Datos del estudiante

Nombre y apellidos
Fecha de entrega

Actividad 1: Números complejos, espacios vectoriales y operadores lineales

1. Objetivos y pautas de elaboración

El principal objetivo de esta actividad es consolidar el dominio de los fundamentos matemáticos de la computación cuántica: números complejos, espacios vectoriales y operadores lineales.

En particular, se practicará:

- Conversión entre formas de representación de números complejos
- Verificación de propiedades algebraicas en espacios vectoriales complejos
- Cálculo de valores y vectores propios
- Representación matricial de transformaciones lineales

2. Problemas

1. **Números complejos y geometría**

   (a) Calcular las raíces cúbicas del número complejo $z = -8i$ y representarlas geométricamente en el plano complejo.

   (b) Dadas las amplitudes cuánticas $\alpha_1 = \frac{1+i}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{1-i}{2}$, verificar que $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$ y calcular la interferencia $|\alpha_1 + \alpha_2|^2$.

   (c) Expresar el número complejo $z = 1 + \sqrt{3}i$ en forma exponencial y calcular z^{10} usando la fórmula de De Moivre.

   (d) Demostrar que si $\alpha = \frac{3}{5}$ y $\beta = \frac{4i}{5}$, entonces el estado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ está correctamente normalizado y calcular las probabilidades de medir $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

   (e) Calcular $e^{i\pi\sigma_y}$ donde $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

2. **Operadores lineales y valores propios**

   (a) Verificar que el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{C}^3$.

(b) Encontrar los valores propios y vectores propios de la matriz de Hadamard $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Dada la transformación lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)x + y \\ ix - 2y \end{pmatrix}$, encontrar su matriz respecto a la base canónica y calcular su determinante.

(d) Verificar que la matriz $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ es unitaria calculando $U^\dagger U$.

(e) Demostrar que si A y B son matrices hermitianas, entonces AB es hermitiana si y solo si $AB = BA$.

3. Requisitos de la actividad

Modalidad de trabajo

Esta actividad se realizará de manera **individual**.

Formato y presentación

El trabajo deberá cumplir los siguientes requisitos formales:

- **Estructura**: El documento seguirá la estructura de un artículo académico, incluyendo introducción, desarrollo, conclusiones y referencias bibliográficas.
- **Herramientas**: La redacción se realizará íntegramente en LaTeX.
- **Entrega**: Se entregará un único archivo en formato PDF compilado.
- **Citación**: Todas las referencias bibliográficas seguirán estrictamente la normativa APA 7.ª edición.

Criterios de evaluación

Se valorarán especialmente los siguientes aspectos:

- Claridad y rigor en la exposición de los cálculos intermedios.
- Justificación matemática y razonamiento lógico de los pasos realizados.
- Interpretación crítica de los resultados obtenidos y su contextualización.
- Corrección en el uso del lenguaje técnico y la notación matemática.

Nota importante: La rúbrica de evaluación únicamente se aplicará a aquellos trabajos que cumplan todos los requisitos de formato especificados. Los trabajos que no satisfagan estos requisitos podrán ser devueltos sin evaluación.

4. Rúbrica

Criterio	Descripción	Valor	Peso
Normativa	Entregar la actividad en plazo y cumpliendo las indicaciones.	0,5	5 %
Biliografía y citas APA	Cumplir con las normas de citación y bibliografía según la normativa APA 7.	0,5	5 %
Presentación	Cálculos ordenados y claramente justificados.	1	10 %
Problema 1	Números complejos y geometría (0.8 puntos por apartado).	4	40 %
Problema 2	Operadores y valores propios (0.8 puntos por apartado).	4	40 %
Total		10	100 %

Datos del estudiante

Nombre y apellidos
Fecha de entrega

Actividad 2: Sistemas Cuánticos y Entrelazamiento

5. Objetivos y pautas de elaboración

El principal objetivo de esta actividad es desarrollar la capacidad de análisis de sistemas cuánticos compuestos, entrelazamiento y mediciones en espacios de Hilbert.

Con esta actividad se pretende que el estudiante:

- Trabaje con la complejidad conceptual del entrelazamiento cuántico.
- Desarrolle práctica en los cálculos con productos tensoriales.
- Entienda que la interpretación física de resultados matemáticos es crucial.
- Es fundamental distinguir estados separables de estados entrelazados mediante argumentos rigurosos.

6. Problemas

1. **Ortogonalización y proyecciones**

   (a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt para ortogonalizar el conjunto de vectores en $\mathbb{C}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Sea $W = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ i\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{C}^3$. Calcular la proyección ortogonal de $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ sobre W.

(c) Para el observable $A = \begin{pmatrix}2 & 1-i\\ 1+i & 3\end{pmatrix}$, verificar que es hermitiano y encontrar su descomposición espectral.

(d) Calcular el valor esperado $\langle A \rangle$ para el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + \sqrt{2}\,|1\rangle)$ si el observable es A del apartado anterior.

2. **Producto tensorial y sistemas compuestos**

(a) Calcular explícitamente el producto tensorial $(X \otimes Z)\,|01\rangle$ donde $X = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

(b) Para el sistema de dos qubits en el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle)$, verificar normalización y calcular las probabilidades de medir cada estado de la base computacional.

(c) Aplicar la puerta CNOT al estado del apartado anterior y determinar el estado resultante.

(d) Calcular la probabilidad de medir el primer qubit en $|0\rangle$ para el estado $|\psi\rangle$ original.

3. **Entrelazamiento cuántico**

(a) Determinar si el estado $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle)$ es separable o entrelazado.

(b) Verificar que los cuatro estados de Bell forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^4$.

(c) Para el estado de Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, calcular las probabilidades de medir cada qubit individualmente.

(d) Demostrar que el estado de Bell $|\Phi^+\rangle$ es maximalmente entrelazado calculando la entropía de entrelazamiento $S(\rho_A)$ donde ρ_A es la matriz de densidad reducida del primer qubit.

7. Requisitos de la actividad

Modalidad de trabajo

Esta actividad se realizará de manera **individual**.

Formato y presentación

El trabajo deberá cumplir los siguientes requisitos formales:

- **Estructura**: El documento seguirá la estructura de un artículo académico, incluyendo introducción, desarrollo, conclusiones y referencias bibliográficas.
- **Herramientas**: La redacción se realizará íntegramente en LaTeX.
- **Entrega**: Se entregará un único archivo en formato PDF compilado.
- **Citación**: Todas las referencias bibliográficas seguirán estrictamente la normativa APA 7.ª edición.

Criterios de evaluación

Se valorarán especialmente los siguientes aspectos:

- Claridad y rigor en la exposición de los cálculos intermedios.
- Justificación matemática y razonamiento lógico de los pasos realizados.
- Interpretación crítica de los resultados obtenidos y su contextualización.
- Corrección en el uso del lenguaje técnico y la notación matemática y la notación de Dirac.

Nota importante: La rúbrica de evaluación únicamente se aplicará a aquellos trabajos que cumplan todos los requisitos de formato especificados. Los trabajos que no satisfagan estos requisitos podrán ser devueltos sin evaluación.

8. Rúbrica

Criterio	Descripción	Valor	Peso
Normativa	Entregar la actividad en plazo y cumpliendo las indicaciones.	0,5	5 %
Biliografía y citas APA	Cumplir con las normas de citación y bibliografía según la normativa APA 7.	0,5	5 %
Presentación	Cálculos ordenados, notación correcta, interpretación física.	1	10 %
Problema 1	Ortogonalización y proyecciones (0.7 puntos/apartado).	2.8	28 %
Problema 2	Producto tensorial y sistemas compuestos (0.7 puntos/apartado).	2.8	28 %
Problema 3	Entrelazamiento cuántico (0.6 puntos/apartado).	2.4	24 %
Total		10	100 %

Datos del estudiante

Nombre y apellidos
Fecha de entrega

Actividad 3: Análisis de decoherencia en un cúbit

9. Objetivos y pautas de elaboración

El principal objetivo de esta actividad es aplicar integralmente la teoría de matrices de densidad al análisis de un problema real: la **decoherencia cuántica**, que es el principal obstáculo en la construcción de computadores cuánticos prácticos.

A través de un caso de estudio completo, los estudiantes deberán:

- Modelar matemáticamente la degradación de un estado cuántico.
- Cuantificar la pérdida de información cuántica usando múltiples métricas.
- Interpretar físicamente los resultados en el contexto de la computación cuántica.
- Analizar la viabilidad temporal de operaciones cuánticas.

Este ejercicio integrador requiere el uso de todos los conceptos del tema de estados probabilísticos.

10. Problema: Decoherencia de fase en un cúbit

10.1. Contexto

Un laboratorio de computación cuántica ha preparado un cúbit en el estado de superposición:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Este cúbit forma parte de un procesador cuántico y será utilizado en un algoritmo que requiere mantener la coherencia cuántica durante al menos 100 microsegundos (μs).

Sin embargo, el cúbit no está perfectamente aislado del entorno. La interacción incontrolada con campos electromagnéticos externos, vibraciones térmicas y otros factores ambientales provocan un proceso de **decoherencia de fase** (dephasing).

Este proceso se modela matemáticamente mediante la evolución:

$$\rho(t) = (1 - p(t))\rho_{\text{puro}} + p(t)\rho_{\text{mixto}}$$

donde:

- $\rho_{\text{puro}} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ es la matriz de densidad del estado inicial puro.
- $\rho_{\text{mixto}} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|$ es el estado completamente mixto.
- $p(t) = 1 - e^{-t/T_2}$ es la probabilidad de decoherencia.
- $T_2 = 150\ \mu s$ es el **tiempo de coherencia** característico del cúbit.

10.2. Apartados

1. **Modelado inicial**

   Escribir explícitamente en forma matricial 4×4 la matriz de densidad del estado inicial puro $\rho_{\text{puro}} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ en la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

2. **Evolución temporal**

   Escribir la expresión matricial explícita de $\rho(t)$ sustituyendo ρ_{puro}, ρ_{mixto} y $p(t)$.

3. **Criterio de pureza**

   Calcular $\text{Tr}(\rho^2(t))$ como función del tiempo y analizar:

   (a) ¿En qué instante el estado deja de ser puro?

   (b) ¿Cuándo alcanza el 50 % de pureza?

   (c) ¿Hacia qué valor tiende cuando $t \to \infty$?

4. **Entropía de von Neumann**

   Calcular la entropía $S(\rho(t)) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$ como función del tiempo.

   Pista: Primero encuentre los valores propios de $\rho(t)$.

5. **Fidelidad cuántica**

   Calcular la fidelidad $F(t) = \text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho(0)}\rho(t)\sqrt{\rho(0)}})$ entre el estado inicial y el estado en tiempo t.

   Para estados de cúbit, se puede usar la fórmula simplificada:

   $$F(\rho, \sigma) = \text{Tr}(\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma})^2$$

6. **Distancia de traza**

   Calcular la distancia de traza $D(t) = \frac{1}{2}\text{Tr}|\rho(0) - \rho(t)|$ entre el estado inicial y el estado en tiempo t.

7. **Vector de Bloch**

   El estado de un cúbit puede representarse mediante el vector de Bloch $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ donde:

   $$r_i = \text{Tr}(\rho\sigma_i), \quad i = x, y, z$$

   Calcular $\vec{r}(t)$ y describir geométricamente la trayectoria del estado en la esfera de Bloch.

8. **Análisis de viabilidad**

   Dado que el algoritmo cuántico requiere mantener coherencia durante 100 μs y el tiempo característico es $T_2 = 150$ μs:

(a) Calcular la fidelidad $F(100\ \mu s)$.

(b) Calcular la pureza $\mathrm{Tr}(\rho^2(100\ \mu s))$.

(c) Si el algoritmo requiere fidelidad mínima del 80 %, ¿es viable ejecutarlo?

(d) ¿Cuál es el tiempo máximo disponible para mantener $F \geq 0{,}8$?

11. Requisitos de la actividad

Modalidad de trabajo

Esta actividad se realizará de manera **grupal**. Cada grupo debe indicar claramente los nombres de todos los miembros en la portada. Aunque se trabaje en grupo, cada miembro debe entregar su propia versión de la actividad.

Formato y presentación

El trabajo deberá cumplir los siguientes requisitos formales:

- **Estructura**: El documento seguirá la estructura de un artículo académico, incluyendo introducción, desarrollo, conclusiones y referencias bibliográficas.
- **Herramientas**: La redacción se realizará íntegramente en LaTeX.
- **Entrega**: Se entregará un único archivo en formato PDF compilado.
- **Citación**: Todas las referencias bibliográficas seguirán estrictamente la normativa APA 7.ª edición.

Criterios de evaluación

Se valorarán especialmente los siguientes aspectos:

- Claridad y rigor en la exposición de los cálculos intermedios.
- Justificación matemática y razonamiento lógico de los pasos realizados.
- Interpretación crítica de los resultados obtenidos y su contextualización.
- Corrección en el uso del lenguaje técnico y la notación matemática.

Extensión recomendada

Se recomienda un trabajo entre 8 y 12 páginas incluyendo cálculos, gráficas (opcionales pero recomendadas) e interpretaciones.

> **Nota importante:** La rúbrica de evaluación únicamente se aplicará a aquellos trabajos que cumplan todos los requisitos de formato especificados. Los trabajos que no satisfagan estos requisitos podrán ser devueltos sin evaluación.

12. Rúbrica

Criterio	Descripción	Valor	Peso
Normativa	Entregar la actividad en plazo y cumpliendo las indicaciones.	0,5	5 %
Biliografía y citas APA	Cumplir con las normas de citación y bibliografía según la normativa APA 7.	0,5	5 %
Apartado 1	Matriz de densidad inicial correcta con verificaciones	1	10 %
Apartado 2	Evolución temporal explícita y correcta	1	10 %
Apartado 3	Pureza: cálculo correcto y análisis temporal completo	1.5	15 %
Apartado 4	Entropía: valores propios y límites correctos	1.5	15 %
Apartado 5	Fidelidad: cálculo e interpretación	1	10 %
Apartado 6	Distancia de traza correcta	1	10 %
Apartado 7	Vector de Bloch y descripción geométrica	1	10 %
Apartado 8	Análisis de viabilidad completo y propuestas justificadas	1	10 %
Total		10	100 %