

# MOwNiT - podsumowanie interpolacji i aproksymacji

Paweł Podedworny

08.05.2024

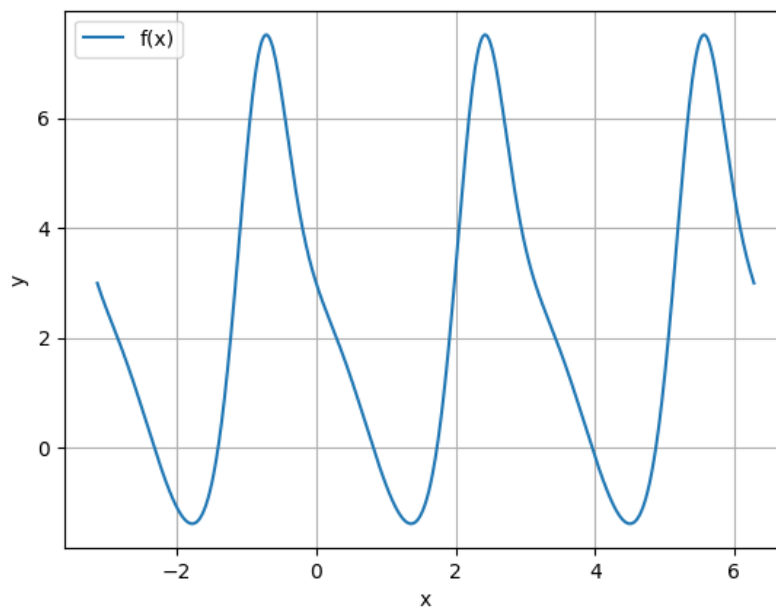
## 1 Przydzielona funkcja

$$f(x) = e^{-k \cdot \sin(mx)} + k \cdot \cos(mx)$$

$$k = 2, m = 2$$

$$x \in [-\pi, 2\pi]$$

## 2 Wykres funkcji



Rys. 1: Wykres funkcji  $f(x)$  dla  $x \in [-\pi, 2\pi]$ ,  $k = 2, m = 2$

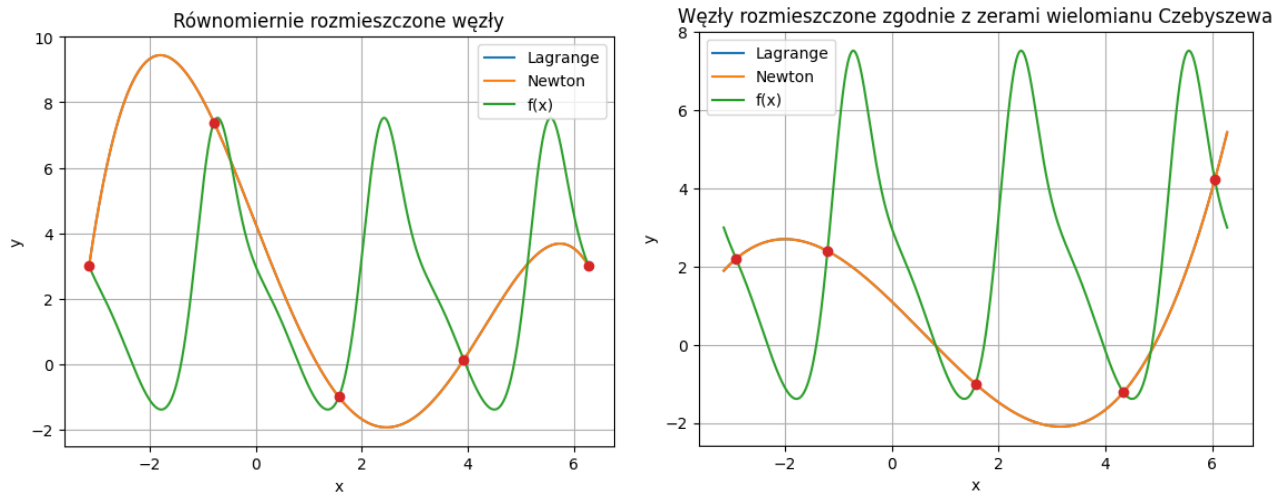
## 3 Dane techniczne

Komputer z systemem Windows 10 x64  
Procesor: AMD Ryzen 5 3600 3.60GHz  
Pamięć RAM: 16GB 3200MHz  
Środowisko: DataSpell 2023.3.4  
Język: Python 3.11

## 4 Interpolacja

### 4.1 Zagadnienie Lagrange'a

#### 4.1.1 5 węzłów

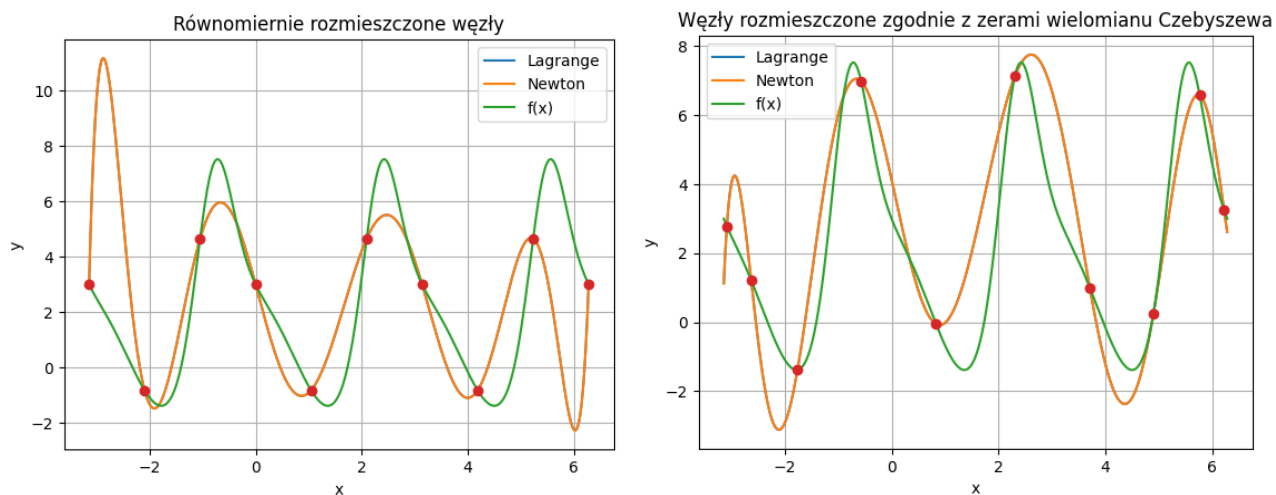


Rys. 2: Wykresy funkcji  $f(x)$  oraz wielomianów interpolacyjnych dla 5 węzłów

	Metoda	Lagrange'a	Newtona
Węzły równoodległe	Maksymalna różnica	10.82196771586059	10.821967715860593
	Średni błąd kwadratowy	23.675605514145005	23.675605514145005
Węzły wg zer wielomianu Czebyszewa	Maksymalna różnica	9.354852240912068	9.354852240912068
	Średni błąd kwadratowy	13.594786709150872	13.594786709150874

Tabela 1: Porównanie błędów i maksymalnych różnic przy użyciu obu metod i rozkładów węzłów dla  $n=5$

#### 4.1.2 10 węzłów

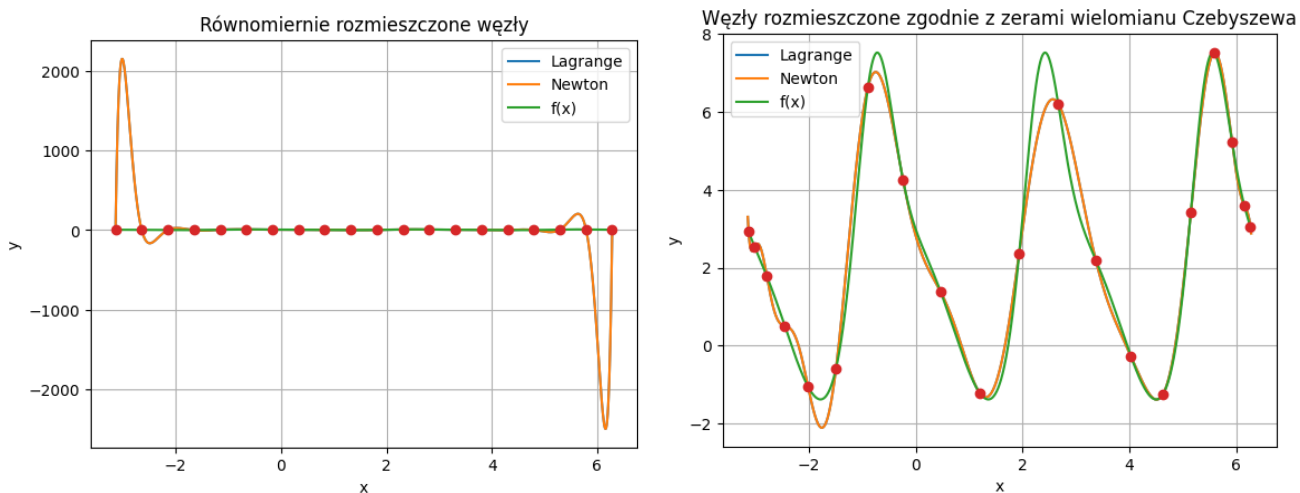


Rys. 3: Wykresy funkcji  $f(x)$  oraz wielomianów interpolacyjnych dla 10 węzłów

	Metoda	Lagrange'a	Newtona
Węzły równoodległe	Maksymalna różnica	9.130733689673296	9.130733689673301
	Średni błąd kwadratowy	8.412687362178366	8.412687362178309
Węzły wg zer wielomianu Czebyszewa	Maksymalna różnica	3.646291076525155	3.6462910765251433
	Średni błąd kwadratowy	2.399210328243638	2.399210328243664

Tabela 2: Porównanie błędów i maksymalnych różnic przy użyciu obu metod i rozkładów węzłów dla  $n=10$

#### 4.1.3 20 węzłów

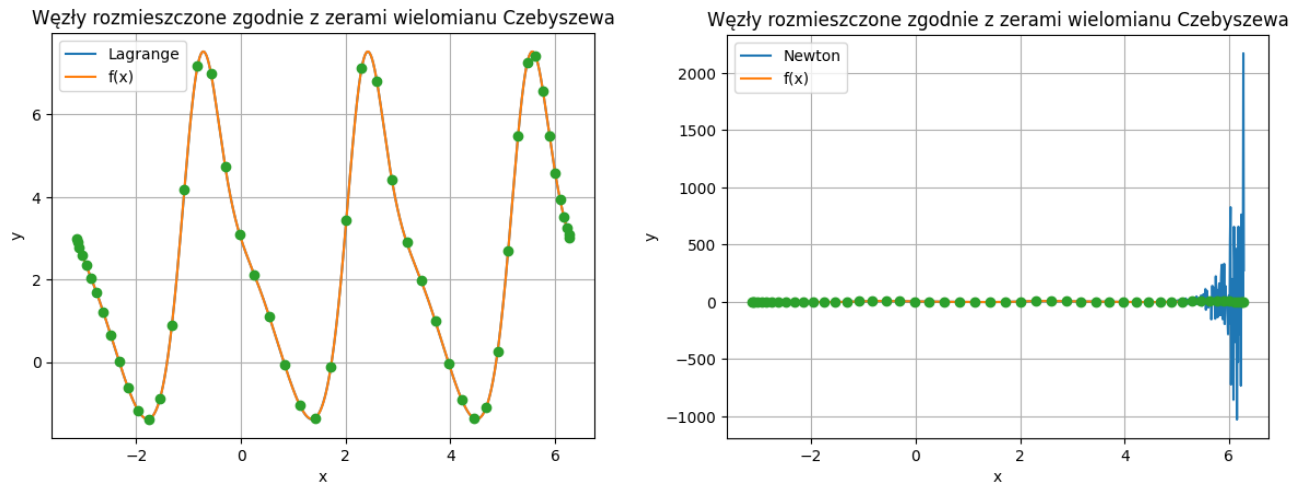


Rys. 4: Wykresy funkcji  $f(x)$  oraz wielomianów interpolacyjnych dla 20 węzłów

	Metoda	Lagrange'a	Newtona
Węzły równoodległe	Maksymalna różnica	2500.879794356098	2500.8797943424574
	Średni błąd kwadratowy	230142.5547129364	230142.55471269364
Węzły wg zer wielomianu Czebyszewa	Maksymalna różnica	1.610729103232626	1.6107291032279436
	Średni błąd kwadratowy	0.20866032298472917	0.20866032294099604

Tabela 3: Porównanie błędów i maksymalnych różnic przy użyciu obu metod i rozkładów węzłów dla  $n=20$

#### 4.1.4 50 węzłów



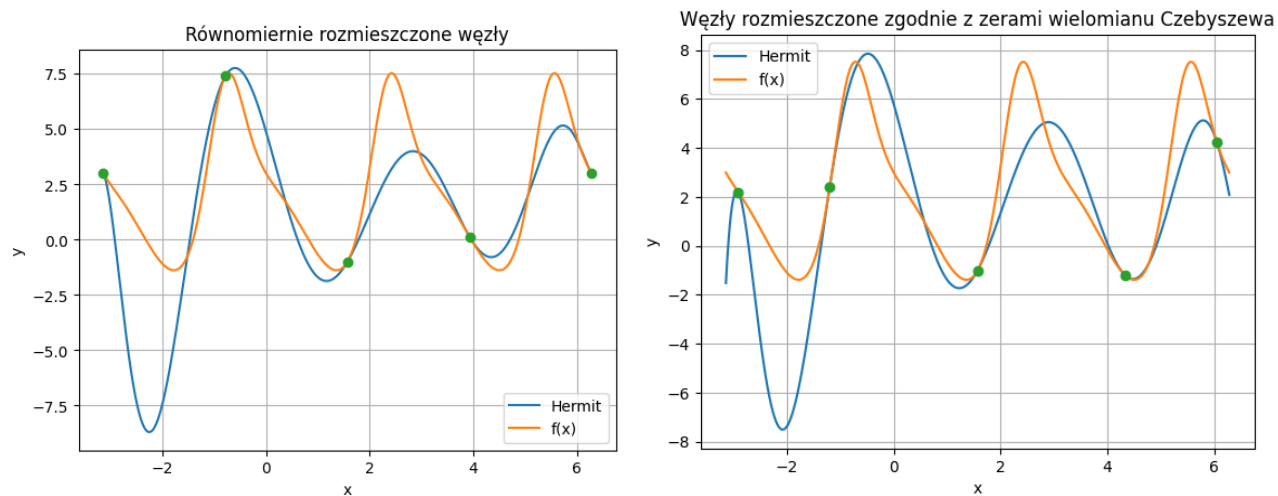
Rys. 5: Wykresy funkcji  $f(x)$  oraz wielomianów interpolacyjnych dla 50 węzłów

Metoda	Lagrange'a	Newtona
Maksymalna różnica	0.007789427147282035	2169.3190277280746
Średni błąd kwadratowy	6.5239303658950075e-06	13137.33132360544

Tabela 4: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla obu metod i rozmieszczeniem węzłów zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa dla  $n=50$

## 4.2 Zagadnienie Hermite'a

### 4.2.1 5 węzłów (wielomian 9. stopnia)

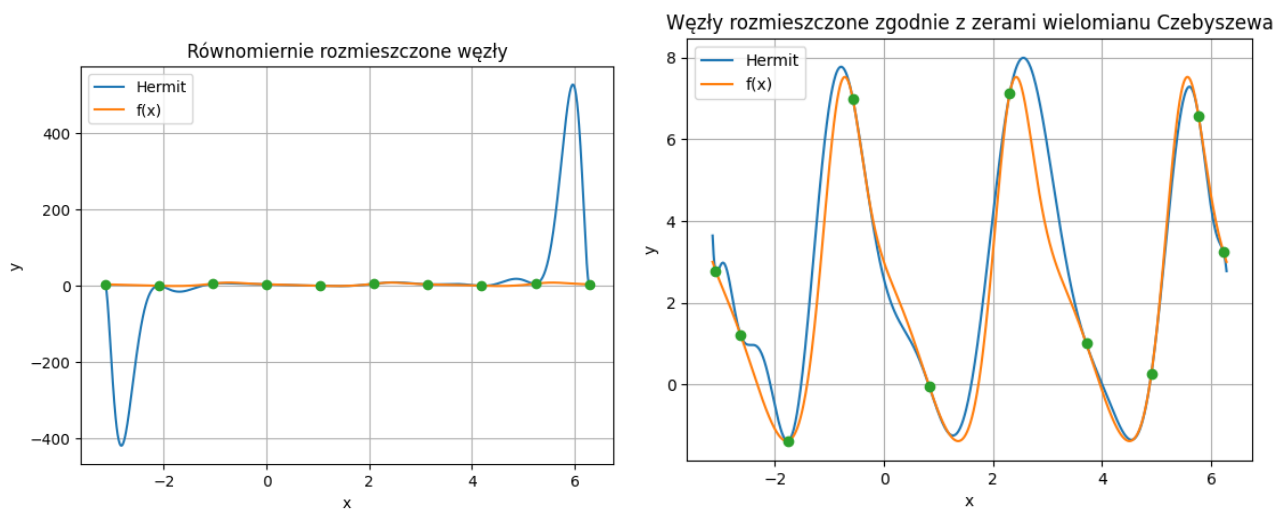


Rys. 6: Wykresy funkcji  $f(x)$  oraz wielomianu interpolacyjnego dla 5 węzłów

Sposób rozmieszczenia węzłów	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
Równoodległe	8.601023312831462	7.464246116213026
Wg zer wielomianu Czebyszewa	6.758748184177296	5.436193875773504

Tabela 5: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Hermite'a przy obu sposobach rozmieszczenia 5 węzłów

#### 4.2.2 10 węzłów (wielomian 19. stopnia)

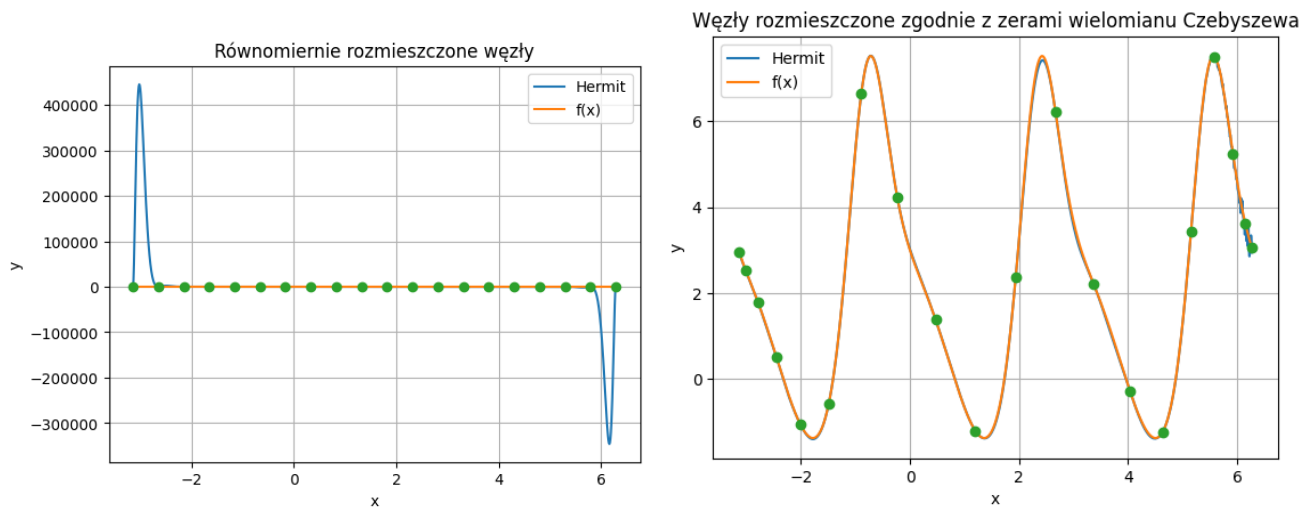


Rys. 7: Wykresy funkcji  $f(x)$  oraz wielomianu interpolacyjnego dla 10 węzłów

Sposób rozmieszczenia węzłów	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
Równoodległe	522.4823629510852	16448.683903891968
Wg zer wielomianu Czebyszewa	2.2837075983778226	0.5989220429477424

Tabela 6: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Hermite'a przy obu sposobach rozmieszczenia 10 węzłów

#### 4.2.3 20 węzłów (wielomian 39. stopnia)



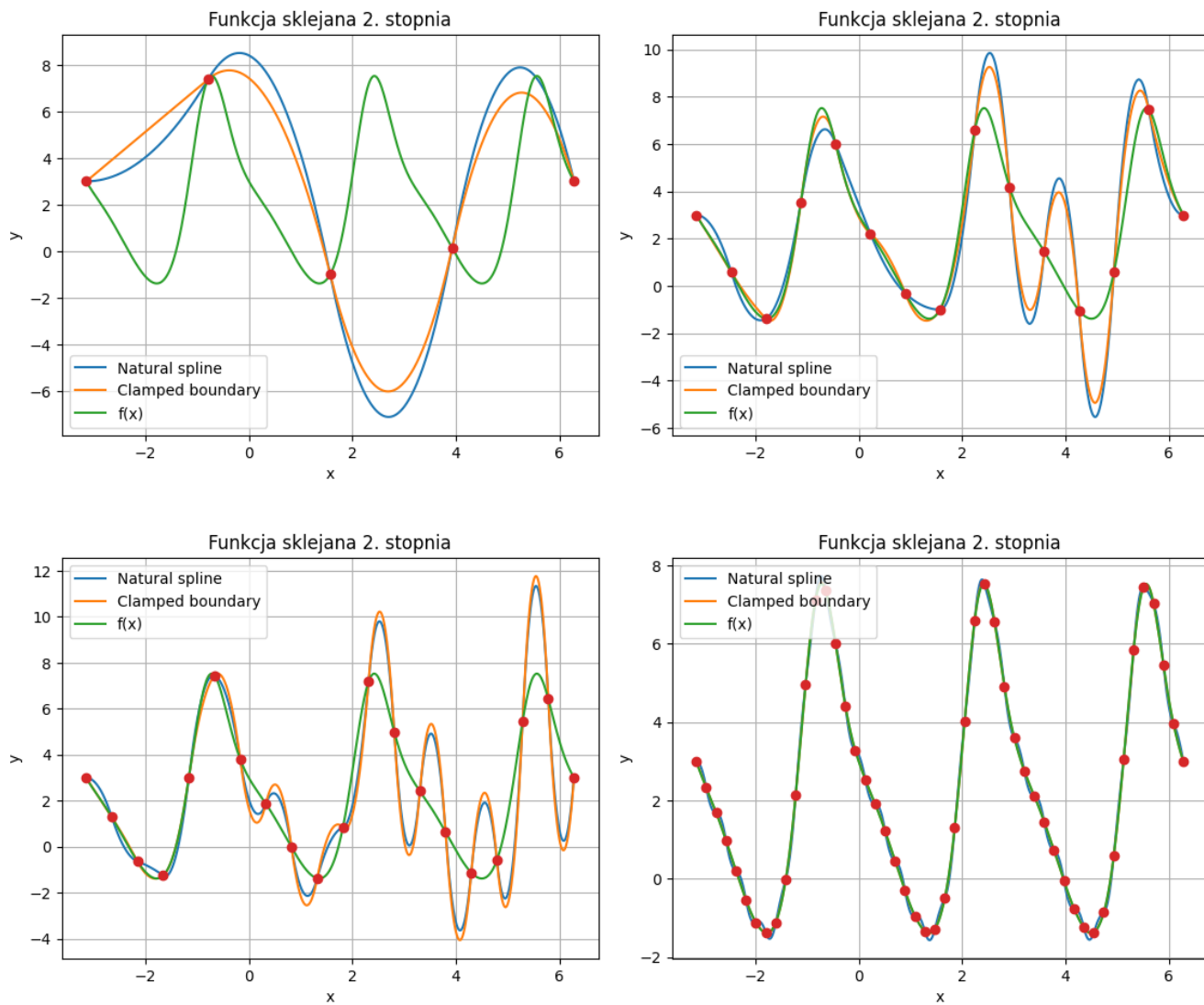
Rys. 8: Wykresy funkcji  $f(x)$  oraz wielomianu interpolacyjnego dla 20 węzłów

Sposób rozmieszczenia węzłów	Maksymalna różnica	Średni błąd kwadratowy
Równoodległe	445435.6168432821	4781364106.34861
Wg zer wielomianu Czebyszewa	0.38626778551509444	0.002085340951845285

Tabela 7: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji Hermite'a przy obu sposobach rozmieszczenia 20 węzłów

## 4.3 Funkcje sklejane

### 4.3.1 2. stopnia, $n = 5, 15, 20, 50$



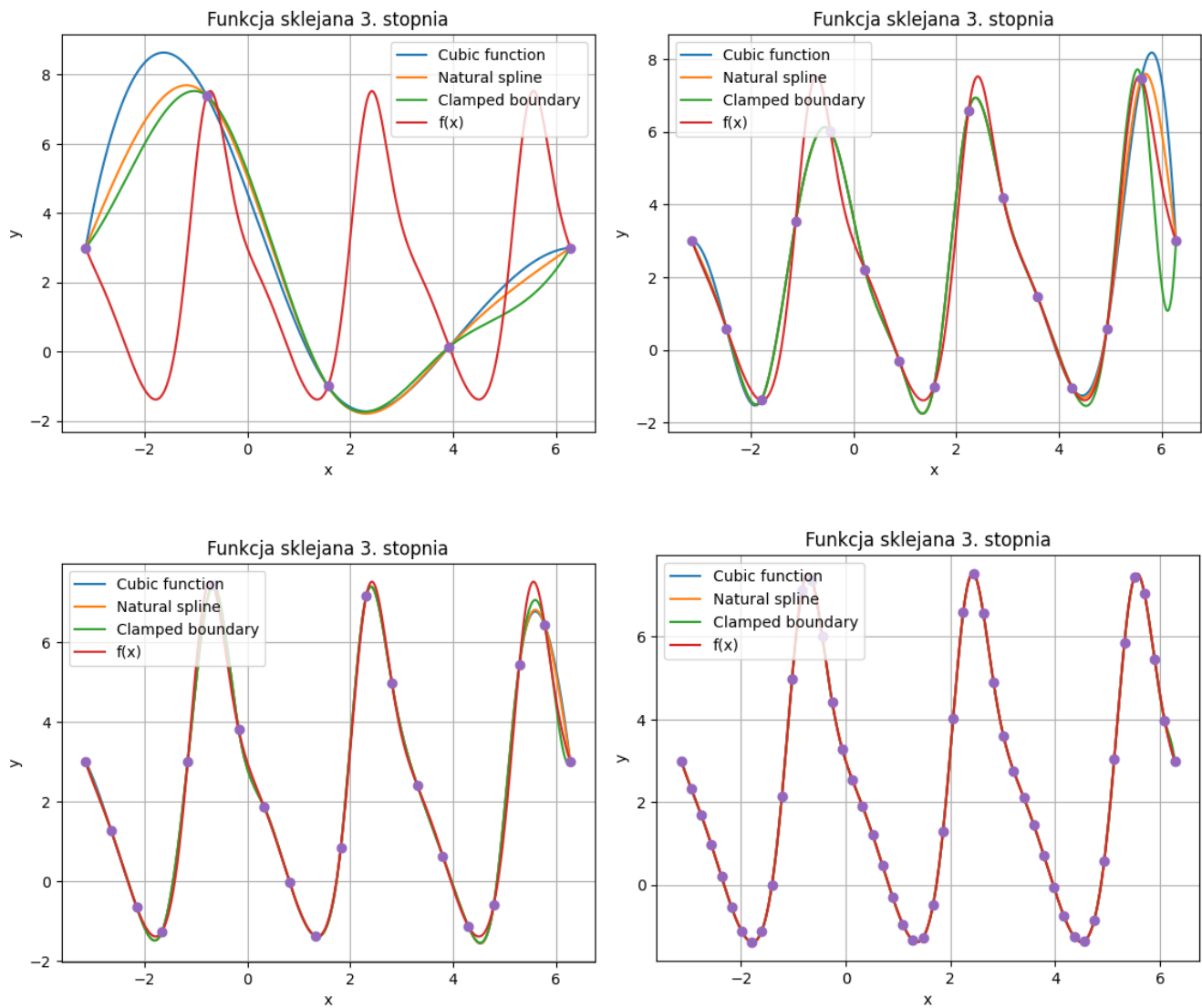
Rys. 9: Wykresy interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla dwóch warunków brzegowych dla kolejno 5, 15, 20 i 50 węzłów

Liczba węzłów	Metoda	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
5	Natural spline	14.334544894577931	34.81563214783479
	Clamped boundary	13.302202992565025	30.107091518445483
15	Natural spline	4.324986133559379	2.805985296340989
	Clamped boundary	3.7220867758649323	1.8991573290559358
20	Natural spline	3.9200613287116353	2.858034661628057
	Clamped boundary	4.349415103586513	3.7382618618598453
50	Natural spline	0.20691882387666283	0.01826294860106171
	Clamped boundary	0.03866456038935251	0.0001894900847401843

Tabela 8: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 2. stopnia dla różnych warunków brzegowych i liczby węzłów



#### 4.3.2 3. stopnia, $n = 5, 15, 20, 50$



Rys. 10: Wykresy interpolacji funkcją sklejaną 3. stopnia dla dwóch warunków brzegowych dla kolejno 5, 15, 20 i 50 węzłów

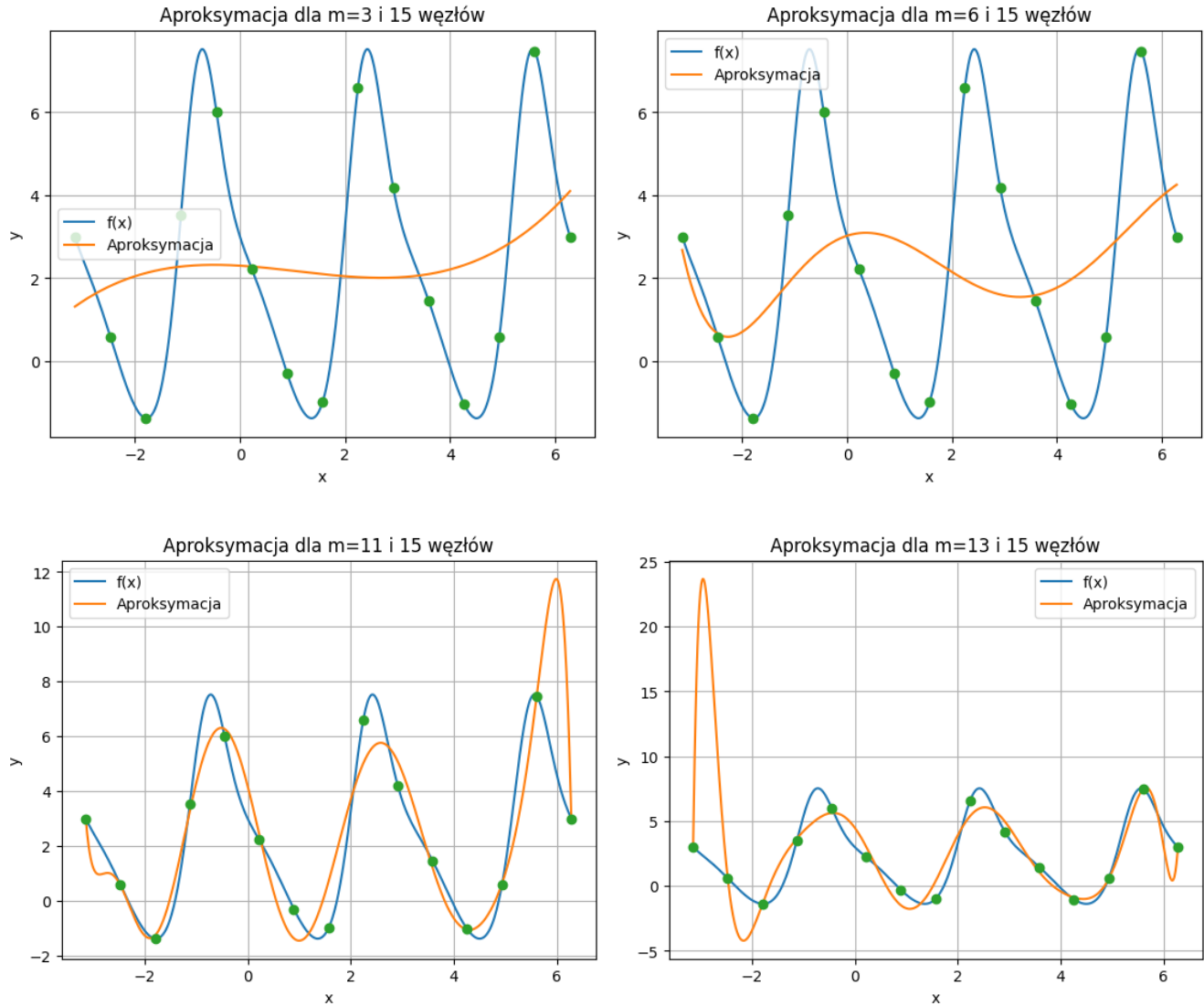
Liczba węzłów	Metoda	Maksymalna różnica	Błąd średni kwadratowy
5	Cubic function	9.983076043313151	21.10236363125399
	Natural Spline	9.30175695687594	17.858709984188437
	Clamped boundary	9.233241712952461	16.909041303062544
15	Cubic function	2.8364406139068983	0.5689442879126848
	Natural Spline	1.7457015976091288	0.321074952635678
	Clamped boundary	2.8936202976111325	0.5087973349188912
20	Cubic function	0.77479158964079	0.05554694188249451
	Natural Spline	0.7325055874803548	0.048304261457774576
	Clamped boundary	0.5082219221074427	0.03065166596511985
50	Cubic function	0.028910290014262152	1.4072356038706349e-05
	Natural Spline	0.01444570706316739	8.330569817766636e-06
	Clamped boundary	0.16275509849790915	0.0002875036663231031

Tabela 9: Porównanie błędów i maksymalnych różnic dla interpolacji funkcją sklejaną 3. stopnia dla różnych warunków brzegowych i liczby węzłów

## 5 Aproksymacja

### 5.1 Średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

#### 5.1.1 15 węzłów przy $m = 3, 6, 11, 13$



Rys. 11: Wykresy aproksymacji dla 15 węzłów i różnych stopni wielomianów

### 5.1.2 Porównanie błędów

m\ n	5	10	15	20	30	50	100
2	6.1473	5.4795	5.6498	5.6652	5.6992	5.7238	5.7409
3	7.6054	5.3914	5.5129	5.5422	5.5833	5.6180	5.6458
4	10.8220	5.4512	5.5164	5.4447	5.4055	5.3731	5.3485
5	X	5.7269	5.6414	5.6044	5.5606	5.5117	5.4670
6	X	5.8497	5.6880	5.7025	5.6760	5.6465	5.6197
7	X	7.1219	4.2514	4.1125	4.0431	4.0113	4.6953
8	X	6.6174	6.1450	4.4480	4.0522	4.0035	4.4903
9	X	9.1307	3.8236	2.8533	2.5709	2.5746	2.5610
10	X	X	3.7846	2.4431	2.4684	2.4749	2.4658
11	X	X	7.2633	2.0552	2.1092	2.1134	2.1133
15	X	X	X	18.5805	3.1992	1.9952	2.0018
24	X	X	X	X	40.9339	11.5081	1.0880
30	X	X	X	X	X	2.2377	3.8813

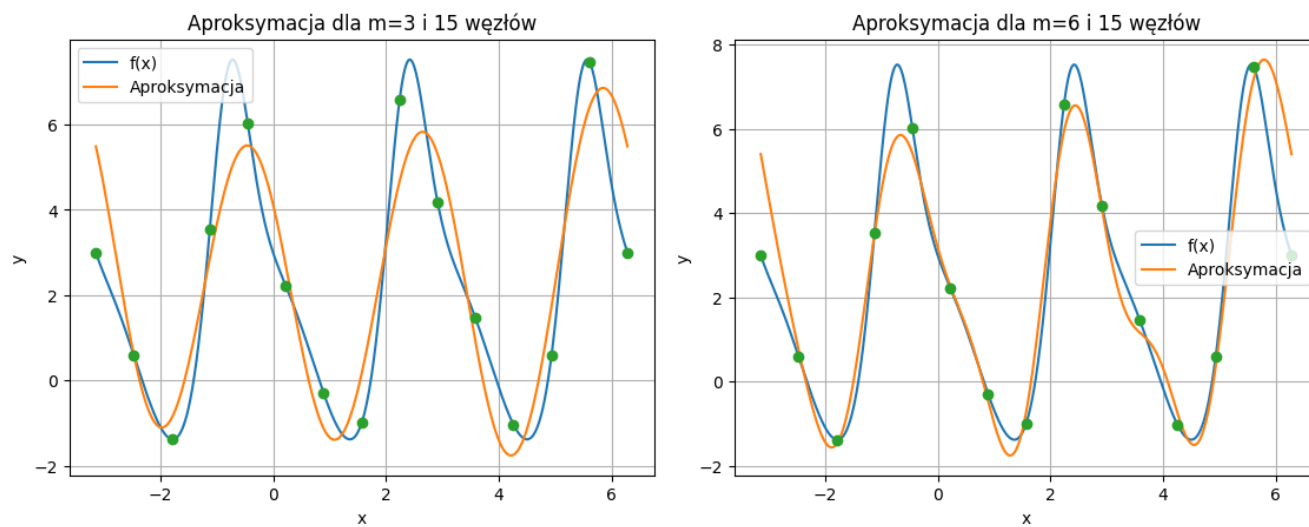
Tabela 10: Porównanie maksymalnej różnicy dla różnych kombinacji liczby węzłów ( $n$ ) i stopni wielomianu ( $m$ )

m\ n	5	10	15	20	30	50	100
2	9.9090	7.8613	7.7894	7.7822	7.7751	7.7718	7.7706
3	15.8282	7.7346	7.4866	7.4153	7.3478	7.3070	7.2879
4	23.6756	7.5859	7.2748	7.1999	7.1236	7.0770	7.0549
5	X	7.3345	7.1898	7.1518	7.1038	7.0654	7.0423
6	X	7.3275	7.1496	7.0727	6.9942	6.9253	6.8807
7	X	6.7681	4.7508	4.5362	4.3848	4.2386	4.1359
8	X	5.4909	3.4145	2.9572	2.7897	2.6322	2.5151
9	X	8.4127	1.5792	1.2924	1.2225	1.1682	1.1231
10	X	X	1.5605	0.9818	0.9573	0.9479	0.9388
11	X	X	2.6888	0.8720	0.8437	0.8400	0.8361
15	X	X	X	11.0334	0.8379	0.7027	0.6929
24	X	X	X	X	25.2773	2.2773	0.1780
30	X	X	X	X	X	0.2496	1.1994

Tabela 11: Porównanie średniego błędu kwadratowego dla różnych kombinacji liczby węzłów ( $n$ ) i stopni wielomianu ( $m$ )

## 5.2 Średniokwadratowa trygonometryczna

### 5.2.1 15 węzłów przy $m = 3, 6$



Rys. 12: Wykresy aproksymacji dla 15 węzłów i różnych stopni wielomianów

### 5.2.2 Porównanie błędów

m\ n	5	10	15	20	30	50	100
2	9.3685	5.8017	5.7266	5.5217	5.4297	5.3560	5.3007
3	X	2.8322	2.6060	2.3515	2.2100	2.0971	2.0126
4	X	2.8304	2.9689	2.5040	2.1844	2.0817	2.0049
5	X	3.0532	3.4739	2.7928	2.3382	1.9843	1.9545
6	X	X	2.7211	1.8830	1.3769	0.9928	0.7272
7	X	X	3.0266	2.2106	1.5091	1.0514	0.7462
8	X	X	X	2.4775	1.6527	1.1094	0.7600
9	X	X	X	2.7025	1.7074	0.9874	0.4539
10	X	X	X	3.0517	1.9067	1.1060	0.5083
11	X	X	X	X	2.1031	1.2252	0.5660
15	X	X	X	X	3.0000	1.8031	0.9031
24	X	X	X	X	X	2.8800	1.4400
30	X	X	X	X	X	X	1.8000

Tabela 12: Porównanie maksymalnej różnicy dla różnych kombinacji liczby węzłów ( $n$ ) i stopni wielomianu ( $m$ )

m\ n	5	10	15	20	30	50	100
2	16.7802	8.4620	8.3020	8.1876	8.1379	8.1121	8.1013
3	X	1.7483	1.3129	1.1715	1.1025	1.0665	1.0512
4	X	1.9306	1.3938	1.2180	1.1233	1.0741	1.0531
5	X	2.1137	1.5550	1.2645	1.1441	1.0818	1.0551
6	X	X	0.7224	0.3797	0.2222	0.1412	0.1071
7	X	X	0.8044	0.4596	0.2427	0.1486	0.1089
8	X	X	X	0.5060	0.2632	0.1560	0.1108
9	X	X	X	0.4622	0.1935	0.0730	0.0222
10	X	X	X	0.5905	0.2142	0.0804	0.0241
11	X	X	X	X	0.2344	0.0879	0.0259
15	X	X	X	X	0.3130	0.1129	0.0282
24	X	X	X	X	X	0.1826	0.0457
30	X	X	X	X	X	X	0.0576

Tabela 13: Porównanie średniego błędu kwadratowego dla różnych kombinacji liczby węzłów ( $n$ ) i stopni wielomianu ( $m$ )