

1. El conjugado de $z = 3 - 2i$ es:

- A. $-3 + 2i$
- B. $3 + 2i$
- C. $-3 - 2i$
- D. $2 + 3i$

Solution: El conjugado de $z = a + bi$ se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria, por tanto $\overline{3 - 2i} = 3 + 2i$.

2. El módulo del número complejo $z = 3 + 4i$ es:

- A. 7
- B. $\sqrt{7}$
- C. 5
- D. 25

Solution: El módulo se calcula como $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

3. La fórmula de Euler establece que:

- A. $e^{i\theta} = \sin \theta + i \cos \theta$
- B. $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
- C. $e^{i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$
- D. $e^{i\theta} = i \cos \theta + \sin \theta$

Solution: La fórmula de Euler es $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, que relaciona la función exponencial compleja con las funciones trigonométricas.

4. El producto $(1 + i)(2 - i)$ es igual a:

- A. $1 + i$
- B. $2 - i$
- C. $3 + i$
- D. $3 - i$

Solution: Aplicando la propiedad distributiva: $(1+i)(2-i) = 2-i+2i-i^2 = 2+i-(-1) = 3+i$.

5. Las raíces cuartas de la unidad son:

A. $1, -1, i, -i, e^{i\pi/4}$

B. $1, -1, i, -i$

C. $1, i, -i, e^{i\pi/2}$

D. $1, -1, 2i, -2i$

Solution: Las raíces n -ésimas de la unidad son $e^{2\pi ik/n}$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$. Para $n = 4$: $e^0 = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{3i\pi/2} = -i$.

6. El número complejo $z = 1 + i$ en forma exponencial es:

A. $\sqrt{2}e^{i\pi}$

B. $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$

C. $2e^{i\pi/4}$

D. $e^{i\pi/2}$

Solution: El módulo es $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. El argumento es $\theta = \arctan(1/1) = \pi/4$. Por tanto, $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

7. Si $z = 2e^{i\pi/3}$, entonces z^3 es igual a:

A. $6e^{i\pi}$

B. -8

C. $8e^{i\pi/9}$

D. $2e^{i\pi}$

Solution: Por la fórmula de De Moivre: $z^3 = (2e^{i\pi/3})^3 = 2^3 e^{i3\pi/3} = 8e^{i\pi} = -8$.

8. ¿Cual es el valor de $\cos(i)$?

A. -1

B. $\frac{1+e^2}{2e}$

C. $i \cos(e)$

D. $1 + \sin(e)$

Solution: Por la fórmula de Euler: $\cos(i) = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} = \frac{1/e + e}{2} = \frac{1+e^2}{2e}$.

9. Si $f(a + bi) = ia$ es una función compleja con valores complejos, entonces \bar{f} :

- A. \bar{f} es una función real de variable compleja.
- B. \bar{f} es una función compleja de variable compleja.**
- C. \bar{f} es una función real de variable real.
- D. \bar{f} es una función compleja de variable real.

Solution: Por definición de conjugado de una función, $\bar{f}(a + bi) = \overline{f(a + bi)} = \overline{ia} = -ia$. Por lo tanto, \bar{f} es una función compleja de variable compleja.

10. Sea f un función compleja de variable compleja, simétrica respecto del eje real, y sea g la función definida por $g(z) = if(z)$. Entonces g cumple que:

- A. Es antisimétrica respecto del eje real.
- B. Es antisimétrica respecto del eje imaginario.
- C. Es simétrica respecto del eje real.**
- D. Es simétrica respecto del eje imaginario.

Solution: Por definición de conjugado, $g(\bar{z}) = if(\bar{z}) = if(z) = g(z)$. Por lo tanto, g es simétrica respecto del eje real.

1. El conjunto $W = \{(x, y, z) \mid x + y = 1\}$:
- A. Es un subespacio vectorial de \mathbb{C}^3 .
 - B. No es un subespacio vectorial de \mathbb{C}^3 .**
 - C. Es un espacio vectorial completo.
 - D. Es la base canónica de \mathbb{C}^3 .

Solution: No es subespacio porque no contiene el vector cero. Para $x = y = 0$ tendríamos $0 + 0 \neq 1$.

2. La dimensión de $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ (matrices complejas 2×2) es:
- A. 4.**
 - B. 2.
 - C. 16.
 - D. 8.

Solution: Una matriz 2×2 tiene 4 entradas complejas, y el conjunto de todas ellas forma un espacio vectorial de dimensión 4 sobre \mathbb{C} .

3. Los vectores $(1, i)$, $(i, 1)$ en \mathbb{C}^2 son:
- A. Linealmente dependientes.
 - B. Ninguna de las anteriores.
 - C. Linealmente independientes y dependientes.
 - D. Linealmente independientes.**

Solution: Para que sean dependientes debe existir $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $(1, i) = \alpha(i, 1)$, lo que implica $1 = \alpha i$ y $i = \alpha$. De la segunda ecuación $\alpha = i$, pero sustituyendo en la primera: $1 = i \cdot i = -1$, contradicción.

4. El vector $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}i}{2})$ es:
- A. Un vector de dimensión 2 sobre \mathbb{C} como \mathbb{R} espacio vectorial.**
 - B. Un vector de dimensión 2 sobre \mathbb{C} como \mathbb{C} espacio vectorial.
 - C. Es un número complejo en forma cartesiana.
 - D. Es un punto en el plano real.

Solution: Podemos expresar este elemento como $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}i}{2}) = \frac{1}{2}(1, 0) + \frac{\sqrt{3}i}{2}(0, i)$, lo que pone el vector con coordenadas reales sobre un espacio vectorial complejo sobre \mathbb{R} y dimensión 2.

5. El vector cero con respecto a una base, tiene coordenadas:
- A. El cero es el único vector que no puede ser representado de forma única con respecto a una base.
 - B. El cero no es un vector.
 - C. Depende de la base.
 - D. $(0, \dots, 0)$.**

Solution: El vector cero con respecto a una base tiene coordenadas $(0, \dots, 0)$.

6. Dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V , con dimensiones 2 y 3 respectivamente. Entonces la dimensión del espacio vectorial V es:
- A. 5.
 - B. Como mínimo 2.
 - C. Como mínimo 3.**
 - D. Como máximo 3.

Solution: La dimensión del espacio vectorial V es mayor o igual a la suma de las dimensiones de V_1 y V_2 menos la dimensión de la intersección. Como la intersección es como mucho de dimensión 2, la dimensión de V es como mínimo $2 + 3 - 2 = 3$.

7. La intersección de dos subespacios vectoriales ¿puede ser el conjunto vacío?:
- A. No.**
 - B. Sí.
 - C. Depende de la base.
 - D. Depende de la dimensión.

Solution: Dos subespacios vectoriales no pueden intersectarse en el conjunto vacío, porque el cero está en todos los subespacios vectoriales.

8. Una base de \mathbb{C}^2 debe tener:
- A. Un vector.
 - B. Dos vectores.**
 - C. Tres vectores.
 - D. Cuatro vectores.

Solution: Una base de un espacio de dimensión n debe tener exactamente n vectores linealmente independientes. Para \mathbb{C}^2 , $n = 2$.

9. Dada la base $\{v_1, v_2\}$ de \mathbb{C}^2 , el conjunto $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$, ¿es una base de \mathbb{C}^2 ?:

- A. Depende de v_1 y v_2 .
- B. Sí.
- C. No.**
- D. Solo si v_1 o v_2 es un número real.

Solution: Siempre es base de \mathbb{C}^2 , porque son linealmente independiente y tienen el mismo número de vectores que la dimensión.

10. Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de \mathbb{C}^3 , entonces:

- A. Todo vector se puede escribir como combinación lineal de dos de ellos.
- B. Todo vector se puede escribir como combinación lineal de los tres.**
- C. Todo vector se puede poner como suma de tres vectores, donde al menos uno de ellos debe ser la base.
- D. Todo vector es múltiplo de algún vector de la base.

Solution: Por definición de base, todo vector del espacio se expresa de manera única como combinación lineal de los vectores de la base.

1. La transformación $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $T(x, y) = (x + iy, 2x)$ es:

- A. **Lineal**
- B. No lineal
- C. Solo preserva la suma
- D. Solo preserva el producto por escalar

Solution: Es lineal porque $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$ para todos $u, v \in \mathbb{C}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. El núcleo de la transformación lineal $T(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y)$ de \mathbb{C}^3 en \mathbb{C}^2 es:

- A. $\{0\}$
- B. $\text{gen}\{(1, 0, 0)\}$
- C. **$\text{gen}\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$**
- D. Todo \mathbb{C}^3

Solution: Resolviendo $T(v) = 0$: $x + y = 0$ y $2x + 2y = 0$ implica $y = -x$ y z libre. Base del núcleo: $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

3. La matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es:

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2i & 4 \end{pmatrix}$
- B. **$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2i & 4 \end{pmatrix}$**
- C. $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solution: $A^\dagger = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{3} \\ \overline{2i} & \overline{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2i & 4 \end{pmatrix}$.

4. Los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ son:

- A. 2 y 2
- B. **1 y 3**

C. $2 + i$ y $2 - i$

D. i y $-i$

Solution: El polinomio característico es $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - (i)(-i) = (2 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, con raíces $\lambda = 1, 3$.

5. Una matriz A es diagonalizable si y solo si:

A. Es invertible

B. Es hermitiana

C. Tiene n vectores propios linealmente independientes

D. Tiene todos los valores propios distintos

Solution: Una matriz $n \times n$ es diagonalizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes, que forman una base del espacio.

6. La matriz de Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ satisface:

A. $H^2 = H$

B. $H^2 = I$

C. $H^2 = 0$

D. $H^2 = -I$

Solution: $H^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I$.

7. Las matrices de Pauli junto con la identidad:

A. Son linealmente dependientes

B. Forman una base de $\mathbb{C}^{2 \times 2}$

C. Solo generan matrices hermitianas

D. Solo generan matrices unitarias

Solution: $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ son 4 matrices linealmente independientes en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$, que tiene dimensión 4, por tanto forman una base.

8. La relación $HXH = Z$ entre matrices de Pauli y Hadamard significa que:

- A. H , X y Z conmutan
- B. H conjuga X en Z**
- C. $X = HZ$
- D. $H = XZ$

Solution: Esta relación muestra que H conjuga la matriz X en Z , es decir, transforma una en la otra mediante cambio de base.

9. Si A tiene descomposición espectral $A = \sum_i \lambda_i P_i$, entonces e^{-iAt} es:

- A. $\sum_i e^{-i\lambda_i} P_i$
- B. $e^{-it} \sum_i \lambda_i P_i$
- C. $\sum_i e^{-i\lambda_i t} P_i$**
- D. $\sum_i \lambda_i e^{-iP_i t}$

Solution: Para una matriz con descomposición espectral, la exponencial se calcula aplicando la función exponencial a cada valor propio: $e^{-iAt} = \sum_i e^{-i\lambda_i t} P_i$.

10. Una transformación lineal $T : V \rightarrow V$ es invertible si y solo si:

- A. $\dim(\text{Ker}(T)) > 0$
- B. $\text{Ker}(T) = \{0\}$**
- C. $\text{Im}(T) \neq V$
- D. $[T]$ es hermitiana

Solution: Una transformación es invertible si y solo si es inyectiva, lo que ocurre cuando $\text{Ker}(T) = \{0\}$.

1. El producto interno de $u = (1, i)$ y $v = (2, 1)$ en \mathbb{C}^2 es:

- A. $2 - i$
- B. $2 + i$**
- C. $2 + 2i$
- D. 3

Solution: $\langle u, v \rangle = 1 \cdot \bar{2} + i \cdot \bar{1} = 2 + i \cdot 1 = 2 + i$.

2. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ es:

- A. Unitaria
- B. Hermitiana**
- C. Normal pero no hermitiana
- D. Ninguna de las anteriores

Solution: $A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} = A$, por tanto es hermitiana.

3. Los valores propios de una matriz hermitiana son siempre:

- A. Complejos
- B. Reales**
- C. Imaginarios puros
- D. De módulo 1

Solution: Es una propiedad fundamental de las matrices hermitianas: todos sus valores propios son reales, lo que las hace apropiadas para representar observables físicos.

4. Si U es un operador unitario y u un vector unitario, entonces $\|uU\|$ es:

- A. 0
- B. Depende de u
- C. 1**
- D. $\|U\|$

Solution: Los operadores unitarios preservan la norma: $\|uU\|^2 = \langle uU, uU \rangle = \langle u, U^\dagger U u \rangle = \langle u, u \rangle = 1$.

5. Dos vectores propios de un operador hermitiano correspondientes a valores propios distintos son:

- A. Linealmente dependientes
- B. Paralelos
- C. Ortogonales**
- D. Idénticos

Solution: Es una propiedad fundamental: vectores propios de un operador hermitiano con valores propios diferentes son automáticamente ortogonales.

6. La identidad de Parseval para una base ortonormal $\{|e_k\rangle\}$ establece que:

- A. $\|v\| = \sum_k \langle v, |e_k\rangle \rangle$
- B. $\|v\|^2 = \sum_k |\langle v, |e_k\rangle \rangle|^2$**
- C. $v = \sum_k |e_k\rangle$
- D. $\sum_k |e_k\rangle = 1$

Solution: La identidad de Parseval expresa que la norma al cuadrado de un vector es la suma de los cuadrados de sus coeficientes de Fourier respecto a una base ortonormal.

7. Si A es una matriz normal, entonces:

- A. A es diagonalizable mediante una matriz ortogonal
- B. A es hermitiana
- C. A es diagonalizable mediante una matriz unitaria**
- D. A es unitaria

Solution: Una matriz normal es diagonalizable mediante una matriz unitaria, es decir, existe una matriz unitaria U tal que $A = UDU^\dagger$, donde D es diagonal.

8. El espacio de Hilbert ℓ^2 consiste en:

- A. Todas las sucesiones de números complejos
- B. Todas las sucesiones de números reales
- C. Todas las sucesiones de números complejos cuya serie de cuadrados es convergente**

- D. Todas las sucesiones de números complejos cuya serie es convergente

Solution: El espacio de Hilbert ℓ^2 está formado por todas las sucesiones (x_n) de números complejos tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ converge.

9. En un espacio de Hilbert, una base ortonormal es:

- A. Un conjunto de vectores linealmente independientes
- B. Un conjunto de vectores que generan el espacio
- C. Un conjunto de vectores ortogonales y normalizados que generan el espacio**
- D. Un conjunto de vectores que son todos unitarios

Solution: Una base ortonormal es un conjunto de vectores que son mutuamente ortogonales, cada uno de norma 1, y que generan todo el espacio.

10. El teorema espectral para operadores hermitianos establece que:

- A. Todo operador hermitiano es invertible
- B. Todo operador hermitiano tiene valores propios complejos
- C. Todo operador hermitiano puede ser diagonalizado mediante una base ortonormal**
- D. Todo operador hermitiano es unitario

Solution: El teorema espectral afirma que cualquier operador hermitiano en un espacio de Hilbertiano puede ser diagonalizado mediante una base ortonormal de vectores propios.

1. La dimensión del espacio dual V^* de un espacio vectorial V de dimensión finita n es:

- A. n^2
- B. $2n$
- C. n
- D. $n - 1$

Solution: El espacio dual de un espacio de dimensión finita tiene la misma dimensión que el espacio original: $\dim(V^*) = \dim(V) = n$.

2. Si $\{e_1, e_2\}$ es una base de V , la base dual $\{e_1^*, e_2^*\}$ satisface:

- A. $e_1^*(e_1) = 0$
- B. $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$
- C. $e_1^*(e_2) = 1$
- D. $e_1^* = e_2^*$

Solution: Por definición de base dual: $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$.

3. La dimensión del producto tensorial $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ es:

- A. 5
- B. 6
- C. 8
- D. 9

Solution: $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W) = 2 \cdot 3 = 6$.

4. El estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ es:

- A. Separable
- B. Entrelazado
- C. Un estado de un solo qubit
- D. No está normalizado

Solution: No puede escribirse como $|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$, por tanto es entrelazado. Si fuera separable, tendríamos $(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$, lo que requeriría $ad = bc = 0$ pero $ac = bd = \frac{1}{\sqrt{2}}$, lo cual es imposible.

5. El producto $(e_1 \otimes e_2)(X \otimes Y)$ donde X e Y son matrices de Pauli es igual a:

- A. $e_2 \otimes e_1$
- B. $e_1 \otimes e_2$
- C. $-ie_2 \otimes e_1$
- D. $ie_1 \otimes e_2$

Solution: $(e_1 \otimes e_2)(X \otimes Y)(e_1 X) \otimes (e_2 Y) = e_2 \otimes (-ie_1) = -ie_2 \otimes e_1$.

6. El producto externo $u \wedge v$ es:

- A. Un número complejo
- B. Un vector
- C. Un operador lineal
- D. Una matriz diagonal

Solution: El producto externo es un operador lineal que actúa como $(u \wedge v)(w) = \langle v, w \rangle u$.

7. El teorema de Riesz-Fréchet establece que en un espacio de Hilbert:

- A. El espacio dual es de mayor dimensión
- B. Cada funcional lineal continuo puede representarse como producto interno
- C. No existe isomorfismo con el dual
- D. Los funcionales son todos discontinuos

Solution: El teorema de Riesz-Fréchet establece que para cada funcional lineal continuo f existe único y_f tal que $f(x) = \langle x, y_f \rangle$.

8. Para un espacio vectorial de dimensión 2, el producto tensorial n veces tiene dimensión:

- A. n
- B. n^2
- C. 2^n
- D. $2n$

Solution: El espacio tensorial n veces tiene dimensión 2^n .

9. El producto externo $u \wedge v$ puede interpretarse como:

- A. Una proyección sobre u
- B. Una proyección sobre v
- C. Una transformación que proyecta sobre u según la componente en v
- D. Una transformación que proyecta sobre v según la componente en u

Solution: El producto externo actúa como $(u \wedge v)(w) = \langle v, w \rangle u$, proyectando w sobre v y escalando u por ese valor.

10. Si $\{e_1, e_2\}$ es una base de V , la base dual $\{e_1^*, e_2^*\}$ está definida por:

- A. $e_i^*(e_j) = 1$ para todo i, j
- B. $e_i^*(e_j) = 0$ para todo i, j
- C. $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$
- D. $e_1^* = e_2^*$

Solution: La base dual está definida por la relación $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

1. El bra correspondiente al ket $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$ es:

A. $\langle\psi| = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$

B. $\langle\psi| = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \end{pmatrix}$

C. $\langle\psi| = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \end{pmatrix}$

D. $\langle\psi| = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$

Solution: El bra es la transpuesta conjugada del ket: $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \begin{pmatrix} \overline{1+i} & \overline{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \end{pmatrix}$.

2. El bracket $\langle 0|+\rangle$ donde $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ es igual a:

A. 0

B. 1

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\frac{1}{2}$

Solution: $\langle 0|+\rangle = \langle 0|\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. El operador $|0\rangle\langle 1|$ actúa sobre $|1\rangle$ dando:

A. $|0\rangle$

B. $|1\rangle$

C. 0

D. $|0\rangle + |1\rangle$

Solution: $|0\rangle\langle 1||1\rangle = |0\rangle\langle 1|1\rangle = |0\rangle \cdot 1 = |0\rangle$.

4. La relación de completitud para la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ es:

A. $|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = I$

B. $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I$

C. $\langle 0|\langle 1| + \langle 1|\langle 0| = I$

D. $\langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle = I$

Solution: La relación de completitud establece que $\sum_i |i\rangle\langle i| = I$. Para la base computacional: $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I$.

5. El estado de dos qubits $|01\rangle$ en notación matricial es:

A. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution: $|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

6. La probabilidad de medir $|+\rangle$ en el estado $|\psi\rangle = \frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4i}{5}|1\rangle$ es:

A. $\frac{9}{25}$

B. $\frac{16}{25}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{7}{10}$

Solution: $\langle +|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|) \left(\frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4i}{5}|1\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{5} + \frac{4i}{5} \right)$. Por tanto, $P(+)= \left| \frac{3+4i}{5\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{9+16}{50} = \frac{1}{2}.$

7. La matriz de Pauli σ_x en notación de Dirac se escribe como:

A. $|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$

- B. $|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$
 C. $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$
 D. $-i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$

Solution: $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ intercambia $|0\rangle$ y $|1\rangle$, lo que corresponde a $|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$.

8. El valor esperado $\langle \sigma_z \rangle$ en el estado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ es:

- A. $\alpha + \beta$
 B. $|\alpha|^2 + |\beta|^2$
 C. $|\alpha|^2 - |\beta|^2$
 D. $\alpha\beta$

Solution: $\langle \sigma_z \rangle = \langle \psi | \sigma_z | \psi \rangle = \langle \psi | (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) | \psi \rangle = |\langle 0 | \psi \rangle|^2 - |\langle 1 | \psi \rangle|^2 = |\alpha|^2 - |\beta|^2$.

9. El estado de Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ tiene la propiedad de que:

- A. Es separable
 B. Es un estado de un solo qubit
 C. Es entrelazado
 D. Es un estado clásico

Solution: $|\Phi^+\rangle$ no puede escribirse como $|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$, por tanto es un estado entrelazado.

10. Para el Hamiltoniano $H = \omega\sigma_z/2$, el operador de evolución $U(t) = e^{-iHt}$ es:

- A. $\cos(\omega t)I - i\sin(\omega t)\sigma_z$
 B. $\begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}$
 D. $e^{-i\omega t}\sigma_z$

Solution: $e^{-i\omega t\sigma_z/2} = e^{-i\omega t/2}|0\rangle\langle 0| + e^{i\omega t/2}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}$.

11. Una amplitud cuántica $\alpha = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$ tiene probabilidad asociada:

- A. $\frac{7}{5}$
- B. 1
- C. $\frac{9}{25}$
- D. $\frac{16}{25}$

Solution: La probabilidad es $|\alpha|^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$.

12. Para que dos amplitudes $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_1}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_2}$ interfieran destructivamente, la diferencia de fases debe ser:

- A. 0
- B. $\frac{\pi}{2}$
- C. π
- D. $\frac{\pi}{4}$

Solution: Para interferencia destructiva necesitamos que $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, lo que ocurre cuando las fases difieren en π : $e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\pi)} = e^{i\theta_1}(1 - 1) = 0$.

13. Dos amplitudes cuánticas con magnitudes $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y fases que difieren en $\frac{\pi}{2}$ al sumarse tienen probabilidad total:

- A. 0
- B. $\frac{1}{2}$
- C. 1
- D. $\frac{1}{4}$

Solution: Si $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/2} = \frac{i}{\sqrt{2}}$, entonces $|\alpha_1 + \alpha_2|^2 = \left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{|1+i|^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

1. La puerta X (Pauli-X) actúa sobre $|0\rangle$ como:

- A. $|0\rangle$
- B. $|1\rangle$**
- C. $-|0\rangle$
- D. $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$

Solution: La puerta $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ intercambia los estados base: $X|0\rangle = |1\rangle$ y $X|1\rangle = |0\rangle$.

2. La puerta de Hadamard H aplicada dos veces da:

- A. H
- B. I**
- C. 0
- D. $-I$

Solution: $H^2 = I$, es decir, la puerta de Hadamard es su propia inversa.

3. La puerta S (puerta de fase) satisface:

- A. $S = Z$
- B. $S^2 = Z$**
- C. $S^2 = T$
- D. $S^2 = I$

Solution: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, por tanto $S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z$.

4. En la esfera de Bloch, el estado $|0\rangle$ se representa en:

- A. El ecuador
- B. El polo sur
- C. El polo norte**
- D. El centro

Solution: Por convenio, $|0\rangle$ se sitúa en el polo norte (eje Z positivo) y $|1\rangle$ en el polo sur (eje Z negativo).

5. La rotación $R_x(\pi)$ alrededor del eje X por ángulo π es equivalente a:

- A. I
- B. Z
- C. $-iX$
- D. Y

Solution: $R_x(\pi) = e^{-i\pi\sigma_x/2} = \cos \frac{\pi}{2} I - i \sin \frac{\pi}{2} \sigma_x = -i\sigma_x = -iX$.

6. La puerta CNOT actúa sobre $|10\rangle$ dando:

- A. $|00\rangle$
- B. $|01\rangle$
- C. $|10\rangle$
- D. $|11\rangle$

Solution: CNOT invierte el segundo qubit cuando el primero está en $|1\rangle$: $\text{CNOT}|10\rangle = |11\rangle$.

7. El conjunto de puertas $\{H, T, \text{CNOT}\}$ es:

- A. Insuficiente para computación cuántica
- B. Universal para computación cuántica
- C. Solo genera rotaciones en X
- D. Solo funciona para un qubit

Solution: El conjunto $\{H, T, \text{CNOT}\}$ es universal: cualquier operador unitario puede aproximarse arbitrariamente bien usando solo estas puertas.

8. La descomposición $HXH = Z$ muestra que:

- A. H y X conmutan
- B. H transforma la base de X en la base de Z
- C. $X = Z$
- D. $H = XZ$

Solution: Esta identidad muestra que H conjugua X en Z , es decir, transforma los vectores propios de X en vectores propios de Z .

9. Para el Hamiltoniano $H = \omega\sigma_z$, el operador de evolución temporal es:

- A. Constante
- B. Una rotación alrededor del eje Z**
- C. Una rotación alrededor del eje X
- D. La identidad

Solution: $U(t) = e^{-i\omega t\sigma_z}$ representa una rotación alrededor del eje Z en la esfera de Bloch con ángulo proporcional a ωt .

10. La puerta Toffoli (CCNOT) requiere:

- A. Un qubit
- B. Dos qubits
- C. Tres qubits**
- D. Cuatro qubits

Solution: La puerta Toffoli es un CNOT con dos controles, por tanto requiere tres qubits: dos de control y uno objetivo.

1. La matriz de densidad de un estado puro $|\psi\rangle$ es:

- A. $\langle\psi|$
- B. $|\psi\rangle\langle\psi|$**
- C. $\langle\psi|\psi\rangle$
- D. I

Solution: Para estados puros, la matriz de densidad es el proyector sobre el estado: $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

2. Un estado es puro si y solo si:

- A. $\text{Tr}(\rho) = 0$
- B. $\text{Tr}(\rho^2) = 1$**
- C. $\text{Tr}(\rho^2) = 0$
- D. $\rho = I$

Solution: El criterio de pureza establece que $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ para estados puros y $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ para estados mixtos.

3. La matriz de densidad del estado completamente mixto de un qubit es:

- A. $|0\rangle\langle 0|$
- B. $|1\rangle\langle 1|$
- C. $\frac{1}{2}I$**
- D. $|+\rangle\langle +|$

Solution: El estado completamente mixto es equiprobable en todos los estados: $\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}I$.

4. Para el estado de Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, la traza parcial sobre el subsistema B da:

- A. $|0\rangle\langle 0|$
- B. $|1\rangle\langle 1|$
- C. $\frac{1}{2}I$**
- D. $|+\rangle\langle +|$

Solution: $\rho_A = \text{Tr}_B(|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|) = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}I$. A pesar de que el sistema total está en estado puro, cada subsistema está en estado mixto.

5. La entropía de von Neumann de un estado puro es:

- A. 0
- B. 1
- C. $\log_2 d$ donde d es la dimensión
- D. Depende del estado

Solution: Para estados puros, $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho) = 0$ ya que ρ tiene un único valor propio igual a 1.

6. La entropía de von Neumann del estado completamente mixto $\rho = \frac{I}{2}$ de un qubit es:

- A. 0
- B. 1 bit
- C. 2 bits
- D. $\frac{1}{2}$ bit

Solution: $\rho = \frac{I}{2}$ tiene valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Por tanto, $S(\rho) = -2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1$ bit.

7. La fidelidad entre dos estados puros ortogonales $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ con $\langle\psi|\phi\rangle = 0$ es:

- A. 0
- B. $\frac{1}{2}$
- C. 1
- D. -1

Solution: Para estados puros, $F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle| = |0| = 0$.

8. Los operadores de Kraus $\{K_i\}$ de un canal cuántico satisfacen:

- A. $\sum_i K_i = I$
- B. $\sum_i K_i^\dagger K_i = I$
- C. $\sum_i K_i K_i = I$
- D. $K_i K_i^\dagger = I$ para todo i

Solution: La condición de completitud para operadores de Kraus es $\sum_i K_i^\dagger K_i = I$, lo que asegura que la traza se preserve.

9. Un canal de despolarización con probabilidad $p = 1$ transforma cualquier estado en:

- A. $|0\rangle\langle 0|$
- B. $|1\rangle\langle 1|$
- C. $\frac{I}{2}$
- D. No cambia el estado

Solution: Para $p = 1$, el canal de despolarización $\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + \frac{p}{3}(\sigma_x\rho\sigma_x + \sigma_y\rho\sigma_y + \sigma_z\rho\sigma_z)$ se reduce a aplicar todas las matrices de Pauli con igual probabilidad, resultando en $\frac{I}{2}$.

10. La evolución de un estado mixto ρ bajo un canal cuántico \mathcal{E} se describe como:

- A. $\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger$
- B. $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i$
- C. $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$
- D. $\mathcal{E}(\rho) = \rho$

Solution: La evolución de un estado mixto bajo un canal cuántico se describe mediante la suma sobre los operadores de Kraus: $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$.