

Bloque 2. Espacios cuánticos

Notación de Dirac

Índice

Esquema	3
Ideas clave	4
6.1 Introducción y objetivos	4
6.2 Postulado I: Sistemas cuánticos.	5
6.3 Postulado II: Observables	8
6.4 Postulado III: Medición cuántica	10
6.5 Postulado IV: Evolución temporal	12
6.6 Postulado V: Sistemas compuestos	13
6.7 Observables, mediciones y estados	16
6.8 La esfera de Bloch	17
A fondo	20
Problemas	21

Esquema

Correspondencia cuántica	<ul style="list-style-type: none"> Amplitud cuántica $\alpha \in \mathbb{C}$ Magnitud y probabilidad $P = \alpha ^2$ Fase e interferencia $\theta = \arg(\alpha)$
Notación bra-ket	<ul style="list-style-type: none"> Kets y bras $a\rangle$ y $\langle a$ Productos internos $\langle a b\rangle$ Operadores externos $a\rangle\langle b$
Estados cuánticos	<ul style="list-style-type: none"> cúbits y normalización Superposición cuántica $\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$ Interpretación probabilística
Sistemas de múltiples cúbits	<ul style="list-style-type: none"> Producto tensorial $ab\rangle$ Base computacional $0\rangle, 1\rangle$ Estados entrelazados $\frac{1}{\sqrt{2}} 00\rangle + 11\rangle$
Mediciones y observables	<ul style="list-style-type: none"> Colapso del estado Medidas en diferentes bases
Dinámicas cuánticas	<ul style="list-style-type: none"> Acción de operadores Evolución libre

6.1 Introducción y objetivos

Hasta ahora hemos explorado la columna vertebral matemática de la mecánica cuántica: los espacios vectoriales complejos y los espacios de Hilbert, en ambos casos de dimensión finita. Estos conceptos son esenciales para describir sistemas cuánticos, y en particular, los cúbits, que son la unidad fundamental de información en computación cuántica.

Ahora comienza la parte más emocionante del curso: aplicar esta base matemática para entender cómo se representan y manipulan los estados cuánticos, y cómo evolucionan y miden estos estados en los sistemas desarrollados para la computación cuántica.

Revisaremos los postulados de la mecánica cuántica, enfocándonos en su interpretación física y su formulación matemática utilizando la notación de Dirac. Esta notación es una herramienta poderosa que simplifica la representación y manipulación de estados y operadores cuánticos.

La notación de Dirac, también conocida como notación bra-ket, proporciona un formalismo elegante y poderoso para trabajar con estados cuánticos y operadores. Desarrollada por Paul Dirac, esta notación no solo simplifica los cálculos algebraicos, sino que también captura de manera intuitiva los conceptos físicos fundamentales de la mecánica cuántica.

En computación cuántica, la notación de Dirac es indispensable porque:

- ▶ Proporciona una representación **concisa y clara** de estados cuánticos complejos.
- ▶ Facilita el cálculo de **probabilidades cuánticas** mediante productos internos.
- ▶ Permite expresar **operadores cuánticos** de manera natural y eficiente.
- ▶ Conecta directamente la **estructura matemática** con la **interpretación física**.
- ▶ Es el lenguaje estándar para describir **algoritmos cuánticos** y **protocolos cuánticos**.

Este tema establece el puente definitivo entre la matemática abstracta de los espacios de Hilbert y la implementación práctica de sistemas cuánticos en computación cuántica.

Nota: Recuerda que en todo el curso, siempre trabajaremos con espacios de Hilbert de dimensión finita, lo que simplifica muchos aspectos técnicos y nos permite centrarnos en los conceptos fundamentales.

En el contexto de la mecánica cuántica, un número complejo se describe como una amplitud cuántica que está formado por un par de números llamados amplitud y fase, que no son más que el módulo y un argumento.

Definición 1

Se denota por **amplitud cuántica** a un número complejo $\alpha \in \mathbb{C}$ que está caracterizado por dos valores:

- **Magnitud:** Igual al módulo $|\alpha|$.
- **Fase:** Pertenece al argumento $\arg(\alpha)$.

Por lo tanto, dos amplitudes cuánticas son iguales si tienen la misma magnitud y su diferencia de fases es un múltiplo de 2π .

Ejemplo 1.

Una amplitud cuántica de magnitud 2 con fase π es igual a otra amplitud cuántica de magnitud 2 con fase $-\pi$.

Ejemplo 2: Interferencia cuántica

Cuando dos amplitudes cuánticas interfieren, la amplitud cuántica resultante puede tener una fase menor, diremos entonces que las amplitudes interfieren de forma destructiva, si la fase resultante es mayor diremos que interfieren de forma constructiva:

Interferencia destructiva: Una amplitud cuántica de magnitud 2 con fase π y otra amplitud cuántica de magnitud 2 con fase π interfieren dando una amplitud cuántica de fase 0.

La interferencia cuántica es el principio fundamental detrás de muchos algoritmos cuánticos: amplificamos las amplitudes de respuestas correctas e interferimos destructivamente con las incorrectas.

Al final una amplitud cuántica es la representación exponencial de un número complejo, y podemos trabajar con ellas usando las reglas vistas en este curso.

6.2 Postulado I: Sistemas cuánticos.

Un sistema cuántico se describe completamente mediante un vector unitario en un espacio vectorial de Hilbert.

Aunque para nosotros los espacios vectoriales y los espacios de Hilbert sean lo mismo, es a partir de ahora, cuando empezamos a diferenciar ambos conceptos. Un espacio de Hilbert es un

espacio vectorial complejo con un producto interno definido, y en el contexto de la mecánica cuántica, este espacio es el **espacio de estados normalizados** del sistema cuántico.

Definición 2

A los elementos de un espacio de estados \mathcal{H} , no los llamaremos vectores sino **estados cuánticos** o en la notación de Dirac **kets** y se denota por $|v\rangle \in \mathcal{H}$.

Siempre que hablamos de estado cuántico o de ket, estamos asumiendo ya que el vector es unitario, es decir, que cumple $\| |v\rangle \| = 1$.

En computación cuántica, el sistema cuántico más básico es el **cúbit**, en el que podemos medir dos estados bien diferenciados, y por tanto es un espacio de estados \mathcal{C} de dimensión 2.

Que un sistema cuántico se describa mediante un vector unitario implica que los estados cuánticos deben cumplir la **condición de normalización**, y por tanto, no todos los vectores del espacio vectorial son estados físicos válidos. Tenemos que considerar el espacio de Hilbert \mathcal{H} como el subespacio de todos los vectores unitarios del espacio vectorial complejo asociado.

En mecánica cuántica, un ket cuando es representado por coordenadas se escribe como una columna matricial, siguiendo la convención de que las coordenadas son los coeficientes de la combinación lineal de los vectores de una base ortonormal.

Ejemplo 3: Espacio de estado de un cúbit

Como hemos definido, un cúbit tiene espacio de estados \mathcal{C} de dimensión 2 y si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ es una base, todo estado cuántico $|v\rangle$ viene representado por

$$|v\rangle = \alpha|e_1\rangle + \beta|e_2\rangle \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

En computación cuántica, es habitual denotar por $|0\rangle$ y $|1\rangle$ a los estados que caracterizan el cúbit. Si por ejemplo estamos usando el spin de un electrón, estos estados pueden representar el spin *arriba* y *abajo* respectivamente.

Llamaremos **base computacional** de \mathcal{C} a la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Para definir formalmente \mathcal{C} , necesitamos imponer la condición de normalización en los vectores del espacio vectorial complejo asociado \mathbb{C}^2 . Esto nos lleva a la siguiente construcción.

Resultado 1

La relación R sobre \mathbb{C}^2 definida por

$$vRw \iff \exists r \in \mathbb{R} \mid w = rv,$$

es una relación de equivalencia.

Demostración.

Veamos que R cumple las tres propiedades de una relación de equivalencia:

- **Reflexiva:** Para todo $v \in \mathbb{C}^2$, existe $r = 1 \in \mathbb{R}$ tal que $v = 1 \cdot v$, por lo que vRv .
- **Simétrica:** Si vRw , entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $w = rv$. Entonces, si $r \neq 0$, podemos escribir $v = r^{-1}w$, con $r^{-1} \in \mathbb{R}$, por lo que wRv . Si $r = 0$, entonces $w = 0$ y también $v = 0$, por lo que wRv .
- **Transitiva:** Si vRw y wRu , entonces existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que $w = r_1v$ y $u = r_2w$. Sustituyendo, obtenemos $u = r_2(r_1v) = (r_2r_1)v$, con $r_2r_1 \in \mathbb{R}$, por lo que vRu .

□

Ahora podemos establecer la relación entre los espacios formalmente, considerando \mathcal{C} como el conjunto cociente \mathbb{C}^2/R , y cada clase de equivalencia representa un estado cuántico físico, tomando como representante de la clase $|v\rangle$ aquel que tiene norma 1.

Ejemplo 4.

Consideremos el cúbit resultado de medir el spin de un electrón en una dirección del espacio. Llamemos $|\uparrow\rangle$ al estado en el que el spin mide en dicha dirección y $|\downarrow\rangle$ al estado en el que el spin mide en la dirección opuesta.

En este caso, $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ son los estados que forman la base computacional de \mathcal{C} y podemos expresar conceptos como un estado diagonal como

$$|\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle).$$

Definición 3: Equivalencia por fase global

Dos cúbits se dicen que son iguales salvo por una **fase global** si están en la misma clase de equivalencia.

Si no están en la misma clase de equivalencia, se dicen que tienen **fases relativas**.

Ejemplo 5: Parametrización general de un cúbit

Eliminando la fase global, todo cúbit puede escribirse como

$$|v\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle,$$

donde $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$ son parámetros reales.

Esta parametrización:

- Elimina la fase global irrelevante.

- ▶ Usa solo 2 parámetros reales para describir el estado completo.
- ▶ Corresponde a puntos en la superficie de una esfera (Esfera de Bloch).

En computación cuántica, una vez definido los estados básicos que forman la base computacional, tenemos otros estados importantes que usaremos a lo largo del curso.

1. $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.
2. $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.
3. $|i+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$.
4. $|i-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$.

Definición 4: Bracket

En la notación de Dirac, el **bracket** es el producto interno entre dos kets $|v\rangle$ y $|w\rangle$, se denota $\langle v|w\rangle$

$$\langle v|w\rangle = \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}.$$

Recordando la definición del dual de un espacio vectorial, dado un ket $|v\rangle$, el funcional asociado es un elemento del espacio dual \mathcal{H}^* , que podría verse como un producto interno para cierto $|w\rangle$ y que con la notación de Dirac tiene sentido dar la siguiente definición.

Definición 5: Bra

Dado un ket $|\phi\rangle$, el funcional asociado del espacio dual lo llamamos **bra**, denotado $\langle\phi|$ y que actúa sobre un ket $|v\rangle$ mediante la notación

$$\langle\phi|(|v\rangle) = \langle\phi|v\rangle.$$

Para cada ket $|v\rangle$, el bra correspondiente respecto de una base ortogonal y su base dual cumple

$$\langle v| = |v\rangle^\dagger.$$

6.3 Postulado II: Observables

Toda magnitud física observable de un sistema cuántico se representa mediante un operador hermitiano que actúa en el espacio de Hilbert del sistema y cuyos valores propios son todos los posibles valores que podemos observar.

Este postulado nos indica, que dado un cúbit, y fijado los estados básicos que lo definen, tendremos operadores hermíticos que actúan sobre el cúbit y cuyos valores propios son los posibles resultados de medir la magnitud observable.

En la notación de Dirac, no se diferencia entre operadores lineales y sus representaciones matriciales, por lo que la representación matricial de un operador hermítico $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ se denota simplemente por T .

Tampoco se diferencia entre la imagen de un ket $|v\rangle$ por el operador T o el producto de su representación matricial por la representación del vector, lo que $T|v\rangle$ significa a la misma vez la imagen del ket por el operador o el producto de la matriz por el vector columna.

Ejemplo 6: Observables fundamentales de un cúbit basado en el spin

Para un cúbit que representa el spin de un electrón, los observables más importantes son las componentes del espín en cada una de las direcciones del espacio, representadas por las matrices de Pauli.

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} && \text{(espín en dirección x)} \\ Y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} && \text{(espín en dirección y)} \\ Z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} && \text{(espín en dirección z)} \end{aligned}$$

La matriz de Pauli Z ya es diagonal y en el tema anterior ?? se calculó la representación espectral de la matriz de Pauli X . Veamos ahora cómo diagonalizar la matriz de Pauli Y , lo que nos permitirá conocer sus valores propios y vectores propios, fundamentales para entender las posibles mediciones en un sistema cuántico.

Ejemplo 7: Diagonalización de Y

Para calcular los valores propios del observable Y , resolvemos $\det(Y - \lambda I) = 0$,

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Valores propios: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Vectores propios:

► Para $\lambda_1 = 1$: Resolvemos $(Y - I)|v\rangle = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

De la primera fila: $-v_1 - iv_2 = 0 \implies v_1 = -iv_2$. Tomando $v_2 = 1$, obtenemos $|v\rangle = (-i, 1)^t$.

► Para $\lambda_2 = -1$: Resolvemos $(Y + I)|w\rangle = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0.$$

De la primera fila: $w_1 - iw_2 = 0 \implies w_1 = iw_2$. Tomando $w_2 = 1$, obtenemos $|w\rangle = (i, 1)^t$.

Descomposición espectral:

$$Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

6.4 Postulado III: Medición cuántica

Al medir con un observable T el estado $|v\rangle$:

1. La probabilidad de obtener el resultado λ_i es

$$P(\lambda_i) = \|\text{proy}_{V_i}|v\rangle\|^2.$$

2. Después de la medición, el sistema se representa con el estado

$$|w\rangle = \frac{\text{proy}_{V_i}|v\rangle}{\|\text{proy}_{V_i}|v\rangle\|}.$$

Donde V_i es el subespacio propio correspondiente al valor propio λ_i .

El tercer postulado es menos intuitivo de todos los postulados, pues nos asegura que no sabemos que ocurre al medir, solo podemos tener un conocimiento probabilístico sobre los distintos resultados que podemos obtener.

Aunque sí podemos obtener un valor sobre dicha probabilidad, y es el módulo de la proyección del estado sobre los vectores de la base formada por los vectores propios del observable.

Si recordamos las ecuaciones del tema anterior, cuando tenemos valores propios distintos, el módulo de la proyección es precisamente el módulo del producto interno. Y por otro lado, es precisamente este valor del producto interno la coordenada del estado con respecto a la base propia.

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i | v \rangle |e_i\rangle.$$

$$\|\text{proy}_{e_i}|v\rangle\| = \|\langle e_i | v \rangle\|.$$

Ejemplo 8.

Considere el estado $|v\rangle = \frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4i}{5}|1\rangle$ y queremos medir con el observable Z . Como ya sabemos, los valores propios de Z son $+1$ y -1 , con vectores propios $|0\rangle$ y $|1\rangle$ respectivamente.

Probabilidades:

$$P(+1) = |\langle 0|v\rangle|^2 = \left|\frac{3}{5}\right|^2 = \frac{9}{25}.$$

$$P(-1) = |\langle 1|v\rangle|^2 = \left|\frac{4i}{5}\right|^2 = \frac{16}{25}.$$

Estados post-medición: Después de cada posible resultado de la medición, el estado del sistema se representa con el estado:

- $|0\rangle$ si se obtiene $+1$.
- $|1\rangle$ si se obtiene -1 .

Definición 6: Valor esperado

El **valor esperado** de un observable T sobre el estado $|v\rangle$ es

$$\langle T \rangle_v = \sum_i \lambda_i P(\lambda_i).$$

Ejemplo 9.

Para el estado $|v\rangle = \frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4i}{5}|1\rangle$ y el observable Z , su valor esperado es

$$\langle Z \rangle_v = (+1) \cdot \frac{9}{25} + (-1) \cdot \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}.$$

La definición de valor esperado es una generalización del valor esperado en estadística, donde el valor esperado es la media de una variable aleatoria. Pero si realizamos algunos cálculos, podemos ver que el valor esperado es el producto interno entre el ket y el observable.

Como $P(\lambda_i) = \|\text{proy}_{V_i}|v\rangle\|^2 = \sum_{e_j \in V_i} \|\langle e_j|v\rangle\|^2$, y para cada estado propio $|e_i\rangle$ se cumple $T|e_i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle$, entonces el valor esperado es

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_v &= \sum_i \lambda_i P(\lambda_i) = \sum_i \lambda_i \|\langle e_i|v\rangle\|^2 = \sum_i \lambda_i \langle e_i|v\rangle \langle v|e_i\rangle = \sum_i \langle e_i|v\rangle \langle v|\lambda_i e_i\rangle \\ &= \sum_i \langle e_i|v\rangle \langle v|T|e_i\rangle = \left\langle v \left| \sum_i \langle e_i|v\rangle T|e_i\rangle \right. \right\rangle = \left\langle v \left| T \left(\sum_i \langle e_i|v\rangle |e_i\rangle \right) \right. \right\rangle \\ &= \langle v|T|v\rangle. \end{aligned}$$

Observamos que por ser T un operador hermítico, el valor esperado también se puede escribir como $\langle T|v\rangle|v\rangle$.

Como la notación anterior puede dar lugar a confusión, la notación de Dirac usa la siguiente expresión para el valor esperado.

$$\langle T \rangle_v = \langle v|T|v \rangle.$$

Ejemplo 10.

Para el estado del ejemplo anterior, calculemos con esta nueva expresión el valor esperado

$$\langle Z \rangle_v = \langle v|Z|v \rangle = \left\langle \frac{3}{5}|0\rangle - \frac{4i}{5}|1\rangle \left| \frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4i}{5}|1\rangle \right\rangle = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}.$$

6.5 Postulado IV: Evolución temporal

Un estado cuántico $|v(t)\rangle$ evoluciona a lo largo del tiempo cumpliendo con la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = H\Psi(x, t),$$

donde H es el operador hamiltoniano del sistema cuántico.

En computación cuántica, los estados deben ser invariantes temporales, por lo que debe cumplir con la ecuación estacionaria de Schrödinger

$$H\Psi(x, t) = E\Psi(x, t),$$

donde E es la energía del sistema y que tiene por solución

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar}|\Psi(0)\rangle.$$

De esta solución el operador que rigue la evolución $U(t) = e^{-iEt/\hbar}$ es unitario.

Ejemplo 11.

Para un cúbit con hamiltoniano $H = \frac{\omega}{2}Z$

$$U(t) = e^{-i\omega t Z/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}.$$

Si el estado inicial es $|\psi(0)\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, entonces

$$|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega t/2}|0\rangle + \beta e^{i\omega t/2}|1\rangle.$$

Las probabilidades $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ se mantienen constantes, pero las fases evolucionan.

El Postulado IV garantiza que la información cuántica se conserva durante la evolución temporal de sistemas cerrados. Esto es fundamental para el diseño de algoritmos cuánticos, donde las operaciones se implementan mediante secuencias de operadores unitarios.

Definición 7

Un operador unitario en \mathcal{C} recibe el nombre de **puerta cuántica** de un cúbit.

Ya hemos visto algunas puertas cuánticas, en particular los operadores de Pauli.

Ejemplo 12: Puerta de Hadamard

La puerta de Hadamard es la puerta cuántica que transforma el estado $|0\rangle$ en $|+\rangle$ y el estado $|1\rangle$ en $|-\rangle$.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.6 Postulado V: Sistemas compuestos

Dos sistemas cuánticos interactúan formando un único sistema cuántico mediante el producto tensorial.

En la notación de Dirac, el producto tensorial de los estados $|v\rangle$ y $|w\rangle$ se denota por

$$|vw\rangle = |v\rangle \otimes |w\rangle.$$

Ejemplo 13.

El sistema cuántico formado por dos cúbits es $\mathcal{C}^2 = \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ y tiene dimensión $2^2 = 4$. En este espacio cuántico, contamos con dos formas de expresar la base computacional:

1. La base decimal: $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.
2. La base binaria: $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.

Definición 8: Base computacional para múltiples cúbits

Para n cúbits, la base computacional está formada por

$$\{|b_1 b_2 \cdots b_n\rangle \mid b_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n\},$$

o

$$\{|i\rangle \quad i = 0, \dots, 2^n - 1\}.$$

Ejemplo 14: Sistema de dos cúbits

Un estado general de dos cúbits se escribe como

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle,$$

o en su forma decimal

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|0\rangle + \alpha_{01}|1\rangle + \alpha_{10}|2\rangle + \alpha_{11}|3\rangle,$$

con $\sum_{ij} |\alpha_{ij}|^2 = 1$.

Los sistemas formados a partir de productos tensoriales, clasifican los estados en dos tipos cruciales y esenciales en mecánica cuántica y computación cuántica: estados separables y estados entrelazados.

Definición 9: Estado separable

Un estado $|v\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ es **separable** si $|v\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle$ para estados $|v_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ y $|v_2\rangle \in \mathcal{H}_2$. Diremos que un estado es **entrelazado** si no es separable.

Ejemplo 15: Estados separables

Los siguientes estados de dos cúbits son separables:

- ▶ $|0\rangle \otimes |0\rangle$.
- ▶ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle$.
- ▶ $\frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) = |+\rangle \otimes |+\rangle$.

Como ejemplo de estados entrelazados debemos prestar especial atención a los estados de Bell. Son ejemplos sencillos pero poderosos para poder entender la verdadera potencia de la computación cuántica.

Los estados de Bell son estados entrelazados de dos cúbits que forman una base ortonormal del espacio de estados de dos cúbits.

Ejemplo 16: Estados de Bell

Los cuatro estados de Bell forman una base ortonormal de estados entrelazados para dos cúbits:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}. \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}. \\ |\Psi^-\rangle &= \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Los estados entrelazados exhiben correlaciones cuánticas no locales, medir un cúbit instantáneamente determina el resultado de medir el otro cúbit, independientemente de la distancia que los separe. Esta propiedad es fundamental para protocolos como la teleportación cuántica y la criptografía cuántica.

El producto externo tiene con la notación de Dirac una nueva forma de expresarse

$$|u\rangle \wedge |v\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle^\dagger = |u\rangle \otimes \langle v| = |u\rangle \langle v|.$$

Para entender como actúa con esta notación, pasamos a la notación matemática, operamos y volvemos a la notación de Dirac

$$|u\rangle \langle v| |w\rangle = (u \wedge v)(w) = \langle v, w \rangle u = \langle v | w \rangle |u\rangle.$$

Ejemplo 17.

Los operadores de Pauli, expresados en notación de Dirac son

$$\begin{aligned} X &= |1\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1|. \\ Y &= i|1\rangle \langle 0| - i|0\rangle \langle 1|. \\ Z &= |0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|. \end{aligned}$$

Mientras que la puerta de Hadamard es

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|).$$

Usando esta notación, podemos expresar la acción de un operador sobre un ket, solo en términos del producto interno, y simplemente moviendo símbolos de un lado a otro, esta notación nos permite expresar de forma compacta las operaciones que realizamos.

Ejemplo 18.

Veamos cómo actúa la puerta de Hadamard sobre el estado $|0\rangle$.

$$\begin{aligned}
H|0\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\langle 0| - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\langle 1| \right) |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = |+\rangle.
\end{aligned}$$

6.7 Observables, mediciones y estados

La notación de Dirac nos permite expresar observables, mediciones y estados de manera compacta, haciendo uso de símbolos que según su posición o su notación juegan distintos papeles pero que dejan muy claro que representan, y sobre todo, mantienen el significado de la operación que representan.

Por este motivo, una expresión del tipo $|\$ \rangle \langle €| + |€ \rangle \langle \$|$ representa un observable, donde $€$ representa una medición y $|\$ \rangle$ representa un estado propio del observable.

En general, un observable O puede escribirse en su descomposición espectral

$$O = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|,$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ son los valores propios.

En este aspecto, la base computacional para un cúbit no sigue este patrón, pues sencillamente estamos denotando la existencia de dos valores propios y que llamamos de forma genérica 0 y 1, (por su analogía con la notación binaria).

Cuando en computación cuántica se habla del estado $|0\rangle$ se está haciendo referencia al estado propio del primer valor propio del observable usado para definir el sistema cuántico.

Algunas veces, por comodidad de notación, se utilizará $|1\rangle$ y $|2\rangle$ a dichos estados computacionales.

Ejemplo 19.

Tenemos un cúbit basado en el espín de un electrón y medimos sobre el eje z. Los valores del observable O_z son $\hbar/2$ y $-\hbar/2$, así pues

$$O_z = \frac{\hbar}{2} \left| \frac{\hbar}{2} \right\rangle \left\langle \frac{\hbar}{2} \right| - \frac{\hbar}{2} \left| -\frac{\hbar}{2} \right\rangle \left\langle -\frac{\hbar}{2} \right|.$$

En mecánica cuántica, los estados $\left| \frac{\hbar}{2} \right\rangle$ y $\left| -\frac{\hbar}{2} \right\rangle$ son más conocidos como estado arriba

$(|\uparrow\rangle)$ y estado abajo $(|\downarrow\rangle)$ respectivamente.

$$O_z = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|.$$

Definimos el estado

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle).$$

¿Cual es la probabilidad de medir $|\uparrow\rangle$ en el estado $|\rightarrow\rangle$?

$$P(\uparrow) = \|\text{proy}_{\uparrow}|\rightarrow\rangle\|^2 = \|\langle\uparrow|\rightarrow\rangle\|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\uparrow|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\uparrow|\downarrow\rangle \right|^2 = \frac{1}{2}.$$

El mismo cálculo se puede hacer para $|\downarrow\rangle$

$$P(\downarrow) = \|\text{proy}_{\downarrow}|\rightarrow\rangle\|^2 = \|\langle\downarrow|\rightarrow\rangle\|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\uparrow|\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\downarrow|\downarrow\rangle \right|^2 = \frac{1}{2}.$$

¿Cual es el valor esperado de medir O_z en el estado $|\rightarrow\rangle$?

Recordando la definición del valor esperado en una medida 6, tenemos

$$\begin{aligned} \langle\rightarrow|O_z|\rightarrow\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \left| \left(\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \right) \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \right\rangle \\ &= \frac{\hbar}{4} \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle | \uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \rangle \\ &= \frac{\hbar}{4} \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle | \langle\uparrow|\uparrow\rangle - \langle\downarrow|\uparrow\rangle + \langle\uparrow|\downarrow\rangle - \langle\downarrow|\downarrow\rangle \rangle \\ &= \frac{\hbar}{4} \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle | \uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \rangle \\ &= \frac{\hbar}{4} (\langle\uparrow|\uparrow\rangle + \langle\downarrow|\uparrow\rangle - \langle\downarrow|\uparrow\rangle - \langle\downarrow|\downarrow\rangle) \\ &= \frac{\hbar}{4} (1 + 0 - 0 - 1) = 0. \end{aligned}$$

6.8 La esfera de Bloch

La esfera de Bloch es una representación geométrica de los estados de un cúbit. Cada punto en la superficie de la esfera corresponde a un estado del cúbit.

Todo ket $|a\rangle$ de un cúbit puede ser expresado como una combinación lineal de los kets de la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$|a\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

donde expresando α y β en forma polar,

$$\alpha = r_0 e^{i\gamma_0}, \quad \beta = r_1 e^{i\gamma_1} \quad \text{con } r_0, r_1 \geq 0 \text{ y } \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R},$$

nos permite expresar el ket $|a\rangle$ como

$$|a\rangle = r_0 e^{i\gamma_0} |0\rangle + r_1 e^{i\gamma_1} |1\rangle.$$

Como ya hemos explicado anteriormente, dos kets que difieren en una fase global representan el mismo estado físico, por lo que podemos eliminar el factor $e^{i\gamma_0}$, quedando

$$|a\rangle = r_0 |0\rangle + r_1 e^{i(\gamma_1 - \gamma_0)} |1\rangle.$$

Denotando $\phi = \gamma_1 - \gamma_0$, y usando la condición de normalización $r_0^2 + r_1^2 = 1$, podemos expresar r_0 y r_1 en función de un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ como

$$r_0 = \cos(\theta), \quad r_1 = \sin(\theta).$$

Finalmente, el ket $|a\rangle$ puede ser expresado a partir de dos valores reales, θ y ϕ , como

$$|a\rangle = \cos(\theta) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta) |1\rangle \quad (\theta, \phi) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$$

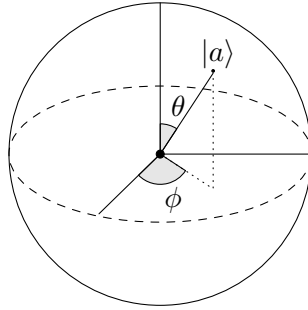


Figura 1: Representación de un ket $|a\rangle \in \mathcal{C}$ en la esfera

Pero no podemos realizar esta representación sobre toda la esfera, pues los valores de θ y ϕ no son únicos para cada estado, ya que

$$\cos(\theta) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta) |1\rangle = -(\cos(\pi - \theta) |0\rangle + e^{i(\pi + \phi)} \sin(\pi - \theta) |1\rangle),$$

solo se diferencian en una fase global. Por lo que los puntos (θ, ϕ) y $(\pi - \theta, \pi + \phi)$ representan el mismo estado físico.

Para evitar esta ambigüedad, se suele restringir el valor de θ al intervalo $[0, \pi/2)$, lo que corresponde a la mitad superior de la esfera.

Por convenio, se dibuja la esfera sobre los tres ejes espaciales X, Y, Z de tal modo que el ecuador quede en el plano XY , igualmente se considera el eje Z perpendicular a dicho plano. Los kets de la base canónica computacional se sitúan sobre el eje Z , estando el ket $|0\rangle$ en el eje positivo y el ket $|1\rangle$ sobre el eje negativo.

Esta forma de representación de un estado del cúbit recibe el nombre de **esfera de Bloch**.

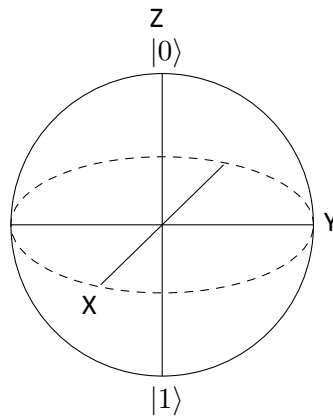


Figura 2: Ejes espaciales y representación de la base canónica computacional en la esfera de Bloch

Ejemplo 20.

El estado $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ corresponde al punto en el ecuador con $\phi = 0$.

Mientras que $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ corresponde al punto en el ecuador con $\phi = \pi$.

A fondo

Los siguientes libros pueden servir de material de apoyo y para profundizar más en los contenidos de este tema.

Sakurai, J. J. y Napolitano, J. (2017). *Modern Quantum Mechanics* (2.ª ed.). Cambridge University Press.

En la sección 1.2 presenta la notación de Dirac desde el principio, desarrollando cada concepto con la notación como única forma de representar el álgebra, lo que permite conocer todas las propiedades con esta forma de escritura.

Nielsen, M. A. y Chuang, I. L. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information* (10.ª ed.). Cambridge University Press.

En el capítulo 2 introduce la notación de Dirac y presenta una tabla resumen con las equivalencias entre la notación matricial y la notación de Dirac.

Problemas

1. Expresar los siguientes estados en notación de Dirac y verificar su normalización:

- a) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^t$.
- b) $(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2})^t$.
- c) $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^t$.

2. Para el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|0\rangle + i|1\rangle)$:

- a) Calcular las probabilidades de medir $|0\rangle$ y $|1\rangle$.
- b) Calcular las probabilidades de medir $|+\rangle$ y $|-\rangle$.
- c) Determinar el estado después de medir $|+\rangle$.

3. Verificar las siguientes identidades usando notación de Dirac:

- a) $X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$.
- b) $Y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$.
- c) $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$.
- d) $I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$.

4. Calcular los valores esperados $\langle\psi|X|\psi\rangle$, $\langle\psi|Y|\psi\rangle$ y $\langle\psi|Z|\psi\rangle$ para:

- a) $|\psi\rangle = |0\rangle$.
- b) $|\psi\rangle = |+\rangle$.
- c) $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}$.

5. Para el sistema de dos qubits en el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle)$:

- a) Verificar que el estado está normalizado.
- b) Calcular las probabilidades de medir cada estado de la base computacional.
- c) Determinar si el estado es separable o entrelazado.
- d) Calcular la probabilidad de medir el primer qubit en $|0\rangle$.

6. Para los cuatro estados de Bell:

- a) Verificar que forman una base ortonormal.

- b) Expresar cada estado de Bell como combinación lineal de la base computacional.
- c) Demostrar que todos son maximalmente entrelazados.
- d) Calcular las probabilidades de medir cada qubit individualmente.

7. Verificar que $|\Phi^+\rangle$ está entrelazado.

Si $|\Phi^+\rangle$ fuera separable, existirían $|\alpha\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ y $|\beta\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$ tales que:

$$|\Phi^+\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = ac|0\rangle \otimes |0\rangle + ad|0\rangle \otimes |1\rangle + bc|1\rangle \otimes |0\rangle + bd|1\rangle \otimes |1\rangle$$

Comparando con $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$:

$$ac = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad ad = 0, \quad bc = 0, \quad bd = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De $ad = 0$ y $bc = 0$, o bien $a = c = 0$ o bien $b = d = 0$, pero esto contradice $ac = bd = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$.

Por tanto, $|\Phi^+\rangle$ es entrelazado.

- 8. Determine si el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle)$ es entrelazado.
- 9. Para las matrices de Pauli X y Y , calcule explícitamente $(X \otimes Y)|01\rangle$.
- 10. Demuestre que la puerta CNOT puede crear entrelazamiento aplicándola a estados separables apropiados. Proporcione al menos dos ejemplos específicos.
- 11. Para el estado $|\psi\rangle = \cos \frac{\pi}{8}|0\rangle + e^{i\pi/4} \sin \frac{\pi}{8}|1\rangle$:
 - a) Calcular las probabilidades de medir Z en los valores ± 1 .
 - b) Calcular las probabilidades de medir X en los valores ± 1 .
 - c) Si se mide primero Z y se obtiene $+1$, ¿cuáles son las probabilidades para una medición posterior de X ?
- 12. Un cúbit evoluciona bajo el hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\pi}{4}Y$:
 - a) Calcular el operador de evolución $U(t) = e^{-i\hat{H}t}$.
 - b) Si el estado inicial es $|0\rangle$, determinar $|\psi(t)\rangle$.
 - c) ¿En qué instante t el estado se convierte en $|1\rangle$?
- 13. Para la rotación $R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2}$:
 - a) Escribir la forma matricial explícita de $R_z(\theta)$.
 - b) Demostrar que $R_z(\theta) = \cos \frac{\theta}{2}I - i \sin \frac{\theta}{2}Z$.

- c) Aplicar $R_z(\pi/2)$ al estado $|+\rangle$ y expresar el resultado.

14. Demostrar que la composición de rotaciones alrededor del mismo eje se suma:

$$R_z(\alpha)R_z(\beta) = R_z(\alpha + \beta).$$

15. Dadas las amplitudes cuánticas $\alpha = \frac{2}{3}$ y $\beta = \frac{\sqrt{5}i}{3}$:

- a) Verificar que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.
- b) Expresar cada amplitud en forma $re^{i\theta}$.
- c) Calcular las probabilidades asociadas a cada amplitud.

16. Un sistema cuántico tiene amplitudes $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i3\pi/4}$:

- a) Calcular la amplitud total $\alpha_1 + \alpha_2$.
- b) Determinar si hay interferencia constructiva, destructiva o parcial.
- c) Calcular la probabilidad total $|\alpha_1 + \alpha_2|^2$.

17. Tres amplitudes cuánticas tienen la misma magnitud $\frac{1}{\sqrt{3}}$ pero fases diferentes: 0 , $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{2}$:

- a) Escribir las tres amplitudes en forma binomial.
- b) Calcular la suma total de las tres amplitudes expresada en forma binomial.
- c) Explicar por qué el resultado tiene sentido físicamente.

a) ▶ $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{i \cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$
 ▶ $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4})) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$
 ▶ $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos(\frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{3\pi}{2})) = \frac{-i}{\sqrt{3}}.$

b)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - i \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) i \right)$$

- c) La suma de las tres amplitudes resulta en una amplitud con magnitud menor que la de cada una de las individuales, lo que indica interferencia destructiva parcial. Esto tiene sentido físicamente porque las fases diferentes causan que las ondas asociadas a las amplitudes se cancelen parcialmente entre sí.

18. Para las amplitudes $\alpha = ae^{i\phi}$ y $\beta = be^{i\psi}$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$:

- a) Demostrar que $|\alpha + \beta|^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\psi - \phi)$.
- b) ¿Para qué diferencia de fases se obtiene interferencia máxima?

- c) ¿Para qué diferencia de fases se obtiene interferencia mínima?
19. Dos amplitudes cuánticas α_1 y α_2 tienen magnitudes $\frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\frac{2}{\sqrt{5}}$ respectivamente:
- a) Si sus fases son $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi/3$, calcular $|\alpha_1 + \alpha_2|^2$.
 - b) Encontrar el valor de θ_2 que maximiza $|\alpha_1 + \alpha_2|^2$.
 - c) Encontrar el valor de θ_2 que minimiza $|\alpha_1 + \alpha_2|^2$.
20. Calcular la magnitud y fase de los siguientes números complejos:
- a) $z_1 = 3 + 4i$.
 - b) $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.
 - c) $z_3 = -5i$.
 - d) $z_4 = 7$.