

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Álgebra lineal en computación cuántica	Apellidos: Nombre:	

## Actividad 2: Sistemas Cuánticos y Entrelazamiento

### 1. Objetivos y pautas de elaboración

El principal objetivo de esta actividad es desarrollar la capacidad de análisis de sistemas cuánticos compuestos, entrelazamiento y mediciones en espacios de Hilbert.

Con esta actividad se pretende que el estudiante:

- ▶ Trabaje con la complejidad conceptual del entrelazamiento cuántico.
- ▶ Desarrolle práctica en los cálculos con productos tensoriales.
- ▶ Entienda que la interpretación física de resultados matemáticos es crucial.
- ▶ Es fundamental distinguir estados separables de estados entrelazados mediante argumentos rigurosos.

### 2. Problemas

#### 1. Ortogonalización y proyecciones

- (a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt para ortogonalizar el conjunto de vectores en  $\mathbb{C}^3$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- (b) Sea  $W = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^3$ . Calcular la proyección ortogonal de  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  sobre  $W$ .

- (c) Para el observable  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$ , verificar que es hermitiano y encontrar su descomposición espectral.

- (d) Calcular el valor esperado  $\langle A \rangle$  para el estado  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + \sqrt{2}|1\rangle)$  si el observable es  $A$  del apartado anterior.

#### 2. Producto tensorial y sistemas compuestos

- (a) Calcular explícitamente el producto tensorial  $(X \otimes Z)|01\rangle$  donde  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
- (b) Para el sistema de dos qubits en el estado  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle)$ , verificar normalización y calcular las probabilidades de medir cada estado de la base computacional.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Álgebra lineal en computación cuántica	Apellidos: Nombre:	

(c) Aplicar la puerta CNOT al estado del apartado anterior y determinar el estado resultante.

(d) Calcular la probabilidad de medir el primer qubit en  $|0\rangle$  para el estado  $|\psi\rangle$  original.

### 3. Entrelazamiento cuántico

(a) Determinar si el estado  $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle)$  es separable o entrelazado.

(b) Verificar que los cuatro estados de Bell forman una base ortonormal de  $\mathbb{C}^4$ .

(c) Para el estado de Bell  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ , calcular las probabilidades de medir cada qubit individualmente.

(d) Demostrar que el estado de Bell  $|\Phi^+\rangle$  es maximalmente entrelazado calculando la entropía de entrelazamiento  $S(\rho_A)$  donde  $\rho_A$  es la matriz de densidad reducida del primer qubit.

### 3. Requisitos de la actividad

#### Modalidad de trabajo

Esta actividad se realizará de manera **individual**.

#### Formato y presentación

El trabajo deberá cumplir los siguientes requisitos formales:

- ▶ **Estructura:** El documento seguirá la estructura de un artículo académico, incluyendo introducción, desarrollo, conclusiones y referencias bibliográficas.
- ▶ **Herramientas:** La redacción se realizará íntegramente en LATEX.
- ▶ **Entrega:** Se entregará un único archivo en formato PDF compilado.
- ▶ **Citación:** Todas las referencias bibliográficas seguirán estrictamente la normativa APA 7.<sup>a</sup> edición.

#### Criterios de evaluación

Se valorarán especialmente los siguientes aspectos:

- ▶ Claridad y rigor en la exposición de los cálculos intermedios.
- ▶ Justificación matemática y razonamiento lógico de los pasos realizados.
- ▶ Interpretación crítica de los resultados obtenidos y su contextualización.
- ▶ Corrección en el uso del lenguaje técnico y la notación matemática y la notación de Dirac.

**Nota importante:** La rúbrica de evaluación únicamente se aplicará a aquellos trabajos que cumplan todos los requisitos de formato especificados. Los trabajos que no satisfagan estos requisitos podrán ser devueltos sin evaluación.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Álgebra lineal en computación cuántica	Apellidos: Nombre:	

#### 4. Rúbrica

Sistemas Cuánticos y Entrelazamiento	Descripción	Valor	Peso
Normativa	Entregar la actividad en plazo y cumpliendo las indicaciones.	0,5	5 %
Bibliografía y citas APA	Cumplir con las normas de citación y bibliografía según la normativa APA 7.	0,5	5 %
Presentación	Cálculos ordenados, notación correcta, interpretación física.	1	10 %
Problema 1	Ortogonalización y proyecciones (0.7 puntos/apartado).	2.8	28 %
Problema 2	Producto tensorial y sistemas compuestos (0.7 puntos/apartado).	2.8	28 %
Problema 3	Entrelazamiento cuántico (0.6 puntos/apartado).	2.4	24 %
		10	100 %