

Bloque 3. Operadores y dinámicas

Estados probabilísticos

Índice

Esquema	3
Ideas clave	4
8.1 Introducción y objetivos	4
8.2 Estados puros y estados mixtos	4
8.3 Matriz de densidad	5
8.4 Evolución de la matriz de densidad	6
8.5 Representación en la esfera de Bloch	7
8.6 Sistemas compuestos y traza parcial.	8
8.7 Decoherencia cuántica	10
8.8 Canales cuánticos	10
8.9 Medidas de información cuántica.	12
8.10 Aplicaciones en computación cuántica	14
Problemas	15

► Estados cuánticos mixtos

- » Estados puros vs estados mixtos
- » Límites del formalismo de vectores estado
- » Necesidad de la matriz de densidad

► Matriz de densidad

- » Definición y propiedades
- » Operador densidad para estados puros
- » Estados mixtos y mezclas estadísticas
- » Criterio de pureza

► Sistemas compuestos y traza parcial

- » Producto tensorial de matrices de densidad
- » Traza parcial y sistemas abiertos
- » Decoherencia cuántica

► Canales cuánticos

- » Representación de Kraus
- » Teorema de no-clonación
- » Operaciones completamente positivas

► Información cuántica

- » Entropía de von Neumann
- » Información mutua cuántica
- » Fidelidad cuántica
- » Distancia de traza

8.1 Introducción y objetivos

En los temas anteriores hemos trabajado con el formalismo de vectores estado para describir sistemas cuánticos, donde cada estado se representa mediante un vector unitario $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert. Sin embargo, este enfoque tiene limitaciones importantes cuando consideramos sistemas cuánticos realistas que pueden encontrarse en estados de los cuales no tenemos información completa, o cuando estudiamos subsistemas de sistemas cuánticos compuestos.

El formalismo de matriz de densidad, desarrollado por von Neumann, proporciona una descripción más general y completa de los estados cuánticos que abarca tanto estados puros como estados mixtos. Esta generalización es fundamental en computación cuántica por varias razones:

- ▶ Permite describir **estados mixtos** que surgen por decoherencia o incertidumbre clásica.
- ▶ Facilita el análisis de **subsistemas cuánticos** mediante la traza parcial.
- ▶ Proporciona herramientas para cuantificar la **calidad de estados cuánticos** mediante medidas como la fidelidad.
- ▶ Es esencial para entender el **entrelazamiento cuántico** y la separabilidad de estados.
- ▶ Conecta directamente con la **teoría de información cuántica** y protocolos de comunicación cuántica.

Este tema establece las bases matemáticas necesarias para comprender sistemas cuánticos realistas, incluyendo efectos de ruido, decoherencia y la estructura de correlaciones cuánticas en sistemas compuestos.

8.2 Estados puros y estados mixtos

Definición 1: Estado puro

Un estado cuántico puro se describe completamente mediante un vector estado normalizado en un espacio de Hilbert.

Toda la información sobre el sistema está contenida en este vector estado, y el estado evoluciona de manera determinista bajo operadores unitarios.

Definición 2: Estado mixto

Un estado cuántico mixto representa una situación donde el sistema puede estar en uno de varios estados puros $|\psi_i\rangle$ con probabilidades clásicas p_i :

$$\text{Estado mixto} = \{(p_1, |\psi_1\rangle), (p_2, |\psi_2\rangle), \dots, (p_k, |\psi_k\rangle)\}$$

donde $p_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

Esta descripción surge cuando hay incertidumbre clásica sobre cuál es el estado real del sistema.

Ejemplo 1

Considere las siguientes situaciones que requieren estados mixtos:

- 1. Preparación incierta:** Alice prepara un cúbit en el estado $|0\rangle$ con probabilidad $1/2$ y en el estado $|1\rangle$ con probabilidad $1/2$. Bob recibe el cúbit pero no sabe cuál estado fue preparado.
- 2. Decoherencia:** Un cúbit inicialmente en superposición $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ interactúa con el ambiente y pierde coherencia, resultando en una mezcla estadística.
- 3. Subsistema:** Dado un sistema bipartito en estado entrelazado $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, cada subsistema individual está en un estado mixto.

8.3 Matriz de densidad

Definición 3: Operador densidad

El operador densidad de un sistema cuántico $\{(p_i, |\psi_i\rangle)\}$, es el operador ρ definido por:

$$\rho = \sum_{i=1} p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

Para un estado puro $|\psi\rangle$ el operador densidad es el proyector:

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$$

La matriz asociada, que también se denota como ρ en una base ortonormal $\{|e_j\rangle\}$ es:

$$\rho_{mn} = \langle e_m | \rho | e_n \rangle$$

Ejemplo 2

1. Estado puro $|0\rangle$:

$$\rho_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Estado de superposición $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$:

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Estado mixto equiprobable:

$$\rho_{\text{mix}} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{I}{2}$$

Resultado 1

Sea ρ un operador densidad. Entonces:

1. ρ es hermitiana: $\rho = \rho^\dagger$.
2. ρ es positiva semidefinida: $\langle\phi|\rho|\phi\rangle \geq 0$ para todo $|\phi\rangle$.
3. $\text{Tr}(\rho) = 1$ (normalización).
4. $0 \leq \text{Tr}(\rho^2) \leq 1$.
5. Los valores propios de ρ son no negativos y suman 1.

Teorema 2: Criterio de pureza

Un estado descrito por el operador densidad ρ es puro si y solo si $\text{Tr}(\rho^2) = 1$.
Equivalentemente, el estado es mixto si y solo si $\text{Tr}(\rho^2) < 1$.

8.4 Evolución de la matriz de densidad

Teorema 3: Evolución unitaria

Si un sistema con matriz de densidad ρ evoluciona bajo un operador unitario U , la nueva matriz de densidad es:

$$\rho' = U\rho U^\dagger$$

Esta transformación preserva todas las propiedades de un operador densidad válido.

Ejemplo 3: Aplicación de puertas cuánticas

Considere un cúbit en el estado mixto $\rho = \frac{1}{2}I$ y apliquemos la puerta Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\rho' = H\rho H^\dagger = H \cdot \frac{1}{2}I \cdot H^\dagger = \frac{1}{2}HH^\dagger = \frac{1}{2}I = \rho$$

El estado mixto completamente aleatorio es invariante bajo cualquier operación unitaria.

8.5 Representación en la esfera de Bloch

Para un cúbit, la matriz de densidad se puede escribir como:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$$

donde $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ es el vector de Bloch y $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ son las matrices de Pauli.

- **Estados puros:** $|\vec{r}| = 1$ (superficie de la esfera).
- **Estados mixtos:** $|\vec{r}| < 1$ (interior de la esfera).
- **Estado completamente mixto:** $\vec{r} = 0$ (centro de la esfera).

Ejemplo 4: Cálculo del vector de Bloch

Para el estado $\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$:

$$\vec{r} = (\text{Tr}(\rho\sigma_x), \text{Tr}(\rho\sigma_y), \text{Tr}(\rho\sigma_z)) = (0, 0, 1/2)$$

Por tanto $|\vec{r}| = 1/2 < 1$, confirmando que es un estado mixto.

8.6 Sistemas compuestos y traza parcial

Definición 4: Producto tensorial de operadores densidad

Para sistemas independientes descritos por matrices de densidad ρ_A y ρ_B , el sistema compuesto se describe por:

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$$

Sin embargo, no todos los estados de sistemas compuestos pueden escribirse en esta forma separable.

Definición 5: Taza parcial

Dado un sistema bipartito AB con matriz de densidad ρ_{AB} , la traza parcial sobre el subsistema B se define como:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_i (I_A \otimes \langle i|_B) \rho_{AB} (I_A \otimes |i\rangle_B)$$

donde $\{|i\rangle_B\}$ es cualquier base ortonormal del subsistema B .

Ejemplo 5

Consideremos el estado producto:

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes |+\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}$$

La matriz de densidad del sistema compuesto es:

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi| = (|0\rangle\langle 0|)_A \otimes (|+\rangle\langle +|)_B$$

En forma matricial (usando base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$):

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando la base $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$:

$$\begin{aligned}\rho_A &= \text{Tr}_B(\rho_{AB}) \\ &= \langle 0|_B \rho_{AB} |0\rangle_B + \langle 1|_B \rho_{AB} |1\rangle_B \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0|\end{aligned}$$

Conclusión: Para estados separables (no entrelazados), la traza parcial recupera exactamente el estado del subsistema.

Ejemplo 6

Considere el estado entrelazado $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ con matriz de densidad:

$$\rho_{AB} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La traza parcial sobre el subsistema B en la base $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$:

$$\begin{aligned}\rho_A &= \langle 0|_B \rho_{AB} |0\rangle_B + \langle 1|_B \rho_{AB} |1\rangle_B \\ &= \frac{1}{2} |0\rangle_A \langle 0|_A + \frac{1}{2} |1\rangle_A \langle 1|_A \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{I_A}{2}\end{aligned}$$

El subsistema A está en un estado mixto completamente aleatorio, a pesar de que el sistema total está en un estado puro.

Resultado 4

La operación de traza parcial satisface:

1. Linealidad: $\text{Tr}_B(\alpha\rho + \beta\sigma) = \alpha\text{Tr}_B(\rho) + \beta\text{Tr}_B(\sigma)$.
2. Preservación de la traza: $\text{Tr}(\text{Tr}_B(\rho_{AB})) = \text{Tr}(\rho_{AB})$.
3. $\text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \rho_A \text{Tr}(\rho_B)$.

8.7 Decoherencia cuántica

La **decoherencia cuántica** es el proceso por el cual un sistema cuántico pierde su coherencia debido a interacciones incontroladas con el entorno, transformando estados puros en estados mixtos.

Ejemplo 7: Decoherencia de un cúbit

Considere un cúbit inicialmente en el estado de superposición $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ que sufre decoherencia de desfase. Después de un tiempo t , el estado se convierte en:

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma t} \\ e^{-\gamma t} & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\gamma > 0$ es la tasa de decoherencia.

- ▶ En $t = 0$: $\rho(0) = |\psi\rangle\langle\psi|$ (estado puro), $S(\rho(0)) = 0$.
- ▶ Cuando $t \rightarrow \infty$: $\rho(\infty) = \frac{I}{2}$ (estado mixto), $S(\rho(\infty)) = 1$.
- ▶ La pureza decae como: $\text{Tr}(\rho(t)^2) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\gamma t})$.

8.8 Canales cuánticos

Definición 6: Canal cuántico

Un canal cuántico es una aplicación completamente positiva que preserva la traza:

$$\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$$

Esta aplicación describe la evolución más general posible de un sistema cuántico abierto.

Teorema 5: Representación de Kraus

Todo canal cuántico \mathcal{E} puede representarse mediante operadores de Kraus $\{K_i\}$:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$$

donde los operadores satisfacen la condición de completitud:

$$\sum_i K_i^\dagger K_i = I$$

Ejemplo 8: Canal de despolarización

El canal de despolarización para un cúbit con probabilidad p tiene la forma:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + \frac{p}{3}(\sigma_x \rho \sigma_x + \sigma_y \rho \sigma_y + \sigma_z \rho \sigma_z)$$

Los operadores de Kraus son:

$$K_0 = \sqrt{1-p}I, \quad K_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_x, \quad K_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_y, \quad K_3 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_z$$

Teorema 6: Teorema de no-clonación

No existe un canal cuántico que pueda clonar un estado cuántico arbitrario desconocido.

Matemáticamente, no existe ninguna aplicación lineal \mathcal{C} tal que:

$$\mathcal{C}(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

para todo estado $|\psi\rangle$.

Demostración.

Supongamos que existe tal operación. Para estados ortogonales $|0\rangle$ y $|1\rangle$:

$$\mathcal{C}(|0\rangle \otimes |0\rangle) = |0\rangle \otimes |0\rangle \tag{1}$$

$$\mathcal{C}(|1\rangle \otimes |0\rangle) = |1\rangle \otimes |1\rangle \tag{2}$$

Para el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$:

$$\mathcal{C}(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$$

Pero también:

$$|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$$

Como ambos resultados deben ser iguales, llegamos a una contradicción. \square

8.9 Medidas de información cuántica

Definición 7: Entropía de von Neumann

La entropía de von Neumann de un estado cuántico descrito por la matriz de densidad ρ se define como:

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$$

Si ρ tiene descomposición espectral $\rho = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$, entonces:

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i$$

La entropía cuantifica el grado de "mezcla." "desorden" del estado cuántico.

Resultado 7

[Propiedades de la entropía de von Neumann]

1. $S(\rho) \geq 0$ para toda matriz de densidad ρ .
2. $S(\rho) = 0$ si y solo si ρ representa un estado puro.
3. Para un sistema de dimensión d : $S(\rho) \leq \log_2 d$, con igualdad si y solo si $\rho = \frac{I}{d}$.
4. La entropía es invariante bajo transformaciones unitarias: $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$.
5. Subaditividad: $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$.

Ejemplo 9: Cálculo de entropía

1. **Estado puro:** Para cualquier $|\psi\rangle$, $S(|\psi\rangle\langle\psi|) = 0$.

2. **Estado mixto equiprobable:** Para $\rho = \frac{I}{2}$ en un cúbit:

$$S(\rho) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1 \text{ bit}$$

3. **Estado mixto general:** Para $\rho = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$:

$$S(\rho) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p) = H(p)$$

donde $H(p)$ es la entropía de Shannon clásica.

Definición 8: Información mutua cuántica

Para un estado bipartito ρ_{AB} , la información mutua cuántica se define como:

$$I(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$$

Esta cantidad mide las correlaciones totales (clásicas y cuánticas) entre los subsistemas A y B .

Definición 9: Fidelidad cuántica

La fidelidad entre dos estados cuánticos descritos por matrices de densidad ρ y σ se define como:

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr} \left(\sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \right)$$

Para estados puros $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$:

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|$$

La fidelidad mide qué tan cercanos están dos estados cuánticos.

Resultado 8

[Propiedades de la fidelidad]

1. $0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1$.
2. $F(\rho, \sigma) = F(\sigma, \rho)$ (simetría).
3. $F(\rho, \rho) = 1$ (normalización).
4. $F(\rho, \sigma) = 1$ si y solo si $\rho = \sigma$.
5. Para operadores unitarios: $F(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = F(\rho, \sigma)$.

Definición 10: Distancia de traza

La distancia de traza entre dos matrices de densidad ρ y σ se define como:

$$D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \text{Tr}(|\rho - \sigma|)$$

donde $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$ es el valor absoluto del operador A .

Resultado 9

[Propiedades de la distancia de traza]

1. $0 \leq D(\rho, \sigma) \leq 1$.

2. $D(\rho, \sigma) = 0$ si y solo si $\rho = \sigma$.
3. $D(\rho, \sigma) = D(\sigma, \rho)$ (simetría).
4. $D(\rho, \tau) \leq D(\rho, \sigma) + D(\sigma, \tau)$ (desigualdad triangular).
5. Para operadores unitarios: $D(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = D(\rho, \sigma)$.

Teorema 10: Relación entre fidelidad y distancia de traza

Para cualesquiera dos matrices de densidad ρ y σ :

$$1 - F(\rho, \sigma) \leq D(\rho, \sigma) \leq \sqrt{2(1 - F(\rho, \sigma))}$$

Ambas medidas proporcionan información complementaria sobre la proximidad entre estados cuánticos.

8.10 Aplicaciones en computación cuántica

Ejemplo 10: Fidelidad en protocolos cuánticos

En el protocolo de teleportación cuántica, la fidelidad entre el estado original $|\psi\rangle$ y el estado reconstruido ρ_{out} mide la calidad del protocolo:

$$F = \langle \psi | \rho_{\text{out}} | \psi \rangle$$

Para teleportación perfecta, $F = 1$. En presencia de ruido o errores de medición, $F < 1$, y el protocolo es útil solo si $F > 2/3$ (límite clásico).

Ejemplo 11: Caracterización del entrelazamiento

Para un estado bipartito ρ_{AB} , el grado de entrelazamiento puede cuantificarse mediante:

- **Entropía de entrelazamiento:** $E(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B)$ para estados puros.
- **Negatividad:** Basada en la traza de la transposición parcial.
- **Concurrencia:** Medida específica para sistemas de dos cúbits.

Estas medidas son fundamentales para protocolos de información cuántica como criptografía cuántica y computación distribuida.

Problemas

1. Calcule la matriz de densidad para un ensemble que contiene:

- a) 40 % de cúbits en estado $|0\rangle$
- b) 35 % de cúbits en estado $|1\rangle$
- c) 25 % de cúbits en estado $|+\rangle$

2. Para la matriz de densidad del ejercicio anterior:

- a) Calcule $\text{Tr}(\rho^2)$
- b) Determine si es un estado puro o mixto
- c) Calcule la entropía de von Neumann $S(\rho)$
- d) Encuentre el vector de Bloch \vec{r} y verifique que $|\vec{r}| < 1$

3. Un cúbit en estado $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle$ experimenta un canal de desfase puro que transforma:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow \rho' = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) & e^{-\gamma t} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) e^{i\phi} \\ e^{-\gamma t} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) e^{-i\phi} & \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix}$$

- a) Verifique que ρ' es una matriz de densidad válida
- b) Calcule $\text{Tr}(\rho'^2)$ en función de γ y t
- c) Determine en qué instante el estado se convierte en completamente mixto

4. Considere el estado de Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$:

- a) Escriba la matriz de densidad $\rho_{AB} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$ en forma matricial
- b) Calcule la traza parcial $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$
- c) Calcule la entropía de von Neumann $S(\rho_A)$
- d) Compare $S(\rho_{AB})$ con $S(\rho_A)$. ¿Qué indica esto sobre el entrelazamiento?

5. Para el canal de despolarización con operadores de Kraus:

$$K_0 = \sqrt{1-p}I, \quad K_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_x, \quad K_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_y, \quad K_3 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_z$$

- a) Verificar que satisfacen la condición de completitud $\sum_i K_i^\dagger K_i = I$

- b) Aplicar el canal al estado puro $|0\rangle$ y obtener ρ'
 - c) Calcular $\text{Tr}(\rho'^2)$ en función de p
 - d) Determine el valor de p para el cual el estado de salida es completamente mixto
6. Calcule la fidelidad y la distancia de traza entre los siguientes pares de estados:
- a) $\rho_1 = |0\rangle\langle 0|$ y $\rho_2 = |1\rangle\langle 1|$
 - b) $\rho_1 = |+\rangle\langle +|$ y $\rho_2 = \frac{I}{2}$
 - c) $\rho_1 = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|$ y $\rho_2 = \frac{1}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{3}{4}|1\rangle\langle 1|$
7. Para el estado bipartito $\rho_{AB} = \frac{1}{2}|\Phi^+\rangle\langle \Phi^+| + \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00|$ donde $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$:
- a) Calcule las matrices de densidad reducidas ρ_A y ρ_B
 - b) Calcule las entropías $S(\rho_A)$, $S(\rho_B)$ y $S(\rho_{AB})$
 - c) Calcule la información mutua cuántica $I(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$
 - d) Interprete el resultado: ¿qué nos dice sobre las correlaciones entre los subsistemas?