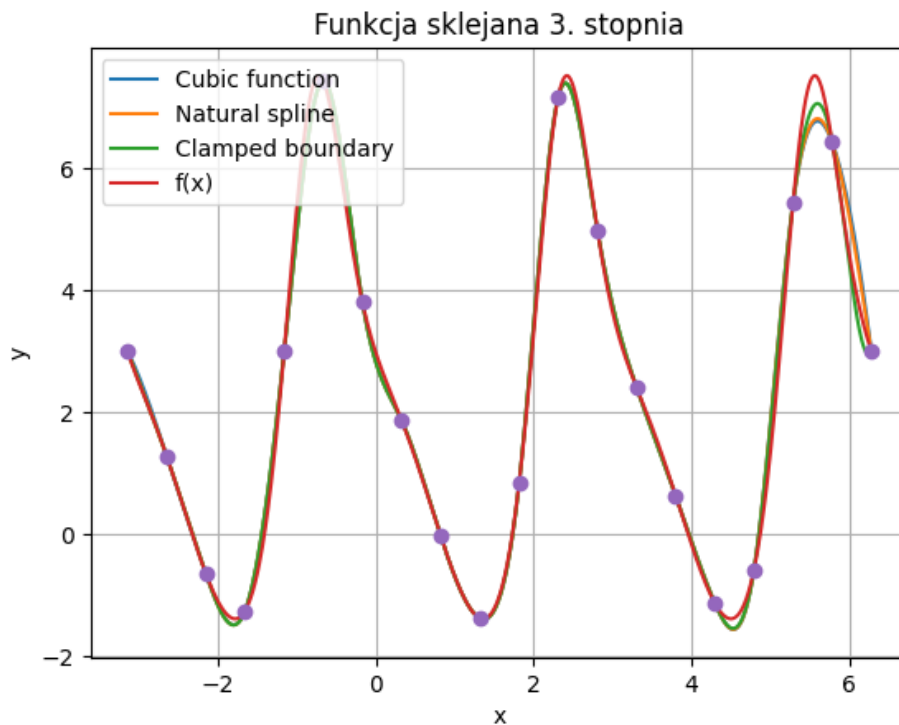
### 7.3.2 Komentarz

Przy 15 węzłach widzimy, że uzyskane przez nas wyniki są całkiem satysfakcjonujące. Jedynym wyjątkiem jest prawy brzeg, gdzie możemy zauważyć lekkie odstępstwa.



## 7.4 20 węzłów

### 7.4.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 11: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz funkcji sklepanych 3. stopnia dla 20 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Cubic function	0.77479158964079	0.05554694188249451
Natural Spline	0.7325055874803548	0.048304261457774576
Clamped boundary	0.5082219221074427	0.03065166596511985

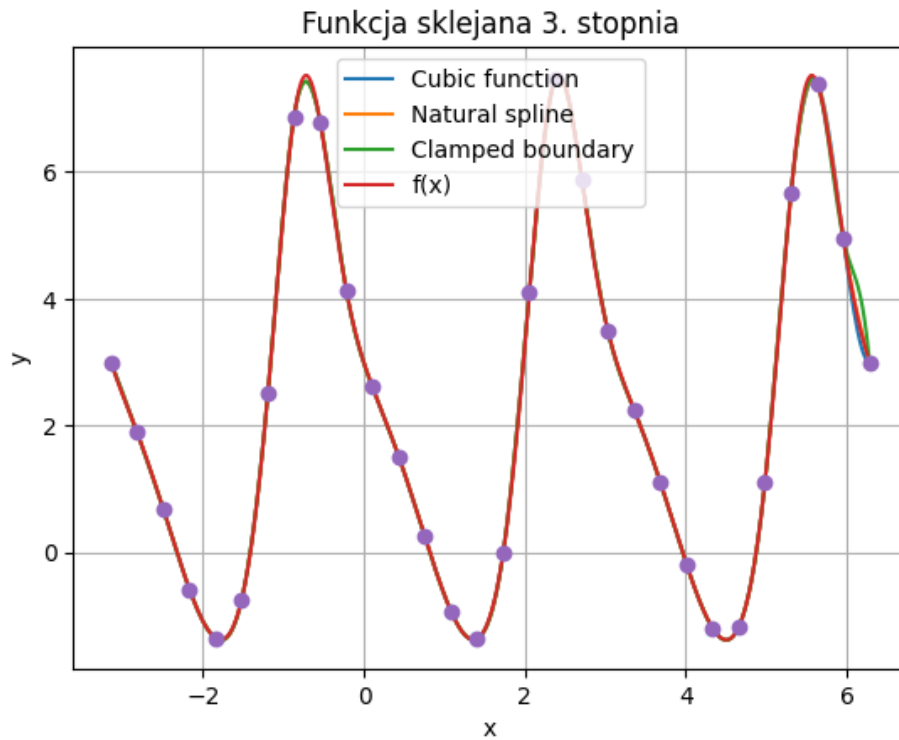
Tabela 10: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 3. stopnia przy 20 węzłach

### 7.4.2 Komentarz

Dla 20 węzłów, oprócz pojedynczych zaburzeń, dostajemy prawie idealne wyznaczone funkcje interpolujące.

## 7.5 30 węzłów

### 7.5.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 12: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz funkcji sklepanych 3. stopnia dla 30 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Cubic function	0.2207191643532025	0.002030344821588474
Natural Spline	0.11761005253441681	0.0009423413615543926
Clamped boundary	0.5229777172553556	0.005391098313717543

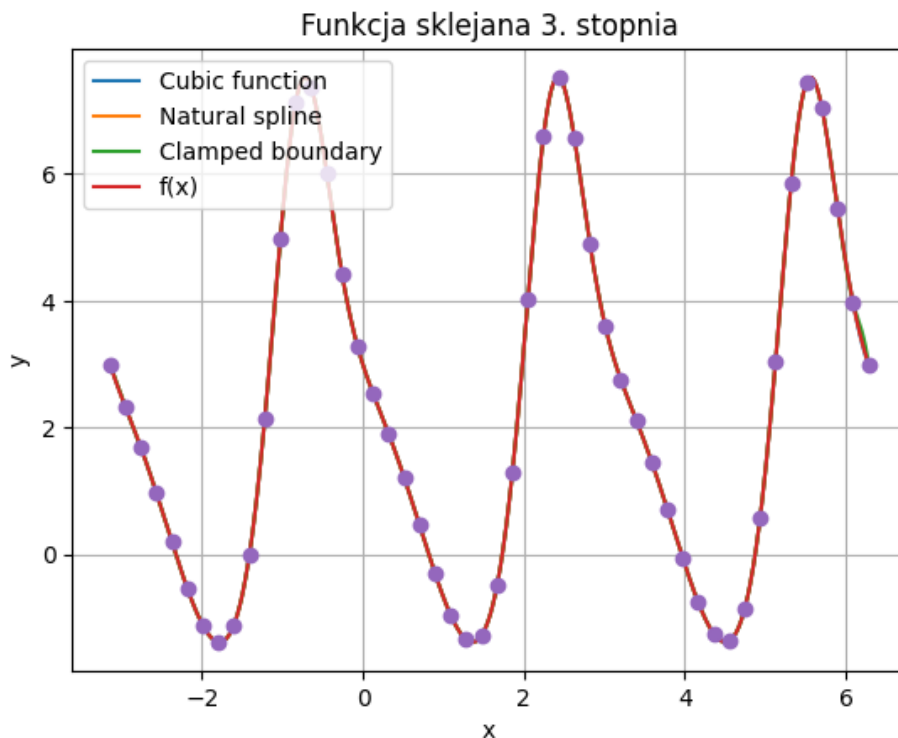
Tabela 11: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 3. stopnia dla trzech warunków brzegowych przy 30 węzłach

### 7.5.2 Komentarz

Przy 50 węzłach dostajemy funkcje wręcz idealnie pokrywające się z zadaną funkcją. Patrząc po wykresie można odnieść wrażenie, że jedynym miejscem generującym błąd jest lekkie odstępstwo od normy w prawym brzegu.

## 7.6 50 węzłów

### 7.6.1 Wykresy oraz błędy



Rys. 13: Wykres funkcji  $f(x)$  oraz funkcji sklepanych 3. stopnia dla 50 węzłów

	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
Cubic function	0.028910290014262152	1.4072356038706349e-05
Natural Spline	0.01444570706316739	8.330569817766636e-06
Clamped boundary	0.16275509849790915	0.0002875036663231031

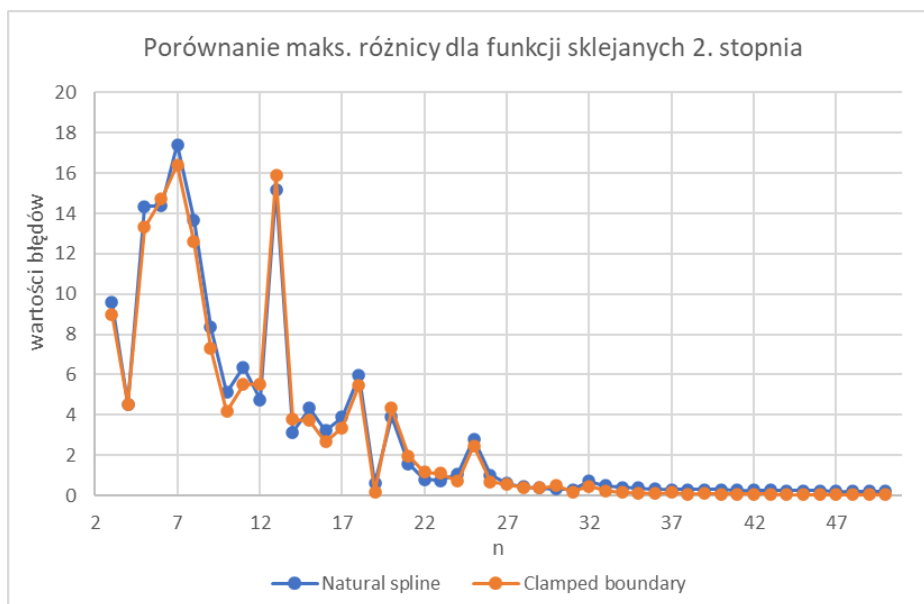
Tabela 12: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklepaną 3. stopnia dla trzech warunków brzegowych przy 50 węzłach

### 7.6.2 Komentarz

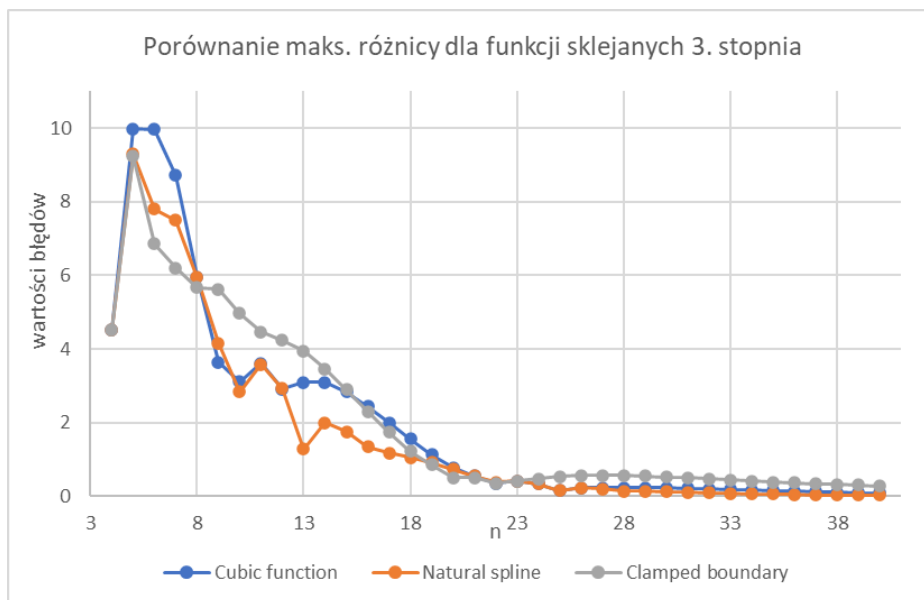
Przy 50 węzłach można prawie nie dostrzec różnicy pomiędzy zadaną funkcją a interpolacją, co potwierdzają również wartości błędów.

## 8 Porównanie błędów

Testy zostały przeprowadzone do 100 węzłów jednak z kwestii, że wyniki od ok 40 zaczynały być bardzo bliskie zeru, to dla lepszego zobrazowania postanowiłem obciąć zakres wyników do ok. połowy.



Rys. 14: Porównanie wartości maksymalnej różnicy dla obu warunków brzegowych dla funkcji sklepanej 2. stopnia w zależności od liczby węzłów  $n$



Rys. 15: Porównanie wartości maksymalnej różnicy dla trzech warunków brzegowych dla funkcji sklepanej 3. stopnia w zależności od liczby węzłów  $n$

## 9 Wnioski

Porównując wyniki interpolacji za pomocą funkcji sklepanych 2. oraz 3. stopnia oraz różnych rodzaju warunków brzegowych możemy dojść do kilku konkluzji.

Po pierwsze, w porównaniu z poprzedniejszymi interpolacjami nie doświadczamy tutaj efektu Runge’a i wraz z coraz większymi liczbami węzłów dokładność zaczyna się tylko zwiększać.

Patrząc na funkcje sklepane 2. stopnia nie ma za bardzo znaczenia jakiego warunku brzegowego użyjemy. Oba dla tych samych  $n$  uzyskują podobne wartości błędów oraz same wykresy za bardzo od siebie nie odbiegają. Jednak podczas testów można było zobaczyć, że jeszcze dla nie tak dużych wartości  $n$ , mimo małego błędu, dla danych przedziałów funkcje doznawały oscylacji. Raz większych a raz mniejszych.

Dla funkcji sklepanych 3. stopnia takie problemy nie występowały i dla coraz większych  $n$  funkcje zaczynały się idealnie pokrywać z zadaną funkcją. Na przestrzeni pierwszych 25 liczby węzłów można zobaczyć, że również nie ma większego znaczenia jakiego warunku brzegowego użyjemy. Dla jednych  $n$  clamped boundary uzyskuje lepsze wyniki, za to dla innych pozostałe dwa. Przypuszczam, że wszystko zależy od zadanej funkcji i jej kształtu.