

## Jagiellonian U Contest

### A. The Catcher in the Rye

题意：有一个高度为  $h$  的大矩形，矩形由三个小矩形拼接成，三个小矩形的高度都为  $h$ ，宽度分别为  $a, b, c$ 。在每个矩形中的移动速度不一样，分别为  $v_a, v_b, v_c$ 。你要从左下角走到右上角，问最少需要多少时间。

题解：这个可能是个物理题。考虑有一束光从左下角射入，然后从右上角射出，这个肯定只有一条光路。可以证明，这条光路就是我们要求的路径。

因为光路是唯一的，于是就可以通过二分入射角来计算出这条路径。根据这个光的折射定律，我们可以知道

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}.$$

于是就可以很方便地求出最后光从那个位置出来了。

### B. Dissertation

题意：给出长度为  $10^6$  和  $10^3$  的两个串，求 LCS

题解： $dp(i, j)$  表示第二个串前  $i$  个字符与第一个串前  $dp(i, j)$  个字符的 LCS 至少为  $j$ ，且  $dp(i, j)$  为满足条件的最小值。假设已知  $dp(i, j)$ ，考虑转移到第二个串的第  $i + 1$  个位置，如果该位置不对 LCS 产生贡献，则直接转移到  $dp(i + 1, j)$ ；否则在第一个串的  $dp(i, j)$  位置后找到第一个匹配的字符位置转移到  $dp(i + 1, j + 1)$ 。

### C. Dominoes

题意：有  $\frac{n(n+1)}{2}$  个多米诺骨牌，骨牌上下分别写着  $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n), (2, 2), (2, 3), \dots, (n, n)$ 。现在要把这个写骨牌放到方格里面，要求相同数字的格子要连通。

题解：简单地在纸上画画可以发现，如果  $n \geq 5$ ，因为平面图不存在  $K_5$ ，无解。于是，其他情况就随便打个表好了。

### D. Endgame

题意：黑方剩一个国王，白方剩一个国王和一个车先手。保证至多 50 步白方可以将王，白方想最小化步数，黑方想最大化步数，求白方多少步能将军。

题解：2014 西安现场赛 H、2016 沈阳网络赛 1006 都是类似的题，这些题都可以用同一个做法。

考虑一个更一般的问题：一个有向图，初始时在某个点，玩家 A、B 轮流操作，每次操作沿一条有向边走一步。所有点分为 win 点、lose 点和未确定点，若玩家初始在 win 点且是先手，或者对手走到了某个 win 点，则该玩家获胜（对手输）；lose 点反之。玩家都会采取最优策略，若必胜则

会最小化步数，否则会最大化步数（可能不会结束）。在这些前提下，需要判断任意点先手是必胜、必败还是无法结束，对于必胜和必败的情况需要求出最优策略下的步数。

首先求出每个点的胜败态，win、lose 点的胜败态是显然的，未确定点的状态按下列方法推：

1. 如果一个未确定点有一个后继是必败的，那么它就是必胜的；
2. 如果一个未确定点后继全是必胜的，那么它就是必败的；
3. 无法继续更新时，剩下的未确定点就是最优策略下一定会走成环的平局状态。

接下来考虑步数，由于平局状态的步数都是正无穷所以可以把平局状态的点都去掉，然而剩下图还可能成环，第一想法可能会考虑设  $step_{win} = step_{lose} = 0$ ，用  $step = minstep + 1$  和  $step = maxstep + 1$  迭代。然而实际上观察 (1)(2) 和迭代式发现只要保证按照队列扩展在满足 (1)(2) 条件时直接确定步数入队即可保证点加边复杂度

## E. Evacuation

题意：有个人一开始在  $x$  轴的 0 位置，每单位时间他可以向左或向右走一步。有  $n$  道闪电  $(t, x, r)$ ： $t$  时刻的时候这个人不能够站在  $[x - r + 1, x + r - 1]$  这个区间内。有  $s$  个询问  $(t, x)$ ：在  $t$  时刻这个人能否走到位置  $x$ 。

题解：使用一个 set 来维护这个人能够到达的不相交区间。每次闪电发生时，把 set 里和闪电相交的部分暴力删除。由于这些区间每过一个单位时间长度会增长，为了维护区间的不相交性，可以在区间相交时加入需要合并指定段的事件点，那么用另一个 set 来维护闪电/询问/合并这些事件点即可。时间复杂度  $O(n \log n)$ 。

## F. Factory

题意：给出平面上  $n$  个坐标，找一个点使得这个点到所有点的欧几里得距离和最小。

题解：三分套三分即可，时间复杂度  $O(n \log A^2)$ 。

好像随便模拟退火或者爬山也可以过掉啊?? 跑的非常快啊??

## G. Grasshoppers

题意：圆环上均匀分布有  $m$  个位置，有  $n$  只蚱蜢，一开始的时候第  $i$  只蚱蜢的位置是  $A_i$ ，蚱蜢们要跳  $t$  轮。对于每一轮，第  $i$  只蚱蜢会从它当前的位置跳到以圆环中心和第  $i + 1$  只蚱蜢的连线的对称位置上。蚱蜢们每一轮都同时跳，问  $t$  轮后每只蚱蜢的位置。

题解：循环卷积求出  $(2x - 1)^k$  即可。

## H. Education Nightmare

题意：你的学校有  $n$  间教室，以  $n - 1$  条边连接（是一棵树），你从  $s$  出发沿着边走，要去上课教室，但是你不知道这节课的教室在哪里。如果你进入了你的上课教室，那么你就马上知道这是你

要去的教室。在教室  $m$  有一张课程表，如果你到了教室  $m$ ，你马上就知道你的上课教室的位置。询问你在最好策略下到达上课教室最坏要多久。

题解：考虑最坏情况下会发生的事情：1. 在你到达  $m$  前，上课教室总是没到过的节点。2. 你到达  $m$  时，得到的上课教室信息总是你没经过的节点里最远的那个。

那么把节点按照到  $m$  的距离从大到小排序，暴力维护这些节点构成的连通子树大小即可。

## I. A Really Odd Sequence

题意：求一个和最大的奇数长度的子区间。

题解：喵喵喵？

## J. Spoonerisms

题意：给  $n$  个串，在里边找出 4 个串  $A, B, C, D$ ，满足能够通过交换一次  $A$  和  $B$  的某个前缀来得到  $C$  和  $D$ 。

题解：考虑如下转化：把每个前缀和后缀当作点，能够拼接的前缀和后缀之间建边。那么就转化成在二分图上找一个四元环。考虑这样的三元组  $(u, v, w)$  满足  $u$  到  $v$  有边且  $v$  到  $w$  有边，那么找四元环等价于找两组三元组  $(u, v, w)$  和  $(u, x, y)$  满足  $w = y$  且  $v \neq x$ 。这可以通过枚举  $\mathcal{N}(u)$  和  $\mathcal{N}(\mathcal{N}(u))$  来求，其中  $\mathcal{N}(u)$  表示和  $u$  相邻的点。这样子做是  $O(n^2)$  的，然后使用一下分块技巧，就得到了  $O(n\sqrt{n})$  的做法了。

首先枚举度大于  $\sqrt{n}$  的点  $u$ ，这样点不超过  $\sqrt{n}$  个，那么直接暴力枚举  $\mathcal{N}(u)$  和  $\mathcal{N}(\mathcal{N}(u))$ ，这样复杂度是  $O(n\sqrt{n})$ 。那么可以发现度大于  $\sqrt{n}$  的点的  $\mathcal{N}(u)$  都没有用了，不妨直接删掉。那么接下来直接暴力枚举一个点  $u$ ，那么  $\mathcal{N}(u)$  内的点度数都不超过  $\sqrt{n}$ ，同样直接暴力枚举就好了，复杂度也是  $O(n\sqrt{n})$ 。

## K. A Text Problem

题意：在允许一个错误的情况下  $A$  串出现在  $B$  串中，当且仅当  $A$  串出现在  $B$  串中，或者  $A$  串在修改了一个字符后出现在  $B$  串中。给定一个串  $T$ ，和  $Q$  个询问，每个询问给出一个串  $S$ ，询问在允许一个错误的情况下  $S$  在  $T$  中的出现次数。

题解：对  $T$  串和  $T$  串的逆序分别建后缀自动机。  $S$  在  $T$  中出现的次数可以在自动机上求出。然后考虑求允许修改一个字符（可以改成原字符）的  $S$  在  $T$  中出现次数，枚举  $S$  串修改的字符位置，前缀在  $T$  串自动机上跑，后缀逆序在  $T$  串逆序的自动机上跑，得到两个  $right$  集合，那么这两个集合的交能够贡献到答案里。考虑如何求  $right$  集合交：每个节点在两棵自动机的 fail 树上各有一个 dfs 序，那么可以把每个节点看作二维平面上的一个坐标， $right$  集合交就可以转化为询问二维平面给定矩形内点的个数，这可以通过离线数据结构在  $O(n \log n)$  的时间内做好。那么答案是允许修改一个字符（可以改成原字符）的  $S$  在  $T$  中的数量减去  $n - 1$  倍的  $S$  在  $T$  中出现的次数。这样是一个  $O(n \log n + n \sum |S|)$  的复杂度。

## L. Waiter's Problem

题意：有  $n$  个非负整数  $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ ，你要执行  $n$  轮操作，每一轮操作你要从  $A$  序列里挑出一个数  $A_i$ ，你获得  $A_i$  的收益并把  $A_i$  从  $A$  中删去，然后序列里剩余的所有大于 0 的数都减一。问你在最优策略下，能获得的最大收益和。

题解：枚举选最大的  $i$  个数，用这些数的和减去  $\frac{i(i-1)}{2}$  更新到答案里。