Bloque 1. Fundamentos matemáticos

Espacios vectoriales complejos

Índice

Esquema

Ideas clave

2.1 Introducción y objetivos

En este tema desarrollaremos la teoría general de espacios vectoriales complejos, comenzando con vectores individuales y construyendo progresivamente hasta llegar a conceptos como bases, dimensión y subespacios.

En este tema sirve para repasar los conceptos fundamentales de espacios vectoriales en álgebra lineal, sin usar ninguna propiedad específica de los números complejos, aunque ya trabajamos siempre sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

Esta base teórica será fundamental para comprender en los próximos temas la manipulación de estados cuánticos como vectores.

2.2 Vectores complejos

Definición 1: Vector complejo

Un vector complejo de dimensión n es una n-tupla ordenada de números complejos:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

donde $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{C}$.
El conjunto de todos los vectores complejos de dimensión n se denota por $\mathbb{C}^n$.

Definición 2: Operaciones vectoriales

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Definimos:
Suma de vectores:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

Producto por escalar:

$$\alpha\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1: Operaciones básicas en $\mathbb{C}^3$

Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+2i \\ -1 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (1+i)+(2-i) \\ 2+(1+2i) \\ (3-i)+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+2i \\ 2-i \end{pmatrix}$$

$$i\mathbf{u} = \begin{pmatrix} i(1+i) \\ i\cdot 2 \\ i(3-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-1 \\ 2i \\ 3i+1 \end{pmatrix}$$

2.3 Estructura de espacio vectorial complejo

Definición 3: Espacio vectorial complejo

Un espacio vectorial complejo es un conjunto V equipado con dos operaciones:

- Una operación de suma: $V \times V \to V$, denotada $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}+\mathbf{v}$
- Una operación de producto por escalar: $\mathbb{C} \times V \to V$, denotada $(\alpha, \mathbf{v}) \mapsto \alpha\mathbf{v}$

que satisfacen los siguientes axiomas para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

1. **Axiomas de la suma:**
   - (A1) $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ (conmutatividad)
   - (A2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ (asociatividad)
   - (A3) Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{v}$ (elemento neutro)
   - (A4) Para cada $\mathbf{v} \in V$ existe $-\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{v}+(-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ (elemento opuesto)
2. **Axiomas del producto por escalar:**
   - (M1) $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$ (asociatividad mixta)

- (M2) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ (elemento neutro multiplicativo)

3. **Axiomas de distributividad:**
   - (D1) $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ (distributividad del escalar respecto a la suma vectorial)
   - (D2) $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ (distributividad de la suma escalar)

Ejemplo 2: Espacios vectoriales complejos

1. $\mathbb{C}^n$ con las operaciones estándar es un espacio vectorial complejo.
2. El conjunto de polinomios complejos de grado menor o igual que n:

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{C}) = \{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\}$$

3. El conjunto de matrices complejas $m \times n$: $\mathbb{C}^{m \times n}$
4. El conjunto de funciones complejas continuas en un intervalo: $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$

Resultado 1

En todo espacio vectorial complejo V:

1. El elemento neutro $\mathbf{0}$ es único
2. Para cada $\mathbf{v} \in V$, el opuesto $-\mathbf{v}$ es único
3. $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$
4. $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$
5. Si $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $\alpha = 0$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

2.4 Subespacios vectoriales

Definición 4: Subespacio vectorial

Sea V un espacio vectorial complejo. Un subconjunto $W \subseteq V$ es un subespacio vectorial de V si:

1. $\mathbf{0} \in W$ (contiene el vector cero)
2. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ (cerrado bajo la suma)
3. Si $\mathbf{v} \in W$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha\mathbf{v} \in W$ (cerrado bajo el producto por escalar)

Ejemplo 3: Subespacios de $\mathbb{C}^3$

1. $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{C} \right\}$ (el ”plano xy”)

2. $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : x + y - z = 0 \right\}$ (un plano que pasa por el origen)

Teorema 2: Caracterización de subespacios

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es un subespacio si y solo si es cerrado bajo combinaciones lineales, es decir:

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \in W \quad \text{para todos } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \text{ y } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

2.5 Combinaciones lineales e independencia lineal

Definición 5: Combinación lineal

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$. Una combinación lineal de estos vectores es un vector de la forma:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$.

Definición 6: Subespacio generado

El subespacio generado por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ es:

$$\text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i : \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C} \right\}$$

Ejemplo 4: Subespacio generado en $\mathbb{C}^3$

Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Entonces:

$$\text{gen}(S) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta i \\ \beta \\ \alpha i \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

Definición 7: Independencia lineal

Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ en un espacio vectorial V son linealmente independientes si la única solución de la ecuación:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

es $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.
En caso contrario, se dice que son linealmente dependientes.

Ejemplo 5

Determinar si los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes.

Solución: Planteamos la ecuación:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos da el sistema:

$$\alpha_1 + i\alpha_2 + (1+i)\alpha_3 = 0 \tag{1}$$
$$i\alpha_1 + i\alpha_3 = 0 \tag{2}$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{3}$$

De la segunda ecuación: $\alpha_3 = -\alpha_1$. De la tercera: $\alpha_2 = -\alpha_3 = \alpha_1$. Sustituyendo en la primera:

$$\alpha_1 + i\alpha_1 + (1+i)(-\alpha_1) = \alpha_1 + i\alpha_1 - \alpha_1 - i\alpha_1 = 0$$

Esta ecuación se satisface para cualquier α_1, por lo que los vectores son linealmente dependientes.

Resultado 3

1. Un conjunto que contiene el vector cero es linealmente dependiente

2. Si un subconjunto de vectores es linealmente dependiente, entonces el conjunto completo es linealmente dependiente
3. Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, entonces cualquier subconjunto también lo es
4. En $\mathbb{C}^n$, cualquier conjunto de más de n vectores es linealmente dependiente

2.6 Bases y dimensión

Definición 8: Base

Un conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de vectores en un espacio vectorial V es una base de V si:

1. $\mathcal{B}$ es linealmente independiente
2. $\text{gen}(\mathcal{B}) = V$ (genera todo el espacio)

Ejemplo 6: Base canónica de $\mathbb{C}^n$

La base canónica (o estándar) de $\mathbb{C}^n$ es:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cualquier vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ se puede escribir como:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$$

Teorema 4: Existencia y unicidad de representación

Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces todo vector $\mathbf{v} \in V$ se puede escribir de manera única como:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

Los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se llaman las coordenadas de **v** respecto a la base $\mathcal{B}$.

Definición 9: Dimensión

La dimensión de un espacio vectorial V es el número de vectores en cualquiera de sus bases. Se denota dim(V).
Si V tiene una base finita, se dice que V es finito-dimensional. En caso contrario, es infinito-dimensional.

Teorema 5: Propiedades fundamentales de la dimensión

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Entonces:

1. Todas las bases de V tienen el mismo número de elementos
2. Si dim$(V) = n$, entonces cualquier conjunto linealmente independiente de n vectores es una base
3. Si dim$(V) = n$, entonces cualquier conjunto generador de n vectores es una base
4. Si W es un subespacio de V, entonces dim$(W) \leq$ dim(V)

Ejemplo 7: Encontrando una base

Encontrar una base para el subespacio W de $\mathbb{C}^4$ definido por:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 : x + y - z = 0, \quad 2x - y + w = 0 \right\}$$

Solución: De las ecuaciones del sistema:

$$x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y \tag{4}$$

$$2x - y + w = 0 \Rightarrow w = y - 2x \tag{5}$$

Por tanto:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \\ y-2x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{C} \right\}$$

Una base para W es $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $\dim(W) = 2$.

2.7 Primer postulado de la mecánica cuántica

Ahora que hemos establecido la teoría de espacios vectoriales complejos, podemos formular matemáticamente el primer postulado fundamental de la mecánica cuántica.

Postulado I: Estados cuánticos.

El estado de un sistema cuántico se describe completamente mediante un vector unitario en un espacio vectorial complejo.

Ejemplo 8: Estado de un cúbit

Un cúbit (sistema cuántico de dos niveles) tiene espacio de estados $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ y se representa como:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ es la base computacional de $\mathbb{C}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ satisfacen:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad \text{(condición de normalización)}$$

En términos de la base canónica:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

Definición 10: Equivalencia por fase global

Dos vectores estado que difieren por una fase global son físicamente equivalentes:

$$|\psi\rangle \sim e^{i\phi}|\psi\rangle \quad \forall\phi \in \mathbb{R}$$

Esto significa que solo las fases **relativas** entre componentes tienen significado físico.

En realidad, los estados cuánticos se describen mediante **vectores de rayos**, que son clases de equivalencia de vectores unitarios bajo la relación de fase global. Esto refleja que las mediciones físicas dependen solo de las diferencias de fase entre componentes del estado. En consecuencia, el espacio de estados de un cúbit es isomorfo al conjunto cociente $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^2/\sim$, aunque en la práctica se obvia esta distinción y se trabaja directamente con vectores unitarios.

Ejemplo 9: Parametrización general de un cúbit

Eliminando la fase global, todo cúbit puede escribirse como:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

donde $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$ son parámetros reales.

Esta parametrización:

- Elimina la fase global irrelevante.
- Usa solo 2 parámetros reales para describir el estado completo.
- Corresponde a puntos en la superficie de la esfera de Bloch.

Ejemplo 10: Estados cuánticos importantes

1. **Estados de la base computacional:**

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. **Estados de superposición:**

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. **Estados con fase compleja:**

$$|i+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Problemas

1. Determinar si los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{C}^3$:

a) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y - z = 1 \right\}$

b) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = \overline{z} \right\}$

c) $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1 \right\}$

2. Encontrar una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{C}^4$ generado por:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Verificar que el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{C}^3$ y extenderlo a una base de $\mathbb{C}^3$.

4. Calcular el producto escalar hermítico y las normas de: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Demostrar que si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes en un espacio vectorial V, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k$ también son linealmente independientes.

6. Sea $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ el espacio de polinomios complejos de grado menor o igual que 2.

a) Demostrar que $\{1, z, z^2\}$ es una base de V

b) Encontrar las coordenadas del polinomio $p(z) = (1+i) + 2iz - z^2$ en esta base

c) Proponer otra base para V y expresar $p(z)$ en ella

7. En el espacio $\mathbb{C}^{2\times 2}$ de matrices complejas 2×2:

   a) Verificar que las matrices de Pauli junto con la identidad forman una base: $\mathcal{B} = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

   b) Expresar la matriz $A = \begin{pmatrix} 2+i & 1-i \\ 1+i & 2-i \end{pmatrix}$ como combinación lineal de esta base

8. Sean V y W espacios vectoriales complejos de dimensiones finitas m y n respectivamente.

   a) Demostrar que dim$(V\times W) =$ dim$(V) +$ dim(W)

   b) Si $f : V \to W$ es una transformación lineal, demostrar que dim$(V) =$ dim(Ker$(f))+$ dim(Im(f))

9. Verificar que los siguientes vectores representan estados cuánticos válidos:

   a) $|\psi_1\rangle = \frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4i}{5}|1\rangle$

   b) $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1\rangle$

   c) $|\psi_3\rangle = \frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{1-i}{2}|1\rangle$

10. Para el estado cuántico $|\psi\rangle =$ cos $\frac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i\pi/3}$ sin $\frac{\pi}{6}|1\rangle$:

   a) Escribir el estado en forma matricial

   b) Calcular las probabilidades de medir $|0\rangle$ y $|1\rangle$

   c) Determinar los valores de θ y φ en la parametrización estándar