Bloque 1. Fundamentos matemáticos

Números complejos y su geometría

Índice

Esquema

- **Fundamentos algebraicos**
  - Definición y operaciones
  - Forma cartesiana y polar
  - Fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
  - Fórmula de De Moivre $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$
- **Representación geométrica**
  - Plano complejo
  - Módulo y argumento
  - Distancias y ángulos
- **Funciones complejas**
  - Función exponencial $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
  - Función seno $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
  - Función coseno $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
- **Correspondencia cuántica**
  - Amplitud cuántica $\alpha \in \mathbb{C}$
  - Magnitud y probabilidad $P = |\alpha|^2$
  - Fase e interferencia $\theta = arg(\alpha)$

Ideas clave

1.1 Introducción y objetivos

Los números complejos constituyen el fundamento matemático esencial de la mecánica cuántica y, por tanto, de la computación cuántica. Mientras que en la física clásica las magnitudes se describen mediante números reales, en el mundo cuántico necesitamos la riqueza matemática de los números complejos para describir fenómenos como la superposición, la interferencia y el entrelazamiento.

La estrecha relación entre los números complejos y la mecánica cuántica se refleja en:

- Los **estados cuánticos** son vectores en un espacio vectorial complejo.
- Las **amplitudes cuánticas** son números complejos que determinan las probabilidades de los estados cuánticos.
- La **evolución temporal** de los sistemas cuánticos se describe mediante operadores unitarios con entradas complejas.
- La **interferencia cuántica**, base de muchos algoritmos cuánticos, requiere la aritmética compleja para su comprensión.

1.2 El cuerpo de los números complejos

En esta primera sección recordaremos brevemente algunas de las propiedades algebraicas de los números complejos. Empezaremos con el origen de los números complejos. El propósito de los números complejos es proporcionar soluciones a ecuaciones polinómicas que no tienen solución real. Por ejemplo, las ecuaciones

$$x^2 + 1 = 0 \,, \qquad x^2 + 2x + 5 = 0$$

no tienen solución en el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Para resolver estas ecuaciones, introducimos el concepto de **unidad imaginaria**, que denotaremos por i, que cumple la relación

$$i^2 = -1 \,.$$

Extendiendo los números reales con esta unidad imaginaria i, veremos que podemos resolver todas las ecuaciones polinómicas con coeficientes reales (y, de hecho, complejos).

Definición 1: El plano complejo

Llamaremos $\mathbb{C}$, **plano complejo** o **plano de Argand** a la terna $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, donde las operaciones son:

- suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,
- producto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Resultado 1

El plano complejo $\mathbb{C}$ con las operaciones de suma y producto es un cuerpo conmutativo. Es decir, satisface las siguientes propiedades:

1. **Clausura:** dados $a, b \in \mathbb{C}$, $a + b, ab \in \mathbb{C}$.
2. **Asociatividad:** dados $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, y $a(bc) = (ab)c$.
3. **Conmutatividad:** dados $a, b \in \mathbb{C}$, $a + b = b + a$, y $ab = ba$.
4. **Distributividad:** dados $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a(b + c) = ab + ac$.
5. **Existencia de neutro para la suma:** existe un complejo $0 \in \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$, $z + 0 = z$.
6. **Existencia de neutro para el producto:** existe un complejo $1 \in \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$, $1z = z$.
7. **Existencia de opuesto para la suma:** para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $-z \in \mathbb{C}$ tal que $z+(-z) = 0$.
8. **Existencia de inverso para el producto:** para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $zz^{-1} = 1$.

Tal como hemos definido las operaciones entre números complejos podemos identificar el número real $a \in \mathbb{R}$ con el complejo $(a, 0) \in \mathbb{C}$. Mediante esta identificación $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ dada por $a \mapsto (a, 0)$, podemos entender los números reales como un subcuerpo de los números complejos.

Teniendo en cuenta esta identificación y el hecho de que

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)\,,$$

le daremos el nombre de unidad imaginaria i al complejo $(0, 1)$. De este modo, podemos escribir el complejo $z = (a, b)$ como $z = a + bi$. Esta forma de escribir los números complejos recibe el nombre de **forma binomial**.

Definición 2: Parte real e imaginaria de un complejo

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ un número complejo. Los números reales

$$a = \mathfrak{Re}(z) \,, \qquad b = \mathfrak{Im}(z)$$

que lo componen reciben el nombre de **parte real** y **parte imaginaria** de z respectivamente. Los números complejos con parte real nula se llaman **imaginarios puros**.

Ya hemos visto que podemos identificar a los números reales con los complejos con parte imaginaria nula.

A diferencia del cuerpo de los números reales, el cuerpo de los números complejos no es un cuerpo ordenado. Dicho de forma más precisa, no se puede definir un orden en $\mathbb{C}$ que sea compatible con las operaciones del cuerpo.

Definición 3: Conjugación

El **conjugado** del número complejo $z = a + bi$ es el complejo $\bar{z} = a - bi$.

Nota: En algunos libros de texto al número conjugado de z se le denota por z^*.

Notamos que un número complejo z es real si y solo si $z = \bar{z}$. Por otro lado, z es imaginario puro si y solo si $\bar{z} = -z$.

La conjugación satisface las siguientes propiedades:

Resultado 2

Si z y w son números complejos

- Parte real: $\mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$.
- Parte imaginaria: $\mathfrak{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.
- Conjugación de la suma: $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.
- Conjugación del producto: $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
- Conjugación de la inversa: $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$.
- Doble conjugación: $\bar{\bar{z}} = z$.

Definición 4: Módulo

El **módulo** o **magnitud** de un complejo z es el real positivo

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \,,$$

o, expresado en forma binomial,

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

El valor absoluto satisface las siguientes propiedades:

- $|z| \geq 0$.
- $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.
- Desigualdad triangular. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

La conjugación y el módulo permiten calcular fácilmente el inverso multiplicativo de cualquier complejo $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}\,.$$

Recordamos que un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, diferente del origen de coordenadas, puede expresarse en **coordenadas polares** (r, θ), de forma que

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,.$$

El cambio inverso viene dado por

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}\,.$$

Definición 5: Forma trigonométrica

A partir de la forma polar, podemos escribir un complejo z como

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta\,.$$

Esta representación recibe el nombre de **forma trigonométrica**.
Llamamos **argumento** o **fase** de z al ángulo θ.

Las coordenadas polares no son únicas, pues si θ es un argumento de z, entonces cualquier ángulo de la forma $\theta + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$, también es un argumento de z. Para asegurar la unicidad del argumento, es habitual imponer que θ pertenezca a un cierto intervalo prefijado, como $[0, 2\pi)$ o $(-\pi, \pi]$, según convenga. En estos casos decimos que θ es el **argumento principal** de z.

1.3 Fórmulas de Euler y De Moivre

El interés de la forma trigonométrica radica en las siguientes fórmulas, que relacionan los números complejos con las funciones trigonométricas. Estas fórmulas son fundamentales en muchas aplicaciones de los números complejos, incluyendo la computación cuántica.

Teorema 3: Fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \,.$$

Teorema 4: Fórmula de De Moivre

Para $z = re^{i\theta}$ y $n \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

La fórmula de Euler es muy importante porque motiva la siguiente notación, que será de extrema utilidad a partir de ahora.

Definición 6: Forma exponencial

Un complejo $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ puede escribirse en su **forma exponencial** como

$$z = re^{i\theta} \,.$$

1.4 Geometría compleja

Notamos que un complejo de módulo 1 es de la forma $e^{i\theta}$. Geometricamente, la multiplicación $z \mapsto e^{i\theta}z$ es una rotación en el plano complejo de ángulo θ alrededor del origen.

La forma exponencial permite hacer algunos cálculos más fácilmente, especialmente los que involucran productos y cocientes:

- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$.
- $r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = (r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
- Para r no nulo, $\left(re^{i\theta}\right)^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}$.

Otra ventaja de la notación exponencial es que facilita enormemente el cálculo de las raíces n-ésimas.

Definición 7: Raíces n-ésimas de un complejo

Sea $z = re^{i\theta}$ un número complejo no nulo y $n \in \mathbb{N}$. Las **raíces n-ésimas** de z son los complejos $w = \rho e^{i\psi}$ tales que $w^n = z$. Por lo tanto,

$$\rho = \sqrt[n]{r}\,, \qquad \psi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

En particular, las **raíces n-ésimas de la unidad** son

$$\sqrt[n]{1} = \left\{ e^{\frac{2\pi i k}{n}}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}.$$

Geometricamente, las raíces n-ésimas de la unidad de un complejo son los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen y circunscrito en una esfera de radio 1.

Ejemplo 1.

Vamos a calcular las raíces cúbicas del número complejo $z = -1 + i$. Si escribimos el complejo z en forma exponencial, tenemos

$$z = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4} i}\,.$$

Si $w = \rho e^{i\psi}$ es una raíz cúbica de z, entonces

$$w^3 = \rho^3 e^{3i\psi} = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4} i} \Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = \sqrt{2} \Rightarrow \rho = \sqrt[6]{2} \\ 3\psi = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow \psi = \dfrac{(3+8k)\pi}{12}\,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Por lo tanto, las raíces cúbicas son:

$$\begin{aligned} k = 0: &\quad w_0 = \sqrt[6]{2} e^{\frac{\pi}{4} i}\,, \\ k = 1: &\quad w_1 = \sqrt[6]{2} e^{\frac{11\pi}{12} i}\,, \\ k = 2: &\quad w_2 = \sqrt[6]{2} e^{\frac{19\pi}{12} i}\,. \end{aligned}$$

Como podemos ver en la figura 1, estas raíces son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[6]{2}$.

Como elementos geométricos heredados de la geometría en $\mathbb{R}^2$ tenemos:

- *Rectas*. En particular, las rectas paralelas a los ejes $\mathfrak{Re}(z) = a$, o $\mathfrak{Im}(z) = b$.
- *Semiplanos* (abiertos o cerrados). En particular, $\mathfrak{Re}(z) > a$, $\mathfrak{Im}(z) > b$, etc.
- *Bandas*: regiones comprendidas entre dos rectas paralelas.
- *Discos* (abiertos o cerrados), también llamados bolas:

$$D(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} \mid d(z_0, z) < r \}\,, \qquad \bar{D}(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} \mid d(z_0, z) \leq r \}\,.$$

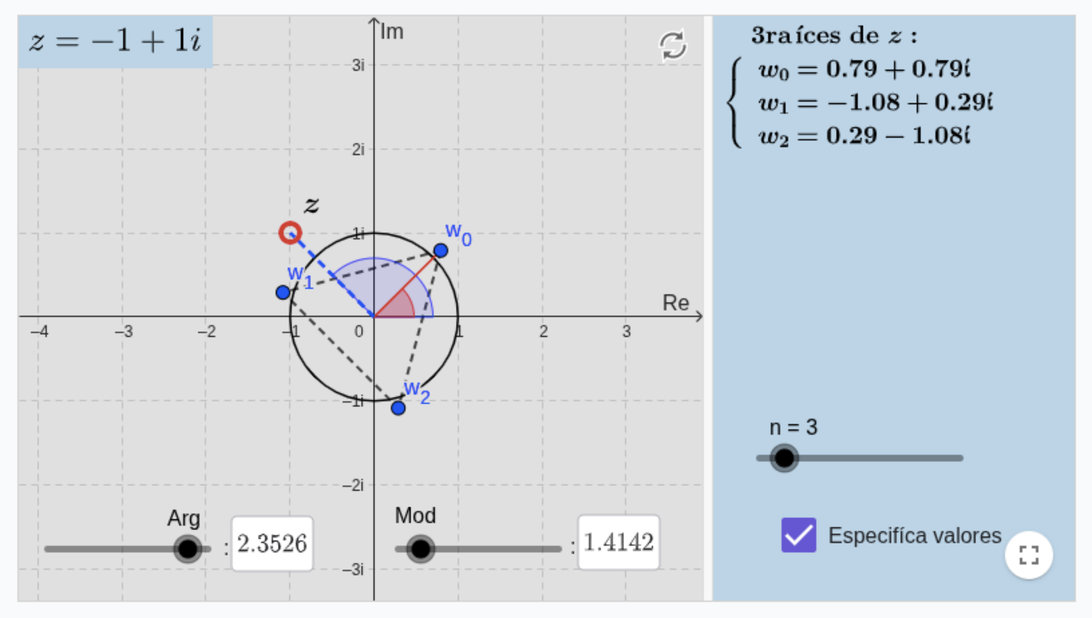

Figura 1: Raíces cúbicas del complejo $z = -1 + i$. Fuente: https://complex-analysis.com

.

- *Circunferencias*:

$$S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z_0, z) = r\} = \partial D(z_0, r)\,.$$

En particular, la circunferencia unidad $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

- Coronas circulares (abiertas o cerradas):

$$C(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < d(z_0, z) < r_2\}\,.$$

- El módulo $|z|$ es la distancia del origen al punto z
- El conjugado $\overline{z}$ es la reflexión de z respecto al eje real
- La suma $z_1 + z_2$ corresponde a la suma vectorial en el plano

Es conveniente observar que la multiplicación por un número complejo $z = re^{i\theta}$ tiene dos efectos geométricos:

- Una rotación de ángulo θ alrededor del origen.
- Si $r < 1$, es una contracción (acercamiento al origen).
- Si $r > 1$, es una dilatación (alejamiento del origen).

1.5 Funciones complejas elementales

Definición 8: Función compleja

Sea A un subconjunto de $\mathbb{C}$. Una **función compleja** es una función $f\colon A \to \mathbb{C}$ que toma valores complejos. Como $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, toda función compleja puede escribirse de forma única como $f = u + iv$, donde $u, v\colon A \to \mathbb{R}$ son funciones reales, llamadas respectivamente **parte real**, $u = \mathfrak{Re}(f)$, y **parte imaginaria**, $v = \mathfrak{Im}(f)$, de f.

Definición 9: Función exponencial compleja

Para $z \in \mathbb{C}$, la función exponencial se define como:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Definición 10: Funciones trigonométricas complejas

Para $z \in \mathbb{C}$, las funciones seno y coseno se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

1.6 Amplitud cuántica

Definición 11

En el contexto de la mecánica cuántica, se denota por **amplitud** a un número complejo $\alpha \in \mathbb{C}$ que describe la probabilidad de que un sistema cuántico se encuentre en un estado particular tras una medición. La amplitud viene determinada por dos componentes:

- **Magnitud**: $r = |\alpha|$ que determina la probabilidad del valor medido, $P = r^2 = |\alpha|^2$.
- **Fase**: $\theta = \arg(\alpha)$ que interviene en los procesos de interferencia cuántica.

Ejemplo 2: Amplitudes con igual probabilidad, diferente fase

Considere estas tres amplitudes:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\cdot 0} \tag{1}$$

$$\alpha_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2} \tag{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi} \tag{3}$$

Todas tienen:

- **Misma magnitud**: $|\alpha_1| = |\alpha_2| = |\alpha_3| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- **Fases diferentes**: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ respectivamente.

Ejemplo 3: Interferencia cuántica: suma de amplitudes

Cuando dos amplitudes se suman, sus fases determinan si interfieren constructiva o destructivamente:

Interferencia constructiva (fases iguales):

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$|\alpha_1 + \alpha_2|^2 = 2$$

Interferencia destructiva (fases opuestas):

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{(-1)}{\sqrt{2}} = 0$$

$$|\alpha_1 + \alpha_3|^2 = 0$$

Interferencia parcial (fases en 90°):

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$|\alpha_1 + \alpha_2|^2 = \left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{|1+i|^2}{2} = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1$$

La interferencia cuántica es el principio fundamental detrás de muchos algoritmos cuánticos: amplificamos las amplitudes de respuestas correctas e interferimos destructivamente con las incorrectas.

A fondo

Los siguientes libros pueden servir de material de apoyo y para profundizar más en los contenidos de este tema.

O'Neill, P. V. Matemáticas avanzadas para Ingeniería. Cengage Learning, 2012

Del primer recurso se recomienda la lectura del capítulo 8.

Yanofsy, N. S. y Mannucci, M. A. Quantum Computing for Computer Scientists. Cambridge University Press, 2019

Se recomienda la lectura del capítulo 1.

Asmar, N. K. y Grafakos, L. Complex Analysis with Application. Springer, 2018

Se recomienda la lectura del capítulo 1.

Lang, S. Complex Analysis. Springer, 2003

Se recomienda la lectura del capítulo 1.

Problemas

1. Calcular las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma binomial:
   a) $(3+2i)+(1-4i)$
   b) $(2+i)(3-2i)$
   c) $\frac{1+2i}{2-i}$
   d) $|3+4i|$
   e) $\overline{(2-3i)(1+i)}$
2. Convertir a forma polar:
   a) $z_1 = 1+i$
   b) $z_2 = -2+2i\sqrt{3}$
   c) $z_3 = -4i$
3. Calcular todas las raíces cuartas de $16i$.
4. Demostrar que para cualquier $z \in \mathbb{C}$: $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
5. Calcular la magnitud y fase de los siguientes números complejos:
   a) $z_1 = 3+4i$
   b) $z_2 = -2+2i\sqrt{3}$
   c) $z_3 = -5i$
   d) $z_4 = 7$
6. Expresar en forma exponencial y realizar las operaciones:
   a) $(1+i)^8$
   b) $\frac{2e^{i\pi/3}}{1+i\sqrt{3}}$
   c) $\sqrt[3]{-8i}$ (todas las raíces)
7. Dadas las amplitudes cuánticas $\alpha = \frac{2}{3}$ y $\beta = \frac{\sqrt{5}i}{3}$:
   a) Verificar que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$
   b) Expresar cada amplitud en forma $re^{i\theta}$

c) Calcular las probabilidades asociadas a cada amplitud

8. Un sistema cuántico tiene amplitudes $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i3\pi/4}$:

   a) Calcular la amplitud total $\alpha_1 + \alpha_2$

   b) Determinar si hay interferencia constructiva, destructiva o parcial

   c) Calcular la probabilidad total $|\alpha_1 + \alpha_2|^2$

9. Encontrar todos los números complejos z que satisfacen:

   a) $|z - i| = |z + 1|$

   b) $|z|^2 + z + \overline{z} = 3$

   c) $z^4 = -16$

10. Tres amplitudes cuánticas tienen la misma magnitud $\frac{1}{\sqrt{3}}$ pero fases diferentes: 0, $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{2}$:

    a) Escribir las tres amplitudes en forma exponencial

    b) Calcular la suma total de las tres amplitudes

    c) Explicar por qué el resultado tiene sentido físicamente

11. Para las amplitudes $\alpha = ae^{i\phi}$ y $\beta = be^{i\psi}$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$:

    a) Demostrar que $|\alpha + \beta|^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\psi - \phi)$

    b) ¿Para qué diferencia de fases se obtiene interferencia máxima?

    c) ¿Para qué diferencia de fases se obtiene interferencia mínima?

12. Un número complejo z satisface $z^3 = 2 + 2i\sqrt{3}$:

    a) Expresar $2 + 2i\sqrt{3}$ en forma exponencial

    b) Encontrar las tres raíces cúbicas

    c) Representar las raíces en el plano complejo

    d) ¿Cuál es la interpretación geométrica de estas raíces?

13. Dos amplitudes cuánticas α_1 y α_2 tienen magnitudes $\frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\frac{2}{\sqrt{5}}$ respectivamente:

    a) Si sus fases son $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi/3$, calcular $|\alpha_1 + \alpha_2|^2$

    b) Encontrar el valor de θ_2 que maximiza $|\alpha_1 + \alpha_2|^2$

    c) Encontrar el valor de θ_2 que minimiza $|\alpha_1 + \alpha_2|^2$

14. Demostrar las siguientes propiedades de la conjugación compleja aplicadas a amplitudes cuánticas:

a) Si $\alpha = re^{i\theta}$, entonces $\overline{\alpha} = re^{-i\theta}$

b) $\alpha \cdot \overline{\alpha} = |\alpha|^2$

c) $\overline{(\alpha + \beta)} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

d) Para amplitudes normalizadas: $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \Rightarrow |\overline{\alpha}|^2 + |\overline{\beta}|^2 = 1$