1. El conjugado de $z = 3 - 2i$ es:

   A. $-3 + 2i$

   B. $3 + 2i$

   C. $-3 - 2i$

   D. $2 + 3i$

Solution: El conjugado de $z = a + bi$ se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria, por tanto $\overline{3 - 2i} = 3 + 2i$.

2. El módulo del número complejo $z = 3 + 4i$ es:

   A. 7

   B. $\sqrt{7}$

   C. 5

   D. 25

Solution: El módulo se calcula como $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

3. La fórmula de Euler establece que:

   A. $e^{i\theta} = \sin\theta + i\cos\theta$

   B. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

   C. $e^{i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

   D. $e^{i\theta} = i\cos\theta + \sin\theta$

Solution: La fórmula de Euler es $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, que relaciona la función exponencial compleja con las funciones trigonométricas.

4. El producto $(1 + i)(2 - i)$ es igual a:

   A. $1 + i$

   B. $2 - i$

   C. $3 + i$

   D. $3 - i$

Solution: Aplicando la propiedad distributiva: $(1+i)(2-i) = 2 - i + 2i - i^2 = 2 + i - (-1) = 3 + i$.

5. Las raíces cuartas de la unidad son:
   A. $1, -1, i, -i, e^{i\pi/4}$
   B. $1, -1, i, -i$
   C. $1, i, -i, e^{i\pi/2}$
   D. $1, -1, 2i, -2i$

Solution: Las raíces n-ésimas de la unidad son $e^{2\pi ik/n}$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Para $n = 4$: $e^0 = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{3i\pi/2} = -i$.

6. Una amplitud cuántica $\alpha = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$ tiene probabilidad asociada:
   A. $\frac{7}{5}$
   B. 1
   C. $\frac{9}{25}$
   D. $\frac{16}{25}$

Solution: La probabilidad es $|\alpha|^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$.

7. Para que dos amplitudes $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_1}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_2}$ interfieran destructivamente, la diferencia de fases debe ser:
   A. 0
   B. $\frac{\pi}{2}$
   C. π
   D. $\frac{\pi}{4}$

Solution: Para interferencia destructiva necesitamos que $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, lo que ocurre cuando las fases difieren en π: $e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\pi)} = e^{i\theta_1}(1-1) = 0$.

8. El número complejo $z = 1 + i$ en forma exponencial es:
   A. $\sqrt{2}e^{i\pi}$
   B. $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$
   C. $2e^{i\pi/4}$

D. $e^{i\pi/2}$

Solution: El módulo es $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. El argumento es $\theta = \arctan(1/1) = \pi/4$. Por tanto, $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

9. Si $z = 2e^{i\pi/3}$, entonces z^3 es igual a:

A. $6e^{i\pi}$

B. $8e^{i\pi} = -8$

C. $8e^{i\pi/9}$

D. $2e^{i\pi}$

Solution: Por la fórmula de De Moivre: $z^3 = (2e^{i\pi/3})^3 = 2^3 e^{i3\pi/3} = 8e^{i\pi} = -8$.

10. Dos amplitudes cuánticas con magnitudes $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y fases que difieren en $\frac{\pi}{2}$ al sumarse tienen probabilidad total:

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. $\frac{1}{4}$

Solution: Si $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/2} = \frac{i}{\sqrt{2}}$, entonces $|\alpha_1 + \alpha_2|^2 = \left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{|1+i|^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

1. El conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y = 1 \right\}$ es:

   A. Un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^3$

   B. No es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^3$

   C. Es un espacio vectorial completo

   D. Es la base canónica de $\mathbb{C}^3$

Solution: No es subespacio porque no contiene el vector cero. Para $x = y = 0$ tendríamos $0 + 0 \neq 1$.

2. La dimensión de $\mathbb{C}^{2\times 2}$ (matrices complejas 2×2) es:

   A. 2

   B. 4

   C. 8

   D. 16

Solution: Una matriz 2×2 tiene 4 entradas complejas, y el conjunto de todas ellas forma un espacio vectorial de dimensión 4 sobre $\mathbb{C}$.

3. Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{C}^2$ son:

   A. Linealmente dependientes

   B. Linealmente independientes

   C. Ortogonales

   D. Ninguna de las anteriores

Solution: Para que sean dependientes debe existir $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, lo que implica $1 = \alpha i$ y $i = \alpha$. De la segunda ecuación $\alpha = i$, pero sustituyendo en la primera: $1 = i \cdot i = -1$, contradicción.

4. El estado cuántico $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}i}{2}|1\rangle$ es:

   A. No está normalizado

   B. Está normalizado y es válido

   C. No es un estado cuántico válido

   D. Representa dos qubits

Solution: Verificamos: $\left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}i}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. El estado está normalizado.

5. En la parametrización $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$, el parámetro φ representa:

   A. La probabilidad de medir $|1\rangle$

   B. La fase relativa entre componentes

   C. El ángulo polar en la esfera de Bloch

   D. La norma del estado

Solution: El parámetro φ es la fase relativa que distingue estados con las mismas probabilidades pero diferentes propiedades de interferencia.

6. Dos vectores estado que difieren por una fase global $e^{i\phi}$ son:

   A. Ortogonales

   B. Linealmente independientes

   C. Físicamente equivalentes

   D. Representan estados diferentes medibles

Solution: Los estados $|\psi\rangle$ y $e^{i\phi}|\psi\rangle$ son físicamente indistinguibles ya que todas las mediciones dan los mismos resultados: $|e^{i\phi}|^2 = 1$.

7. El espacio de Hilbert de un sistema de 3 qubits tiene dimensión:

   A. 3

   B. 6

   C. 8

   D. 9

Solution: Un sistema de n qubits tiene espacio de estados $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \cong \mathbb{C}^{2^n}$. Para $n = 3$: $\dim = 2^3 = 8$.

8. Una base de $\mathbb{C}^2$ debe tener:

   A. Un vector

   B. Dos vectores linealmente independientes

   C. Tres vectores

D. Cuatro vectores

Solution: Una base de un espacio de dimensión n debe tener exactamente n vectores linealmente independientes. Para $\mathbb{C}^2$, $n = 2$.

9. El conjunto $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ donde $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ y $|-\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$:

   A. No es una base de $\mathbb{C}^2$

   B. Es linealmente dependiente

   C. Es una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$

   D. Solo genera un subespacio unidimensional

Solution: Son ortogonales: $\langle +|-\rangle = \frac{1}{2}(1-1) = 0$, normalizados: $\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1$, y linealmente independientes, por tanto forman una base ortonormal.

10. Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{C}^3$, entonces:

   A. Todo vector se puede escribir como combinación lineal de dos de ellos

   B. Todo vector se puede escribir de forma única como combinación lineal de los tres

   C. Los vectores deben ser ortogonales

   D. Los vectores deben tener norma 1

Solution: Por definición de base, todo vector del espacio se expresa de manera única como combinación lineal de los vectores de la base.

1. La transformación $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy \\ 2x \end{pmatrix}$ es:

   A. Lineal

   B. No lineal

   C. Solo preserva la suma

   D. Solo preserva el producto por escalar

Solution: Es lineal porque $T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$ para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. El núcleo de la transformación $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$ es:

   A. $\{\mathbf{0}\}$

   B. $\text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

   C. $\textbf{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

   D. Todo $\mathbb{C}^3$

Solution: Resolviendo $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$: $x + y = 0$ y $2x + 2y = 0$ implica $y = -x$ y z libre. Base del núcleo: $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

3. La matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es:

   A. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2i & 4 \end{pmatrix}$

   B. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2i & 4 \end{pmatrix}$

   C. $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   D. $\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solution: $A^\dagger = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{3} \\ \overline{2i} & \overline{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2i & 4 \end{pmatrix}$.

4. Los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ son:
   - A. 2 y 2
   - **B. 1 y 3**
   - C. $2 + i$ y $2 - i$
   - D. i y $-i$

Solution: El polinomio característico es $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - (i)(-i) = (2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, con raíces $\lambda = 1, 3$.

5. Una matriz A es diagonalizable si y solo si:
   - A. Es invertible
   - B. Es hermitiana
   - **C. Tiene n vectores propios linealmente independientes**
   - D. Tiene todos los valores propios distintos

Solution: Una matriz $n \times n$ es diagonalizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes, que forman una base del espacio.

6. La matriz de Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ satisface:
   - A. $H^2 = H$
   - **B. $H^2 = I$**
   - C. $H^2 = 0$
   - D. $H^2 = -I$

Solution: $H^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I$.

7. Las matrices de Pauli junto con la identidad:
   - A. Son linealmente dependientes

B. Forman una base de $\mathbb{C}^{2\times 2}$

C. Solo generan matrices hermitianas

D. Solo generan matrices unitarias

Solution: $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ son 4 matrices linealmente independientes en $\mathbb{C}^{2\times 2}$, que tiene dimensión 4, por tanto forman una base.

8. La relación $HXH = Z$ entre matrices de Pauli y Hadamard significa que:

A. H, X y Z conmutan

B. H conjuga X en Z

C. $X = HZ$

D. $H = XZ$

Solution: Esta relación muestra que H conjuga la matriz X en Z, es decir, transforma una en la otra mediante cambio de base.

9. Si A tiene descomposición espectral $A = \sum_i \lambda_i P_i$, entonces e^{-iAt} es:

A. $\sum_i e^{-i\lambda_i} P_i$

B. $e^{-it} \sum_i \lambda_i P_i$

C. $\sum_i e^{-i\lambda_i t} P_i$

D. $\sum_i \lambda_i e^{-iP_i t}$

Solution: Para una matriz con descomposición espectral, la exponencial se calcula aplicando la función exponencial a cada valor propio: $e^{-iAt} = \sum_i e^{-i\lambda_i t} P_i$.

10. Una transformación lineal $T : V \to V$ es invertible si y solo si:

A. $\dim(\mathrm{Ker}(T)) > 0$

B. $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$

C. $\mathrm{Im}(T) \neq V$

D. T es hermitiana

Solution: Una transformación es invertible si y solo si es inyectiva, lo que ocurre cuando $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

1. El producto interno de $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{C}^2$ es:

   A. $2 + i$

   B. $2 - i$

   C. $2 + 2i$

   D. 3

Solution: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \bar{1} \cdot 2 + \bar{i} \cdot 1 = 2 + (-i) \cdot 1 = 2 - i$.

2. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ es:

   A. Unitaria

   B. Hermitiana

   C. Normal pero no hermitiana

   D. Ninguna de las anteriores

Solution: $A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} = A$, por tanto es hermitiana.

3. Los valores propios de una matriz hermitiana son siempre:

   A. Complejos

   B. Reales

   C. Imaginarios puros

   D. De módulo 1

Solution: Es una propiedad fundamental de las matrices hermitianas: todos sus valores propios son reales, lo que las hace apropiadas para representar observables físicos.

4. Si U es un operador unitario y $|\psi\rangle$ un vector unitario, entonces $\|U|\psi\rangle\|$ es:

   A. 0

   B. Depende de $|\psi\rangle$

   C. 1

   D. $\|U\|$

Solution: Los operadores unitarios preservan la norma: $\|U|\psi\rangle\|^2 = \langle U\psi, U\psi\rangle = \langle\psi, U^\dagger U\psi\rangle = \langle\psi,\psi\rangle = 1$.

5. Al medir el observable σ_z en el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, la probabilidad de obtener $+1$ es:
   - A. 0
   - B. 1
   - **C.** $\frac{1}{2}$
   - D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Solution: σ_z tiene valor propio $+1$ para $|0\rangle$. La probabilidad es $P(+1) = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

6. Después de medir σ_z en $|\psi\rangle = \frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4i}{5}|1\rangle$ y obtener -1, el estado colapsa a:
   - A. $|0\rangle$
   - **B.** $|1\rangle$
   - C. $\frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4i}{5}|1\rangle$
   - D. $\frac{3}{5}|0\rangle$

Solution: El valor propio -1 de σ_z corresponde al vector propio $|1\rangle$, por tanto el estado colapsa a $|1\rangle$.

7. El valor esperado $\langle\sigma_x\rangle$ en el estado $|0\rangle$ es:
   - A. 1
   - B. -1
   - **C.** 0
   - D. $\frac{1}{2}$

Solution: $\langle\sigma_x\rangle = \langle 0|\sigma_x|0\rangle = \langle 0|1\rangle = 0$.

8. La descomposición espectral de σ_z es:
   - A. $(+1)|+\rangle\langle +| + (-1)|-\rangle\langle -|$
   - **B.** $(+1)|0\rangle\langle 0| + (-1)|1\rangle\langle 1|$
   - C. $(+1)|1\rangle\langle 1| + (-1)|0\rangle\langle 0|$
   - D. $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$

Solution: Los valores propios de $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ son $+1$ (con $|0\rangle$) y -1 (con $|1\rangle$).

9. Dos vectores propios de un operador hermitiano correspondientes a valores propios distintos son:
   A. Linealmente dependientes
   B. Paralelos
   C. Ortogonales
   D. Idénticos salvo fase global

Solution: Es una propiedad fundamental: vectores propios de un operador hermitiano con valores propios diferentes son automáticamente ortogonales.

10. La identidad de Parseval para una base ortonormal $\{|e_k\rangle\}$ establece que:
   A. $\|\mathbf{v}\| = \sum_k \langle \mathbf{v}, |e_k\rangle\rangle$
   B. $\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_k |\langle \mathbf{v}, |e_k\rangle\rangle|^2$
   C. $\mathbf{v} = \sum_k |e_k\rangle$
   D. $\sum_k |e_k\rangle = 1$

Solution: La identidad de Parseval expresa que la norma al cuadrado de un vector es la suma de los cuadrados de sus coeficientes de Fourier respecto a una base ortonormal.

1. La dimensión del espacio dual V^* de un espacio vectorial V de dimensión finita n es:
   A. n^2
   B. $2n$
   C. n
   D. $n-1$

Solution: El espacio dual de un espacio de dimensión finita tiene la misma dimensión que el espacio original: $\dim(V^*) = \dim(V) = n$.

2. Si $\{e_1, e_2\}$ es una base de V, la base dual $\{e_1^*, e_2^*\}$ satisface:
   A. $e_1^*(e_1) = 0$
   B. $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$
   C. $e_1^*(e_2) = 1$
   D. $e_1^* = e_2^*$

Solution: Por definición de base dual: $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$.

3. La dimensión del producto tensorial $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ es:
   A. 5
   B. 6
   C. 8
   D. 9

Solution: $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W) = 2 \cdot 3 = 6$.

4. El estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ es:
   A. Separable
   B. Entrelazado
   C. Un estado de un solo qubit
   D. No está normalizado

Solution: No puede escribirse como $|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$, por tanto es entrelazado. Si fuera separable, tendríamos $(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$, lo que requeriría $ad = bc = 0$ pero $ac = bd = \frac{1}{\sqrt{2}}$, lo cual es imposible.

5. Los cuatro estados de Bell forman:
   A. Una base de $\mathbb{C}^2$
   B. Una base de $\mathbb{C}^4$
   C. Un conjunto linealmente dependiente
   D. Estados separables

Solution: Los cuatro estados de Bell $\{|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle\}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

6. El producto $(X \otimes Y)|01\rangle$ donde X e Y son matrices de Pauli es igual a:
   A. $|01\rangle$
   B. $|10\rangle$
   C. $-i|10\rangle$
   D. $i|01\rangle$

Solution: $(X \otimes Y)|01\rangle = (X|0\rangle) \otimes (Y|1\rangle) = |1\rangle \otimes (-i|0\rangle) = -i|10\rangle$.

7. El número de Schmidt del estado $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ es:
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4

Solution: La descomposición de Schmidt ya está dada: $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes |1\rangle$. Hay dos términos no nulos, por tanto el número de Schmidt es 2.

8. El producto exterior $|\psi\rangle\langle\phi|$ es:
   A. Un número complejo
   B. Un vector
   C. Un operador lineal
   D. Una matriz diagonal

Solution: El producto exterior $|\psi\rangle\langle\phi|$ es un operador lineal que actúa como $(|\psi\rangle\langle\phi|)|\chi\rangle = \langle\phi|\chi\rangle|\psi\rangle$.

9. El teorema de Riesz-Fréchet establece que en un espacio de Hilbert:

A. El espacio dual es de mayor dimensión

B. Cada funcional lineal continuo puede representarse como producto interno

C. No existe isomorfismo con el dual

D. Los funcionales son todos discontinuos

Solution: El teorema de Riesz-Fréchet establece que para cada funcional lineal continuo f existe único y_f tal que $f(x) = \langle x, y_f \rangle$.

10. Para un sistema de n qubits, el espacio de estados tiene dimensión:

A. n

B. n^2

C. 2^n

D. $2n$

Solution: El espacio de estados de n qubits es $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \cong \mathbb{C}^{2^n}$, que tiene dimensión 2^n.

1. El bra correspondiente al ket $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$ es:

   A. $\langle\psi| = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$

   B. $\langle\psi| = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \end{pmatrix}$

   C. $\langle\psi| = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \end{pmatrix}$

   D. $\langle\psi| = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$

Solution: El bra es la transpuesta conjugada del ket: $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \begin{pmatrix} \overline{1+i} & \overline{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \end{pmatrix}$.

2. El bracket $\langle 0|+\rangle$ donde $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ es igual a:

   A. 0

   B. 1

   C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

   D. $\frac{1}{2}$

Solution: $\langle 0|+\rangle = \langle 0| \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. El operador $|0\rangle\langle 1|$ actúa sobre $|1\rangle$ dando:

   A. $|0\rangle$

   B. $|1\rangle$

   C. 0

   D. $|0\rangle + |1\rangle$

Solution: $|0\rangle\langle 1| \, |1\rangle = |0\rangle \langle 1|1\rangle = |0\rangle \cdot 1 = |0\rangle$.

4. La relación de completitud para la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ es:

   A. $|0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle = I$

   B. $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I$

   C. $\langle 0| \langle 1| + \langle 1| \langle 0| = I$

   D. $\langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle = I$

Solution: La relación de completitud establece que $\sum_i |i\rangle\langle i| = I$. Para la base computacional: $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I$.

5. El estado de dos qubits $|01\rangle$ en notación matricial es:

   A. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   C. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   D. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution: $|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. La probabilidad de medir $|+\rangle$ en el estado $|\psi\rangle = \frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4i}{5}|1\rangle$ es:

   A. $\frac{9}{25}$

   B. $\frac{16}{25}$

   C. $\frac{1}{2}$

   D. $\frac{7}{10}$

Solution: $\langle +|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|)\left(\frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4i}{5}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{5} + \frac{4i}{5}\right)$. Por tanto, $P(+) = \left|\frac{3+4i}{5\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{9+16}{50} = \frac{1}{2}$.

7. La matriz de Pauli σ_x en notación de Dirac se escribe como:

   A. $|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$

B. $|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$

C. $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$

D. $-i\,|0\rangle\langle 1| + i\,|1\rangle\langle 0|$

Solution: $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ intercambia $|0\rangle$ y $|1\rangle$, lo que corresponde a $|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$.

8. El valor esperado $\langle \sigma_z \rangle$ en el estado $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ es:

A. $\alpha + \beta$

B. $|\alpha|^2 + |\beta|^2$

C. $|\alpha|^2 - |\beta|^2$

D. $\alpha\beta$

Solution: $\langle \sigma_z \rangle = \langle \psi|\,\sigma_z\,|\psi\rangle = \langle \psi|\,(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)\,|\psi\rangle = |\,\langle 0|\psi\rangle\,|^2 - |\,\langle 1|\psi\rangle\,|^2 = |\alpha|^2 - |\beta|^2$.

9. El estado de Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ tiene la propiedad de que:

A. Es separable

B. Es un estado de un solo qubit

C. Es entrelazado

D. Es un estado clásico

Solution: $|\Phi^+\rangle$ no puede escribirse como $|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$, por tanto es un estado entrelazado.

10. Para el Hamiltoniano $H = \omega\sigma_z/2$, el operador de evolución $U(t) = e^{-iHt}$ es:

A. $\cos(\omega t)I - i\sin(\omega t)\sigma_z$

B. $\begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}$

D. $e^{-i\omega t}\sigma_z$

Solution: $e^{-i\omega t\sigma_z/2} = e^{-i\omega t/2}\,|0\rangle\langle 0| + e^{i\omega t/2}\,|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}$.

1. La puerta X (Pauli-X) actúa sobre $|0\rangle$ como:
   A. $|0\rangle$
   B. $|1\rangle$
   C. $-|0\rangle$
   D. $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$

Solution: La puerta $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ intercambia los estados base: $X|0\rangle = |1\rangle$ y $X|1\rangle = |0\rangle$.

2. La puerta de Hadamard H aplicada dos veces da:
   A. H
   B. I
   C. 0
   D. $-I$

Solution: $H^2 = I$, es decir, la puerta de Hadamard es su propia inversa.

3. La puerta S (puerta de fase) satisface:
   A. $S = Z$
   B. $S^2 = Z$
   C. $S^2 = T$
   D. $S^2 = I$

Solution: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, por tanto $S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z$.

4. En la esfera de Bloch, el estado $|0\rangle$ se representa en:
   A. El ecuador
   B. El polo sur
   C. El polo norte
   D. El centro

Solution: Por convenio, $|0\rangle$ se sitúa en el polo norte (eje Z positivo) y $|1\rangle$ en el polo sur (eje Z negativo).

5. La rotación $R_x(\pi)$ alrededor del eje X por ángulo π es equivalente a:
   A. I
   B. Z
   C. $-iX$
   D. Y

Solution: $R_x(\pi) = e^{-i\pi\sigma_x/2} = \cos\frac{\pi}{2}I - i\sin\frac{\pi}{2}\sigma_x = -i\sigma_x = -iX$.

6. La puerta CNOT actúa sobre $|10\rangle$ dando:
   A. $|00\rangle$
   B. $|01\rangle$
   C. $|10\rangle$
   D. $|11\rangle$

Solution: CNOT invierte el segundo qubit cuando el primero está en $|1\rangle$: $\text{CNOT}\,|10\rangle = |11\rangle$.

7. El conjunto de puertas $\{H, T, \text{CNOT}\}$ es:
   A. Insuficiente para computación cuántica
   B. Universal para computación cuántica
   C. Solo genera rotaciones en X
   D. Solo funciona para un qubit

Solution: El conjunto $\{H, T, \text{CNOT}\}$ es universal: cualquier operador unitario puede aproximarse arbitrariamente bien usando solo estas puertas.

8. La descomposición $HXH = Z$ muestra que:
   A. H y X conmutan
   B. H transforma la base de X en la base de Z
   C. $X = Z$
   D. $H = XZ$

Solution: Esta identidad muestra que H conjuga X en Z, es decir, transforma los vectores propios de X en vectores propios de Z.

9. Para el Hamiltoniano $H = \omega\sigma_z$, el operador de evolución temporal es:
   A. Constante
   B. Una rotación alrededor del eje Z
   C. Una rotación alrededor del eje X
   D. La identidad

Solution: $U(t) = e^{-i\omega t\sigma_z}$ representa una rotación alrededor del eje Z en la esfera de Bloch con ángulo proporcional a ωt.

10. La puerta Toffoli (CCNOT) requiere:
   A. Un qubit
   B. Dos qubits
   C. Tres qubits
   D. Cuatro qubits

Solution: La puerta Toffoli es un CNOT con dos controles, por tanto requiere tres qubits: dos de control y uno objetivo.

1. La matriz de densidad de un estado puro $|\psi\rangle$ es:
   A. $\langle\psi|$
   B. $|\psi\rangle\langle\psi|$
   C. $\langle\psi|\psi\rangle$
   D. I

Solution: Para estados puros, la matriz de densidad es el proyector sobre el estado: $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

2. Un estado es puro si y solo si:
   A. $\mathrm{Tr}(\rho) = 0$
   B. $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$
   C. $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 0$
   D. $\rho = I$

Solution: El criterio de pureza establece que $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$ para estados puros y $\mathrm{Tr}(\rho^2) < 1$ para estados mixtos.

3. La matriz de densidad del estado completamente mixto de un qubit es:
   A. $|0\rangle\langle 0|$
   B. $|1\rangle\langle 1|$
   C. $\frac{1}{2}I$
   D. $|+\rangle\langle +|$

Solution: El estado completamente mixto es equiprobable en todos los estados: $\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}I$.

4. Para el estado de Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, la traza parcial sobre el subsistema B da:
   A. $|0\rangle\langle 0|$
   B. $|1\rangle\langle 1|$
   C. $\frac{1}{2}I$
   D. $|+\rangle\langle +|$

Solution: $\rho_A = \mathrm{Tr}_B(|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|) = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}I$. A pesar de que el sistema total está en estado puro, cada subsistema está en estado mixto.

5. La entropía de von Neumann de un estado puro es:

A. 0

B. 1

C. $\log_2 d$ donde d es la dimensión

D. Depende del estado

Solution: Para estados puros, $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho) = 0$ ya que ρ tiene un único valor propio igual a 1.

6. La entropía de von Neumann del estado completamente mixto $\rho = \frac{I}{2}$ de un qubit es:

A. 0

B. 1 **bit**

C. 2 bits

D. $\frac{1}{2}$ bit

Solution: $\rho = \frac{I}{2}$ tiene valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Por tanto, $S(\rho) = -2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1$ bit.

7. La fidelidad entre dos estados puros ortogonales $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ con $\langle\psi|\phi\rangle = 0$ es:

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. -1

Solution: Para estados puros, $F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle| = |0| = 0$.

8. El teorema de no-clonación establece que:

A. Todo estado cuántico puede ser copiado

B. No existe operación que pueda clonar un estado cuántico arbitrario desconocido

C. Solo los estados de la base computacional pueden ser clonados

D. Solo los estados entrelazados no pueden ser clonados

Solution: El teorema de no-clonación es fundamental en teoría cuántica de información: no existe canal cuántico que pueda copiar un estado desconocido arbitrario.

9. Los operadores de Kraus $\{K_i\}$ de un canal cuántico satisfacen:

A. $\sum_i K_i = I$

B. $\sum_i K_i^\dagger K_i = I$

C. $\sum_i K_i K_i = I$

D. $K_i K_i^\dagger = I$ para todo i

Solution: La condición de completitud para operadores de Kraus es $\sum_i K_i^\dagger K_i = I$, lo que asegura que la traza se preserve.

10. Un canal de despolarización con probabilidad $p = 1$ transforma cualquier estado en:

A. $|0\rangle\langle 0|$

B. $|1\rangle\langle 1|$

C. $\frac{I}{2}$

D. No cambia el estado

Solution: Para $p = 1$, el canal de despolarización $\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + \frac{p}{3}(\sigma_x\rho\sigma_x + \sigma_y\rho\sigma_y + \sigma_z\rho\sigma_z)$ se reduce a aplicar todas las matrices de Pauli con igual probabilidad, resultando en $\frac{I}{2}$.