Bloque 2. Espacios cuánticos

Estados probabilísticos

Índice

Esquema

- **Estados cuánticos mixtos**
  - Estados puros: $|a\rangle$
  - Estados mixtos: $\{(p_1, |\psi_1\rangle), \ldots, (p_k, |\psi_k\rangle)\}$
  - Necesidad de la matriz de densidad
- **Matriz de densidad**
  - Definición y propiedades: $\sum_{i=1} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$
  - Operador densidad para estados puros: $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$
  - Estados mixtos y mezclas estadísticas
  - Criterio de pureza
- **Sistemas compuestos**
  - Producto tensorial de matrices de densidad: $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$
  - Evolución matriz densidad
- **Traza parcial**
  - Traza parcial y sistemas abiertos: $\mathrm{Tr}_B(\rho_{AB})$
  - Decoherencia cuántica
- **Canales cuánticos**
  - Representación de Kraus: $\rho' = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger$
  - Operaciones completamente positivas
- **Información cuántica**
  - Entropía de von Neumann: $S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log \rho)$
  - Información mutua cuántica: $I(A:B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$
  - Fidelidad cuántica: $F(\rho, \sigma) = \left(\mathrm{Tr}\sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}}\right)^2$
  - Distancia de traza: $D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}|\rho - \sigma|$

Ideas clave

8.1 Introducción y objetivos

En los temas anteriores hemos trabajado con el formalismo de vectores estado para describir sistemas cuánticos, donde cada estado se representa mediante un vector unitario $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert. Sin embargo, este enfoque tiene limitaciones importantes cuando consideramos sistemas cuánticos realistas que pueden encontrarse en estados de los cuales no tenemos información completa, o cuando estudiamos subsistemas de sistemas cuánticos compuestos.

El formalismo de matriz de densidad, desarrollado por von Neumann, proporciona una descripción más general y completa de los estados cuánticos que abarca tanto estados puros como estados mixtos. Esta generalización es fundamental en computación cuántica por varias razones:

- Permite describir **estados mixtos** que surgen por decoherencia o incertidumbre clásica.
- Facilita el análisis de **subsistemas cuánticos** mediante la traza parcial.
- Proporciona herramientas para cuantificar la **calidad de estados cuánticos** mediante medidas como la fidelidad.
- Es esencial para entender el **entrelazamiento cuántico** y la separabilidad de estados.
- Conecta directamente con la **teoría de información cuántica** y protocolos de comunicación cuántica.

Este tema establece las bases matemáticas necesarias para comprender sistemas cuánticos realistas, incluyendo efectos de ruido, decoherencia y la estructura de correlaciones cuánticas en sistemas compuestos.

8.2 Estados puros y estados mixtos

Definición 1: Estado puro

Un estado cuántico puro se describe completamente mediante un vector estado normalizado en un espacio de Hilbert.
Toda la información sobre el sistema está contenida en este vector estado, y el estado evoluciona de manera determinista bajo operadores unitarios.

Definición 2: Estado mixto

Un estado cuántico mixto representa una situación donde el sistema puede estar en uno de varios estados puros $|\psi_i\rangle$ con probabilidades clásicas p_i.

$$\text{Estado mixto} = \{(p_1, |\psi_1\rangle), (p_2, |\psi_2\rangle), \ldots, (p_k, |\psi_k\rangle)\},$$

donde

$$p_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1\,.$$

Esta descripción surge cuando hay incertidumbre clásica sobre cuál es el estado real del sistema.

Ejemplo 1.

Considere las siguientes situaciones que requieren estados mixtos:

1. **Preparación incierta:** Alice prepara un cúbit en el estado $|0\rangle$ con probabilidad $1/2$ y en el estado $|1\rangle$ con probabilidad $1/2$. Bob recibe el cúbit pero no sabe cuál estado fue preparado.
2. **Decoherencia:** Un cúbit inicialmente en superposición $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ interactúa con el ambiente y pierde coherencia, resultando en una mezcla estadística.
3. **Subsistema:** Dado un sistema bipartito en estado entrelazado $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, cada subsistema individual está en un estado mixto.

8.3 Matriz de densidad

Definición 3: Operador densidad

El operador densidad de un sistema cuántico mixto $\{(p_i, |\psi_i\rangle)\}$, es el operador ρ definido por

$$\rho = \sum_{i=1} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \,.$$

Para un estado puro $|\psi\rangle$ el operador densidad es el proyector

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \,.$$

La matriz asociada, que también se denota como ρ en una base ortonormal $\{|e_j\rangle\}$, tiene las entradas $\rho = (\rho)_{mn}$ calculadas como

$$\rho_{mn} = \langle e_m|\rho|e_n\rangle \,.$$

Ejemplo 2.

1. **Estado puro** $|0\rangle$:

$$\rho_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

2. **Estado de superposición** $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$:

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

3. **Estado mixto equiprobable**:

$$\rho_{\text{mix}} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{I}{2} \,.$$

Resultado 1

Sea $\rho = \sum_{i=1}^{k} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ un operador densidad. Entonces:

1. ρ es hermitiana: $\rho = \rho^\dagger$.
2. ρ es positiva semidefinida: $\langle\phi|\rho|\phi\rangle \geq 0$ para todo $|\phi\rangle$.

3. $\text{Tr}(\rho) = 1$ (normalización).

Demostración.

1. Para demostrar que ρ es hermitiana, tenemos que tener en cuenta las propiedades de la traspuesta conjutada y que $p_i \in \mathbb{R}$, que $|\psi_i\rangle^\dagger = \langle\psi_i|$ y $\langle\psi_i|^\dagger = |\psi_i\rangle$ para todo i. Entonces

$$\rho^\dagger = \sum_{i=1}^{k} p_i (|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)^\dagger = \sum_{i=1}^{k} p_i \langle\psi_i|^\dagger |\psi_i\rangle^\dagger = \sum_{i=1}^{k} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \rho \, .$$

2. Para cualquier ket $|\phi\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle\phi|\rho|\phi\rangle &= \sum_{i=1}^{k} p_i \langle\phi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{k} p_i \langle\phi|\psi_i\rangle\langle\phi_i|\psi\rangle^* \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i |\langle\phi|\psi_i\rangle|^2 \geq 0 \, . \end{aligned}$$

3. $\text{Tr}(\rho) = \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

$\square$

Teorema 2: Criterio de pureza

Un estado descrito por el operador densidad ρ es puro si y solo si $\text{Tr}(\rho^2) = 1$. Equivalentemente, el estado es mixto si y solo si $\text{Tr}(\rho^2) < 1$.

Demostración.

Como ρ es un operador hermitiano, existe una base ortonormal $\{|i\rangle\}$ en la que ρ es diagonal:

$$\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i| \, ,$$

donde λ_i son los valores propios de ρ. Por las propiedades de la matriz de densidad, sabemos que $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_i \lambda_i = 1$. Esto implica que $0 \leq \lambda_i \leq 1$ para todo i.

La traza de ρ^2 se calcula como:

$$\text{Tr}(\rho^2) = \sum_i \lambda_i^2 \, .$$

Dado que $0 \leq \lambda_i \leq 1$, se cumple que $\lambda_i^2 \leq \lambda_i$, dándose la igualdad únicamente si $\lambda_i = 0$ o $\lambda_i = 1$. Sumando sobre todos los índices i:

$$\text{Tr}(\rho^2) = \sum_i \lambda_i^2 \leq \sum_i \lambda_i = 1 \, .$$

La igualdad Tr$(\rho^2) = 1$ ocurre si y solo si $\lambda_i^2 = \lambda_i$ para todo i. Teniendo en cuenta la restricción de normalización $\sum_i \lambda_i = 1$, esto fuerza a que exactamente un valor propio sea 1 (digamos $\lambda_k = 1$) y todos los demás sean 0. En tal caso:

$$\rho = |k\rangle\langle k|\,,$$

lo cual corresponde, por definición, a un estado puro. Si Tr$(\rho^2) < 1$, entonces el estado no es un proyector de rango 1, correspondiendo a una mezcla estadística. □

Ejemplo 3.

Sea $\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|$ la matriz densidad de un estado. Necesitamos saber si el estado es mixto o puro. la matriz densidad es

$$\rho = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la traza de ρ^2

$$\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}\begin{pmatrix} (3/4)^2 & 0 \\ 0 & (1/4)^2 \end{pmatrix} = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} < 1\,.$$

Concluimos que el estado es mixto.

8.4 Evolución de la matriz de densidad

Teorema 3: Evolución unitaria

Si un sistema con matriz de densidad ρ evoluciona bajo un operador unitario U, la nueva matriz de densidad es:

$$\rho' = U\rho U^\dagger$$

Esta transformación preserva todas las propiedades de un operador densidad válido.

Demostración.

Si ρ' es la matriz densidad del sistema después de la evolución unitaria U, entonces

$$\begin{aligned} \rho' &= \sum_i p_i |U\psi_i\rangle\langle U\psi_i| \\ &= \sum_i p_i U|\psi_i\rangle\langle\psi_i|U^\dagger \\ &= U\left(\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)U^\dagger \\ &= U\rho U^\dagger\,. \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 4.

Consideremos la matriz densidad que representa un estado mixto en un cúbit equiprobable $\rho = \frac{1}{2}I$ y apliquemos cualquier puerta cuántica U.

$$\rho' = U\rho U^\dagger = U \cdot \frac{1}{2}I \cdot U^\dagger = \frac{1}{2}UU^\dagger = \frac{1}{2}I = \rho\,.$$

El estado mixto completamente aleatorio es invariante bajo cualquier operación unitaria.

Ejemplo 5: Aplicación de puertas cuánticas

Sea en un cúbit en el estado mixto con matriz de densidad

$$\rho = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix},$$

y apliquemos la puerta Hadamard H al estado, la evolución dará lugar a la nueva matriz de densidad

$$\begin{aligned} \rho' = H\rho H^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^\dagger \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.5 Representación en la esfera de Bloch

Para un cúbit $|a\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, el operador densidad es

$$\rho = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \alpha^*\beta|1\rangle\langle 0|\,.$$

En forma matricial y expresado en términos de la base de Pauli, tenemos

$$\begin{aligned} \rho &= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + (|\alpha|^2 - |\beta|^2) & 2\alpha\beta^* \\ 2\alpha^*\beta & 1 - (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left[I + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)Z + 2\mathrm{Re}(\alpha\beta^*)X + 2\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)Y\right]. \end{aligned}$$

Podemos escribir la matriz de densidad de forma más compacta como

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})\,,$$

donde $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ lo llamamos el **vector de Bloch** y $\vec{\sigma} = (X, Y, Z)$.

El vector de Bloch admite la siguiente interpretación geométrica:

- **Estados puros:** $|\vec{r}| = 1$ (superficie de la esfera).
- **Estados mixtos:** $|\vec{r}| < 1$ (interior de la esfera).
- **Estado completamente mixto:** $\vec{r} = 0$ (centro de la esfera).

El vector de Bloch se puede calcular a partir de la matriz de densidad como

$$\vec{r} = (\mathrm{Tr}(\rho X), \mathrm{Tr}(\rho Y), \mathrm{Tr}(\rho Z))\,.$$

Ejemplo 6: Cálculo del vector de Bloch

Para el estado $\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, calculamos el vector de Bloch:

$$\rho X = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\rho Y = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3i/4 \\ i/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\rho Z = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\vec{r} = (\mathrm{Tr}(\rho X), \mathrm{Tr}(\rho Y), \mathrm{Tr}(\rho Z)) = (0, 0, 1/2)\,.$$

Para calcular si el estado es puro o mixto, observamos que la norma del vector de Bloch es $|\vec{r}| = 1/2 < 1$, confirmando que es un estado mixto.

8.6 Sistemas compuestos y traza parcial

Definición 4: Producto tensorial de operadores densidad

Para sistemas independientes descritos por matrices de densidad ρ_A y ρ_B, el sistema compuesto se describe por

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B \, .$$

Sin embargo, no todos los estados de sistemas compuestos pueden escribirse en esta forma separable.

Definición 5: Traza parcial

Sea T un operador sobre un sistema bipartito $A \otimes B$, la traza parcial de T sobre el subsistema B se define como el operador $\text{Tr}_B(T)$ sobre el subsistema A dado por la propiedad

$$\langle\phi|\text{Tr}_B(T)|\psi\rangle = \sum_i \langle\phi \otimes |i\rangle|T|\psi \otimes |i\rangle\rangle \, ,$$

donde $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in A$ y $\{|i\rangle\}$ es cualquier base ortonormal del subsistema B.

Ejemplo 7.

Consideremos el estado producto

$$|\psi\rangle = |0+\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} \, .$$

La matriz de densidad del sistema compuesto es

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi| = |0\rangle\langle 0| \otimes |+\rangle\langle +| \, .$$

En forma matricial usando la base computacional, es

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

Para obtener la matriz de densidad del subsistema A, realizamos la traza parcial sobre B. Si $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ y $|\psi\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$ son dos kets arbitrarios en el subsistema A, calculamos los siguientes términos:

$$\langle\phi \otimes |0\rangle|\rho_{AB}|\psi \otimes |0\rangle\rangle = \frac{1}{2}ac^* \, , \tag{1}$$

$$\langle \phi \otimes |1\rangle | \rho_{AB} | \psi \otimes |1\rangle \rangle = \frac{1}{2} ac^* \,. \tag{2}$$

Por definición de traza parcial, sumamos ambos resultados obtenemos

$$(1) + (2) = \frac{1}{2}(ac^* + ac^*) = ac^* \,.$$

Por lo tanto la matriz de densidad del subsistema A es

$$\text{Tr}_B(\rho_{AB}) = |0\rangle\langle 0| \,.$$

Resultado 4

Sea T un operador sobre un sistema bipartito $A \otimes B$, definido como el producto tensorial de dos operadores $T_A \otimes T_B$, la traza parcial de T sobre el subsistema B se obtiene como

$$\text{Tr}_B(T_A \otimes T_B) = \text{Tr}(T_B) T_A \,.$$

Ejemplo 8.

Volviendo al ejemplo anterior, la matriz de densidad del sistema compuesto es

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Usando el resultado anterior, para obtener la matriz de densidad del subsistema A, realizamos la traza parcial sobre B.

$$\text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \text{Tr}(\rho_B)\rho_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| \,.$$

Ejemplo 9.

Considere el estado entrelazado $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ con matriz de densidad:

$$\rho_{AB} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La traza parcial sobre el subsistema B en la base $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$:

$$\begin{aligned}\rho_A &= \langle 0|_B \rho_{AB} |0\rangle_B + \langle 1|_B \rho_{AB} |1\rangle_B \\ &= \frac{1}{2}|0\rangle_A\langle 0|_A + \frac{1}{2}|1\rangle_A\langle 1|_A \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{I_A}{2}\end{aligned}$$

El subsistema A está en un estado mixto completamente aleatorio, a pesar de que el sistema total está en un estado puro.

Resultado 5

La operación de traza parcial satisface:

1. Linealidad: $\text{Tr}_B(\alpha\rho + \beta\sigma) = \alpha\text{Tr}_B(\rho) + \beta\text{Tr}_B(\sigma)$.
2. Preservación de la traza: $\text{Tr}(\text{Tr}_B(\rho_{AB})) = \text{Tr}(\rho_{AB})$.
3. $\text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \rho_A \text{Tr}(\rho_B)$.

8.7 Decoherencia cuántica

La **decoherencia cuántica** es el proceso por el cual un sistema cuántico pierde su coherencia debido a interacciones incontroladas con el entorno, transformando estados puros en estados mixtos.

Ejemplo 10: Decoherencia de un cúbit

Considere un cúbit inicialmente en el estado de superposición $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ que sufre decoherencia de desfase. Después de un tiempo t, el estado viene representado por la matriz de densidad

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma t} \\ e^{-\gamma t} & 1 \end{pmatrix}.$$

donde $\gamma > 0$ es la tasa de decoherencia.

- En $t = 0$: $\rho(0) = |\psi\rangle\langle\psi|$, estado puro.
- Cuando $t \to \infty$: $\rho(\infty) = \frac{I}{2}$, estado maximalmente mixto.
- La pureza decae como: $\text{Tr}(\rho(t)^2) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\gamma t})$.

8.8 Canales cuánticos

Definición 6: Canal cuántico

Un canal cuántico es una aplicación completamente positiva que preserva la traza

$$\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$$

Esta aplicación describe la evolución más general posible de un sistema cuántico abierto.

Teorema 6: Representación de Kraus

Todo canal cuántico $\mathcal{E}$ puede representarse mediante operadores de Kraus $\{K_i\}$

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger ,$$

donde los operadores satisfacen la condición de completitud

$$\sum_i K_i^\dagger K_i = I .$$

Ejemplo 11: Canal de despolarización

El canal de despolarización para un cúbit con probabilidad p tiene la forma:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + \frac{p}{3}(X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z)$$

Los operadores de Kraus son:

$$K_0 = \sqrt{1-p}I, \quad K_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}X, \quad K_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}Y, \quad K_3 = \sqrt{\frac{p}{3}}Z .$$

8.9 Medidas de información cuántica

Definición 7: Entropía de von Neumann

La entropía de von Neumann de un estado cuántico descrito por la matriz de densidad ρ se define como

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log_2 \rho) .$$

Si ρ tiene descomposición espectral $\rho = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$, entonces

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i$$

La entropía cuantifica el grado de ”mezcla.º ”desorden”del estado cuántico.

Resultado 7

1. $S(\rho) \geq 0$ para toda matriz de densidad ρ.
2. $S(\rho) = 0$ si y solo si ρ representa un estado puro.
3. Para un sistema de dimensión d: $S(\rho) \leq \log_2 d$, con igualdad si y solo si $\rho = \frac{I}{d}$.
4. La entropía es invariante bajo transformaciones unitarias: $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$.
5. Subaditividad: $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$.

Ejemplo 12: Cálculo de entropía

Calculemos la entropía de von Neumann para los siguientes estados:

1. **Estado puro:** Para cualquier $|\psi\rangle$, $S(|\psi\rangle\langle\psi|) = 0$.
2. **Estado mixto equiprobable:** Para $\rho = \frac{I}{2}$ en un cúbit

$$S(\rho) = -\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} = 1\,.$$

3. **Estado mixto general:** Para $\rho = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$

$$S(\rho) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) = H(p)\,,$$

donde $H(p)$ es la entropía de Shannon clásica.

Definición 8: Información mutua cuántica

Para un estado bipartito ρ_{AB}, la información mutua cuántica se define como:

$$I(A:B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$$

Esta cantidad mide las correlaciones totales (clásicas y cuánticas) entre los subsistemas A y B.

Definición 9: Fidelidad cuántica

La fidelidad entre dos estados cuánticos descritos por matrices de densidad ρ y σ se define como:

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr}\left(\sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}}\right)$$

Para estados puros $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$:

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|$$

La fidelidad mide qué tan cercanos están dos estados cuánticos.

Resultado 8

1. $0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1$.
2. $F(\rho, \sigma) = F(\sigma, \rho)$ (simetría).
3. $F(\rho, \rho) = 1$ (normalización).
4. $F(\rho, \sigma) = 1$ si y solo si $\rho = \sigma$.
5. Para operadores unitarios: $F(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = F(\rho, \sigma)$.

Definición 10: Distancia de traza

La distancia de traza entre dos matrices de densidad ρ y σ se define como:

$$D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2}\text{Tr}(|\rho - \sigma|)$$

donde $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$ es el valor absoluto del operador A.

Resultado 9

1. $0 \leq D(\rho, \sigma) \leq 1$.
2. $D(\rho, \sigma) = 0$ si y solo si $\rho = \sigma$.
3. $D(\rho, \sigma) = D(\sigma, \rho)$ (simetría).
4. $D(\rho, \tau) \leq D(\rho, \sigma) + D(\sigma, \tau)$ (desigualdad triangular).
5. Para operadores unitarios: $D(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = D(\rho, \sigma)$.

Teorema 10: Relación entre fidelidad y distancia de traza

Para cualesquiera dos matrices de densidad ρ y σ:

$$1 - F(\rho, \sigma) \leq D(\rho, \sigma) \leq \sqrt{2(1 - F(\rho, \sigma))}$$

Ambas medidas proporcionan información complementaria sobre la proximidad entre estados cuánticos.

8.10 Aplicaciones en computación cuántica

Ejemplo 13: Fidelidad en protocolos cuánticos

En el protocolo de teleportación cuántica, la fidelidad entre el estado original $|\psi\rangle$ y el estado reconstruido ρ_{out} mide la calidad del protocolo:

$$F = \langle\psi|\rho_{\text{out}}|\psi\rangle$$

Para teleportación perfecta, $F = 1$. En presencia de ruido o errores de medición, $F < 1$, y el protocolo es útil solo si $F > 2/3$ (límite clásico).

Ejemplo 14: Caracterización del entrelazamiento

Para un estado bipartito ρ_{AB}, el grado de entrelazamiento puede cuantificarse mediante:

- **Entropía de entrelazamiento:** $E(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B)$ para estados puros.
- **Negatividad:** Basada en la traza de la transposición parcial.
- **Concurrencia:** Medida específica para sistemas de dos cúbits.

Estas medidas son fundamentales para protocolos de información cuántica como criptografía cuántica y computación distribuida.

A fondo

Los siguientes libros pueden servir de material de apoyo y para profundizar más en los contenidos de este tema.

Holevo, A. S. (2012). Quantum systems, channels, information : a mathematical introduction. (1st ed.). Walter de Gruyter GmbH & Co. KG.

Este libro es una referencia clásica en el campo de la información cuántica. Proporciona una introducción matemática rigurosa a los sistemas cuánticos, los canales de comunicación cuántica y la teoría de la información cuántica.

Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2010). Quantum computation and quantum information. Cambridge University Press.

En los capítulos 8 y 9 se abordan los estados mixtos y las operaciones cuánticas, y las métricas en canales cuánticos, proporcionando una base sólida para entender los conceptos de estados probabilísticos en computación cuántica.

Problemas

1. Calcule la matriz de densidad para un ensemble que contiene:

a) 40 % de cúbits en estado $|0\rangle$

b) 35 % de cúbits en estado $|1\rangle$

c) 25 % de cúbits en estado $|+\rangle$

2. Para la matriz de densidad del ejercicio anterior:

a) Calcule $\text{Tr}(\rho^2)$

b) Determine si es un estado puro o mixto

c) Calcule la entropía de von Neumann $S(\rho)$

d) Encuentre el vector de Bloch $\vec{r}$ y verifique que $|\vec{r}| < 1$

3. Un cúbit en estado $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$ experimenta un canal de desfase puro que transforma:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \to \rho' = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) & e^{-\gamma t}\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)e^{i\phi} \\ e^{-\gamma t}\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)e^{-i\phi} & \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix}$$

a) Verifique que ρ' es una matriz de densidad válida

b) Calcule $\text{Tr}(\rho'^2)$ en función de γ y t

c) Determine en qué instante el estado se convierte en completamente mixto

4. Considere el estado de Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$:

a) Escriba la matriz de densidad $\rho_{AB} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$ en forma matricial

b) Calcule la traza parcial $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$

c) Calcule la entropía de von Neumann $S(\rho_A)$

d) Compare $S(\rho_{AB})$ con $S(\rho_A)$. ¿Qué indica esto sobre el entrelazamiento?

5. Para el canal de despolarización con operadores de Kraus:

$$K_0 = \sqrt{1-p}I, \quad K_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_x, \quad K_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_y, \quad K_3 = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_z$$

a) Verificar que satisfacen la condición de completitud $\sum_i K_i^\dagger K_i = I$

b) Aplicar el canal al estado puro $|0\rangle$ y obtener ρ'

c) Calcular Tr(ρ'^2) en función de p

d) Determine el valor de p para el cual el estado de salida es completamente mixto

6. Calcule la fidelidad y la distancia de traza entre los siguientes pares de estados:

a) $\rho_1 = |0\rangle\langle 0|$ y $\rho_2 = |1\rangle\langle 1|$

b) $\rho_1 = |+\rangle\langle +|$ y $\rho_2 = \frac{I}{2}$

c) $\rho_1 = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|$ y $\rho_2 = \frac{1}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{3}{4}|1\rangle\langle 1|$

7. Para el estado bipartito $\rho_{AB} = \frac{1}{2}|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00|$ donde $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$:

a) Calcule las matrices de densidad reducidas ρ_A y ρ_B

b) Calcule las entropías $S(\rho_A)$, $S(\rho_B)$ y $S(\rho_{AB})$

c) Calcule la información mutua cuántica $I(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$

d) Interprete el resultado: ¿qué nos dice sobre las correlaciones entre los subsistemas?