Bloque 2. Espacios cuánticos

Notación de Dirac

Índice

Esquema

- **Notación bra-ket**
  - Kets y bras
  - Productos internos
  - Operadores externos
- **Estados cuánticos**
  - cúbits y normalización
  - Superposición cuántica
  - Interpretación probabilística
- **Sistemas de múltiples cúbits**
  - Producto tensorial
  - Base computacional
  - Estados entrelazados
- **Mediciones y observables**
  - Regla de Born
  - Colapso del estado
  - Medidas en diferentes bases
- **Dinámicas cuánticas**
  - Acción de operadores
  - Evolución libre

Ideas clave

6.1 Introducción y objetivos

La notación de Dirac, también conocida como notación bra-ket, proporciona un formalismo elegante y poderoso para trabajar con estados cuánticos y operadores. Desarrollada por Paul Dirac, esta notación no solo simplifica los cálculos algebraicos, sino que también captura de manera intuitiva los conceptos físicos fundamentales de la mecánica cuántica.

En computación cuántica, la notación de Dirac es indispensable porque:

- Proporciona una representación **concisa y clara** de estados cuánticos complejos
- Facilita el cálculo de **probabilidades cuánticas** mediante productos internos
- Permite expresar **operadores cuánticos** de manera natural y eficiente
- Conecta directamente la **estructura matemática** con la **interpretación física**
- Es el lenguaje estándar para describir **algoritmos cuánticos** y **protocolos cuánticos**

Este tema establece el puente definitivo entre la matemática abstracta de los espacios de Hilbert y la implementación práctica de sistemas cuánticos. Desarrollaremos desde los conceptos más básicos de la notación hasta aplicaciones avanzadas en sistemas de múltiples cúbits, proporcionando la base para la notación para todos los temas posteriores del curso.

6.2 Fundamentos de la notación bra-ket

Definición 1: Ket

Un **ket**, denotado $|\psi\rangle$, representa un vector unitario en un espacio de Hilbert complejo. Formalmente, $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ donde $\mathcal{H}$ es el espacio de estados del sistema cuántico.

La base canónica $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, ahora se denota usando la notación de Dirac como los kets $\{|1\rangle, |2\rangle, \ldots, |n\rangle\}$ de $\mathcal{H}$. Aunque algunas veces es más conveniente usar la notación $\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |n-1\rangle\}$.

En términos de coordenadas, si $\{|i\rangle\}$ es una base ortonormal:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i|i\rangle \Rightarrow c_i = \langle\psi|i\rangle$$

donde $c_i \in \mathbb{C}$ son las llamadas **amplitudes de probabilidad**.

Definición 2: Bracket

El **bracket** es el producto interno entre dos kets $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$, se denota $\langle\phi|\psi\rangle$:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi, \psi\rangle \in \mathbb{C}\,.$$

Recordando las definiciones del dual de un espacio vectorial, dado un ket $|\phi\rangle$, el funcional asociado es un elemento del espacio dual $\mathcal{H}^*$, así, el producto interno se puede interpretar como la acción del funcional asociado.

Definición 3: Bra

Dado un ket $|\phi\rangle$, el funcional asociado del espacio dual lo llamamos **bra**, denotado $\langle\phi|$ y que actúa sobre un ket $|\psi\rangle$ mediante la notación:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|(|\psi\rangle)\,.$$

Para cada ket $|\psi\rangle$, el bra correspondiente a nivel de coeficiente respecto de una base ortogonal y su base dual se cumple:

$$\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger\,.$$

Ejemplo 1: Notación básica en $\mathbb{C}^2$

Para un cúbit, los estados base se escriben:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los bras correspondientes son:

$$\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los productos internos fundamentales:

$$\begin{aligned} \langle 0|0\rangle &= 1, \quad \langle 1|1\rangle = 1 \\ \langle 0|1\rangle &= 0, \quad \langle 1|0\rangle = 0 \end{aligned}$$

Definición 4: Operador externo

El producto externo de un ket y un bra se denota $|\psi\rangle\langle\phi|$ y representa el operador lineal definido por:

$$|\psi\rangle\langle\phi|(|\chi\rangle) = \langle\phi|\chi\rangle|\psi\rangle$$

Normalmente, no se escriben los paréntesis y se entiende que el operador actúa sobre un ket a su derecha.

$$|\psi\rangle\langle\phi||\chi\rangle = \langle\phi|\chi\rangle|\psi\rangle$$

Ejemplo 2: Operadores de proyección

Los operadores de proyección sobre los estados base son:

$$P_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se verifica que $P_0 + P_1 = I$ (relación de completitud).

Teorema 1: Relación de completitud

Para cualquier base ortonormal $\{|i\rangle\}$ de un espacio de Hilbert de dimensión finita:

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = I$$

Esta identidad permite expresar cualquier operador o estado en términos de la base elegida.

6.3 Estados cuánticos y cúbits

Definición 5: Estado cuántico puro

Un estado cuántico puro se representa mediante un ket normalizado:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

Para un cúbit, el estado general es:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Ejemplo 3: Estados cuánticos importantes

1. **Estados computacionales:**

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. **Estados de superposición balanceada:**

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

3. **Estados con fase compleja:**

$$|i+\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |i-\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Definición 6: Interpretación probabilística - Regla de Born

Si un sistema se encuentra en el estado $|\psi\rangle$ y se mide un observable con vectores propios ortonormales $\{|\phi_i\rangle\}$, la probabilidad de obtener el resultado correspondiente al estado $|\phi_i\rangle$ es:

$$P(\phi_i) = |\langle\psi|\phi_i\rangle|^2$$

Ejemplo 4: Cálculo de probabilidades

Para el estado $|\psi\rangle = \frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4i}{5}|1\rangle$:

Verificación de normalización:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left|\frac{3}{5}\right|^2 + \left|\frac{4i}{5}\right|^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

Probabilidades en la base computacional:

$$P(0) = |\langle\psi|0\rangle|^2 = \left|\frac{3}{5}\right|^2 = \frac{9}{25}$$
$$P(1) = |\langle\psi|1\rangle|^2 = \left|\frac{4i}{5}\right|^2 = \frac{16}{25}$$

Probabilidades en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$\langle\psi|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{5} + \frac{4i}{5}\right) = \frac{3+4i}{5\sqrt{2}}$$

$$P(+) = \left|\frac{3+4i}{5\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{9+16}{50} = \frac{1}{2}$$

Definición 7: Colapso cuántico

Después de una medición que da como resultado el estado $|\phi_i\rangle$, el sistema colapsa al estado:

$$|\psi'\rangle = \frac{P_i|\psi\rangle}{\|P_i|\psi\rangle\|} = \frac{\langle\psi|\phi_i\rangle}{|\langle\psi|\phi_i\rangle|}|\phi_i\rangle$$

donde $P_i = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ es el proyector sobre $|\phi_i\rangle$.

6.4 Operadores en notación de Dirac

Definición 8: Valor esperado

El valor esperado de un operador A en el estado $|\psi\rangle$ es:

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

Ejemplo 5: Matrices de Pauli en notación de Dirac

Las matrices de Pauli se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \\
\sigma_y &= -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| \\
\sigma_z &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|
\end{aligned}$$

Verificación para σ_x:

$$\begin{aligned}
\sigma_x|0\rangle &= (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)|0\rangle = |0\rangle\langle 1|0\rangle + |1\rangle\langle 0|0\rangle = |1\rangle \\
\sigma_x|1\rangle &= (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)|1\rangle = |0\rangle\langle 1|1\rangle + |1\rangle\langle 0|1\rangle = |0\rangle
\end{aligned}$$

Ejemplo 6: Valor esperado de σ_z

Para el estado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_z\rangle &= \langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle \\
&= (\overline{\alpha}\langle 0| + \overline{\beta}\langle 1|)(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \\
&= |\alpha|^2 - |\beta|^2
\end{aligned}$$

Este resultado tiene una interpretación física clara: es la diferencia entre las probabilidades de medir $+1$ y -1.

6.5 Sistemas de múltiples cúbits

Definición 9: Producto tensorial de estados

Para sistemas compuestos, los estados se forman mediante el producto tensorial:

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\phi\rangle$$

Para n cúbits, el espacio de estados es $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \cong \mathbb{C}^{2^n}$.

Definición 10: Base computacional para múltiples cúbits

Para n cúbits, la base computacional está formada por:

$$\{|b_1 b_2 \cdots b_n\rangle : b_i \in \{0,1\}\}.$$

Ejemplo 7: Sistema de dos cúbits

La base computacional para dos cúbits es:

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un estado general de dos cúbits se escribe:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

con $\sum_{ij} |\alpha_{ij}|^2 = 1$.

Ejemplo 8: Estados de Bell

Los cuatro estados de Bell forman una base ortonormal de estados entrelazados para dos cúbits:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$|\Phi^-\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$|\Psi^+\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$|\Psi^-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

6.6 Mediciones y observables

Definición 11: Observable en notación de Dirac

Un observable es un operador hermitiano $\hat{O}$ que puede escribirse en su descomposición espectral:

$$\hat{O} = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ son los valores propios y $\{|\phi_i\rangle\}$ es una base ortonormal de vectores propios.

Ejemplo 9: Medición de σ_z en diferentes bases

Base computacional:

$$\sigma_z = (+1)|0\rangle\langle 0| + (-1)|1\rangle\langle 1|$$

Para el estado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$: - $P(+1) = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2$ - $P(-1) = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = |\beta|^2$

Base de σ_x (base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$):

$$\sigma_x = (+1)|+\rangle\langle +| + (-1)|-\rangle\langle -|$$

Para el mismo estado:

$$\langle +|\psi\rangle = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}} \Rightarrow P(+1) = \frac{|\alpha+\beta|^2}{2}$$
$$\langle -|\psi\rangle = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}} \Rightarrow P(-1) = \frac{|\alpha-\beta|^2}{2}$$

6.7 Dinámicas cuánticas en notación de Dirac

Definición 12: Evolución unitaria

La evolución temporal de un sistema cuántico cerrado se describe mediante un operador unitario $U(t)$:

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$$

Para hamiltonianos independientes del tiempo:

$$U(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

donde $\hat{H}$ es el hamiltoniano del sistema.

Ejemplo 10: Evolución libre de un cúbit

Para un cúbit con hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\omega}{2}\sigma_z$:

$$U(t) = e^{-i\omega t\sigma_z/2} = \cos\frac{\omega t}{2} I - i\sin\frac{\omega t}{2}\sigma_z$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

Si el estado inicial es $|\psi(0)\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega t/2}|0\rangle + \beta e^{i\omega t/2}|1\rangle$$

Las probabilidades $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ se mantienen constantes, pero las fases evolucionan.

El Postulado V garantiza que la información cuántica se conserva durante la evolución temporal de sistemas cerrados. Esto es fundamental para el diseño de algoritmos cuánticos, donde las operaciones se implementan mediante secuencias de operadores unitarios.

Problemas

1. Expresar los siguientes estados en notación de Dirac y verificar su normalización:

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (estado de dos qubits)

2. Para el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|0\rangle + i|1\rangle)$:

a) Calcular las probabilidades de medir $|0\rangle$ y $|1\rangle$

b) Calcular las probabilidades de medir $|+\rangle$ y $|-\rangle$

c) Determinar el estado después de medir $|+\rangle$ y obtener resultado positivo

3. Verificar las siguientes identidades usando notación de Dirac:

a) $\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$

b) $\sigma_y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$

c) $\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$

d) $I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$

4. Calcular los valores esperados $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$ y $\langle \sigma_z \rangle$ para:

a) $|\psi_1\rangle = |0\rangle$

b) $|\psi_2\rangle = |+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$

c) $|\psi_3\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}$

5. Para el sistema de dos qubits en el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle)$:

a) Verificar que el estado está normalizado

b) Calcular las probabilidades de medir cada estado de la base computacional

c) Determinar si el estado es separable o entrelazado

d) Calcular la probabilidad de medir el primer qubit en $|0\rangle$

6. Para los cuatro estados de Bell:

   a) Verificar que forman una base ortonormal

   b) Expresar cada estado de Bell como combinación lineal de la base computacional

   c) Demostrar que todos son maximalmente entrelazados

   d) Calcular las probabilidades de medir cada qubit individualmente

7. Determine si el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle)$ es entrelazado.

8. Para $A = \sigma_x$ y $B = \sigma_y$, donde σ_x y σ_y son las matrices de Pauli, calcule explícitamente $(A \otimes B)|01\rangle$.

9. Demuestre que la puerta CNOT puede crear entrelazamiento aplicándola a estados separables apropiados. Proporcione al menos dos ejemplos específicos.

10. Consideraciones sobre los recursos para la computación cuántica. Responda a las siguientes preguntas:

    a) Calcule cuántos parámetros reales se necesitan para especificar completamente el estado de un sistema de 5 cúbits.

    b) Si cada parámetro requiere 64 bits de almacenamiento, ¿cuánta memoria se necesitaría para almacenar el estado de 30 cúbits?

    c) Compare con la memoria total de todas las computadoras del mundo (estimada en $\sim 10^{21}$ bits).

11. Para el estado $|\psi\rangle = \cos\frac{\pi}{8}|0\rangle + e^{i\pi/4}\sin\frac{\pi}{8}|1\rangle$:

    a) Calcular las probabilidades de medir σ_z en los valores ± 1

    b) Calcular las probabilidades de medir σ_x en los valores ± 1

    c) Si se mide primero σ_z y se obtiene $+1$, ¿cuáles son las probabilidades para una medición posterior de σ_x?

12. Un cúbit evoluciona bajo el hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\pi}{4}\sigma_y$:

    a) Calcular el operador de evolución $U(t) = e^{-i\hat{H}t}$

    b) Si el estado inicial es $|0\rangle$, determinar $|\psi(t)\rangle$

    c) ¿En qué instante t el estado se convierte en $|1\rangle$?

13. Para la rotación $R_z(\theta) = e^{-i\theta\sigma_z/2}$:

a) Escribir la forma matricial explícita de $R_z(\theta)$

b) Demostrar que $R_z(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}\sigma_z$

c) Aplicar $R_z(\pi/2)$ al estado $|+\rangle$ y expresar el resultado

14. Demostrar que la composición de rotaciones alrededor del mismo eje se suma:

$$R_z(\alpha)R_z(\beta) = R_z(\alpha + \beta)\,.$$