

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Álgebra lineal en computación cuántica	Apellidos: Nombre:	

Actividad 3: Análisis de decoherencia en un cúbit

1. Objetivos y pautas de elaboración

El principal objetivo de esta actividad es aplicar integralmente la teoría de matrices de densidad al análisis de un problema real: la **decoherencia cuántica**, que es el principal obstáculo en la construcción de computadores cuánticos prácticos.

A través de un caso de estudio completo, los estudiantes deberán:

- ▶ Modelar matemáticamente la degradación de un estado cuántico.
- ▶ Cuantificar la pérdida de información cuántica usando múltiples métricas.
- ▶ Interpretar físicamente los resultados en el contexto de la computación cuántica.
- ▶ Analizar la viabilidad temporal de operaciones cuánticas.

Este ejercicio integrador requiere el uso de todos los conceptos del tema de estados probabilísticos.

2. Problema: Decoherencia de fase en un cúbit

2.1. Contexto

Un laboratorio de computación cuántica ha preparado un cúbit en el estado de superposición:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Este cúbit forma parte de un procesador cuántico y será utilizado en un algoritmo que requiere mantener la coherencia cuántica durante al menos 100 microsegundos (μs).

Sin embargo, el cúbit no está perfectamente aislado del entorno. La interacción incontrolada con campos electromagnéticos externos, vibraciones térmicas y otros factores ambientales provocan un proceso de **decoherencia de fase** (dephasing).

Este proceso se modela matemáticamente mediante la evolución:

$$\rho(t) = (1 - p(t))\rho_{\text{puro}} + p(t)\rho_{\text{mixto}}$$

donde:

- ▶ $\rho_{\text{puro}} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ es la matriz de densidad del estado inicial puro.
- ▶ $\rho_{\text{mixto}} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|$ es el estado completamente mixto.
- ▶ $p(t) = 1 - e^{-t/T_2}$ es la probabilidad de decoherencia.
- ▶ $T_2 = 150 \mu s$ es el **tiempo de coherencia** característico del cúbit.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Álgebra lineal en computación cuántica	Apellidos: Nombre:	

2.2. Apartados

1. Modelado inicial

Escribir explícitamente en forma matricial 4×4 la matriz de densidad del estado inicial puro $\rho_{\text{puro}} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ en la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

2. Evolución temporal

Escribir la expresión matricial explícita de $\rho(t)$ sustituyendo ρ_{puro} , ρ_{mixto} y $p(t)$.

3. Criterio de pureza

Calcular $\text{Tr}(\rho^2(t))$ como función del tiempo y analizar:

- (a) ¿En qué instante el estado deja de ser puro?
- (b) ¿Cuándo alcanza el 50 % de pureza?
- (c) ¿Hacia qué valor tiende cuando $t \rightarrow \infty$?

4. Entropía de von Neumann

Calcular la entropía $S(\rho(t)) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$ como función del tiempo.

Pista: Primero encuentre los valores propios de $\rho(t)$.

5. Fidelidad cuántica

Calcular la fidelidad $F(t) = \text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho(0)}\rho(t)\sqrt{\rho(0)}})$ entre el estado inicial y el estado en tiempo t .

Para estados de cúbit, se puede usar la fórmula simplificada:

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr}(\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma})^2$$

6. Distancia de traza

Calcular la distancia de traza $D(t) = \frac{1}{2}\text{Tr}|\rho(0) - \rho(t)|$ entre el estado inicial y el estado en tiempo t .

7. Vector de Bloch

El estado de un cúbit puede representarse mediante el vector de Bloch $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ donde:

$$r_i = \text{Tr}(\rho\sigma_i), \quad i = x, y, z$$

Calcular $\vec{r}(t)$ y describir geométricamente la trayectoria del estado en la esfera de Bloch.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Álgebra lineal en computación cuántica	Apellidos: Nombre:	

8. Análisis de viabilidad

Dado que el algoritmo cuántico requiere mantener coherencia durante $100 \mu s$ y el tiempo característico es $T_2 = 150 \mu s$:

- (a) Calcular la fidelidad $F(100 \mu s)$.
- (b) Calcular la pureza $\text{Tr}(\rho^2(100 \mu s))$.
- (c) Si el algoritmo requiere fidelidad mínima del 80 %, ¿es viable ejecutarlo?
- (d) ¿Cuál es el tiempo máximo disponible para mantener $F \geq 0,8$?

3. Requisitos de la actividad

Modalidad de trabajo

Esta actividad se realizará de manera **grupal**. Cada grupo debe indicar claramente los nombres de todos los miembros en la portada. Aunque se trabaje en grupo, cada miembro debe entregar su propia versión de la actividad.

Formato y presentación

El trabajo deberá cumplir los siguientes requisitos formales:

- ▶ **Estructura:** El documento seguirá la estructura de un artículo académico, incluyendo introducción, desarrollo, conclusiones y referencias bibliográficas.
- ▶ **Herramientas:** La redacción se realizará íntegramente en L^AT_EX.
- ▶ **Entrega:** Se entregará un único archivo en formato PDF compilado.
- ▶ **Citación:** Todas las referencias bibliográficas seguirán estrictamente la normativa APA 7.^a edición.

Criterios de evaluación

Se valorarán especialmente los siguientes aspectos:

- ▶ Claridad y rigor en la exposición de los cálculos intermedios.
- ▶ Justificación matemática y razonamiento lógico de los pasos realizados.
- ▶ Interpretación crítica de los resultados obtenidos y su contextualización.
- ▶ Corrección en el uso del lenguaje técnico y la notación matemática.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Álgebra lineal en computación cuántica	Apellidos: Nombre:	

Extensión recomendada

Se recomienda un trabajo entre 8 y 12 páginas incluyendo cálculos, gráficas (opcionales pero recomendadas) e interpretaciones.

Nota importante: La rúbrica de evaluación únicamente se aplicará a aquellos trabajos que cumplan todos los requisitos de formato especificados. Los trabajos que no satisfagan estos requisitos podrán ser devueltos sin evaluación.

4. Rúbrica

Análisis de decoherencia en un cùbit	Descripción	Valor	Peso
Normativa	Entregar la actividad en plazo y cumpliendo las indicaciones.	0,5	5 %
Biliografía y citas APA	Cumplir con las normas de citación y bibliografía según la normativa APA 7.	0,5	5 %
Apartado 1	Matriz de densidad inicial correcta con verificaciones	1	10 %
Apartado 2	Evolución temporal explícita y correcta	1	10 %
Apartado 3	Pureza: cálculo correcto y análisis temporal completo	1.5	15 %
Apartado 4	Entropía: valores propios y límites correctos	1.5	15 %
Apartado 5	Fidelidad: cálculo e interpretación	1	10 %
Apartado 6	Distancia de traza correcta	1	10 %
Apartado 7	Vector de Bloch y descripción geométrica	1	10 %
Apartado 8	Ánálisis de viabilidad completo y propuestas justificadas	1	10 %
		10	100 %