Bloque 1. Fundamentos matemáticos

Números complejos y su geometría

Índice

Esquema

- **Fundamentos**
  - Definición y operaciones
  - **Formas**
    - Cartesiana: (a, b)
    - Binomial: $a + bi$
    - Polar: $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$
    - Exponencial: $re^{i\theta}$
- **Relaciones**
  - Desigualdad triangular: $|z + w| \leq |z| + |w|$
  - Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
  - Fórmula de De Moivre: $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$
- **Geometria**
  - Plano complejo
  - Módulo y argumento
  - Distancias y ángulos
  - Raíces n-ésimas
- **Funciones**
  - Exponencial: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$
  - Seno: $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
  - Coseno: $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
  - Seno hiperbólico: $\dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$
  - Coseno hiperbólico: $\dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

Ideas clave

1.1 Introducción y objetivos

Los números complejos constituyen el fundamento matemático esencial de la mecánica cuántica y, por tanto, de la computación cuántica. Mientras que en la física clásica las magnitudes se describen mediante números reales, en el mundo cuántico necesitamos la riqueza matemática de los números complejos para describir fenómenos como la superposición, la interferencia y el entrelazamiento.

La estrecha relación entre los números complejos y la mecánica cuántica se refleja en:

- Los **estados cuánticos** son vectores en un espacio vectorial complejo.
- Las **amplitudes cuánticas** son números complejos que determinan las probabilidades de los estados cuánticos.
- La **evolución temporal** de los sistemas cuánticos se describe mediante operadores unitarios con entradas complejas.
- La **interferencia cuántica**, base de muchos algoritmos cuánticos, requiere la aritmética compleja para su comprensión.

En este primer capítulo estudiaremos el plano complejo desde el punto de vista algebraico, geométrico y topológico. Empezaremos motivando la existencia de estos números y definiendo el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. También veremos que podemos considerar el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ como un subcuerpo de $\mathbb{C}$.

Repasaremos las distintas formas de escribir los números complejos: binomial, polar y exponencial. Veremos las ventajas de trabajar con los números complejos en forma exponencial, en particular en el cálculo de las raíces n-ésimas de un número complejo. Finalmente repasaremos algunas propiedades de las raíces de polinomios y presentaremos el teorema fundamental del álgebra.

1.2 El cuerpo de los números complejos

En esta primera sección recordaremos brevemente algunas de las propiedades algebraicas y geométricas de los números complejos. Empezaremos con el origen de los números complejos.

El propósito de los números complejos es proporcionar soluciones a ecuaciones polinómicas que no tienen solución real. Por ejemplo, las ecuaciones

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \text{o} \qquad x^2 + 2x + 5 = 0\,,$$

no tienen solución en el cuerpo de los números reales. Para resolver estas ecuaciones, introducimos el concepto de **unidad imaginaria**, que denotaremos por i, que cumple la relación

$$i^2 = -1\,.$$

Extendiendo los números reales con esta unidad imaginaria i, veremos que podemos resolver todas las ecuaciones polinómicas con coeficientes reales (y, de hecho, complejos).

Definición 1: El plano complejo

Llamaremos $\mathbb{C}$, **plano complejo** o **plano de Argand** a la terna $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, junto con las operaciones de suma y producto definidas por:

- **suma**: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- **producto**: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Esta manera de representar los números complejos es conocida como la **forma cartesiana**.

Resultado 1

El plano complejo $\mathbb{C}$ con las operaciones de suma y producto es un cuerpo conmutativo. Es decir, satisface las siguientes propiedades:

1. **Clausura:** dados $z, w \in \mathbb{C}$ y $z + w, zw \in \mathbb{C}$.
2. **Asociativa:** dados $z, w, x \in \mathbb{C}$, $z + (w + x) = (z + w) + x$, y $z(wx) = (zw)x$.
3. **Conmutativa:** dados $z, w \in \mathbb{C}$, $z + w = w + z$, y $zw = wz$.
4. **Distributiva:** dados $z, w, z \in \mathbb{C}$, $z(w + x) = zw + zx$.
5. **Neutro para la suma:** $\exists!\ 0 \in \mathbb{C}$ tal que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z + 0 = z$.
6. **Neutro para el producto:** $\exists!\ 1 \in \mathbb{C}$ tal que $\forall z \in \mathbb{C}$, $1z = z$.
7. **Opuesto para la suma:** $\forall z \in \mathbb{C}$, existe $-z \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = 0$.
8. **Inverso para el producto:** $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $zz^{-1} = 1$.

Demostración.

Se deja al lector que verifique que el plano complejo $\mathbb{C}$ con las operaciones de suma y producto es un cuerpo conmutativo (ejercicio **1.**). $\square$

Definición 2: Números complejos

Llamaremos **números complejos** a los elementos del plano complejo.

Tal como hemos definido las operaciones entre números complejos podemos identificar el número real $a \in \mathbb{R}$ con el complejo $(a, 0) \in \mathbb{C}$. Mediante esta identificación $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ dada por $a \mapsto (a, 0)$, podemos entender los números reales como un subcuerpo de los números complejos.

Ejemplo 1.

Los elementos que identificamos en el enunciado que demuestran que $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo son:

- El elemento neutro para la suma es $0 = (0, 0)$.
- El elemento neutro para el producto es $1 = (1, 0)$.
- El elemento opuesto para la suma es $-z = (-a, -b)$.
- El elemento opuesto para el producto es $z^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.

Teniendo en cuenta esta identificación y el hecho de que

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)\,,$$

obtenemos un elemento especial con una propiedad especial.

Definición 3: Unidad imaginaria

Llamaremos **unidad imaginaria** al complejo $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$.

Vamos a describir los elementos de $\mathbb{C}$ de forma más cómoda, dándole entidad propia y sin dependencia de la identificación con el plano complejo. Podemos escribir el complejo $z = (a, b)$ como

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i = a + bi\,,$$

esta manera de escribir los números complejos recibe el nombre de **forma binomial**.

Definición 4: Parte real e imaginaria de un complejo

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ un número complejo. Los números reales

$$a = \mathfrak{Re}(z)\,, \qquad b = \mathfrak{Im}(z)$$

que lo componen reciben el nombre de **parte real** y **parte imaginaria** de z respectivamente. Los números complejos con parte real nula se llaman **imaginarios**.

Ya hemos visto que podemos identificar a los números reales con los complejos con parte imaginaria nula.

A diferencia del cuerpo de los números reales, el cuerpo de los números complejos no es un cuerpo ordenado. Dicho de forma más precisa, no se puede definir un orden en $\mathbb{C}$ que sea compatible con las operaciones del cuerpo.

Definición 5: Conjugación

El **conjugado** del número complejo $z = a + bi$ es el complejo $\bar{z} = a - bi$.

Nota: En algunos libros de texto al número conjugado de z se le denota por z^*.

Notamos que un número complejo z es real si y solo si $z = \bar{z}$. Por otro lado, z es imaginario si y solo si $\bar{z} = -z$.

La conjugación satisface las siguientes propiedades.

Resultado 2

Si z y w son números complejos, se cumplen las siguientes igualdades:

- Parte real: $\mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$.
- Parte imaginaria: $\mathfrak{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.
- Conjugación de la suma: $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.
- Conjugación del producto: $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
- Conjugación de la inversa: $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$.
- Doble conjugación: $\bar{\bar{z}} = z$.

Demostración.

Se deja al lector que verifique las propiedades del conjugado (ejercicio **2.**). □

Definición 6: Módulo

El **módulo** de un número complejo z es el real no negativo definido por

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}\,,$$

o expresado en forma binomial

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Las siguientes propiedades son directamente consecuencia de la definición del módulo.

Resultado 3

Si z y w son números complejos, se cumplen las siguientes propiedades:

- $|z| \geq 0$.
- $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.
- $|zw| = |z||w|$.
- $|z| = |\bar{z}|$.

Demostración.

Se deja al lector que verifique las propiedades del módulo (ejercicio **3.**). □

Teorema 4: Desigualdad triangular

Si z y w son números complejos, se cumple que

$$|z + w| \leq |z| + |w|\,.$$

Demostración.

Aplicando la definición del módulo

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + \bar{w}\bar{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w\,. \end{aligned}$$

Ahora observamos que los dos últimos sumandos por el resultado **2.** se tiene que

$$z\bar{w} + \bar{z}w = z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})\,.$$

Además, la parte real de un número complejo siempre es menor que su módulo, por lo que

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\ &= (|z| + |w|)^2\,. \end{aligned}$$

Tomando raices cuadradas obtenemos la desigualdad triangular. □

Para una cantidad finita de sumandos, podemos extender la desigualdad triangular al siguiente resultado.

Teorema 5: Desigualdad triangular finita

Si $z_1, z_2, \dots, z_n$ son números complejos, se cumple que

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \,.$$

Demostración.

Por la propiedad asociativa de la suma, y aplicando la desigualdad triangular repetidamente obtenemos

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| &\leq |z_1| + |z_2 + \cdots + z_n| \\ &\leq |z_1| + |z_2| + |z_3 + \cdots + z_n| \\ &\leq \cdots \\ &\leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \,. \end{aligned}$$

$\square$

La conjugación y el módulo permiten calcular fácilmente el inverso multiplicativo de cualquier complejo $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \,. \tag{1}$$

Ejemplo 2.

Para encontrar el inverso de $z = 1 + i$ debemos calcular $\bar{z}$ y $|z|$.

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{1-i}{1+1} \\ &= \frac{1-i}{2} \,. \end{aligned}$$

1.3 Forma polar

Recordamos que un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, diferente del origen de coordenadas, puede expresarse en **coordenadas polares** (r, θ), de forma que

$$x = r \cos\theta \,, \quad y = r \sin\theta \,.$$

Definición 7

Sea $z = a + bi$ un número complejo no nulo. Diremos que el ángulo θ es un **argumento** de z si:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}.$$
$$\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}.$$

Si $z = 0$ diremos que su argumento es nulo.

Observaremos que el argumento de un número complejo no está completamente definido, pues si θ cumple las propiedades del argumento, entonces $\theta + 2\pi$ también las cumple. Por lo tanto, podemos considerar el conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo z como

$$\arg z = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \mid \cos(\theta) = \frac{a}{|z|}, \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \right\}.$$

Si restringimos el valor del argumento al intervalo $[-\pi, \pi)$, tendremos unicidad en la definición y por este motivo le damos a este valor el nombre de **argumento principal** y lo denotamos por $\operatorname{Arg} z$.

Observamos por último que de las coordenadas polares, podemos deducir $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y que este valor es exactamente el módulo del número complejo asociado.

Definición 8: Forma polar

Sea z un número complejo. Llamaremos **forma polar** a la expresión

$$z = |z|(\cos(\operatorname{Arg} z) + i \sin(\operatorname{Arg} z)).$$

1.4 Forma exponencial

El interés de la forma polar radica en las siguientes fórmulas, que relacionan los números complejos con las funciones trigonométricas. Estas fórmulas son fundamentales en muchas aplicaciones de los números complejos, incluyendo la computación cuántica.

Teorema 6: Fórmula de Euler

Sea $\theta \in \mathbb{R}$, se cumple

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta. \tag{2}$$

Demostración.

Esta demostración se deja para el final del tema, una vez que se hayan definido las función exponencial y las funciones trigonométricas. $\square$

Teorema 7: Fórmula de De Moivre

Para z un número complejo y $n \in \mathbb{Z}$

$$z^n = |z|^n(\cos(n \operatorname{Arg} z) + i \sin(n \operatorname{Arg} z)) \,. \tag{3}$$

Demostración.

Esta demostración se deja para el final del tema, una vez que se hayan probado las propiedades de la función exponencial. $\square$

La fórmula de Euler es muy importante porque motiva la siguiente notación, que será de extrema utilidad a partir de ahora.

Definición 9: Forma exponencial

Un número complejo z puede escribirse en su **forma exponencial** como

$$z = |z|e^{i \operatorname{Arg} z} \,.$$

Ejemplo 3.

Consideremos el número complejo $z = -1 - \sqrt{3}i$, vamos a calcular el conjugado, así como las distintas formas de representación.
Por definición, el conjugado es el número $\bar{z} = -1 + \sqrt{3}i$ y si lo multiplicamos por z tendremos $z\bar{z} = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$.
El módulo de z es $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{4} = 2$.
Para calcular el argumento, como $\mathfrak{Re}(z) \neq 0$ tenemos que

$$\theta = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \,.$$

Pero este cálculo no tiene en cuenta el verdadero cuadrante del ángulo. En este ejemplo, el argumento principal de z está en tercer cuadrante, por lo tanto

$$\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \,.$$

Expresado z de forma polar sería

$$z = 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)i \,,$$

mientras que expresado de forma exponencial sería

$$z = 2e^{\frac{4\pi i}{3}} .$$

1.5 Geometría compleja

Notamos que un complejo de módulo 1 es de la forma $e^{i\theta}$. Geometricamente, la multiplicación $z \mapsto e^{i\theta} z$ es una rotación en el plano complejo de ángulo θ alrededor del origen.

La forma exponencial permite hacer algunos cálculos fácilmente, especialmente los que involucran productos y cocientes.

Resultado 8

Dados $re^{i\theta}$ y $se^{i\varphi}$ dos números complejos expresados en forma exponencial, se tiene:

- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$.
- $re^{i\theta} \cdot se^{i\varphi} = (rs)e^{i(\theta+\varphi)}$.
- Para r no nulo, $\left(re^{i\theta}\right)^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}$.

Demostración.

Para la primera igualdad debemos observar que

$$\overline{e^{i\theta}} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta} .$$

Para la segunda igualdad, observamos que

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\varphi} &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\ &= \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) + i(\sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi)) \\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) \\ &= e^{i(\theta+\varphi)} . \end{aligned}$$

Por último, para la tercera igualdad, por la definición del inverso de un complejo (1)

$$\left(e^{i\theta}\right)^{-1} = \frac{\overline{e^{i\theta}}}{|e^{i\theta}|^2} = \frac{e^{-i\theta}}{1} = e^{-i\theta} .$$

□

Otra ventaja de la notación exponencial es que facilita enormemente el cálculo de las raíces n-ésimas.

Definición 10: Raíces n-ésimas de un complejo

Sea $z = re^{i\theta}$ un número complejo no nulo y $n \in \mathbb{N}$. Las **raíces n-ésimas** de z son los complejos $w = \rho e^{i\psi}$ tales que $w^n = z$. Por lo tanto

$$\rho = \sqrt[n]{r}\,, \qquad \psi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

En particular, las **raíces n-ésimas de la unidad** son

$$\sqrt[n]{1} = \left\{ e^{i\theta}\,, \quad \theta = \frac{2\pi k}{n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}.$$

Geometricamente, las raíces n-ésimas de la unidad de un complejo son los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen y circunscrito en una esfera de radio 1.

Ejemplo 4.

Vamos a calcular las raíces cúbicas del número complejo $z = -1 + i$. Si escribimos el complejo z en forma exponencial, tenemos

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\,.$$

Si $w = \rho e^{i\psi}$ es una raíz cúbica de z, entonces

$$w^3 = \rho^3 e^{3i\psi} = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} \Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = \sqrt{2} \Rightarrow \rho = \sqrt[6]{2} \\ 3\psi = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow \psi = \dfrac{(3+8k)\pi}{12}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}.$$

Por lo tanto, las raíces cúbicas son:

$$\begin{aligned} k = 0: &\quad w_0 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\,, \\ k = 1: &\quad w_1 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{11\pi}{12}i}\,, \\ k = 2: &\quad w_2 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{19\pi}{12}i}\,. \end{aligned}$$

Como podemos ver en la figura 1, estas raíces son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[6]{2}$.

Ejemplo 5.

Si tenemos que calcular la raíz cúbica de 27, la respuesta rápida sería dar solo la raíz real 3, y el resultado sería incompleto, porque también debemos calcular las otras dos raíces complejas.
Si escribimos 27 en forma polar, tenemos $27 = 27e^{i\cdot 0}$.

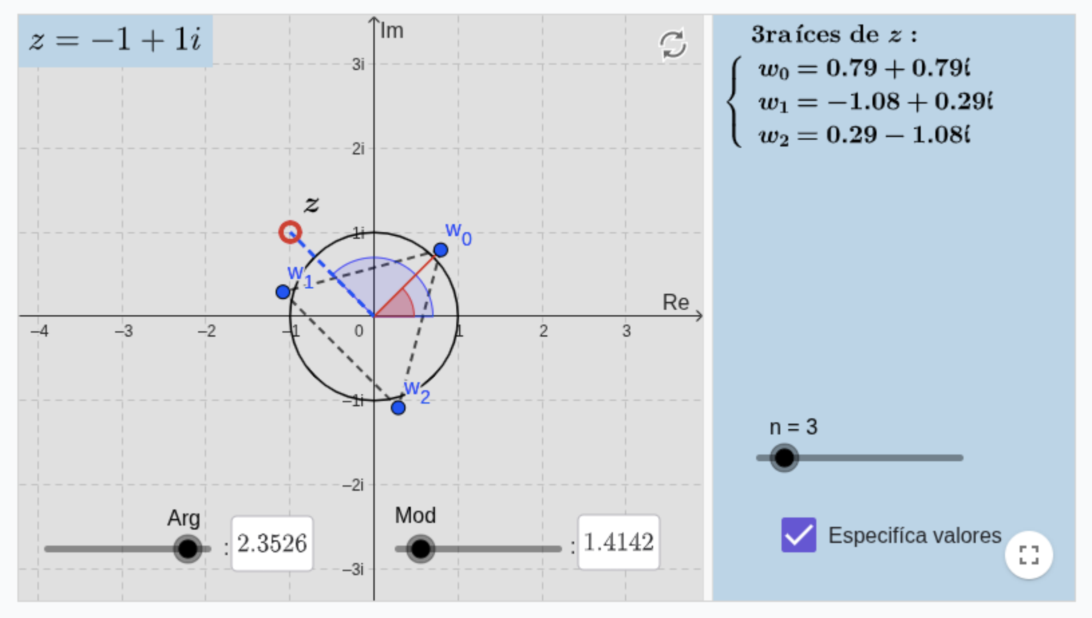

Figura 1: Raíces cúbicas del complejo $z = -1 + i$. Fuente: https://complex-analysis.com
.

Si $w = \rho e^{i\psi}$ es una raíz cúbica de 27, entonces

$$w^3 = \rho^3 e^{3i\psi} = 27e^{i\cdot 0} \Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = 27 \Rightarrow \rho = 3 \\ 3\psi = 2\pi k \Rightarrow \psi = \dfrac{2\pi k}{3}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}.$$

Por lo tanto, las raíces cúbicas son:

$$\begin{aligned} k = 0: &\quad w_0 = 3e^{i\cdot 0}\,, \\ k = 1: &\quad w_1 = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}\,, \\ k = 2: &\quad w_2 = 3e^{i\frac{4\pi}{3}}\,. \end{aligned}$$

1.5.1 Geometría euclídea

Como elementos geométricos heredados de la geometría euclídea de $\mathbb{R}^2$ tenemos:

- **Rectas**: En particular, las rectas paralelas a los ejes $\mathfrak{Re}(z) = a$, o $\mathfrak{Im}(z) = b$.
- **Semiplanos** (abiertos o cerrados). En particular, $\mathfrak{Re}(z) > a$, $\mathfrak{Im}(z) > b$, etc.
- **Bandas**: regiones comprendidas entre dos rectas paralelas.
- **Discos**: (abiertos o cerrados):

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z_0, z) < r\}\,, \qquad \bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z_0, z) \leq r\}\,.$$

- **Circunferencias**:

$$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z_0, z) = r\} = \partial D(z_0, r)\,.$$

  En particular, la circunferencia unidad $C_1 = \partial D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

- **Coronas circulares**:

$$C(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < d(z_0, z) < r_2\}\,.$$

- El **módulo** es la distancia del origen al punto, $|z| = d(0, z)$.
- El **conjugado** es la reflexión de respecto al eje real.
- La **suma** corresponde a la suma vectorial en el plano.

Es conveniente observar, como se aprecia en la figura 2 que la multiplicación de números complejos tiene dos efectos geométricos:

- Una rotación de ángulo la suma de los argumentos.
- Una multiplicación de los módulos.

1.6 Funciones complejas elementales

Aunque el estudio de las funciones complejas es ligeramente diferente al de las funciones reales, el estudio de las funciones complejas elementales es similar al de las funciones reales elementales y su definición es una extensión analítica de las funciones reales elementales cumpliendo las mismas propiedades algebraicas.

Por ello solo vamos a dar la definición de las funciones complejas elementales y no su estudio.

Definición 11: Función compleja

Sea A un subconjunto de $\mathbb{C}$. Una **función compleja** es una función $f\colon A \to \mathbb{C}$ que toma valores complejos.

Toda función compleja puede escribirse de forma única como $f = u + iv$, donde $u, v\colon A \to \mathbb{R}$ son funciones reales, llamadas respectivamente **parte real**, $u = \mathfrak{Re}(f)$, y **parte imaginaria**, $v = \mathfrak{Im}(f)$.

Ya hemos usado la función exponencial para expresar su valor con exponente un número complejo, pero podemos obtener la formulación analítica de la función exponencial, extendiendo la correspondiente función analítica de la exponencial real.

Figura 2: Producto de dos números complejos $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ y $3e^{i\frac{\pi}{4}}$. Fuente: Elaboración propia con Geogebra.

Definición 12: Función exponencial compleja

Para $z \in \mathbb{C}$, la función **exponencial compleja** se define como

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

La función exponencial compleja, cumple las mismas propiedades que la exponencial real en cuanto a las manipulaciones algebraicas, como vemos en el siguiente resultado, cuya demostración se basa en la fórmula de Euler (2).

Resultado 9

Sean $z = a + bi$ y w dos números complejos con $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple:

- $e^{z+w} = e^z e^w$.
- $(e^z)^n = e^{nz}\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

La función exponencial compleja es analítica en todo el plano complejo, contínua e infinitamente derivable, además su derivada es ella misma.

Resultado 10

La función exponencial compleja cumple

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z\,.$$

Si usamos la fórmula de Euler (2) para el ángulo $\theta = \pi$, obtenemos una de las fórmulas más importantes de la matemática

$$e^{i\pi} + 1 = 0\,.$$

A partir de la definición de la función exponencial y usando la fórmula de Euler (2), podemos definir analíticamente también las funciones seno y coseno para números complejos.

Definición 13: Funciones trigonométricas complejas

Para $z \in \mathbb{C}$, las funciones seno y coseno se definen como

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,.\\ \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,.\end{aligned}$$

Las funciones seno y coseno cumplen algunas de las propiedades que las funciones seno y coseno reales, como por ejemplo que son 2π-periódicas, aunque la principal difrencia es que las funciones seno y coseno complejas no están acotadas.

Resultado 11

Sean z y w dos números complejos, se cumple:

- $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$.
- $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$.

De forma análoga definimos analíticamente las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico para números complejos.

Definición 14: Funciones hiperbólicas complejas

Para $z \in \mathbb{C}$, las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico se definen como

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\,.$$
$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\,.$$

A fondo

Los siguientes libros pueden servir de material de apoyo y para profundizar más en los contenidos de este tema.

O'Neill, P. V. Matemáticas avanzadas para Ingeniería. Cengage Learning, 2012

Del primer recurso se recomienda la lectura del capítulo 8.

Yanofsy, N. S. y Mannucci, M. A. Quantum Computing for Computer Scientists. Cambridge University Press, 2019

Se recomienda la lectura del capítulo 1.

Asmar, N. K. y Grafakos, L. Complex Analysis with Application. Springer, 2018

Se recomienda la lectura del capítulo 1.

Lang, S. Complex Analysis. Springer, 2003

Se recomienda la lectura del capítulo 1.

Problemas

1. Demostrar las propiedades del cuerpo $\mathbb{C}$ enunciadas en el resultado 1.

2. Demostrar las propiedades del conjugado enunciadas en el resultado 2.

3. Demostrar las propiedades del módulo enunciadas en el resultado 3.

4. Calcular las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma binomial:

   a) $(3+2i)+(1-4i)$
   b) $(2+i)(3-2i)$
   c) $\frac{1+2i}{2-i}$
   d) $|3+4i|$
   e) $\overline{(2-3i)(1+i)}$

5. Demostrar que para cualquier par de números complejos $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$|z| - |w| \leq |z - w| \, .$$

6. Convertir a forma polar:

   a) $z_1 = 1 + i$
   b) $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$
   c) $z_3 = -4i$

7. Demostrar que para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

8. Expresar en forma exponencial y realizar las operaciones:

   a) $(1+i)^8$
   b) $\dfrac{2e^{i\pi/3}}{1+i\sqrt{3}}$
   c) $\sqrt[3]{-8i}$

9. Encontrar todos los números complejos z que satisfacen:

   a) $|z-i| = |z+1|$

b) $|z|^2 + z + \overline{z} = 3$

c) $z^4 = -16$

10. Un número complejo z satisface $z^3 = 2 + 2i\sqrt{3}$:

a) Expresar $2 + 2i\sqrt{3}$ en forma exponencial

b) Encontrar las tres raíces cúbicas

c) Representar las raíces en el plano complejo

d) ¿Cuál es la interpretación geométrica de estas raíces?

11. Calcular todas las raíces cuartas de $16i$.

12. Sean z, w dos números complejos tal que $\bar{z}w \neq 1$. Demostrar que

$$\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| \leq 1\,.$$

Demostrar que la igualdad se da si y solo si $|z| = |w| = 1$.

13. Demostrar que para cualquier número complejo $z \neq 1$ se tiene que

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}\,.$$

14. Calcular el valor en forma binomial de i^i.

15. Sea la función compleja $f(z) = z^2 + 2z + 2$.

a) Calcular la parte real y la parte imaginaria de f.

b) Si $f(z) = u(z) + iv(z)$ donde $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ son funciones reales. y $z = x + iy$ donde $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$