Tema 5

Bloque 1. Fundamentos matemáticos

Espacios de Hilbert

Taller previo a la notación de Dirac

1. Demuestra que $\mathcal{H} = \mathbb{C}^4$ con las operaciones usuales es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Debemos verificar los axiomas de espacio vectorial. Para vectores $v, w, u \in \mathbb{C}^4$ y escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

a) **Cerradura bajo suma:** Si $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$, entonces:

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3, v_4 + w_4) \in \mathbb{C}^4$$

b) **Cerradura bajo producto por escalar:**

$$\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3, \alpha v_4) \in \mathbb{C}^4$$

c) **Elemento neutro:** $0 = (0, 0, 0, 0)$ satisface $v + 0 = v$.

d) **Elemento opuesto:** Para cada v existe $-v = (-v_1, -v_2, -v_3, -v_4)$ tal que $v + (-v) = 0$.

e) **Asociatividad de la suma:** $(u + v) + w = u + (v + w)$.

f) **Conmutatividad de la suma:** $v + w = w + v$.

g) **Distributividad:** $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ y $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta w$.

h) **Asociatividad del producto:** $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta w)$.

i) **Elemento neutro del producto:** $1 \cdot v = v$.

2. Base de Bell

Consideramos la base de Bell $\mathcal{B}_B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, fundamental en computación cuántica:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)\,, \\
B_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)\,, \\
B_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0)\,, \\
B_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)\,.
\end{aligned}$$

Verifica que $\mathcal{B}_B$ forma una base ortonormal.

Recordamos que la norma de un vector se define como

$$\|(v_1, v_2, v_3, v_4)\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + |v_4|^2}\,.$$

Normalización:

$$\begin{aligned}
\|B_1\| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 1\,. \\
\|B_2\| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 1\,. \\
\|B_3\| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 1\,. \\
\|B_4\| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Ortogonalidad: Recordamos que dos vectores v, w son ortogonales si

$$\langle v, w\rangle = 0\,.$$

Por la propiedad del producto interno $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$, para la ortogonalidad solo será necesario por parejas sin importar el orden.

$$\begin{aligned}
\langle B_1, B_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1\bar{1} + 0\bar{0} + 0\bar{0} + 1(\overline{-1}) = \frac{1}{2}(1-1) = 0 \\
\langle B_1, B_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1\bar{0} + 0\bar{1} + 0\bar{1} + 1\bar{0} = \frac{1}{2}(0+0) = 0 \\
\langle B_1, B_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1\bar{0} + 0\bar{1} + 0(\overline{-1}) + 1\bar{0} = \frac{1}{2}(0-0) = 0 \\
\langle B_2, B_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1\bar{0} + 0\bar{1} + 0\bar{1} - 1\bar{0} = \frac{1}{2}(0-0) = 0 \\
\langle B_2, B_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1\bar{0} + 0(\overline{-1}) + 0\bar{1} - 1\bar{0} = \frac{1}{2}(0-0) = 0 \\
\langle B_3, B_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(0\bar{0} + 1\bar{1} + 1(\overline{-1}) + 0(\bar{0}) = \frac{1}{2}(1-1) = 0
\end{aligned}$$

Todos los productos internos entre estados distintos son cero, verificando la ortogonalidad.

Base: Como sabemos que $\mathbb{C}^4$ es un espacio vectorial de dimensión 4, y tenemos 4 vectores, solo debemos o ver que son linealmente independientes o un sistema generador.

Veamos que son linealmente independientes. Por definición $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son linealmente independientes si y solo si $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0\,.$$

En nuestro caso

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 + \alpha_4 B_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_i = 0\,.$$

3. Encuentra la matriz P que permite cambiar de la base estándar a la base de Bell.

Llamando $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base estándar, la matriz de cambio de base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_\mathcal{B}$ tiene como filas las coordenadas de los vectores de la nueva base expresados en la base estándar. Por lo tanto

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos observar como

$$e_i M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_B} = B_i \Rightarrow e_i = B_i (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_B})^{-1} = B_i M_{\mathcal{B}_B}^{\mathcal{B}}\,,$$

y por tanto si $v \in \mathbb{C}^4$ tiene coordenadas (v_1, v_2, v_3, v_4) en la base estándar, y (b_1, b_2, b_3, b_4) en la base de Bell, entonces

$$\sum_{i=1}^{4} b_i B_i = v = \sum_{i=1}^{4} v_i e_i = \sum_{i=1}^{4} v_i B_i (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_B})^{-1} = \sum_{i=1}^{4} v_i M_{\mathcal{B}_B}^{\mathcal{B}} B_i$$
$$\Rightarrow b_i = v_i M_{\mathcal{B}_B}^{\mathcal{B}}\,.$$

Por lo tanto la matriz P que permite cambiar de la base estándar a la base de Bell es

$$P = M_{\mathcal{B}_B}^{\mathcal{B}}\,.$$

4. Expresa el vector

$$u = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)\,,$$

en la base de Bell.

Como las coordenadas de u están dadas en la base estándar, su expresión desarrollada en esta base es

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} e_i\,.$$

Para obtener las coordenadas en la base de Bell, usamos $M_{\mathcal{B}_B}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_B})^{-1}$. Como

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_B}$ es unitaria (producto de operaciones unitarias), $(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_B})^{-1} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_B})^{\dagger}$:

$$u_{\mathcal{B}_B} = u_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}_B}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2,0,2,0)_{\mathcal{B}_B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)_{\mathcal{B}_B}$$

Por lo tanto:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}B_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}B_3\,.$$

5. Sea el subespacio $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^4$ definido por

$$\mathcal{S} = \text{span}\{B_1, B_3\}\,.$$

Encuentra una base ortonormal para el subespacio ortogonal $\mathcal{S}^{\perp}$.

El subespacio ortogonal $\mathcal{S}^{\perp}$ contiene todos los vectores ortogonales a $\mathcal{S}$. De la base de Bell, sabemos que B_2 y B_4 son ortogonales a B_1 y B_3, que son linealmente independientes y que

$$\mathbb{C}^4 = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^{\perp} \Rightarrow \text{dim}(\mathbb{C}^4) = \text{dim}(\mathcal{S}) + \text{dim}(\mathcal{S}^{\perp}) \Rightarrow \text{dim}(\mathcal{S}^{\perp}) = 2\,.$$

Por lo tanto, una base ortonormal para $\mathcal{S}^{\perp}$ es

$$\mathcal{S}^{\perp} = \text{span}\{B_2, B_4\}\,.$$

6. Construye el proyector ortogonal $P_{\mathcal{S}}$ sobre el subespacio simétrico.

El proyector sobre un subespacio generado por la base ortonormal $\{B_1, B_3\}$ se construye usando el producto externo como

$$P_{\mathcal{S}} = B_1 \wedge B_1 + B_3 \wedge B_3\,.$$

Calculamos explícitamente

$$B_1 \wedge B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B_3 \wedge B_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$P_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificamos que es un proyector: $P_{\mathcal{S}}^2 = P_{\mathcal{S}}$ y $P_{\mathcal{S}}^\dagger = P_{\mathcal{S}}$.

7. Calcula la proyección del vector $(1,0,0,0)$ sobre el subespacio $\mathcal{S}$.

La proyección se calcula aplicando el proyector, o lo que es lo mismo, multiplicando por la matriz del proyector:

$$P_{\mathcal{S}}((1,0,0,0)) = (1,0,0,0)\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1,0,0,1).$$

8. Considera los siguientes vectores linealmente independientes en $\mathbb{C}^4$:

$$v_1 = (1,0,0,1)$$
$$v_2 = (1,1,0,0)$$
$$v_3 = (1,1,1,0)$$

Aplica el proceso de Gram-Schmidt para obtener un conjunto ortonormal.

Paso 1: Normalizamos

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1).$$

Paso 2: Ortogonalizamos v_2 respecto a u_1

$$w_2 = v_2 - \langle u_1, v_2\rangle u_1 = (1,1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1) = \frac{1}{2}(1,2,0,-1)\,.$$

Normalizamos

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{3/2}}\frac{1}{2}(1,2,0,-1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,0,-1)\,.$$

Paso 3: Ortogonalizamos v_3 respecto a u_1 y u_2

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \langle u_1, v_3\rangle u_1 - \langle u_2, v_3\rangle u_2 \\ &= (1,1,1,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1) - \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,0,-1) \\ &= (1,1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,0,1) - \frac{1}{2}(1,2,0,-1) \\ &= (0,0,1,0)\,. \end{aligned}$$

Como la proyección ya está normalizada

$$u_3 = (0,0,1,0)\,.$$

Conjunto ortonormal resultante

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,0,-1), (0,0,1,0)\right\}.$$

9. Considera el operador de intercambio (SWAP) que intercambia dos coordenadas de posición

$$\begin{aligned} \text{SWAP} : \mathbb{C}^4 &\longrightarrow \mathbb{C}^4 \\ (v_1, v_2, v_3, v_4) &\mapsto (v_1, v_3, v_2, v_4)\,. \end{aligned}$$

Encuentra la matriz del operador SWAP en la base canónica.

Para encontrar la matriz, aplicamos el operador a cada vector de la base canónica

$$\begin{aligned} \text{SWAP}(e_1) &= e_1 \\ \text{SWAP}(e_2) &= e_3 \\ \text{SWAP}(e_3) &= e_2 \\ \text{SWAP}(e_4) &= e_4 \end{aligned}$$

Las filas de la matriz son las imágenes de los vectores de la base canónica:

$$[\text{SWAP}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Encuentra la matriz del operador SWAP en la base de Bell.

Aplicamos el operador a cada vector de la base de Bell:

$$\begin{aligned} \text{SWAP}(B_1) &= B_1 \\ \text{SWAP}(B_2) &= B_2 \\ \text{SWAP}(B_3) &= B_3 \\ \text{SWAP}(B_4) &= -B_4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en la base de Bell

$$[\text{SWAP}]_{\mathcal{B}_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que en la base de Bell, el operador SWAP es diagonal.

11. Verifica que las dos representaciones están relacionadas por la matric cambio de base.

Tenemos que verificar que

$$[\text{SWAP}]_{\mathcal{B}_B} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_B} [\text{SWAP}]_{\mathcal{B}_c} M_{\mathcal{B}_B}^{\mathcal{B}}.$$

Calculamos $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_B} [\text{SWAP}] M_{\mathcal{B}_B}^{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que coincide con $[\text{SWAP}]_{\mathcal{B}_B}$.

12. Calcula el espectro del operador SWAP.

Para buscar los valores propios y vectores propios del operador SWAP, podemos usar cualquier representación matricial del operador.
De la representación en la base de Bell, vemos directamente que:

a) Valor propio $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad 3.

Vectores propios B_1, B_2, B_3.

El subespacio propio es $S_1 = \text{span}\{B_1, B_2, B_3\}$.

b) Valor propio $\lambda_2 = -1$, con multiplicidad 1.

Vector propio B_4.

El subespacio propio es $S_{-1} = \text{span}\{B_4\}$.

Como esperamos y ya hemos verificado se cumple que

$$S_1 \perp S_{-1}\,,$$

y

$$\text{dim}(S_1) + \text{dim}(S_{-1}) = 4\,.$$

13. Escribe el operador SWAP como suma de proyectores sobre sus subespacios propios.

La descomposición espectral es:

$$\text{SWAP} = 1 \cdot P_{E_1} + (-1) \cdot P_{E_{-1}}$$

donde

$$\begin{aligned} P_{E_1} &= B_1 \wedge B_1 + B_2 \wedge B_2 + B_3 \wedge B_3\,, \\ P_{E_{-1}} &= B_4 \wedge B_4\,. \end{aligned}$$

Calculamos explícitamente

$$\begin{aligned} P_{E_{-1}} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_{E_1} &= \mathbb{I} - P_{E_{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\text{SWAP} = P_{E_1} - P_{E_{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Verificar que el operador SWAP es hermitiano.

Un operador es hermitiano si $A^\dagger = A$, tanto como operador como para su representación como matriz. Es fácil observar que

$$[\text{SWAP}]^\dagger = [\text{SWAP}]\,.$$

Por lo tanto, SWAP es hermitiano.

Consecuencias:

- Los valores propios son reales: $\lambda \in \{1, -1\} \subset \mathbb{R}$.
- Los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.
- El operador es diagonalizable en una base ortonormal.

15. Verificar que el operador SWAP es unitario.

Un operador es unitario si $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{I}$. Como SWAP es hermitiano, debemos verificar que $\text{SWAP}^2 = \mathbb{I}$

$$[\text{SWAP}]^2_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$$

Por lo tanto, SWAP es unitario.

Consecuencias:

- SWAP preserva el producto interno.
- Los valores propios tienen módulo 1: $|\lambda| = 1$.

16. Verifica que $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ construyendo explícitamente el isomorfismo.

La manera estándar de construir isomorfismo entre espacio vectoriales es indicar una base de cada espacio y mapearla entre sí. Si llamamos $f_1 = (1,0)$ y $f_2 = (0,1)$ a las bases de $\mathbb{C}^2$, entonces el isomorfismo es

$$f_1 \otimes f_1 \mapsto e_1$$

$$f_1 \otimes f_2 \mapsto e_2$$

$$f_2 \otimes f_1 \mapsto e_3$$

$$f_2 \otimes f_2 \mapsto e_4 \,.$$

Explícitamente para $v = \alpha_{11} f_1 \otimes f_1 + \alpha_{12} f_1 \otimes f_2 + \alpha_{21} f_2 \otimes f_1 + \alpha_{22} f_2 \otimes f_2$

$$v \mapsto \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \alpha_{21} e_3 + \alpha_{22} e_4 \,.$$

Este mapeo es lineal, biyectivo y preserva el producto interno, por lo que es un isomorfismo de espacios de Hilbert.

17. Determina cuáles de los siguientes vectores son separables.

a) $u_1 = \frac{1}{2}(f_1 \otimes f_1 + f_1 \otimes f_2 + f_2 \otimes f_1 + f_2 \otimes f_2)$
b) $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \otimes f_1 + f_2 \otimes f_2)$

a)

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(f_1 \otimes f_1 + f_1 \otimes f_2 + f_2 \otimes f_1 + f_2 \otimes f_2) \\ &= \frac{1}{2}(f_1 \otimes (f_1 + f_2) + f_2 \otimes (f_1 + f_2)) \\ &= \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \otimes (f_1 + f_2) \,. \end{aligned}$$

Este estado es **separable**.

b) Para que u_2 sea separable, debería existir

$$\begin{aligned} u_2 &= (\alpha_1 f_1 + \beta_1 f_2) \otimes (\alpha_2 f_1 + \beta_2 f_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2 f_1 \otimes f_1 + \alpha_1\beta_2 f_1 \otimes f_2 + \beta_1\alpha_2 f_2 \otimes f_1 + \beta_1\beta_2 f_2 \otimes f_2 \,. \end{aligned}$$

Comparando con $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \otimes f_1 + f_2 \otimes f_2)$, nos da el sistema de ecuaciones

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_1\beta_2 = 0$$

$$\beta_1\alpha_2 = 0$$

$$\beta_1\beta_2 = \frac{1}{2} \,.$$

El sistema anterior no tiene solución. Este estado no es separable.

18. Para el vector $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + B_2)$, encuentra el funcional lineal $v^* \in (\mathbb{C}^4)^*$ mediante el isomorfismo de Riesz.

Solución:
El isomorfismo de Riesz asocia a cada vector v el funcional lineal

$$v^* : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto \langle v, w \rangle .$$

En coordenadas, sabemos que v^* es la transpuesta conjugada de v

$$[v*] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Entonces, para cualquier $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ se tiene

$$v^*(w) = (w_1, w_2, w_3, w_4) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_1 + w_4) .$$