Bloque 1. Fundamentos matemáticos

Operadores lineales y representación matricial

Índice

Esquema 3

Ideas clave 4

3.1 Introducción y objetivos 4

3.2 Transformaciones lineales 4

3.3 Operadores lineales 8

3.4 Representación matricial de transformaciones lineales 9

3.5 Matrices complejas como operadores 10

3.6 Valores y vectores propios 12

3.7 Descomposición en valores singulares 14

3.8 Espacios de operadores 15

A fondo 17

Problemas 18

Esquema

- **Transformaciones lineales**
  - Definición y propiedades
  - Núcleo e imagen — $V \,/\, \ker(T) \cong \mathrm{Im}(T)$
  - Inyectividad y sobreyectividad
- **Operadores lineales**
  - Operadores como endomorfismos
  - Composición de operadores
  - Operador inverso
- **Representación matricial**
  - Matriz asociada a una transformación — $[T]$
  - cambio de coordenadas — $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$
  - Isomorfismo con matrices
- **Matrices complejas**
  - Operaciones matriciales
  - Matrices especiales
- **Diagonalización**
  - Polinomio característico — $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
  - Valores y vectores propios — $vA = \lambda v$
  - Diagonalización espectral — $A = PDP^{-1}$
  - Diagonalización SVD — $A = U\Sigma V^{\dagger}$

Ideas clave

3.1 Introducción y objetivos

Los operadores lineales constituyen el puente conceptual entre la estructura algebraica abstracta de los espacios vectoriales y su representación computacional mediante matrices. En computación cuántica, este concepto es fundamental ya que todas las operaciones que pueden realizarse sobre sistemas cuánticos se describen mediante operadores lineales unitarios.

La importancia de los operadores lineales en computación cuántica se refleja en múltiples aspectos:

- Las **puertas cuánticas** son operadores unitarios que actúan sobre qubits.
- La **evolución temporal** de sistemas cuánticos se describe mediante operadores unitarios.
- Los **observables cuánticos** son operadores hermitianos.
- Los **algoritmos cuánticos** se construyen como secuencias de operadores lineales.

En este tema desarrollaremos la teoría de transformaciones lineales entre espacios vectoriales complejos, con especial énfasis en los operadores (transformaciones de un espacio en sí mismo) y su representación matricial. Esta conexión entre conceptos abstractos y representaciones concretas es esencial para la implementación práctica de algoritmos cuánticos.

3.2 Transformaciones lineales

Definición 1: Transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales. Una función $T : V \to W$ es una **transformación lineal** o **homomorfismo**, si para todo $u, v \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)\,.$$

Una definición equivalente es dar las propiedades por separado.

Resultado 1

Una transformación entre espacios vectoriales, T es lineal si y solo si

1. **Conservación de la suma**. Para todo $u, v \in V$, se tiene que $T(u+v) = T(u) + T(v)$.
2. **Conservación del producto por escalar**. Para todo $u \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene que $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Demostración.

La conservación de la suma se cumple de la definición de transformación lineal, al tomar $\alpha = \beta = 1$. Por otro lado, la conservación del producto por escalar se cumple al tomar $\beta = 0$ y $v = 0$.

El recíproco se cumple pues al considerarse αu y βv como vectores, aplicamos primero la conservación de la suma y luego la conservación del producto por escalar

$$T(\alpha u + \beta v) = T(\alpha u) + T(\beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)\,.$$

$\square$

Ejemplo 1: Transformaciones lineales básicas

1. **Transformación identidad**: $I : V \to V$ definida por $I(v) = v$.
2. **Transformación cero**: $O : V \to W$ definida por $O(v) = 0$.
3. **Escalamiento**: Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, $S_\alpha : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definida por $S_\alpha(v) = \alpha v$.
4. **Proyección**: $P : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ definida por $P(x, y, z) = (x, y)$.

Aunque es sencillo de comprobar, es intersante resaltar que toda aplicación lineal debe conservar el elemento nulo y el elemento opuesto.

$$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0) \Rightarrow T(0) = 0\,.$$
$$T(-v) = T(-1 \cdot v) = -T(v)\,.$$

Resultado 2

Si T y U son transformaciones lineales entre espacios vectoriales, y existe $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V tal que $U(v_i) = T(v_i)$ para todo i, entonces $U = T$.

Demostración.

Si tenemos un vector $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, entonces

$$U(v) = U\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = T(v)\,.$$

$\square$

Definición 2

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Diremos que T es:

- **Monomorfismo** si es inyectiva.
- **Epimorfismo** si es sobreyectiva.
- **Isomorfismo** si es biyectiva. En este caso también se dice que los espacios vectoriales son isomorfos y se escribe como $V \cong W$.

Definición 3: Núcleo

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Llamamos **núcleo (o kernel)** de T a

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

Resultado 3

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces:

1. $\text{Ker}(T)$ es un subespacio de V.
2. $\text{Im}(T)$ es un subespacio de W.
3. T es inyectiva si y solo si $\text{Ker}(T) = \{0\}$.

Demostración.

Se deja al lector como ejercicio (**2.**). □

Ejemplo 2: Cálculo de núcleo e imagen

Considerar la transformación $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ definida por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy \\ 2x - z \end{pmatrix}.$$

Núcleo: Para obtener el núcleo de la transformación lineal, tenemos que resolver la ecuación obtenida al plantear la igualdad $T(v) = 0$.

$$x + iy = 0 \quad (1)$$

$$2x - z = 0 \quad (2)$$

De la primera ecuación: $x = -iy$. De la segunda: $z = 2x = -2iy$. Por tanto

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -iy \\ y \\ -2iy \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{C} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix} \right\}.$$

Imagen: Como T es lineal, $\text{Im}(T) = \text{gen}\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$, donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^3$.

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Como $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y los vectores $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $\mathbb{C}^2$

$$\text{Im}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{C}^2.$$

Como vemos, un homomorfismo genera un subespacio que puede ser menor al espacio de llegada, y nos interesa saber cuanto nos falta para llenar dicho espacio.

Teorema 4

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces:

- Existe $V' \subseteq V$ tal que $V = \text{Ker}(T) \oplus V'$.
- Existe $W' \subseteq W$ tal que $W = \text{Im}(T) \oplus W'$.
- $V / \text{Ker}(T) \cong \text{Im}(T)$.

Como consecuencia directa del Teorema 4 obtenemos el siguiente resultado fundamental.

Teorema 5

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

Es por este resultado que es importante estudiar el núcleo de un homomorfismo.

3.3 Operadores lineales

Definición 4: Operador lineal

Un **operador lineal** o **endomorfismo** sobre un espacio vectorial V es una transformación lineal $T : V \to V$. El conjunto de todos los operadores lineales de V se denota $\mathcal{L}(V)$.

Los operadores lineales tienen propiedades especiales debido a que el espacio de salida coincide con el de entrada, lo que permite usar conceptos como la composición o la inversa.

Habitualmente se omite la parte de lineal y se habla solo de operadores, pero no debemos nunca olvidar esta condición.

Resultado 6

Sean R, S y T operadores lineales. La composición de operadores lineales satisface:

1. **Asociativa:** $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.
2. **Elemento neutro:** $I \circ T = T \circ I = T$.
3. **Distributiva:** $R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T$.

Demostración.

Se deja al lector como ejercicio (**3.**). □

Teorema 7: Caracterización de la invertibilidad

Un operador lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ es invertible si y solo si es un isomorfismo. Equivalentemente:

1. T es inyectivo (Ker$(T) = \{0\}$).
2. T es sobreyectivo (Im$(T) = V$).

Aplicando el Teorema 4 a operadores lineales obtenemos la siguiente consecuencia.

Teorema 8

Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal, se cumple

$$V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)\,.$$

3.4 Representación matricial de transformaciones lineales

La representación matricial establece una correspondencia biyectiva entre transformaciones lineales y matrices, permitiendo cálculos computacionales eficientes.

Definición 5: Matriz de una transformación lineal

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Sean $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente.
Para cada $j = 1, \ldots, n$, expresamos $T(v_j)$ en la base $\mathcal{B}_W$

$$T(v_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} w_k \,.$$

La **matriz de T respecto a las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$** es

$$[T]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} .$$

Cuando al escrbir la matriz, o las coordenadas de un vector, no se especifica la base, se considera la base canónica. En este caso, la matriz de la transformación se denota simplemente como $[T]$.

Nota: La j-ésima fila de $[T]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}$ contiene las coordenadas de $T(v_j)$ respecto a la base $\mathcal{B}_W$

$$T(v_j)_{\mathcal{B}_W} = (v_j)_{\mathcal{B}_V} [T]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} \,.$$

Ejemplo 3: Matriz de una transformación

Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy \\ 2x \\ x-y \end{pmatrix}$.

Usando las bases canónicas:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ i & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema 9: cambio de coordenadas

Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal y $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ y $\mathcal{B}_4$ bases de V. Existe una matriz P invertible tal que las matrices $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}$ y $[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_4}$ están relacionadas por

$$[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_4} = P[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}P^{-1}.$$

Este teorema es muy importante, pues nos permite restringir el estudio de muchas propiedades en operadores lineales, con solo comprobarlo con la matriz asociada a las bases canónicas.

3.5 Matrices complejas como operadores

Hemos visto, que todo operador lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ puede representarse como una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, donde $n =$ dim(V). Pero el recíproco es claramente cierto, es decir, todo matriz cuadrada define un operador lineal.

Cada matriz compleja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ define naturalmente un operador lineal $T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mediante $T_A(v) = vA$. Esta correspondencia permite estudiar propiedades algebraicas de las matrices a través de la teoría de operadores, y viceversa.

Definición 6

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Llamamos **matriz adjunta** a la matriz $A^\dagger$ definida por

$$(A^\dagger)_{ij} = \overline{A_{ji}}.$$

Definición 7

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Decimos que A es:

- **Hermítica**: si $A^\dagger = A$.
- **Unitaria**: si $A^\dagger A = AA^\dagger = I$.
- **Normal**: si $A^\dagger A = AA^\dagger$.

Estudiaremos con más detalle estas matrices en temas posteriores, ya que son fundamentales en computación cuántica.

Ejemplo 4: Matrices de Pauli

Las matrices de Pauli son matrices hermitianas y unitarias fundamentales en computación cuántica:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Estas matrices satisfacen:

- $\sigma_i^2 = I$ para $i = x, y, z$.
- $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$, $\sigma_y \sigma_z = i\sigma_x$, $\sigma_z \sigma_x = i\sigma_y$.
- $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0$ para $i \neq j$ (anticonmutan).
- Junto con la identidad I, forman una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Ejemplo 5: Matriz de Hadamard

La matriz de Hadamard es otra de las matrices unitarias fundamentales

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se verifica que $H^2 = I$ y transforma la base canónica en:

$$H(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\,.$$
$$H(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\,.$$

Es importante recordar que las propiedades de hermitianidad, unitariedad y normalidad no dependen de las bases escogidas.

3.6 Valores y vectores propios

Definición 8: Valor y vector propio

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ es un **valor propio** de A si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $Av = \lambda v$.
El vector v se llama **vector propio** asociado al valor propio λ.

Para obtener los valores propios de una matriz A, se resuelve el sistema $(A - \lambda I)v = 0$. Este sistema tiene soluciones no triviales si y solo si $\det(A - \lambda I) = 0$.

Definición 9: Polinomio característico

El **polinomio característico** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)\,.$$

Resultado 10

Los valores propios de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son las raíces del polinomio característico $p_A(\lambda)$.

Ejemplo 6.

Consideremos la matriz de Pauli $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo polinomio característico es

$$p_{\sigma_z}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = \lambda^2 - 1\,.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.
Ahora calculemos los vectores propios, primero para $\lambda_1 = 1$

$$(\sigma_z - I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_2 = 0\,.$$

Por tanto, $\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $v_1 \neq 0$ es un vector propio de σ_z asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$.
Los vectores propios para $\lambda_2 = -1$ son

$$(\sigma_z + I)v = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = 0\,.$$

Por tanto, $\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$ con $v_2 \neq 0$ es un vector propio de σ_z asociado al valor propio $\lambda_2 = -1$.

Teorema 11: Diagonalización

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es diagonalizable si y solo si los vectores propios asociados a los valores propios forman una base de $\mathbb{C}^n$. En tal caso, existe una matriz invertible P tal que

$$A = P^{-1}DP\,,$$

donde D es diagonal con los valores propios de A en la diagonal y P es la matriz cuyas fila i-ésiam es el vector propio del valor propio i-ésimo de A.

Definición 10: Diagonalización espectral

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz diagonalizable. Diremos que A es **diagonalizable espectral** cuando tiene n valores propios distintos. Llamaremos **espectro** de A al conjunto de sus valores propios ordenados de mayor a menor.

Ejemplo 7.

Consideremos la matriz de Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si calculamos su polinomio característico tenemos

$$p_H(\lambda) = \det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda)(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda) - \frac{1}{2} = \lambda^2 - 1\,.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.
Para $\lambda_1 = 1$ tenemos

$$(H - I)v = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_1(1-\sqrt{2}) + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2(1+\sqrt{2}) = 0\,. \end{cases}$$

Por tanto, $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de H asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$.
Para $\lambda_2 = -1$ tenemos

$$(H + I)v = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_1(1+\sqrt{2}) + v_2 = 0 \\ v_1 + v_2(-1+\sqrt{2}) = 0\,. \end{cases}$$

Por tanto, $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de H asociado al valor propio $\lambda_2 = -1$.
Por el teorema de la diagonalización tenemos que

$$H = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

3.7 Descomposición en valores singulares

Una característica importante de las matrices complejas, es su descomposición en valores singulares, también llamada SVD (Singular Value Decomposition) por sus siglas en inglés, que permite representar una matriz como una combinación de matrices unitarias y una matriz diagonal.

Resultado 12

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Existe una descomposición $A = UDV^\dagger$, donde U y V son matrices unitarias y D es una matriz diagonal con valores reales no negativos y ordenados de mayor a menor.

Definición 11

A la matriz diagonal resultado de la descomposición en valores singulares la llamamos **matriz singular** y los elementos de la diagonal los llamamos **valores singulares** de A.

Habitualmente, la descomposición en valores singulares tiene su propia notación y se denota por Σ a la matriz diagonal y por σ_i a los valores singulares de A.

Ejemplo 8.

Consideremos la matriz $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{3}i & \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Para calcular la descomposición en valores singulares de A debemos calcular los valores propios de la matrices $AA^\dagger$ y $A^\dagger A$.

$$AA^\dagger = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{3}i & \sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{3}i \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{3}i \\ \sqrt{3}i & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^\dagger A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{3}i \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ \sqrt{3}i & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 19 & -\sqrt{15}i \\ \sqrt{15}i & 5 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de $AA^\dagger$ y $A^\dagger A$ es

$$\begin{aligned} p_{AA^\dagger}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -\sqrt{3}i \\ \sqrt{3}i & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 5\,. \\ p_{A^\dagger A}(\lambda) &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 19-\lambda & -\sqrt{15}i \\ \sqrt{15}i & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 5\,. \end{aligned}$$

Como esparábamos, ambas matrices tienen el mismo polinomio característico, y por tanto los mismos valores propios, que son

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \{5, 1\} \, .$$

Como los valores singulares de A son las raices cuadradas de los valores propios, obtenemos los valores singulares

$$\sigma_1 = \sqrt{5} \quad \text{y} \quad \sigma_2 = 1 \, .$$

Al ordenar de mayor a menor obtenemos la matriz singular

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ahora tenemos que calcular los vectores singulares normalizados de $AA^\dagger$ y $A^\dagger A$:

- Para $\sigma_1 = 5$ un vector propio normalizado de $AA^\dagger$ es $u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -i \end{pmatrix}$.
- Para $\sigma_1 = 1$ un vector propio normalizado es $AA^\dagger$ es $u_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3}i \end{pmatrix}$.
- Para $\sigma_1 = 5$ un vector propio normalizado de $A^\dagger A$ es $v_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{15} \\ -i \end{pmatrix}$.
- Para $\sigma_1 = 1$ un vector propio normalizado es $A^\dagger A$ es $v_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{15}i \end{pmatrix}$.

Por lo tanto las matrices U y V que se construyen con estos vectores son

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -i & -\sqrt{3}i \end{pmatrix} \quad V = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{15} & 1 \\ -i & -\sqrt{15}i \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz A puede descomponerse en

$$A = U\Sigma V^\dagger = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -i & -\sqrt{3}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{15} & -i \\ 1 & -\sqrt{15}i \end{pmatrix}$$

3.8 Espacios de operadores

El estudio de los operadores lineales no se limita a sus propiedades individuales. El conjunto de todos los operadores lineales definidos sobre un espacio vectorial forma, a su vez, un nuevo espacio vectorial. Esta estructura permite sumar operadores y multiplicarlos por escalares, extendiendo las herramientas del álgebra lineal al propio conjunto de transformaciones. En el contexto de la computación cuántica, esta perspectiva es esencial para comprender la estructura del espacio de observables y las operaciones permitidas sobre ellos.

Resultado 13

El conjunto $\mathcal{L}(V)$ de todos los operadores lineales en un espacio vectorial V forma un espacio vectorial con las operaciones:

- $(S+T)(v) = S(v) + T(v)$
- $(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$

Teorema 14: Correspondencia entre operadores lineales y matrices

La representación matricial establece un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\mathcal{L}(V) \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

donde $\dim(V) = n$.
Además, si $S, T \in \mathcal{L}(V)$ son operadores lineales, entonces

$$[T \circ S] = [T][S].$$

Ejemplo 9: Base del espacio de operadores en $\mathbb{C}^2$

Una base para $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ la podemos encontrar a partir de la base canónica del espacio vectorial de las matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, que está dada por las matrices:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recordando la correspondencia entre matrices y operadores lineales, obtenemos que una base para $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ está dada por los operadores T_{ij} definidos por:

$$T_{ij}(v) = vE_{ij}.$$

Cualquier operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ se puede escribir como

$$T = \sum_{i,j=1}^{2} t_{ij} T_{ij}.$$

A fondo

Los siguientes libros pueden servir de material de apoyo y para profundizar más en los contenidos de este tema.

Marinescu, D. and Marinescu, G. Lectures on quantum computing. University of Central Florida. 2003

Se recomienda la lectura del capítulo 3, las secciones 3.1, 3.2 y 3.3.

Nalajara, N., Ohmi, T. Quantum computing. From linear algebra to physical realizations. CRC Press, 2008

Se recomienda la lectura del capítulo 1, donde se presentan los conceptos de aplicaciones lineales y representación matricial.

Problemas

1. Verificar que las siguientes funciones son transformaciones lineales y calcular su núcleo e imagen:

   a) $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ definida por

   $$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy - z \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

   b) $S : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ definida por

   $$S\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + iv \\ 2u \\ u - v \end{pmatrix}.$$

2. Demostrar las propiedades del resultado 3.

3. Demostrar las propiedades del resultado 6.

4. Encontrar la matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por

   $$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + i)x + y \\ ix - 2y \end{pmatrix},$$

   respecto a:

   a) La base canónica.

   b) La base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Calcular:

   a) AB y BA.

   b) $A^\dagger A$ y $AA^\dagger$.

   c) det(A), det(B) y det(AB).

   d) tr(A), tr(B) y tr(AB).

6. Demostrar que si A es una matriz hermitiana, entonces los valores propios de A son reales.

7. Demostrar que si A es una matriz unitaria, entonces los valores propios de A tienen módulo 1.

8. Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, entonces su polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)\,.$$

9. Encontrar los valores propios y vectores propios de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$.

c) La matriz de Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Verificar que las siguientes matrices son unitarias y calcular sus inversas:

a) $U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

b) $U_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}$.

11. Demostrar que si A y B son matrices hermitianas, entonces:

a) $A + B$ es hermitiana.

b) AB es hermitiana si y solo si $AB = BA$.

c) iA es antihermitiana (i.e., $(iA)^* = -iA$).

12. Considerar la matriz

$$\mathsf{CZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Verificar que CZ es unitaria.

b) Determinar cómo actúa sobre los vectores de la base computacional.

c) Calcular los valores propios de CZ.

13. Expresar la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & -1 \end{pmatrix},$$

como combinación lineal de las matrices de Pauli y la identidad.

14. Sea $T : V \to V$ un operador lineal.

a) Demostrar que T es invertible si y solo si det$([T]) \neq 0$.

b) Si T es invertible, demostrar que $[T^{-1}] = ([T])^{-1}$.

c) Demostrar que tr(T) es independiente de la base elegida.

15. Demostrar que para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se cumple que $A^\dagger A$ y $AA^\dagger$ son hermitianas.

16. Calcula la descomposición en valores singulares de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$