Bloque 2. Espacios cuánticos

Espacio dual y producto tensorial

Índice

Esquema

Ideas clave

5.1 Introducción y objetivos

Hasta ahora hemos explorado la columna vertebral matemática de la Mecánica Cuántica: los espacios vectoriales complejos ($\mathbb{C}^n$) y los espacios de Hilbert ($\mathcal{H}$), que sirven como el **espacio de estados** para un **sistema cuántico simple** (un *cúbit*, por ejemplo).

- Un **cúbit** se describe en $\mathcal{H}_1 \cong \mathbb{C}^2$.
- Un operador lineal (una medición, una compuerta) en este cúbit es una matriz en $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$.

El concepto de espacio dual es fundamental en el análisis funcional y proporciona una perspectiva profunda sobre la estructura de los espacios vectoriales. En computación cuántica, el espacio dual adquiere un significado especial a través de la notación de Dirac, donde los *bras* representan elementos del espacio dual de los *kets*.

La importancia del espacio dual en matemáticas y física se manifiesta en varios aspectos:

- Proporciona un marco **unificado** para entender funcionales lineales y formas multilineales.
- Permite la **caracterización completa** de propiedades geométricas mediante funcionales.
- Es esencial para la teoría de **operadores adjuntos** y autoadjuntos.
- Conecta la **notación bra-ket** con la estructura matemática.

Sin embargo, la verdadera potencia de la Computación Cuántica radica en la **superposición** y el **entrelazamiento** de **múltiples sistemas** (varios cúbits).

El problema de composición: Si tenemos dos sistemas cuánticos independientes, S_A y S_B, descritos por sus respectivos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$, ¿cuál es el espacio de estados $\mathcal{H}_{AB}$ que describe el **sistema compuesto** S_{AB}?

- Si S_A tiene dimensión n (dim$(\mathcal{H}_A) = n$) y S_B tiene dimensión m (dim$(\mathcal{H}_B) = m$), el espacio compuesto $\mathcal{H}_{AB}$ debe tener dimensión nm.
- **La suma directa** ($\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$), que usamos para combinar estados linealmente independientes, tiene dimensión $n + m$. **No sirve**.
- La operación correcta para combinar espacios de estados y construir el espacio de estados compuesto es el **producto tensorial** ($\otimes$).

El **producto tensorial** es el mecanismo matemático que nos permite describir rigurosamente estados entrelazados como el famoso estado de Bell $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, que no puede ser separado en un simple producto de estados individuales.

5.2 Espacio dual

Definición 1: Espacio dual

Sea V un espacio vectorial complejo. El **espacio dual** de V, denotado V^*, es el espacio vectorial de todos los funcionales lineales sobre V:

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{C} : f \text{ es lineal}\}$$

Las operaciones en V^* se definen puntualmente:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in V \tag{1}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{C} \tag{2}$$

Teorema 1: Dimensión del espacio dual

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita n sobre $\mathbb{C}$, entonces $\dim V^* = n$.

Demostración.

Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V. Definimos los funcionales $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ mediante:

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Para cualquier $f \in V^*$ y cualquier $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i^*(x)$$

Por tanto, $f = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i^*$, lo que muestra que $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ genera V^*. La independencia lineal se verifica fácilmente, por lo que constituye una base de V^*. $\square$

La demostración anterior proporciona una construcción explícita de una base del espacio dual a partir de una base del espacio original, que será útil en aplicaciones prácticas.

Definición 2: Base dual

Si $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de V, la **base dual** $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ de V^* se define por:

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

5.3 Teorema de representación de Riesz-Fréchet

Los resultados expuestos a continuación requieren de conocimientos avanzados en análisis funcional y teoría de espacios de Hilbert. Se recomienda consultar las referencias bibliográficas al final del tema para una comprensión más profunda. Se incluyen para entender la importancia del espacio dual y su conexión con la notación de Dirac.

En espacios de Hilbert, existe una correspondencia especial entre el espacio y su dual.

Teorema 2: Teorema de Riesz-Fréchet

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para cada funcional lineal continuo $f \in \mathcal{H}'$, existe un único elemento $y_f \in \mathcal{H}$ tal que:

$$f(x) = \langle x, y_f \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Además, $\|f\|_{\mathcal{H}'} = \|y_f\|_{\mathcal{H}}$.
La aplicación $\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ definida por $\Phi(y)(x) = \langle x, y \rangle$ es un isomorfismo antilineal isométrico.

5.4 Aplicaciones computacionales

Ejemplo 1: Mediciones cuánticas como funcionales

En mecánica cuántica, una medición de un observable A en un estado $|\psi\rangle$ se puede interpretar como la evaluación de un funcional:

El valor esperado $\langle A \rangle$ se puede escribir como:

$$\langle A \rangle = f_A(|\psi\rangle)$$

donde f_A es el funcional definido por $f_A(|\phi\rangle) = |\phi\rangle^*(A|\phi\rangle)$.

Ejemplo 2: Fidelidad como producto en el dual

La fidelidad cuántica entre dos estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ se define como:

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi, \phi\rangle|^2$$

Esto representa la evaluación del funcional $\langle\psi|$ sobre el vector $|\phi\rangle$, seguida de la toma del módulo al cuadrado.

5.5 Producto tensorial en espacios vectoriales

Sean V y W dos espacios vectoriales complejos. El **producto tensorial** de V y W, denotado por $V \otimes W$, es, informalmente, el espacio vectorial ”más pequeño”que contiene todos los productos formales de la forma $v \otimes w$, para $v \in V$ y $w \in W$, y que respeta la **bilinealidad**.

Definición 3

El **producto tensorial** de dos espacios vectoriales complejos V y W, denotado por $V \otimes W$, es el espacio vectorial generado por los productos tensoriales simples $v \otimes w$, donde $v \in V$ y $w \in W$, sujeto a las relaciones de bilinealidad.

El producto tensorial $V \otimes W$ se construye a partir del espacio vectorial libre $F(V \times W)$ generado por los pares ordenados $(v, w) \in V \times W$, factorizando por el subespacio R generado por las relaciones de **bilinealidad**:

1. **Linealidad en el primer argumento:**

$$(\alpha v_1 + \beta v_2, w) - \alpha(v_1, w) - \beta(v_2, w)$$

2. **Linealidad en el segundo argumento:**

$$(v, \alpha w_1 + \beta w_2) - \alpha(v, w_1) - \beta(v, w_2)$$

donde $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

El **producto tensorial** es el espacio cociente:

$$V \otimes W := F(V \times W)/R$$

El **tensor simple** $v \otimes w$ es la clase de equivalencia del par (v, w) en el espacio cociente.

Teorema 3: Propiedad universal

El producto tensorial $V \otimes W$ es un espacio vectorial, junto con una aplicación **bilineal** $\tau : V \times W \to V \otimes W$, que satisface la siguiente propiedad universal:
Para cualquier espacio vectorial Z y cualquier aplicación **bilineal** $f : V \times W \to Z$, existe una **única** aplicación **lineal** $\tilde{f} : V \otimes W \to Z$ tal que el diagrama conmuta: $f = \tilde{f} \circ \tau$.

Esta propiedad es la que asegura que $V \otimes W$ es el espacio vectorial **generado** por los productos $v \otimes w$ con las mínimas relaciones necesarias para preservar la estructura bilineal.

5.6 Base canónica

Al trabajar con espacios vectoriales de dimensión finita, podemos entender cómo se construyen las bases en el producto tensorial y por tanto su estructura.

Resultado 4

Si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una base para V y $\{w_j\}_{j=1}^m$ es una base para W, entonces el conjunto de **tensores simples**

$$\mathcal{B}_{V \otimes W} = \{v_i \otimes w_j\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}$$

es una base para $V \otimes W$.

Como consecuencia del resultado anterior, todo elemento $t \in V \otimes W$ puede escribirse de manera única como una combinación lineal de los elementos de la base canónica:

$$t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(v_i \otimes w_j)$$

donde $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$.

Además, la dimensión del espacio tensorial es el producto de las dimensiones de los espacios originales:

$$\text{dim}(V \otimes W) = \text{dim}(V) \cdot \text{dim}(W) = n \cdot m$$

Definición 4

Sea V y W dos espacios vectoriales complejos. Un elemento $t \in V \otimes W$ que puede escribirse como $t = v \otimes w$, con $v \in V$ y $w \in W$, se llama **tensor simple** o **producto separable**.

Sin embargo, la mayoría de los elementos de $V \otimes W$ son **combinaciones lineales** de tensores simples:

$$t = \sum_{k} \alpha_k (v_k \otimes w_k)$$

Nota: Un tensor que **no** puede escribirse como un tensor simple es lo que se conoce en la cuántica como un **estado entrelazado**.

5.7 Propiedades del producto tensorial

Recordemos que espacios vectoriales de la misma dimensión son isomorfos, pero no *iguales*. Por tanto, las siguientes propiedades se entienden como isomorfismos naturales entre espacios vectoriales.

- **Asociatividad:**
$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W) \cong U \otimes V \otimes W$$
- **Conmutatividad:**
$$V \otimes W \cong W \otimes V$$

5.8 Producto tensorial de operadores y matrices

Podemos extender la definición del producto tensorial a operadores lineales entre espacios vectoriales de manera natural.

Definición 5

Si $A : V_1 \to V_2$ y $B : W_1 \to W_2$ son operadores lineales, podemos definir el **operador tensorial** $A \otimes B$ en el espacio tensorial $V_1 \otimes W_1$, como

$$\begin{gathered} A \otimes B : V_1 \times W_1 \to V_2 \times W_2 \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(v_i \otimes w_j) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(A(v_i) \otimes B(w_j)) \end{gathered}$$

De igual manera, podemos definir el producto tensorial de matrices, siendo esta forma la más cómoda de trabajar.

Sean $A \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ y $B \in M_{p\times q}(\mathbb{C})$ dos matrices complejas. El producto tensorial matricial $A \otimes B$ es una matriz en $M_{np\times mq}(\mathbb{C})$ definida por

$$(A \otimes B)_{(i,j),(k,l)} = A_{i,k}B_{j,l}$$

para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq q$. Es decir, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ y } \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix},$$

entonces

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix}.$$

5.9 Sistemas cuánticos compuestos

Postulado IV: Composición de sistemas

El espacio de estados de un sistema cuántico compuesto, es el formado por el producto tensorial de los subsistemas que lo componen.

Ejemplo 3: Sistema de dos cúbits

Para dos cúbits independientes, el espacio de estados es $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$, con base computacional:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

5.10 Separabilidad y entrelazamiento cuántico

Definición 6: Estado separable

Un estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ es **separable** si existen $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_A$ y $|\beta\rangle \in \mathcal{H}_B$ tales que:

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$$

Un estado es **entrelazado** si no es separable.

Ejemplo 4: Estados separables

Los siguientes estados de dos cúbits son separables:

- $|0\rangle \otimes |0\rangle$
- $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle$
- $\frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) = |+\rangle \otimes |+\rangle$

Definición 7: Estados de Bell

Los cuatro estados de Bell forman una base ortonormal de estados entrelazados para dos cúbits:

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) \quad \text{(estado EPR)} \tag{7}$$

$$\left|\Phi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle) \tag{8}$$

$$\left|\Psi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle) \tag{9}$$

$$\left|\Psi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle) \quad \text{(estado singlete)} \tag{10}$$

Ejemplo 5: Verificación de entrelazamiento para $|\Phi^+\rangle$

Si $|\Phi^+\rangle$ fuera separable, existirían $|\alpha\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ y $|\beta\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$ tales que:

$$\left|\Phi^+\right\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = ac|0\rangle \otimes |0\rangle + ad|0\rangle \otimes |1\rangle + bc|1\rangle \otimes |0\rangle + bd|1\rangle \otimes |1\rangle$$

Comparando con $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$:

$$ac = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad ad = 0, \quad bc = 0, \quad bd = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De $ad = 0$ y $bc = 0$, o bien $a = c = 0$ o bien $b = d = 0$, pero esto contradice $ac = bd = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$.

Por tanto, $|\Phi^+\rangle$ es entrelazado.

Los estados de Bell exhiben correlaciones cuánticas no locales: medir un cúbit instantáneamente determina el resultado de medir el otro cúbit, independientemente de la distancia que los separe. Esta propiedad es fundamental para protocolos como la teleportación cuántica y la criptografía cuántica.

Teorema 5: Descomposición de Schmidt

Todo estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ puede escribirse como:

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i}|u_i\rangle \otimes |v_i\rangle$$

donde $\{|u_i\rangle\}$ y $\{|v_i\rangle\}$ son bases ortonormales, $\lambda_i \geq 0$, y los λ_i son únicos.
El **número de Schmidt** es la cantidad de $\lambda_i > 0$ y caracteriza el entrelazamiento:

- Número de Schmidt = 1 $\Leftrightarrow$ Estado separable.
- Número de Schmidt >1 $\Leftrightarrow$ Estado entrelazado.

Una vez que hemos definido el producto tensorial, podemos definir el producto exterior.

Definición 8

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, se define el **producto exterior** de dos vectores $u, v \in \mathcal{H}$ por:

$$u \wedge v = u \otimes v^\dagger \, .$$

Podemos interpretar el producto exterior como un operador lineal considerando su acción sobre un vector $w \in \mathcal{H}$:

$$(u \wedge v)(w) = (u \otimes v^\dagger)(w) = \langle v, w\rangle u \, .$$

Problemas

1. Sea $V = \mathbb{C}^2$ con la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$.

a) Verificar que $\mathcal{B}$ es efectivamente una base de V.

b) Encontrar la base dual $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, e_2^*\}$ correspondiente.

c) Expresar el funcional $f(x, y) = x + 2y$ como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}^*$.

d) Calcular $e_1^* \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ y $e_2^* \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-i \end{pmatrix}$.

2. En un espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ con el producto interno estándar:

a) Usar el teorema de Riesz-Fréchet para encontrar el vector $y_f \in \mathcal{H}$ que representa el funcional $f(x) = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \end{pmatrix} x$

b) Verificar que $f(x) = \langle x, y_f \rangle$ para cualquier $x \in \mathcal{H}$.

3. Considerar el operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por la matriz $T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Encontrar la representación matricial del operador adjunto T^*.

b) Verificar que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ para $x = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ y $y = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$.

c) Determinar si T es hermitiano, unitario o normal.

4. Considere el estado cuántico normalizado en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^2$:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

5. Sea el operador lineal A actuando sobre $\mathbb{C}^2$, representado por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el operador adjunto $A^\dagger$ (transpuesta conjugada de A).

b) Determine si A es un operador **hermítico** (autoadjunto). ¿Qué implicación física tiene esta propiedad en la Mecánica Cuántica?

c) Calcule los valores propios de A y demuestre que son reales.

6. Considere el operador hermítico (observable) H dado por:

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores propios λ_1 y λ_2.

b) Determine los vectores propios normalizados v_1 y v_2 asociados a estos valores propios.

c) Escriba la matriz diagonal D y la matriz unitaria de cambio de base U (la matriz de los estados propios). Confirme la descomposición espectral: $H = UDU^\dagger$.

7. Considere el sistema compuesto de dos qubits. El espacio de Hilbert es $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, donde $\mathcal{H}_A \cong \mathbb{C}^2$ y $\mathcal{H}_B \cong \mathbb{C}^2$.

a) ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{H}_{AB}$? Enumere todos los elementos de la base canónica tensorial.

b) Considere el tensor $t = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_0)$. Intente encontrar dos vectores $a \in \mathcal{H}_A$ y $b \in \mathcal{H}_B$ tal que $t = a \otimes b$. ¿Es t un tensor simple (estado separable)?

8. Sea el operador X (la matriz NOT cuántica o Pauli X) y el operador Z (Pauli Z):

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el operador compuesto $C = X \otimes Z$ utilizando el producto de Kronecker. Escriba la matriz resultante en $\mathbb{C}^4$.

b) El estado $|01\rangle$ se representa como el vector:

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcule el resultado de aplicar el operador C a este estado, es decir, $C|01\rangle$.

c) Verifique el resultado anterior aplicando la propiedad del producto tensorial de operadores directamente sobre el tensor simple:

$$C|01\rangle = (X \otimes Z)(|0\rangle \otimes |1\rangle) = (X|0\rangle) \otimes (Z|1\rangle).$$

9. Para el sistema de dos cúbits en el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle)$:

a) Verificar que el estado está normalizado

b) Calcular las probabilidades de medir cada estado de la base computacional

c) Determinar si el estado es separable o entrelazado

d) Calcular la probabilidad de medir el primer cúbit en $|0\rangle$

10. Para los cuatro estados de Bell:

a) Verificar que forman una base ortonormal

b) Expresar cada estado de Bell como combinación lineal de la base computacional

c) Demostrar que todos son entrelazados usando la descomposición de Schmidt

d) Calcular las probabilidades de medir cada cúbit individualmente

11. Determine si el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle)$ es entrelazado.

12. Para $A = \sigma_x$ y $B = \sigma_y$, calcule explícitamente $(A \otimes B)|01\rangle$.