

MOwNiT - interpolacja, zagadnienie Lagrange'a oraz Hermite'a

Paweł Podedworny

12.04.2024

1 Opis ćwiczenia

Dla funkcji $f(x) = e^{-k \cdot \sin(mx)} + k \cdot \cos(mx)$, gdzie $k = 2, m = 2$ na przedziale $x \in [-\pi, 2\pi]$, porównać ze sobą interpolację Lagrange'a oraz Hermite'a.

Dla różnej liczby węzłów oraz sposobu ich rozmieszczenia (równoodległe oraz wg zer wielomianu Czebyszewa) wyznaczyć wielomiany interpolujące.

Dla uzyskanych wielomianów ocenić dokładność ich oszacowania, znaleźć taki, który najlepiej przybliża zadaną funkcję oraz kiedy zaczyna występować efekt Rungego.

Porównać ze sobą wszystkie wyniki oraz przedstawić wnioski.

2 Dane techniczne

Komputer z systemem Windows 10 x64

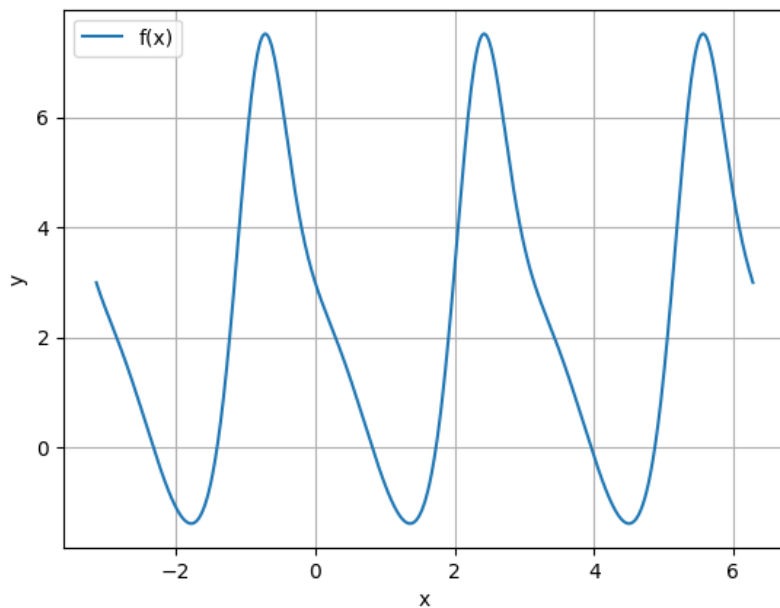
Procesor: AMD Ryzen 5 3600 3.60GHz

Pamięć RAM: 16GB 3200MHz

Środowisko: DataSpell 2023.3.4

Język: Python 3.11 z biblioteką numpy, sympy oraz matplotlib

3 Wykres funkcji



Rys. 1: Wykres funkcji $f(x)$ dla $x \in [-\pi, 2\pi], k = 2, m = 2$

4 Metody interpolacji

4.1 Metoda Lagrange'a

Do wyznaczenia wielomianu interpolującego n. stopnia metodą Lagrange'a został użyty wzór:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot L_k(x)$$

gdzie $L_k(x)$ to baza Lagrange'a opisana wzorem:

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{(x_k - x_i)}$$

4.2 Metoda Newtona

Do wyznaczenia wielomianu interpolującego n. stopnia metodą Newtona został użyty wzór:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

gdzie $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ jest ilorazem różnicowym względem x_0, x_1, \dots, x_k , opisanym wzorem rekurencyjnym:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

zakładając, że:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

4.3 Metoda Hermite'a

Do wyznaczenia wielomianu interpolującego n. stopnia metodą Hermite'a został użyty wzór:

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^n b_l \cdot p_l(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{(s(i)+j)} \cdot p_{(s(i)+j)}(x)$$

gdzie $p_{(s(i)+j)}(x)$ jest wielomianem postaci:

$$p_{s(0)}(x) = 1$$

$$p_{(s(i)+j)}(x) = (x - x_0)^{m_0} (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_{i-1})^{m_{i-1}} (x - x_i)^j (*)$$

$$\text{gdzie: } i = 0, 1, \dots, k, \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

Aby odnaleźć współczynniki b_l tworzymy tablicę ilorazów różnicowych tak jak w metodzie Newtona. Natomiast tam, gdzie nie można utworzyć ilorazu, wykorzystujemy informacje o pochodnej. Następnie wartości na przekątnej będą odpowiadać kolejnym wartościom współczynników.

4.4 Obliczanie pochodnych

Do wyznaczenia funkcji pochodnej pierwszego rzędu skorzystałem z biblioteki *sympy* i funkcji *diff*, która symbolicznie wyznaczyła jej wzór a następnie z funkcji *lambdify*, dzięki której mogłem z niej skorzystać w kolejnych obliczeniach.

5 Obliczanie dokładności przybliżeń

5.1 Maksymalna różnica

Największa różnica jaka występuje pomiędzy funkcją, a wielomianem interpolującym:

$$\max_k |f(x_k) - P_n(x_k)|$$

5.2 Błąd średni kwadratowy

Suma kwadratów różnic pomiędzy wartościami funkcji i wielomianów interpolujących podzielonych przez liczbę punktów N , gdzie $N = 1000$:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - P_n(x_i))^2$$

5.3 Zera wielomianu Czebyszewa

Aby obliczyć pierwiastki wielomianu Czebyszewa dla dowolnego przedziału $[a, b]$ korzystamy z przekształcenia:

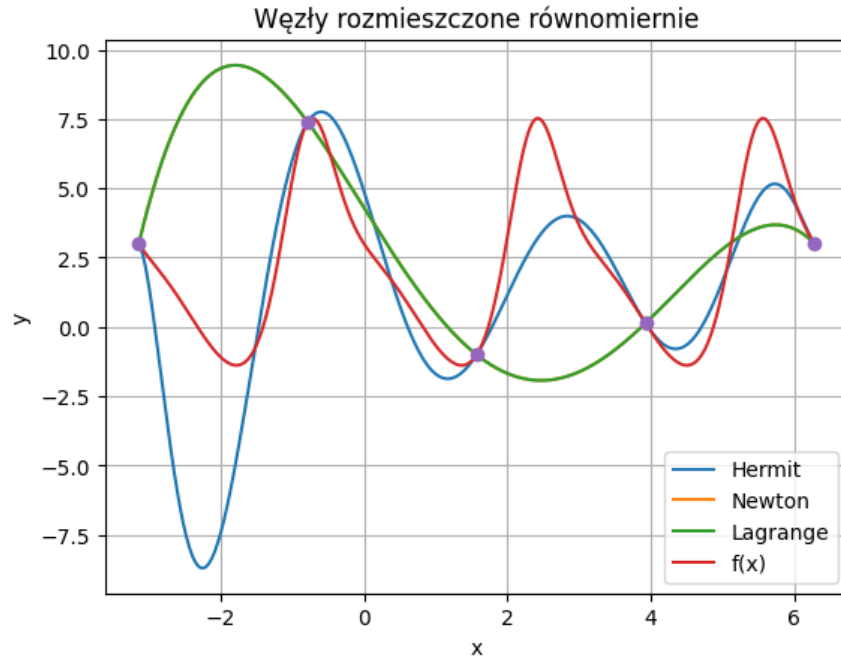
$$x_k = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a)\cos\left(\frac{2k - 1}{2n}\pi\right)$$

6 Wyniki dla poszczególnej liczby węzłów

W zależności od przypadku wykresy funkcji ukazane są na jednym rysunku lub na dwóch. Wynika to z faktu, że interpolacja Hermite'a szybko zaczyna tracić dokładność i przez to nie można zobaczyć pozostałych wykresów.

6.1 Węzły równoodległe

6.1.1 5 węzłów (wielomian 9. stopnia)



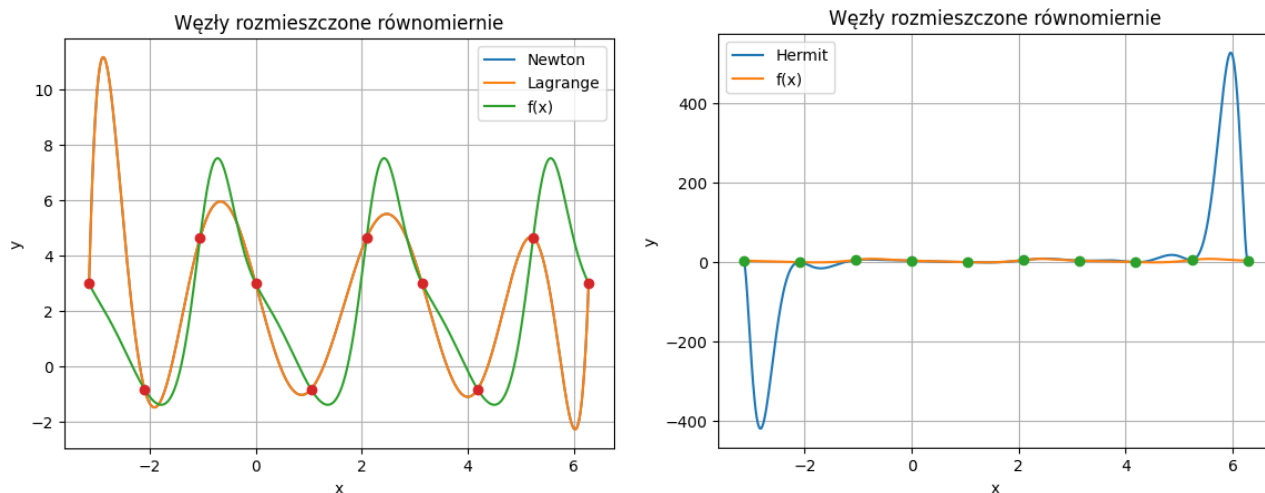
Rys. 2: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 5 węzłów

| | Maksymalna różnica | Średni błąd kwadratowy |
|-------------------|--------------------|------------------------|
| Metoda Newtona | 10.821967715860593 | 23.675605514145005 |
| Metoda Hermite'a | 8.601023312831462 | 7.464246116213026 |
| Metoda Lagrange'a | 10.82196771586059 | 23.675605514145005 |

Tabela 1: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Lagrange'a oraz Hermite'a przy 5 węzłach równomiernie rozmieszczonych

Przy $n=5$ możemy zauważyć, że obie metody dla interpolacji Lagrange'ga dają takie same wyniki w przeciwieństwie do Hermite'a. Patrząc na rysunek 2. widzimy, że obie interpolacje dla równoodległych węzłów zwróciły niedokładny wielomian.

6.1.2 10 węzłów (wielomian 19. stopnia)



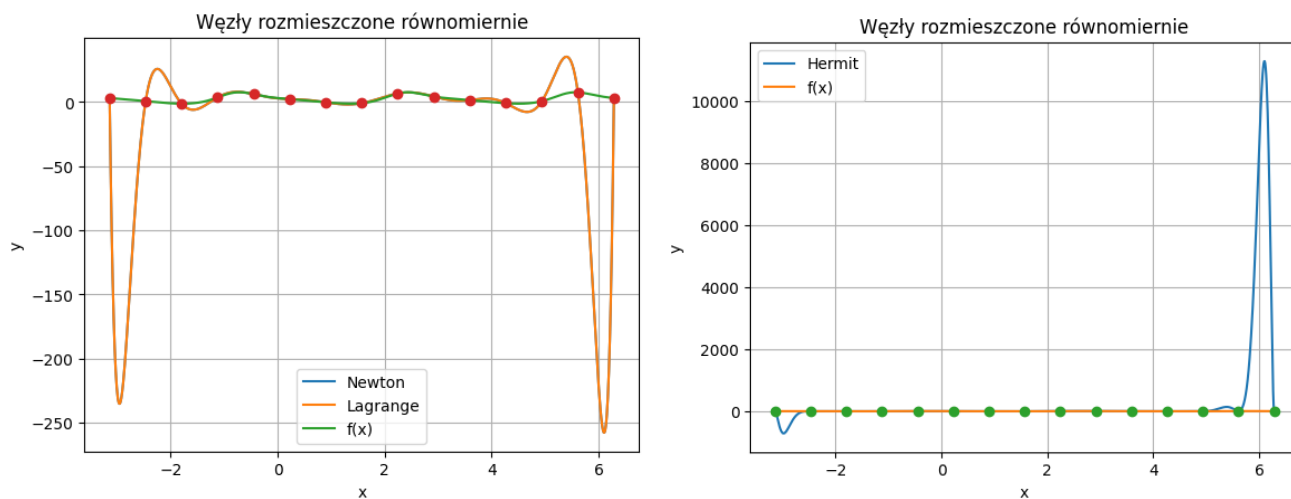
Rys. 3: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 10 węzłów

| | Maksymalna różnica | Średni błąd kwadratowy |
|-------------------|--------------------|------------------------|
| Metoda Newtona | 9.130733689673301 | 8.412687362178309 |
| Metoda Hermite'a | 522.4823629510852 | 16448.683903891968 |
| Metoda Lagrange'a | 9.130733689673296 | 8.412687362178366 |

Tabela 2: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Lagrange'a oraz Hermite'a przy 10 węzłach równomiernie rozmieszczonych

Dla 10 węzłów rozmieszczonych równomiernie możemy zobaczyć, że interpolacja zaczyna coraz dokładniej naśladować zadaną funkcję. Zarazem przy lewym boku widzimy powolny start występowania efektu Rungego. Dla interpolacji Hermite'a efekt ten już jest spory i kompletnie zniekształca wykres.

6.1.3 15 węzłów (wielomian 29. stopnia)



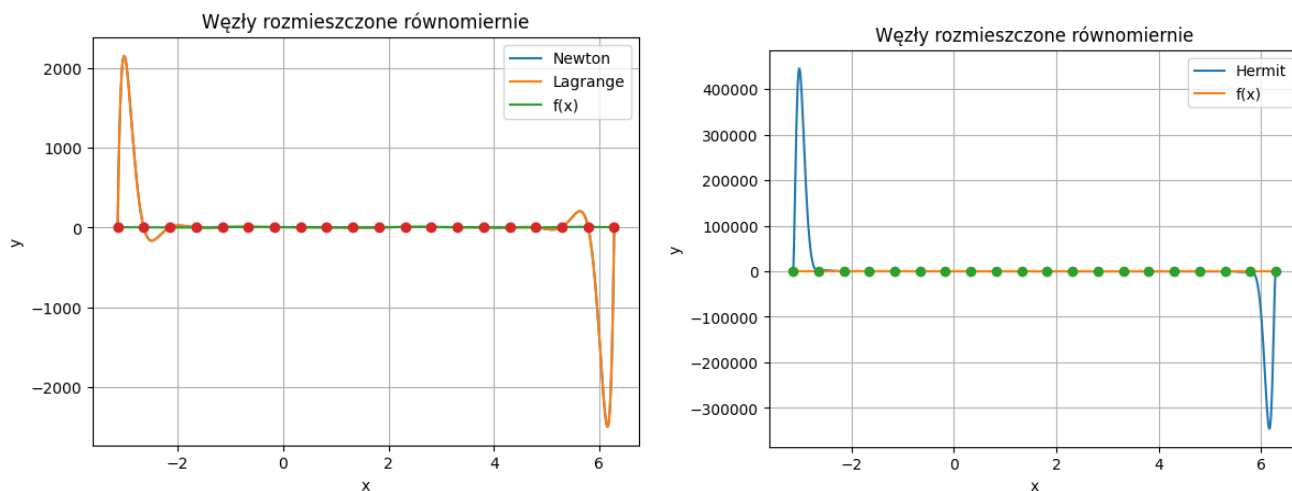
Rys. 4: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 15 węzłów

| | Maksymalna różnica | Średni błąd kwadratowy |
|-------------------|--------------------|------------------------|
| Metoda Newtona | 261.55550944432304 | 3779.7380999450115 |
| Metoda Hermite'a | 11272.167343384524 | 2770870.2272818037 |
| Metoda Lagrange'a | 261.55550944407656 | 3779.73809994504 |

Tabela 3: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Lagrange'a oraz Hermite'a przy 15 węzłach równomiernie rozmieszczonych

Przy 15 równoodległych węzłach efekt Rungego przy interpolacji Lagrange'a również zaczął psuć wykres wielomianu. Dla interpolacji Hermite'a błąd tylko się pogłębił w stosunku do poprzednich wykresów.

6.1.4 20 węzłów (wielomian 39. stopnia)



Rys. 5: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 20 węzłów

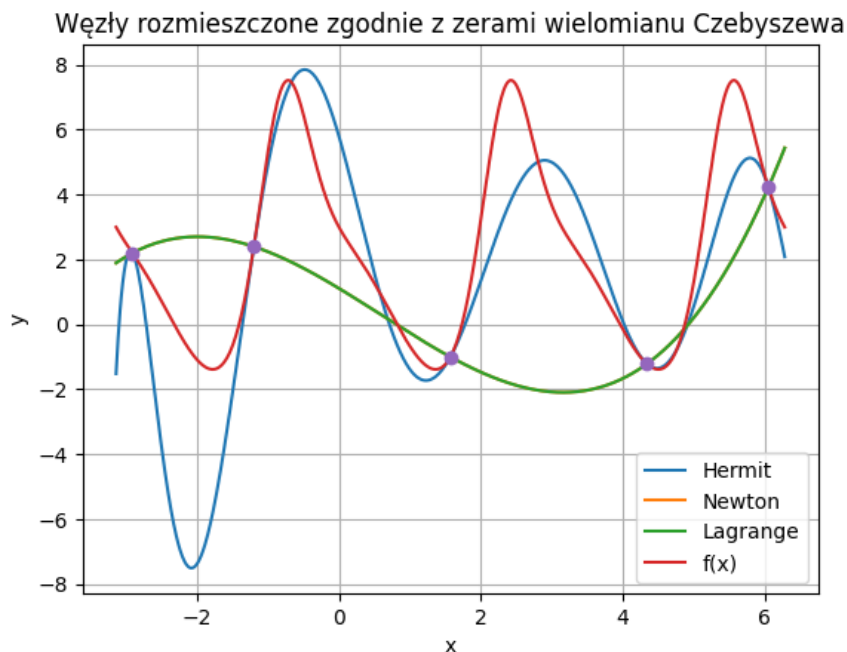
| | Maksymalna różnica | Średni błąd kwadratowy |
|-------------------|--------------------|------------------------|
| Metoda Newtona | 2500.8797943424574 | 230142.55471269364 |
| Metoda Hermite'a | 445435.6168432821 | 4781364106.34861 |
| Metoda Lagrange'a | 2500.879794356098 | 230142.5547129364 |

Tabela 4: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Lagrange'a oraz Hermite'a przy 20 węzłach równomiernie rozmieszczonych

Dla 20 węzłów rozmieszczonych równomiernie wyniki na brzegach zaczynają uciekać do coraz większych wartości dla obu sposobów interpolacji. Z przeprowadzonych kolejnych testów wynika, że błąd ten tylko się pogłębia, dlatego nie ma sensu pokazywania wykresów dla kolejnych n .

6.2 Węzły rozmieszczone wg zer wielomianu Czebyszewa

6.2.1 5 węzłów (wielomian 9. stopnia)



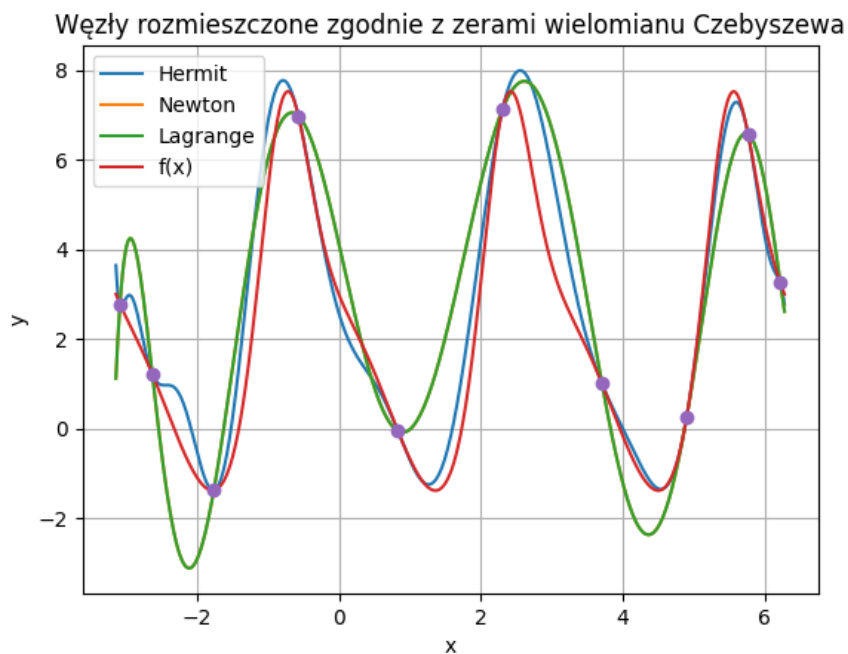
Rys. 6: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 5 węzłów

| | Maksymalna różnica | Średni błąd kwadratowy |
|-------------------|--------------------|------------------------|
| Metoda Newtona | 9.354852240912068 | 13.594786709150874 |
| Metoda Hermite'a | 6.758748184177296 | 5.436193875773504 |
| Metoda Lagrange'a | 9.354852240912068 | 13.594786709150872 |

Tabela 5: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Lagrange'a oraz Hermite'a przy 5 węzłach rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa

Tak jak w poprzednim przypadku obie metody interpolacji Lagrange'a dla 5 węzłów dają takie same rezultaty. Z rysunku 6. jednak możemy spostrzec, że mimo wszystko dla tak małej liczby węzłów interpolacja Hermite'a lepiej się dopasowuje.

6.2.2 10 węzłów (wielomian 19. stopnia)



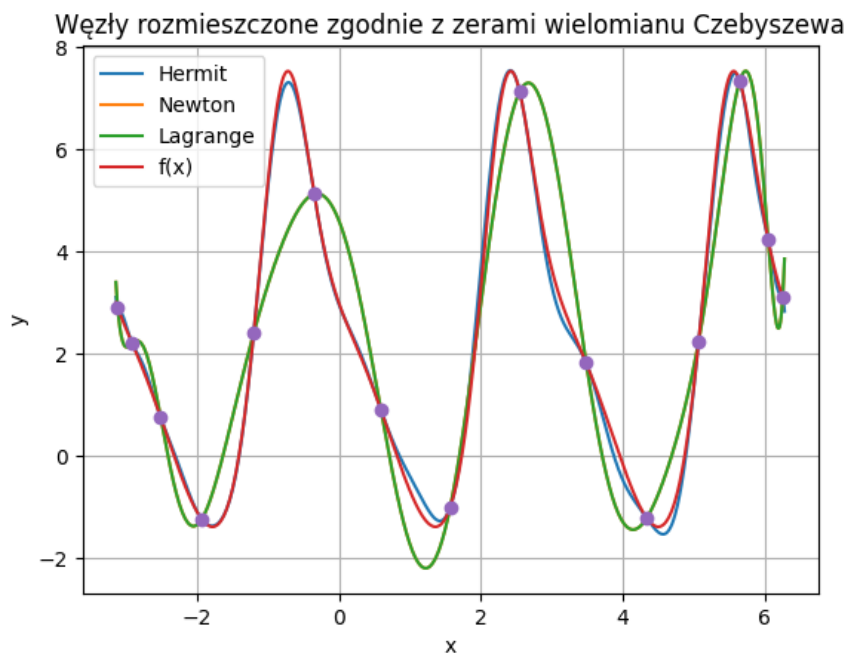
Rys. 7: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 10 węzłów

| | Maksymalna różnica | Średni błąd kwadratowy |
|-------------------|--------------------|------------------------|
| Metoda Newtona | 3.6462910765251433 | 2.399210328243664 |
| Metoda Hermite'a | 2.2837075983778226 | 0.5989220429477424 |
| Metoda Lagrange'a | 3.646291076525155 | 2.399210328243638 |

Tabela 6: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Lagrange'a oraz Hermite'a przy 10 węzłach rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa

Dla 10 węzłów rozmieszczonych wg zer Czebyszewa wykresy wielomianów zaczynają coraz lepiej przybliżać się do oryginalnej funkcji, na co wskazują też coraz mniejsze błędy. Jedynym wyjątkiem są lekkie odchylenia przy lewym brzegu funkcji.

6.2.3 15 węzłów (wielomian 29. stopnia)



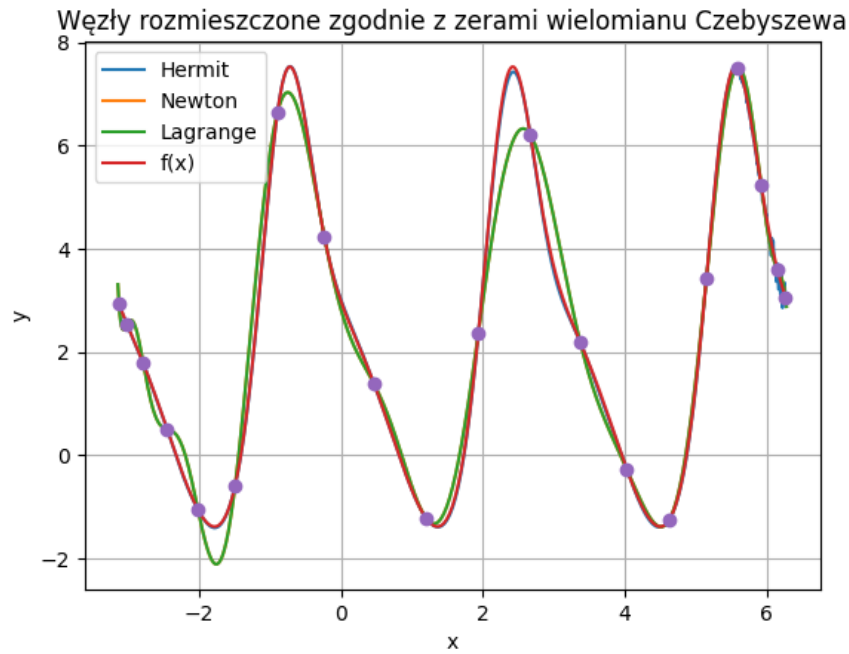
Rys. 8: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 15 węzłów

| | Maksymalna różnica | Średni błąd kwadratowy |
|-------------------|--------------------|------------------------|
| Metoda Newtona | 3.201287912138712 | 1.284756240731285 |
| Metoda Hermite'a | 0.404647378670973 | 0.02431854494377304 |
| Metoda Lagrange'a | 3.20128791213871 | 1.2847562407315347 |

Tabela 7: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Lagrange'a oraz Hermite'a przy 15 węzłach rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa

Przy 15 węzłach możemy zobaczyć, że wielomian wyznaczony za pomocą interpolacji Hermite'a niemalże idealnie zaczyna pokrywać się z zadaną funkcją. W przypadku obu metod interpolacji Lagrange'a widzimy jednak, że nie jest ona aż tak dokładna. Do tego pojawiły się pewne oscylacje na brzegach przedziału.

6.2.4 20 węzłów (wielomian 39. stopnia)



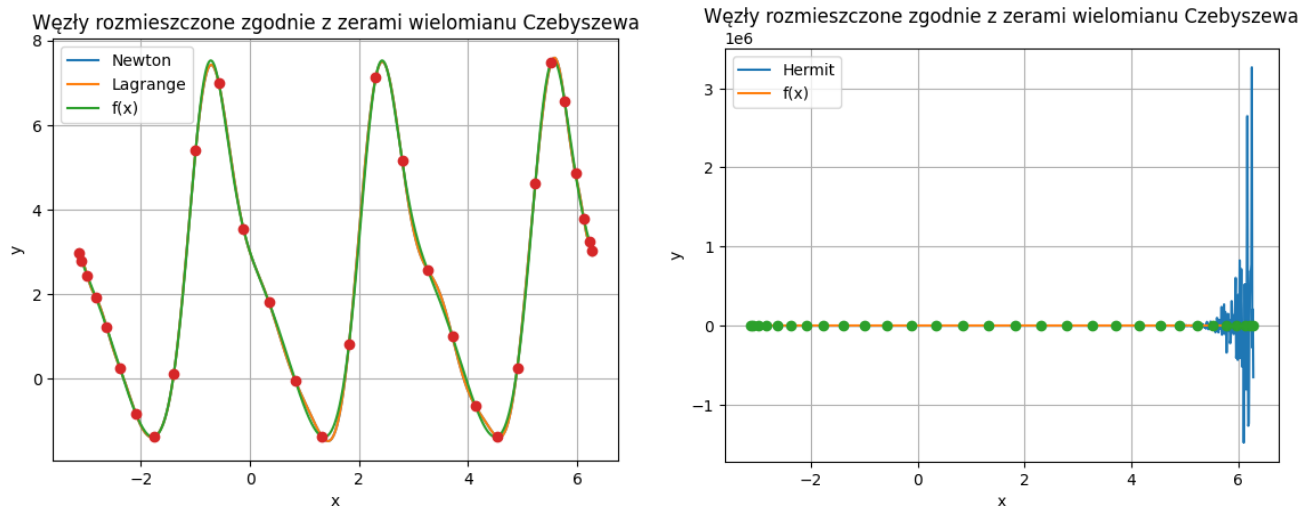
Rys. 9: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 20 węzłów

| | Maksymalna różnica | Średni błąd kwadratowy |
|-------------------|---------------------|------------------------|
| Metoda Newtona | 1.6107291032279436 | 0.20866032294099604 |
| Metoda Hermite'a | 0.38626778551509444 | 0.002085340951845285 |
| Metoda Lagrange'a | 1.610729103232626 | 0.20866032298472917 |

Tabela 8: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Lagrange'a oraz Hermite'a przy 20 węzłach rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa

Dla 20 węzłów rozmieszczonych wg zer wielomianu Czebyszewa możemy zauważyć, że obie interpolacje radzą sobie bardzo dobrze ze swoim zadaniem. Lepszy jednak okazuje się tutaj Hermit, ale nie jest to znaczna przewaga. Dla Lagrange'a widzimy w pewnych miejscach niepoprawne oscylacje.

6.2.5 30 węzłów (wielomian 59. stopnia)



Rys. 10: Wykresy funkcji $f(x)$ oraz wielomianów interpolacyjnych dla 30 węzłów

| | Maksymalna różnica | Średni błąd kwadratowy |
|-------------------|---------------------|------------------------|
| Metoda Newtona | 0.22718120700894873 | 0.007787043467799464 |
| Metoda Hermite'a | 3264127.1527725034 | 30051906096.055134 |
| Metoda Lagrange'a | 0.22718120692845334 | 0.007787000685605445 |

Tabela 9: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Lagrange'a oraz Hermite'a przy 30 węzłach rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa

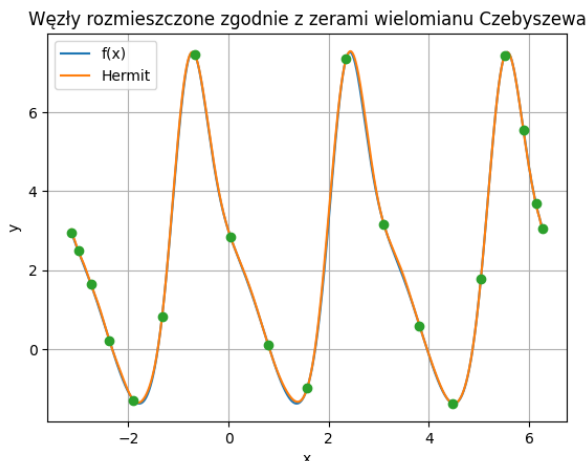
Dla 30 węzłów widzimy, że interpolacja Hermite'a zaczyna już kompletnie tracić dokładność, gdzie interpolacja Lagrange'a coraz bardziej zmniejsza błędy.

7 Wielomian najlepiej przybliżający zadaną funkcję

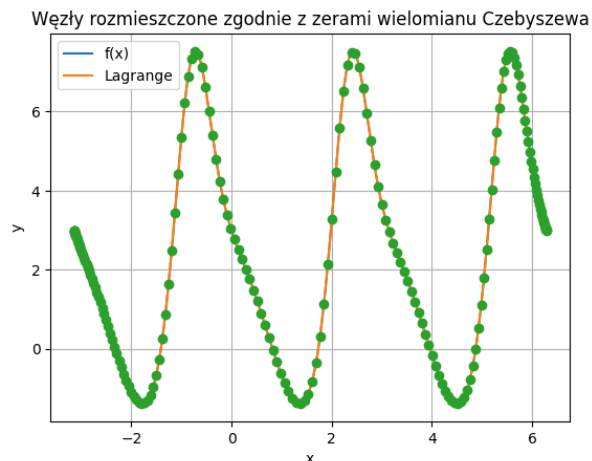
7.1 Wyjaśnienie

Aby znaleźć wielomian, który najlepiej przybliży funkcję $f(x)$ porównałem ze sobą wyniki maksymalnej różnicy dla liczby węzłów od 3 do 100 dla interpolacji Hermite'a i od 3 do 200 dla interpolacji Lagrange'a. Różnica spowodowana jest faktem, że w poprzednich testach interpolacja Hermite'a szybko zaczynała tracić dokładność w stosunku do pozostałych metod. Użyłem również tylko rozmieszczenia węzłów wg zer wielomianu Czebyszewa, bo operacje na nich dawały lepsze rezultaty.

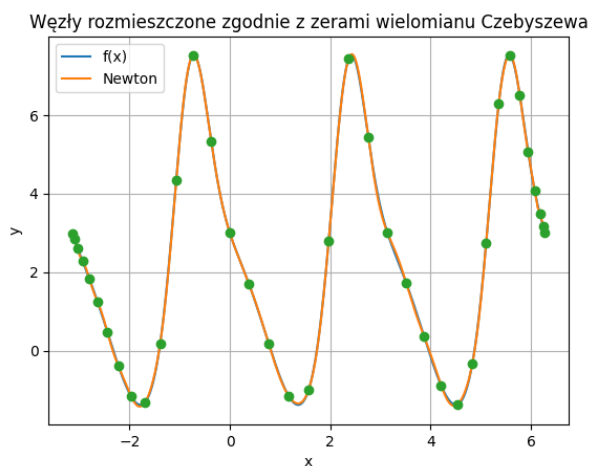
7.2 Wykresy



Rys. 11: Wykres funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolującego metodą Hermite'a



Rys. 12: Wykres funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolującego metodą Lagrange'a



Rys. 13: Wykres funkcji $f(x)$ oraz wielomianu interpolującego metodą Newtona

7.3 Komentarz

Okazało się, że najlepsze przybliżenie wyszło w przypadku węzłów rozmieszczonych wg zer Czebyszewa dla $n=19$ w przypadku interpolacji Hermite'a, $n=188$ dla metody Lagrange'a i $n=37$ dla metody Newtona.

8 Porównanie metod

8.1 Równomierny rozkład węzłów

| Liczba węzłów n | Interpolacja Lagrange'a | | Interpolacja Hermite'a |
|-------------------|-------------------------|----------------|------------------------|
| | Metoda Lagrange'a | Metoda Newtona | |
| 3 | 8.394013927 | 8.394013927 | 13.03922181 |
| 4 | 4.525020344 | 4.525020344 | 11.16287358 |
| 5 | 10.82196772 | 10.82196772 | 8.601023313 |
| 7 | 14.30140558 | 14.30140558 | 4.504521921 |
| 10 | 9.13073369 | 9.13073369 | 522.482363 |
| 15 | 261.5555094 | 261.5555094 | 11272.16734 |
| 20 | 2500.879794 | 2500.879794 | 445435.6168 |
| 30 | 94527.81114 | 94527.81109 | 495105853.4 |
| 50 | 245756535.4 | 245757949.4 | 6.39E+19 |
| 100 | 6.41694E+14 | 1.53E+20 | 5.03E+61 |

Tabela 10: Porównanie maksymalnej różnicy dla wszystkich metod przy równomiernym rozmieszczeniu n węzłów

8.2 Rozkład węzłów wg zer wielomianu Czebyszewa

| Liczba węzłów n | Interpolacja Lagrange'a | | Interpolacja Hermite'a |
|-------------------|-------------------------|----------------|------------------------|
| | Metoda Lagrange'a | Metoda Newtona | |
| 3 | 8.786379604 | 8.786379604 | 12.29508729 |
| 4 | 5.047321407 | 5.047321407 | 10.58284748 |
| 5 | 9.354852241 | 9.354852241 | 6.758748184 |
| 7 | 9.567346046 | 9.567346046 | 6.027442504 |
| 10 | 3.646291077 | 3.646291077 | 2.283707598 |
| 15 | 3.201287912 | 3.201287912 | 0.404647379 |
| 20 | 1.610729103 | 1.610729103 | 0.386267786 |
| 30 | 0.227181207 | 0.227181207 | 3264127.153 |
| 50 | 0.007789427 | 2169.319028 | 4.95E+19 |
| 100 | 1.00E-07 | 5.90E+19 | 1.86E+66 |

Tabela 11: Porównanie maksymalnej różnicy dla wszystkich metod przy rozmieszczeniu n węzłów wg zer wielomianu Czebyszewa

9 Wnioski

Porównując otrzymane wyniki z przeprowadzonych testów możemy wyciągnąć kilka wniosków.

Po pierwsze, dla około pierwszych pięćdziesięciu liczb węzłów widzimy, że obie metody dla interpolacji Lagrange'a dają takie same rezultaty.

Po drugie, rozmieszczenie równomierne węzłów daje nam bardzo niesatysfakcjonujące wyniki, jeżeli porównamy je z zerami wielomianu Czebyszewa.

Patrząc na wykresy dla kolejnych wartości n , możemy zauważyć, że interpolacja Hermite'a o wiele szybciej traci dokładność. Wpływ na to może mieć fakt, że dla chociażby 15 węzłów otrzymujemy wielomian o dwukrotnie większym stopniu niż z interpolacji Lagrange'a. Dlatego też efekt Rungego zaczyna występować o wiele szybciej i błędy są o wiele większe.

Podsumowując, jeżeli chcemy uzyskać jak najdokładniejsze przybliżenie interesującej nas funkcji, z przeprowadzonych testów wynika, że powinniśmy skorzystać z połączenia metody Lagrange'a wraz z węzłami położonymi zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa. Trzeba jednak zwrócić uwagę na to, że utrzymujemy wtedy wielomian bardzo wysokiego stopnia. Jeżeli zaś interesuje nas znalezienie w miarę optymalnego rozwiązania, powinniśmy pomyśleć nad skorzystaniem z interpolacji Hermite'a. Wszystko jednak zależy od kształtu funkcji i dla innych wyniki takich testów mogą się różnić.