极值测度的复杂性研究

张继耀,朱子睿

2023 年 8 月 20 日

摘要

我们在本文中对极值测度的复杂性问题最新进展进行综述性研究。首先，我们介绍了遍历优化问题的提出以及基本概念。其次，我们分别针对极值测度为周期轨和零熵的情形介绍了Contreras[12]以及Gao和Shen[15]的近期工作。

Abstract

In this paper, we review the latest progress in the complexity of extreme value measures. First, we introduce the ergodic optimization problem and its basic concept. Secondly, we introduce the recent work of Contreras[12], Gao and Shen[15] respectively for the case where the extreme value measure is periodic orbit and zero entropy.

目录

1 介绍

1.1 问题背景

遍历理论研究的对象主要是一个保测映射T，在概率空间$(X, \mathfrak{B}, \mu)$上的迭代。特别的，对μ可积的函数$f : X \to \mathbb{R}$，有时间均值(迭代作用下长时间演化的极限行为)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x). \tag{1.1}$$

拓扑动力系统主要研究的对象是连续自映射$T : X \to X$的迭代,其中X是一个紧度量空间。关于拓扑动力系统的遍历理论主要是对$M_T(X)$的研究，$M_T(X)$为X上所有 T不变的$Borel$概率测度集合。$T-$不变测度的存在性是可以保证的,当$M_T(X)$是一个单元集$\{\mu\}$,以及$f : X \to \mathbb{R}$是连续的时候,有下式对$\forall x \in X$都成立。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = \int f d\mu.$$

另一方面,若M_T不是单元集,则对于很多连续函数f,它们的时间遍历平均值对于x一般不是一个常数。所以一个自然的问题就是研究时间均值的最大值和最小值,以及哪些点x可以取到它们。

同时，我们同样也可以考虑f对μ的积分，即空间平均

$$\int f d\mu, \forall \mu \in M_T.$$

遍历优化领域的一个基本问题是:对一个自映射$T : X \to X$,给定函数$f : X \to R$,去寻找一个测度μ,使得f对μ的积分达到极大/极小值。这里有μ取遍$M_T(X)$,$M_T(X)$为X上所有的T-不变$Borel$概率测度集合。在没有歧义的情况下，我们用M_T来表示$M_T(X)$。令

$$\beta(f) = \sup_{m\in M_T} \int f \, \mathrm{d}m, \quad \alpha(f) = \inf_{m\in M_T} \int f \, \mathrm{d}m. \tag{1.2}$$

虽然在一般情况下1.1和1.2不一定相同，但如果加上T是遍历的条件，以及这个测度是不变的，由$Birkhoff$ 遍历定理可知,则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = \int f d\mu, \quad \text{for} \quad \mu - a.e. \quad x \in X. \tag{1.3}$$

由后文的2.3可知，$f-$极大测度集合,记作$M_{max}(f)$,它的极值点恰为那些遍历的$f-$极大测度。因此对一般的极大测度我们可以默认它是遍历的，从而将不变测度的范围缩小到了遍历测度。

若$\beta(f) = \int f\,\mathrm{d}\mu$,则称对应的$\mu \in M_T(X)$为一个极大测度,记作$\mu_{max}$。若$\beta(f) = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$,则对应的轨道$\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 称作一个极大轨道。类似的可以定义极小测度和极小轨道。注意到$-\alpha(f) = \beta(-f)$,这两个问题事实上是等价的。因此我们只需要考虑极大测度的情形就可以了。

对于一个一般的动力系统,我们通常会假设一些条件,比如X是一个紧的度量空间,$T : X \to X$是连续的,以及f也是连续的。如无特殊说明,本文将默认在以上条件下考虑问题。

一个最自然的问题是:如何找到如上定义的极大测度？首先我们应当确定这样的极大测度是否一定是存在的。Jenkinson在[18]中已经证明了,若$T : X \to X$是一个紧度量空间上的连续映射,并且设$f : X \to \mathbb{R}$是上半连续的,那么就一定存在至少一个$f-$极大测度。

但是对于一个一般的函数f,想直接求出它的极大测度往往是比较困难的。因此我们往往会添加一些假设条件,在这个基础上来研究μ_{max}的某些性质。一般来说我们有以下两种策略:

①:对一个给定的$T : X \to X, f : X \to \mathbb{R}$,能否完全确定它的极大测度和极大遍历平均?

②:第二种策略考虑的是一种更一般的情况。在对T加上适当的假设后,我们想确定$f-$极大测度的某些一般性质,其中f可以是某个很大的函数空间中任意的函数。例如,极大测度是唯一的吗？极大测度的支撑是在一个周期轨上的吗？极大测度是满支撑的吗？极大测度是零熵的吗？这里的熵是刻画一个动力系统复杂程度的一种指标。注意我们将主要考虑一个函数空间中的"通有"函数。“通有”指的是在这个函数空间中存在一个开且稠密的子集，其中的函数f都具有以上的某些性质。

本文以后出现的“通有”均表示以上的意思。

在第2节中的2.1小节以及2.2小节中我们将会给出重要的基本理论的证明，包括极大遍历平均的等价定义，极大测度的存在性等等。

2.3小节中我们会给出一些后面可能用到的工具，例如扩张映射。特别的，我们还给出了一个判定映射是否为扩张映射的一般准则。

第3节中主要讲述了极大测度的几个典型性质，比如在3.2中可以看到，一个通有的C^0函数f是有唯一极大测度的，并且在3.5中还指出任意的遍历测度μ都是某些连续函数f的极大测度。

在第3.3节中我们考虑了极大测度的支撑集的性质，并得到了以下两个主要结果。

第一个结果是：对一个通有的C^0函数f，它的所有$f-$极大测度都是满支撑的。

第二个结果是：一个通有的$Lipschitz$函数F的极大测度是唯一的，并且支撑在一个周期轨上。

第3.4小节给出了一个判断极大测度是否为零熵的条件。

2 极大测度和极大遍历平均

2.1 基本问题

我们首先规定一些记号。

用记号$\mathfrak{D}$来指代一个二元组(X,T)，其中$X = (X,d)$是一个紧度量空间，$T : X \to X$是连续的。对$(X,T) \in \mathfrak{D}$，$T-$不变的$Borel$概率测度集合M_T在弱*拓扑下是紧的。

用记号$\mathfrak{C}$来指代一个三元组(X,T,f)，其中$(X,T) \in \mathfrak{D}$，以及$f : X \to \mathbb{R}$是连续的。对于一个紧度量空间X，令$C(X)$为所有X上的连续实值函数集合，对应的范数为$\|f\|_\infty = max_{x\in X}|f(x)|$。令$Lip$为$X$上所有$Lipschitz$实值函数的集合，有下式成立

$$Lip(f) := sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}. \tag{2.1}$$

以及对应的$Banach$范数$\|f\|_{Lip} = \|f\|_\infty + Lip(f)$。

假设我们现在已经给定了一个集合X上的自映射$T:X\to X$，一个实值函数$f:X\to\mathbb{R}$，令$S_nf=\sum_{i=0}^{n-1}f\circ T^i$，我们的基本问题就是确定时间均值的最大值

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_nf(x). \tag{2.2}$$

换句话说，我们对2.2在所有可能的初值点x中的极大值感兴趣。更进一步的，我们想确定哪些x可以达到这个极大值。

但是上面的表述还存在一个问题：在一般情况下2.2的极限可能并不存在。我们一般有如下几种方法来解决它。

第一种是定义$Reg(f,T)$，2.2中极限存在的所有$x\in X$组成的集合。并且考虑

$$\beta(f)=\sup_{x\in Reg(f,T)}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_nf(x). \tag{2.3}$$

若$Reg(f,T)$是一个空集，则我们定义$\beta(f)=-\infty$

第二种是简化集合

$$\gamma(f)=\sup_{x\in X}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_nf(x). \tag{2.4}$$

我们自然有$\beta(f)\leq\gamma(f)$，我们定义能达到2.3和2.4的极大值的点x以及轨道$\{x,T(x),T^2(x),...\}$是极大的。并且$\beta(f)$和$\gamma(f)$都可能是极大遍历平均。

第三种是考虑在一个轨道上的优化,然后增加轨道长度

$$\delta(f)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sup_{x\in X}S_nf(x). \tag{2.5}$$

同样的也有$\gamma(f)\leq\delta(f)$，若$\delta(f)\neq+\infty$，即f有上界，则$sup_{x\in X}S_nf(x)$对充分大的n是有限的，并且还满足次可加性。因此极限2.5是存在的，属于$[-\infty,\infty)$，并且就等于$\inf_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sup_{x\in X}S_nf(x)$.

目前为止我们的遍历均值还只是时间遍历平均值。通过$Birkhoff$遍历定理，可以将其转变为空间遍历均值。我们将假设X是一个拓扑空间，$T:X\to X$以及$f:X\to\mathbb{R}$都是$Borel$可测的。记M_T为所有X上$T-$不变$Borel$概率测度集合，则有M_T是一个凸集。并加上f对M_T中每个测度都是可积的条件(即f是有界的)，对这样一个三元组$(X,T,f)\in\mathfrak{C}$，我们可以定义$\alpha(f)=\alpha(T,f)=\alpha(X,T,f)$

$$\alpha(f)=\sup_{\mu\in M_T}\int fd\mu. \tag{2.6}$$

同样有$\beta(f)=-\infty$若M_T为一个空集。

在一般情况下，如上定义的$\alpha(f),\beta(f),\gamma(f),\delta(f)$不一定相同。但我们可以对$X$和$T$加上一些假设来使得它们相等。

2.2 基本理论

命题 2.1. 令$T:X\to X$是紧度量空间上的连续映射，若$f:X\to\mathbb{R}$是连续的，或者一个闭子集上的特征函数，则有

$$\alpha(f)=\beta(f)=\gamma(f)=\delta(f)\neq\pm\infty.$$

证明. 我们首先证明有$\alpha(f)\leq\beta(f)$，采用反证法，若存在$\mu\in M_T$，使得$\int fd\mu>\beta(f)$，由遍历分解理论(见[27][Ph1,Ch.10],[p.34以及p.153,Remark(2)])可知，我们可以假设μ是遍历的。则有$Birkhoff$遍历定理保证了存在一个$x\in X$，使得

$$\int fd\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_nf(x)\leq\beta(f), \tag{2.7}$$

这就导出了矛盾!

由定义可以直接导出$\beta(f) \le \gamma(f) \le \delta(f)$，则只需证明$\delta(f) \le \alpha(f)$即可。而$X$的紧性意味着$X$上的$Borel$概率测度集合$M$在弱*拓扑下也是紧的。(见[27][Thm6.5])。若$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{T^i x_n}$，其中$x_n$是使得

$$\max_{x\in X}\frac{1}{n}S_n f(x) = \frac{1}{n}S_n f(x_n) = \int f d\mu, \tag{2.8}$$

则序列(μ_n)有一个弱*聚点μ，则易见有$\mu \in M_T$

不失一般性的，我们将假设$\mu_n \to \mu$在弱*拓扑下成立，若f是连续的，则意味着

$$\delta(f) = \lim_{n\to\infty}\int f d\mu_n = \int f d\mu \le \alpha(f), \tag{2.9}$$

同时若$f = \chi_A$，其中A是闭的，则由[2](Thm.2.1)可知，有下式成立

$$\delta(f) = \lim_{n\to\infty}\int f d\mu_n = \lim_{n\to\infty}\mu_n(A) \le \mu(A) = \int f d\mu \le \alpha(f). \tag{2.10}$$

因为f是有界的，自然有$\alpha(f) \neq \pm\infty$成立。

证明命题2.1的关键点在于应用遍历定理，以及函子$\mu \to \int f d\mu$的上半连续性，则我们有下边更一般的结论 □

命题 2.2. 令$T : X \to X$是紧度量空间上的连续映射，若$f : X \to \mathbb{R}$是上半连续的，则有

$$\alpha(f) = \beta(f) = \gamma(f) = \delta(f) \in [-\infty, \infty).$$

证明. 因为f是上半连续的，X是紧的，因此f是有上界的。因此有$\int f d\mu$对所有$T-$不变概率测度μ是良好定义的，并且不等于$+\infty$。(当然有可能为$-\infty$)。特别的$\alpha(f) = \sup_{\mu\in M_T}\int f d\mu \in [-\infty, \infty)$

注意到映射

$$M_T \to [-\infty, \infty), \tag{2.11}$$

$$\mu \to \int f d\mu. \tag{2.12}$$

是上半连续的，即若有在M_T中$\mu_n \to \mu$，则有$\int f d\mu \ge limsup_{n\to\infty}\int f d\mu_n$成立。

现在假设有一列的连续函数$f_i : X \to \mathbb{R}$，有$f_i \ge f_{i+1}$对$\forall i$成立，并且使得$\lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x)$(这种上半连续函数的单调逼近准则在很多性质良好的拓扑空间都是成立的[26]特别的在任何度量空间都是成立的[25] [14])

若μ是使得$\int f d\mu > -\infty$，则由单调收敛定理，推出$lim_{i\to\infty}\int(f - f_i)d\mu = 0$因此若有$\epsilon > 0$，则有$\int(f - f_i)d\mu > -\epsilon$，对充分大的$i$，则对任意这样的$i$我们都有

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \int (f - f_i)d\mu + \int f_i d\mu,\\ &> -\epsilon + \int f_i d\mu,\\ &= -\epsilon + \limsup_{n\to\infty}\int f_i d\mu_n,\\ &\ge -\epsilon + \limsup_{n\to\infty}\int f d\mu_n.\end{aligned}$$

但是$\epsilon > 0$是任意的，因此

$$\int f d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int f d\mu_n. \tag{2.13}$$

即得所求。

若$\int f d\mu = -\infty$，则我们也必须说明$limsup_{n\to\infty} \int f d\mu_n = -\infty$。现在我们有$\int max(f, -j) d\mu \geq -j > -\infty$，因此对$\forall j \in \mathbb{N}$我们可以用$max(f, -j)$替代$f$,则得到

$$\limsup_{n\to\infty} \int f d\mu_n \leq \limsup_{n\to\infty} \int max(f, -j) d\mu_n \leq \int max(f, -j) d\mu. \tag{2.14}$$

但是$\int f d\mu = -\infty$,则有 $\int max(f, -j) d\mu_n \to -\infty (j \to \infty)$。令$j \to \infty$,则我们有$\limsup\limits_{n\to\infty} \int f d\mu_n = -\infty$

由于已证过$\mu \Rightarrow \int f d\mu$的上半连续性，那么$Prop2.1$的证明只需要说明$\delta(f) \leq \alpha(f)$，因为$\beta(f) \leq \gamma(f) \leq \delta(f)$成立是平凡的。那我们只需证明$\alpha(f) \leq \beta(f)$，若不然则存在$\mu \in M_T$，使得$\int f d\mu > \beta(f)$，那么自然有$\int f d\mu > -\infty$，更进一步的$\int f d\mu < +\infty$，因为$f$是有上界的。因此有$f \in L^1(\mu)$。因为在命题2.1中我们已经假设过$\mu$可以是遍历的，则由遍历定理我们可以找到一个$x \in X$，使得

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x) \leq \beta(f),$$

矛盾！因为命题2.2中$(X, T, f) \in \mathfrak{C}$，因此$\alpha(f) = \beta(f) = \gamma(f) = \delta(f)$。

□

定义 2.1. 设X是一个紧度量空间，设$T: X \to X$是连续的，则有

$$\alpha(f) = \sup_{\mu\in M_T} \int f d\mu,$$

被称作f的极大遍历平均值。一个测度$\mu \in M_T$被称作$f-$极大的，若$\int f d\mu = \alpha(f)$，记所有的$f-$极大测度集合为$M_{max}(f)$。

命题 2.3. 令$T: X \to X$是一个紧度量空间上的连续映射，并且设$f: X \to \mathbb{R}$是上半连续的。

(i):存在至少一个$f-$极大测度

(ii):$M_{max}(f)$是一个紧的可度量的单纯形

(iii):$M_{max}(f)$的极值点恰为哪些遍历的$f-$极大测度。特别的，至少有一个遍历的$f-$极大测度

证明. 因为集合M_T在弱*拓扑下是紧的，以及$\mu \mapsto \int f d\mu$在该拓扑下是上半连续的，这些已经在命题2.2中证明过了。那么相应的存在至少一个元素$m \in M_T$，使得$\int f dm = sup_{\mu\in M_T} \int f d\mu = \alpha(f)$，因此$M_{max}(f) \neq \emptyset$

其它剩下的性质可以由$\mu \mapsto \int f d\mu$是仿射的$(-\infty + r = -\infty, \ \forall r \in [-\infty, \infty))$以及上半连续的立即推出，并且还有事实$M_T$是一个紧的可度量的单纯形，它的极值点恰为那些遍历的$T-$不变概率测度。(见[23]，Ch.10) □

2.3 准备工具

这一部分我们主要介绍一下在遍历优化领域常常会用的的工具，它们在今后的证明中可能会常常出现，因此提前做一些解释。

2.3.1 Lipschitz函数与Hölder函数

考虑函数$f : X \to \mathbb{R}$，称f是Lipschitz函数若

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x, y \in X, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

其中K称为f的Lipschitz系数，记为$Lip(f)$。所有Lipschitz函数构成的的集合记为$Lip(X, \mathbb{R})$，可以很容易地得到$Lip(X, \mathbb{R}) \subset C^1(X, \mathbb{R})$。

称f是$\alpha-$Hölder函数若

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x, y \in X, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}.$$

所有$\alpha-$Hölder函数构成的集合记为$C^{0,\alpha}(X, \mathbb{R})$。特别地，$C^{0,1}(X, \mathbb{R}) = Lip(X, \mathbb{R})$。

2.3.2 双曲动力系统与局部积结构

现在考虑$X = M$为一个C^1黎曼流形，$U \subset M$是非空开子集，$f : U \to f(U) \subset M$是C^1微分同胚。紧f不变子集$\Lambda \subset U$称为双曲的，若存在$\lambda \in (0, 1), C > 0$，以及子空间族$E^s(x) \subset T_xM$和$E^u(x) \subset T_xM, x \in \Lambda$，使得对每个$x \in \Lambda$，

(1)$T_xM = E^s(x) \bigoplus E^u(x)$,

(2)$\|\mathrm{d}f_x^n v^s\| \leq C\lambda^n \|v^s\|$，对每个$v^s \in E^s(x)$和$n \geq 0$,

(3)$\|\mathrm{d}f_x^{-n} v^u\| \leq C\lambda^n \|v^u\|$，对每个$v^u \in E^u(x)$和$n \geq 0$,

(4)$\mathrm{d}f_x E^s(x) = E^s(f(x)), \mathrm{d}f_x E^u(x) = E^u(f(x))$.

子空间$E^s(x)$（相应地，$E^u(x)$）称为在x处的稳定（不稳定）子空间。若$\Lambda = M$，则称f为Anosov微分同胚。称双曲集Λ有局部积结构，若存在（足够小）$\epsilon > 0, \delta > 0$，使得

(i)对所有$x, y \in \Lambda, W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$至多由属于$\Lambda$的一点组成。

(ii)对满足$d(x, y) < \delta$的$x, y \in \Lambda$，$W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$恰由$\Lambda$的一点组成，记为$[x, y] = W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$，且此交是横截的，即$T_{[x,y]}M = T_{[x,y]}W_\epsilon^s(x) \bigoplus T_{[x,y]}W_\epsilon^u(y)$。

2.3.3 扩张映射与Lyapunov指数

设M是一个紧的黎曼流形，一个C^1映射$T : M \to M$被称作扩张映射，若存在$\lambda > 1$以及$N \in \mathbb{N}$，使得

$$\|D_xT^n(v)\| \geq \lambda^n \|v\|, \forall n \geq N, x \in M, v \in T_xM. \tag{2.15}$$

扩张映射是一类十分重要的映射，我们在之后研究极大测度的典型性质时会经常提到。它与动力系统的另一个概念，即李雅普诺夫指数的关系十分密切。李雅普诺夫指数是用来量化动力系统中相邻轨道的分离率。具体来说，就是假设相空间中初始间隔为δZ_0的两条轨迹的分离率为(假设分离可以按线性近似处理)

$$|\delta Z(t)| \approx e^{\lambda t}|\delta Z_0|.$$

其中λ即为李雅普诺夫指数。当初始分离向量的方向不同时，分离率也不同。因此存在一个李雅普诺夫指数谱，其数量与相空间的维数相同。通常将其中最大的称为最大李雅普诺夫指数。它被定义为

$$\lambda = \lim_{t\to\infty}\lim_{\delta Z_0\to 0}\frac{1}{t}ln\frac{|\delta Z(t)|}{|\delta Z_0|}. \tag{2.16}$$

我们想解决的问题是:如何确定一个一般的映射是一个扩张映射？很明显如果T有一个临界点(即存在$c \in M$，使得$D_cT(v) = 0$对某个非零$v \in T_cM$)。另一方面若T没有临界点，我们给出如下的一个简单的充分必要条件来判断是否为扩张映射：

命题 2.4. 令$T : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 是一个$\mathbb{T}$上的C^1映射，并且设T没有临界点，则T是一个扩张映射当且仅当$\int log|T'|d\mu > 0$对$\forall\mu \in M_T$都成立。

证明. 设T是扩张映射，若n是充分大的，则有$|(T^n)'(x)| \geq \lambda^n$对$\forall x \in \mathbb{T}$都成立。因此由求导的链式法则，我们可知$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} log|T'(T^ix)| \geq log\lambda$成立。定义$f = -log|T'|$，我们可以看到

$$\gamma(f) = \sup_{x\in\mathbb{T}}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_nf(x) \leq -log\lambda. \tag{2.17}$$

但T是连续的，并且f也是连续的(因为T是C^1的因为没有临界点)，因此由命题2.1可知$\gamma(f) = \alpha(f)$，因此

$$\sup_{\mu\in M_T}\int -log|T'|d\mu = \alpha(f) = \gamma(f) \leq -log\lambda < 0. \tag{2.18}$$

换句话说，则有$\inf_{\mu\in M_T}\int log|T'|d\mu > 0$，即得所求。

另一方面，假设$\int log|T'|d\mu > 0$对$\forall\mu \in M_T$都成立，因为$log|T'|$是连续的，故函子$\mu \mapsto \int log|T'|d\mu$定义在紧度量空间$M_T$上，因此有$\eta := inf_{\mu\in M_T}\int log|T'|d\mu > 0$。因此有

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in\mathbb{T}}\frac{1}{n}S_nf(x) = \delta(f) = \alpha(f) = \sup_{\mu\in M_T}\int -log|T'|d\mu = -\eta < 0. \tag{2.19}$$

由命题2.1可知，特别的存在一个$N \in \mathbb{N}$，使得若$n \leq N$，则有

$$-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}log|T'(T^ix)| = \frac{1}{n}S_nf(x) \leq -\frac{\eta}{2}, \tag{2.20}$$

对$\forall x \in \mathbb{T}$都成立，则由链式法则可知

$$|(T^n)^{'}(x)| \geq (e^{\frac{\eta}{2}})^n, \forall n \geq N, x \in \mathbb{T}, \tag{2.21}$$

因此有T是扩张映射，并且有扩张系数$\lambda = e^{\frac{\eta}{2}} > 1$。

命题2.4亦可见于[10]以及[1]，它们事实上证明了一个类似的结论:对一个d维的紧黎曼流形M上的一个C^1映射T，其中T没有临界点，则T是扩张映射当且仅当它的所有不变测度的李雅普诺夫指数都是严格正的。(具体请见[10])

但尽管我们已经有了命题2.4，对一个特定的映射T可能还是很难确定T是否是扩张映射的，因为满足2.15的最小的N可能也是很大的。(具体见[20]关于这个问题的讨论)。更一般的，对一个更一般的映射T，无论是否为扩张映射，一个非平凡的问题是找到具有最小李雅普诺夫指数的不变测度，这在物理学上会有很多的应用。

□

2.3.4 测度熵和拓扑熵

熵是一个用来刻画动力系统复杂程度的指标。

我们首先从划分的熵出发，然后得到映射(保测变换)的熵，即为测度熵。然后从开覆盖的定义出发，得到拓扑熵的定义。

定义 2.2. (X,$\mathcal{B}$,m)的划分是指$\mathcal{B}$的一列无交子集$\{B_i\}$，$\cup_{i\in I} B_i = X$。我们主要考虑有限划分，有记号$\mathcal{E} = \{A_1, ...A_k\}$

有如下事实：一个有限划分和一个有限子σ代数是可以一一对应的。(见GTM79[27])

$\mathcal{B}$中可以表示为$\mathcal{E}$中元素的并的元素构成一个σ代数，考虑$\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} | B = \cup_{i=1}^{k} B_i, B_i \in \mathcal{E}\}$,$\mathcal{A}$是$\mathcal{B}$的子$\sigma$代数。

由$\mathcal{A}$生成的有限划分定义为

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{\cap_{i=1}^{n} B_i : B_i \in \{A_i, X \setminus A_i\} \setminus \{\varnothing\}\}.$$

因此是一个一一对应。

定义 2.3. $\mathcal{E}$,η是两个(X,$\mathcal{B}$,m)的有限划分。$\mathcal{E} \le \eta$表示，$\mathcal{E}$中每个元素是η中元素的并。

定义 2.4. $\mathcal{E} = \{A_1, ...A_n\}$，$\eta = \{C_1, ...C_k\}$为两个有限划分(X,$\mathcal{B}$,m)，它们的交：$\mathcal{E} \bigvee \eta = \{A_i \cap C_j : 1 \le i \le n; 1 \le j \le k\}$

$\mathcal{A}$和ϕ为$\mathcal{B}$的有限σ子代数，则$A \bigvee \phi$表示$\mathcal{B}$中包含$\mathcal{A}$与ϕ的最小的σ子代数。

$$\mathcal{E}(\mathcal{A} \vee \phi) = \mathcal{E}(\mathcal{A}) \vee \mathcal{E}(\phi), \mathcal{A}(\mathcal{E} \vee \eta) = \mathcal{A}(\mathcal{E}) \vee \mathcal{A}(\eta).$$

定义 2.5. $\mathcal{A}$是$\mathcal{B}$的一个有限σ子代数，$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{A_1, ...A_k\}$，$\mathcal{A}$的熵$H(\mathcal{A}) = H(\mathcal{E}(\mathcal{A})) = -\sum_{i=1}^{k} m(A_i) logm(A_i)$

注． (1):$m(A_i) = \frac{1}{k}, \forall i$，则$H(\mathcal{A}) = logk$

(2):$H(\mathcal{A}) \ge 0$，$T : X \to X$保测变换，$H(T^{-1}\mathcal{A}) = H(\mathcal{A})$

定义 2.6. $T : X \to X$保测变换，$\mathcal{A}$为$\mathcal{B}$的有限σ子代数

$$h_\mu(T, \mathcal{E}(A)) = h_\mu(T, \mathcal{A}) = lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{A}).$$

称作T限制在$\mathcal{A}$上的测度熵，可以证明这个极限是存在的(见GTM79[27])

定义 2.7. $(X, \mathcal{B}, m)$，$h_m(T) = sup_h h_m(T, \mathcal{A})$(对所有的有限$\sigma$子代数$\mathcal{A}$取上确界)，称作$T$的测度熵。

接下来定义拓扑熵(由开覆盖定义)。设X是一个紧度量空间，α,β是两个开覆盖，则定义

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B | A \in \alpha, B \in \beta\}.$$

称作α与β的交。类似的，我们可以定义有限个覆盖$\mathcal{U}_1, ...\mathcal{U}_n$的交$\mathcal{U}_1 \vee ... \vee \mathcal{U}_n$.

定义 2.8. 设X为紧度量空间，$T : X \to X$，$\mathcal{U}$为X的覆盖，定义

$$T^{-1}\mathcal{U} = \{T^{-1}U : U \in \mathcal{U}\}.$$

仍为一个开覆盖。(见GTM79[27])

用$\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee .... \vee T^{-(n-1)}\alpha$表示$\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha$

定义 2.9. $\mathcal{U}$为X的开覆盖，$N(\mathcal{U})$表示$\mathcal{U}$的所有子覆盖中具有最少元素个数的子覆盖的元素个数

定义$H(\mathcal{U}) = logN(\mathcal{U})$

注． (1):$H(\alpha) \geq 0$

(2):$H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$

定义 2.10. 类似的，和之前一样定义

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\vee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\alpha).$$

α为开覆盖，和之前一样的论述，极限存在，则可定义$h(T,\alpha) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\vee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathcal{A})$。

定义T的拓扑熵为 $h(T) = sup_{\alpha}h(T,\alpha)$,$\alpha$取遍$X$的所有开覆盖。

注． 以后用$h_{\mu}(T)$记作测度熵，$h(T)$为拓扑熵。

2.3.5 平衡测度

给定$(X,T,f) \in \mathfrak{C}$，压力$P(f) = P(T,F)$定义为：

$$P(f) = \sup_{\mu\in M_T}(\int f\mathrm{d}\mu + h(\mu)).$$

其中$h_{\mu}(T)$为μ的测度熵。称令$P(f)$取到的μ为对于函数f的平衡测度（若唯一，则记为m_f）。如果用tf替代f，$t \in \mathbb{R}$，则当$t \to \infty$时，则$h_{\mu}(T)$变得不重要。对于充分大的t，tf的平衡测度接近于f的极大测度，$P(f)$接近于极大遍历平均$\beta(f)$。更准确地说，在早期的一些论文中已有结论（[11]，[13]等），在各种集合中（若T双曲，fHölder连续，则m_{tf}存在且唯一），族(m_{tf})至少有一个聚点m当$t \to \infty$，则m是$f-$极大测度，且$\lim_{t\to\infty} h(m_t) = h(m) = max\{h(\mu) : \mu \in M_{max}(f)\}$。事实上，在更宽的条件下，这种思考也是对的：若$X$是紧的，则熵映射$\mu \mapsto h_{\mu}(T)$)是上半连续的，则每个连续函数有至少一个平衡测度（见[27]，定理9.13），并且不难得到以下结论。

定理 2.5. 令$(X,T,f) \in \mathfrak{C}$满足M_T上的熵函数是上半连续的。对于$t \in \mathbb{R}$，若m_t是tf的平衡测度，则(m_t)有至少一个聚点$m \in M_T$当$t \to \infty$，且：

$(i)m$是一个$f-$极大测度，

$(ii)h(m) = max\{h(\mu) : \mu \in M_{max}(f)\}$,

$(iii)\lim_{t\to\infty} h(m_t) = h(m).$

特别地，在定理2.5的假设下，若$M_{max}(f) = \{m\}$，则$m_t \to m$当$t \to \infty$。

2.3.6 揭露

在研究遍历优化的问题中，有一个重要的工具是一类函数被称为揭露，以及一个相关的结果，称为揭露定理。首先，我们要有以下概念，描述一种情况，在其中遍历优化问题很容易解决：

定义 2.11. 给定$(X,T) \in \mathfrak{D}$，称$f \in C(X)$为揭露的若他的极大值点集$f^{-1}(\max(f))$包含一个紧的$T-$不变集，其中$\max(f)$表示f的最大取值。

当f为揭露的时，极大遍历平均$\beta(f)$等于$\max(f)$，且f的极大测度集恰好是支撑在$f^{-1}(\max(f))$上的$T-$不变测度集。

更一般的，若我们可以找到$\psi \in C(X)$满足

$$\int \psi \mathrm{d}\mu = 0, \forall \mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{T}}.$$

且使得$f+\psi$是揭露的，则$\beta(f) = \beta(f+\psi) = \max(f+\psi)$，且且$f$的极大测度集等于且$f+\psi$的极大测度集，均为支撑在$(f+\psi)^{-1}(\max(f+\psi))$上的$T-$不变测度集。

对于ψ的一个自然的选择是连续上边缘，即$\psi = \varphi - \varphi \circ T$对于$\varphi \in C(X)$并且遍历优化文献主要关注这种情况，因为出于实际目的，它通常就足够了。这引出了以下定义：

定义 2.12. 对于$(X, T, f) \in \mathfrak{C}$，一个连续上边缘$\psi$被称为揭露若$f+\psi$是一个揭露函数。

正式化上述讨论，我们记录以下内容：

命题 2.6. 若ψ是对于$(X, T, f) \in \mathfrak{C}$的揭露，则$\beta(f) = \max(f+\psi)$，且

$$M_{max}(f) = M_{max}(f+\psi) = \{\mu \in M : \operatorname{supp}(\mu) \subset (f+\psi)^{-1}(\max(f+\psi))\} \neq \emptyset.$$

从这个命题可以得出一个结论，如果$(X, T, f) \in \mathfrak{C}$有一个揭露，那么它满足下面这一个性质：若$\mu \in M_T$是$f-$极大测度，$\nu \in M_T$的支撑集包含在$\mu$的支撑集内，则$\nu$也是$f-$极大测度。

在本文中，我们选择将优化解释为最大化，同时注意到f的极小测度是$-f$的极大测度，且

$$\alpha(f) = \min_{\mu \in M_T} \int f \mathrm{d}\mu = -\beta(-f) = -\max_{\mu \in M_T} \int -f \mathrm{d}\mu.$$

我们很少同时考虑最大化和最小化问题；事实上，上述讨论表明了同时最小化和最大化的可能性，通过明智地选择揭露。Bousch在[5]考虑了这种可能性，他表明（参见下面的定理2.6）如果$f-$极大测度被揭露，并且如果$f-$极小测度也被揭露，那么确实有可能同时揭露极大和极小测度。

为了准确起见，让我们介绍以下术语。定义2.3中的f的揭露称为f的极大揭露，$-f$的揭露称为f的极小揭露。我们称ψ为f的双边揭露若他同时为极大和极小揭露。

定理 2.7. 对$(X, T, f) \in \mathfrak{C}$，若存在一个极大揭露和一个极小揭露，则存在一个双边揭露。（即存在一个连续上边缘$\varphi - \varphi \circ T$使得$(f + \varphi - \varphi \circ T)(X) = [\alpha(f), \beta(f)]$）

之前提到的揭露定理指以下一些结果：

定理 2.8. (一般情况)

对于给定的动力系统$(X, T) \in \mathfrak{D}$，给定函数$f \in C(X)$，存在揭露$\varphi - \varphi \circ T$。

早期的揭露定理考虑f是Hölder或Lipschitz的，T是扩张映射。接下来的揭露定理是[6]中结论的特例。

定理 2.9. (T扩张映射，f为Lipschitz)

对于扩张$(X, T) \in \mathfrak{D}$，每个Lipschitz函数$f : X \to \mathbb{R}$，存在Lipschitz揭露。

推论 2.10. (T扩张映射，f为Hölder)

对于扩张$(X, T) \in \mathfrak{D}$，每个$\alpha-$Hölder函数$f : X \to \mathbb{R}$，存在$\alpha-$Hölder揭露，对任意$\alpha \in (0, 1]$。

还有一个揭露定理，对T的要求比扩张映射更弱：Bousch在[4]定义了$T : X \to X$为弱扩张映射若它的逆T^{-1}作用在X的紧子集上是1−Lipschitz的。[4]主要关注对于T的Walters函数：对于任意$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得对于任意$n \in \mathbb{N}, x, y \in X$，若对任意$0 \le i < n$，$d(T^i(x), T^i(y)) < \delta$，则$| S_n f(x) - S_n f(y) | < \epsilon$。

定理 2.11. [4](T弱扩张映射，f Walters)

对于弱扩张$(X,T)\in\mathfrak{D}$，每个Walters函数$f:X\to\mathbb{R}$，存在一个揭露。

[4]还将这个定理应用到了可逆双曲系统，T满足弱局部积结构：对于任意$\epsilon>0$，存在$\eta>0$使得若轨道$(x_i)_{i\leq 0}$和$(y_i)_{i\geq 0}$满足$d(x_0,y_0\leq\eta)$，则存在一个轨道$(z_i)_{i\in\mathbb{Z}}$满足对任意$i\leq 0$，$d(x_i,z_i)\leq\epsilon$，对$i\geq 0$，$d(y_i,z_i)\leq\epsilon$。

定理 2.12. [4](T弱局部积)

对于$(X,T)\in\mathfrak{D}$传递且有弱局部积结构，每个Walters函数$f:X\to\mathbb{R}$存在一个揭露。

特别是，传递的Anosov微分同胚具有弱局部积结构，在这种情况下，Hölder连续函数是Walters，因此定理2.12表明了揭露的存在性。以下更有力的结果证实了，在这种情况下，揭露也是Hölder的：

定理 2.13. (T Anosov，f为Hölder)

对于$(X,T)\in\mathfrak{D}$传递的Anosov微分同胚，$f:X\to\mathbb{R}$是$\alpha-$Hölder函数，则存在揭露$\varphi-\varphi\circ T$，其中φ是$\alpha-$Hölder函数。

定理2.13的一个版本是Lopes和Thieullen在[21]。他们证明了若$f:X\to\mathbb{R}$是$\alpha-$Hölder函数，则$\varphi:X\to\mathbb{R}$是$\beta-$Hölder函数，其中$\beta<\alpha$。$\beta=\alpha$版本的证明由Bousch在[6]中给出。

2.4 Sturmian测度

考虑圆$\mathbb{T}:=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上到自映射：$T(x)=2x(\mathrm{mod}1)$,每一个半圆都包含一个且是唯一的一个支撑在它上的$T$不变概率测度。（具体请见[9]）这样的测度称为Sturmian测度。

Sturmian测度形成一个单参数族，可以表征为各种方式。最根本的是与圆旋转的关系$R_\varrho:x\mapsto x+\varrho(\mathrm{mod}1)$。事实证明，对于任何角度$\varrho$都有且只有一个 Sturmian度量$s_\varrho$，使得$T\ |_{\mathrm{supp}(s_\varrho)}$组合等价于$R_\varrho$。特别地，如果$\varrho=\frac{p}{q}$为有理数，则$s_\varrho$为周期为$q$的周期轨。例如，$s_{\frac{2}{5}}$为周期$\{\frac{5}{31},\frac{10}{31},\frac{20}{31},\frac{9}{31},\frac{18}{31}\}$。所有周期为1，2，3的轨道都是Sturmian的，但是周期为4的轨道$\{\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{3}{5}\}$不是。在周期轨中，Sturmian测度随着周期变大而变得稀有。若ϱ不是有理数，则s_ϱ的支撑是一个Cantor集。

Sturmian测度自然地出现在数学的许多分支中，并出现在遍历优化中发挥重要作用：许多自然生成的函数$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$的极大测度是Sturmian的。[3]，[16]，[17]首先在一阶三角多项式族$f_\theta(x)=cos2\pi(x-\theta)$中发现这一点。这里的$f_\theta-$极大测度总是Sturmian测度，相反地，每个Sturmian测度都是某个θ的$f_\theta-$极大测度。

特别地，有一个良好定义的函数$\theta\mapsto\varrho(\theta)$,其中$s_{\varrho(\theta)}$为$f_\theta-$极大测度。这个函数递增但不是双射，它在可数的无穷多个区间上是局部常数，分别对应于一个有理值ϱ，即一个周期Sturmian测度。因此，周期轨道是在族f_θ内的稳定最大化：对任意$\frac{p}{q}$，集合$D_{\frac{p}{q}}:=\{\theta\in\mathbb{T}:s_{\frac{p}{q}}$是$f_\theta-$极大测度$\}$有非空内部。此外，他们的并在参数空间$\mathbb{T}$中稠密。因此，在在族$f_\theta$内，有一个周期极大测度的性质是一般的。由这个结果可以得出一个猜想：在各种无穷维函数空间中最大化度量通常是周期性的。有一个周期极大测度的性质在测度论意义上也是通有的：使得$f_\theta-$极大测度不是周期的θ构成零勒贝格测度集（也就是零豪斯多夫维度集）。

3 极大测度的典型性质

3.1 方法介绍

我们在命题2.3中已经证明过了$f-$极大测度的存在性总是可以保证的，在给定$T: X \to X$是一个紧度量空间上的连续映射以及$f: X \to \mathbb{R}$的条件下。但唯一性并不总是能保证的，除非M_T就是一个单元集这种平凡的情况。例如，若f是一个常值函数，则每个不变测度都是$f-$极大的。

同样的，对于极大测度的支撑集，我们往往也不能完全确定:极大测度是否一定会支撑在一个周期轨上？以及极大测度是否会有零熵？或者说对怎样的函数f它会具有正的熵？这些问题我们会在以后的小节中一一讨论。

我们想说明的是，对于一类“典型”的函数f，其确有唯一的极大测度。更一般的我们想确定一类具有某个特定性质$\mathcal{P}$，这个特定性质$\mathcal{P}$往往会与$f-$极大测度集合有关。也就是说，对于给定的函数空间E，我们希望找到一个“很大”的子集E'，使得对每个$f \in E'$都具有性质$\mathcal{P}$，在任何一个拓扑空间E中，我们只要选取一个开且稠密的子集E'就够了。

3.2 极大测度的唯一性

3.2.1 在特殊函数空间下的通有性质

下面首先让我们给出一个具体的结果。我们可以看到如果对映射T做了一个相当强的假设，则对非常自然的函数空间类E，集合

$$\mathcal{U}(E) = \{f \in E : \text{有唯一的} f-\text{极大测度}\}.$$

在E中是开且稠密的。我们用$C^0 = C^0(X)$来代表X上的所有连续实值函数构成的函数空间，一个带有范数$\|f\|_\infty = sup_{x\in X}|f(x)|$的实的Banach空间。

命题 3.1. 设X是一个紧度量空间，设$T: X \to X$是一个连续映射，并且只有有限多个遍历的不变测度。令E是一个拓扑向量空间，并且可以连续稠密嵌入到C^0中。那么$\mathcal{U}(E)$在E中是开且稠密的。

定理 3.2. 令$T: X \to X$是一个紧度量空间上的连续映射。令E是一个拓扑向量空间，可以连续稠密嵌入到C^0中，则有$\mathcal{U}(E)$是E中开且稠密子集的可数交。

更进一步的若E是一个$Baire$空间，则$\mathcal{U}(E)$在E中是稠密的。

定义 3.1. 对于$f,g \in C^0$，定义

$$\alpha(g|f) = \max_{\mu \in M_{max(f)}} \int g d\mu,$$

而g在给定f下的相对极大遍历测度则定义为

$$M_{max}(g|f) = \{\mu \in M_{max}(f) : \int g d\mu = \alpha(g|f)\}.$$

引理 3.3. 对$\forall f, g \in C^0$

$$\{\int g d\mu : \mu \in M_{max}(f + \epsilon g)\} \to \{\alpha(g|f)\}, \quad as \quad \epsilon \searrow 0$$

在$Hausdorff$度量下是收敛的。

定义 3.2. 对$\forall 0 < \alpha \leq 1$，$X, Y$皆为度量空间，一个函数$g : X \to Y$被称作是$\alpha-$Hölder的，若存在$K > 0$，使得$d_Y(g(x), g(x')) \leq K d_X(x, x')^{\alpha}$，对$\forall x, x' \in X$都是成立的。

我们将会对$\forall 0 \leq \alpha \leq 1$以及$r \in Z_{\geq 0}$来讨论空间$C^{r,\alpha} = C^{r,\alpha}(X)$。这里$X$用来表示一个紧度量空间。当$r = 0$时如上的表述总是有意义的，但当$r \geq 1$时上式只有在$X$是一个$C^r$流形时才是有意义的。下面的例子可以由定理3.2直接得到。

推论 3.4. 令$T : X \to X$是一个紧度量空间上的连续映射，则对$\forall 0 \leq \alpha \leq 1$以及$r \in Z_{\leq 0}$，一个$C^{r,\alpha}$中的通有函数是有唯一极大测度的。

3.2.2 遍历测度是唯一极大测度

显然每一个不变测度$\mu \in M_T$对某些连续函数f都是$f-$极大的。当然f是一个常数时，每个$\mu \in M_T$都是$f-$极大的。μ为某些连续函数[1]的唯一极大测度是更为困难的。由命题2.3(iii)可知，一个必要条件为μ是遍历的。事实上μ的遍历性亦为一个充分条件:

定理 3.5. 令$T : X \to X$为一个紧度量空间上的连续映射，则对任意的遍历测度$\mu \in M_T$，都存在一个连续函数$f : X \to \mathbb{R}$，使得μ是一个唯一的$f-$极大测度。

定理3.5事实上是如下结果的一个特例。

定理 3.6. 令$T : X \to X$是紧度量空间上的一个连续映射，令$\mathcal{E}$为遍历的$T-$不变概率测度非空集合，并作为一个M_T的闭子集，则存在一个连续函数$f : X \to \mathbb{R}$，使得$M_{max}(f)$等于$\mathcal{E}$的闭凸包。

尽管我们能给出这样的f的存在性，对一个特定的遍历测度μ，想直接确定一个连续函数f，其唯一极大测度为μ，还是十分困难的。

3.3 极大测度的支撑集

3.3.1 知识铺垫

对X上的测度μ，它的支撑，定义为supp(μ)，是最小的满足条件$\mu(S) = 1$的闭子集$S \subset X$。若$\mu \in M_T$，则易见supp(μ)是一个$T-$不变集合。若supp$(\mu) = X$，则我们称μ是满支撑的。

一个测度$\mu \in M_T$被称作是严格遍历的，若映射$T|_{\mathrm{supp}(\mu)}: \mathrm{supp}(\mu) \to \mathrm{supp}(\mu)$是唯一遍历的。(也就是说$\mu$是它唯一的不变测度)

每一个严格遍历测度都是遍历的，并且对一个严格遍历测度μ，很容易直接构造一个连续函数，它的唯一极大测度是μ。例如我们可以定义$f(x) = -d(x, \mathrm{supp}(\mu))$。若空间$X$是一个光滑流形，我们可以找到光滑函数$f$，它的唯一极大测度为$\mu$，只需要选取$f$使得它的最大值在闭集supp$(\mu)$上且只在这上面达到即可。

在之前的准备工作部分，我们已经介绍过了T是双曲的，并带有局部积结构等概念。下面会经常用到。

3.3.2 C^0中的典型性质

这里最主要的结果是：一个通有的C^0函数f，其所有的$f-$极大测度都是满支撑的。即supp$(\mu) = X, \forall \mu \in M_{max}(f)$

[1] 易见每一个遍历测度都是某些有界可测函数f的唯一极大测度:例如我们可以取$f = \chi_{G(\mu)}$，其中$G(\mu)$是那些$\mu-$遍历的点

定理 3.7. 设$T : X \to X$是传递的，双曲的，具有局部积结构，则有

$$FS(C^0) := \{f \in C^0 : \text{每个}f-\text{极大测度都有满支撑}\}.$$

是C^0中的一个残差子集。若X是无限集，那么$FS(C^0)$有空的内部。

这里残差集定义为一个稀疏集的补集，稀疏集定义为无处稠密集的可数并。

因为两个残差集的交还是一个残差集，那么由定理3.2以及定理3.7，我们有以下的推论。

推论 3.8. 令$T : X \to X$是传递的，双曲的，具有局部积结构。一个通有的C^0函数有一个唯一的极大测度，并且这个测度是满支撑的。

3.3.3 $C^{r,\alpha}$中的典型性质

现在我们来考虑$C^{r,\alpha}$(其中$(r,\alpha) > (0,0)$，即$(r,\alpha) \in Z_{\geq 0} \times [0,1]$，$(r,\alpha) \neq (0,0)$)，$C^{r,\alpha}$中极大测度的典型性质和C^0中是有很大不同的。我们将给出以下的两个定理。

定理 3.9. 令$T : X \to X$为传递的，双曲的带有局部积结构。设X不是由一个单周期轨组成的，若$(r,\alpha) > (0,0)$，用NFS指代$C^{r,\alpha}$中没有全支撑的极大测度的函数f集合，则集合

$$NFS(C^{r,\alpha}) := \{f \in C^{r,\alpha} : f\text{没有全支撑的极大测度}\}.$$

是$C^{r,\alpha}$中开且稠密的。事实上在$C^{r,\alpha}$中有满支撑极大测度的函数是那些每个不变测度都是极大的，即为闭子空间

$$EC(C^{r,\alpha}) := \{f \in C^{r,\alpha} : f = c + \varphi - \varphi \circ T \text{ for some } c \in \mathbb{R}, \varphi \in C^0\}.$$

中基本的上边缘。

推论 3.10. 设$T : X \to X$是双曲的具有局部积结构，以及X不是由一个单周期轨组成的。设$(r,\alpha) > (0,0)$，则有

(i): 一个$C^{r,\alpha}$中的通有函数，有一个唯一的极大测度，这个测度不是满支撑的。

(ii):若$T : X \to X$是传递的，则一个$C^{r,\alpha}$中的通有函数有一个唯一的极大测度，并且这个测度是严格遍历。

3.3.4 极大测度支撑在一个周期轨上

由推论3.10，若$T : X \to X$是双曲的，具有局部积结构，以及$(r,\alpha) > (0,0)$，则对一个$C^{r,\alpha}$中的通有函数来说，极大测度是唯一的，并且支撑在X的一个不变真子集上。一个重要的猜想就是：这个结果可以被加强到确保极大测度的支撑恰为一个周期轨。

对一个通有的Hölder或是Lipschitz函数F，极大测度是唯一的。这个结论就是之前的推论3.10。遍历优化领域近十年的一个重要猜想就是对一个通有的Hölder或是Lipschitz函数F的极大测度是支撑在一个周期轨上的。

作为一个弱版本的猜想，Morris在[22]证明了：

定理 3.11. 设X为紧度量空间，$T : X \hookleftarrow$为扩张映射。存在残余集$\mathcal{G} \subset Lip(X,\mathbb{R})$使得若$F \in \mathcal{G}$，则有唯一的$F-$极大测度且这个测度零熵。

本小节将主要证明以下的定理。

定理 3.12. 若X是一个紧度量空间，$T : X \hookleftarrow$为扩张映射。则存在开且稠密的集合$\mathcal{O} \subset \mathrm{Lip}(X, \mathbb{R})$使得对$\forall F \in \mathcal{O}$，都有一个单一的$F-$极大测度，并且支撑在一个周期轨上。

我们首先需要几个引理和一些概念

定义 3.3. 给定$F \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{R})$，定义$F$的Lax算子为$\mathcal{L}_F : Lip(X, \mathbb{R}) \hookleftarrow$

$$\mathcal{L}_F(u)(x) = max_{y \in T^{-1}(x)}\{\alpha + F(y) + u(y)\},$$

其中

$$\alpha = \alpha(F) := -max_{\mu \in M(T)} \int F d\mu.$$

定义 3.4. 我们称序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$是一个$\delta-$伪轨道，若$d(x_{n+1}, T(x_n)) \leq \delta, \forall n \in \mathbb{N}$。

定义 3.5. 我们称y的轨道$\epsilon-$遮盖了伪轨道$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，若$\forall n \in \mathbb{N}, d(T^n(y), x_n) < \epsilon$。

引理 3.13. 1.若$u \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{R})$，则Lipschitz常数满足

$$Lip(\mathcal{L}_F(u)) \leq \lambda(Lip(F) + Lip(u)),$$

特别的 $\mathcal{L}_F(Lip(X, \mathbb{R})) \subset Lip(X, \mathbb{R})$。

2.若$\mathcal{L}_F(u) = u$，写成

$$\overline{F} := F + \alpha(F) + u - u \circ T,$$

我们有

(i): $\alpha(\overline{F}) = -max_{\mu \in M(T)} \int \overline{F} d\mu = 0$,

(ii):$\overline{F} \leq 0$,

(iii):$M(F) = M(\overline{F}) = \{T-$ 不变测度支撑在$[\overline{F} = 0]\}$.

3. 若$u \in Lip(X, \mathbb{R})$，$\beta \in \mathbb{R}$满足$\mathcal{L}_F(u) = u + \beta$，则$\beta = 0$。

定义 3.6. 令$y \in Per(T) = \cup_{p\in\mathbb{N}^+} Fix(T^p)$为$T$的一个周期点。令$P_y$为Lipschitz函数$F$的集合，并使得存在唯一的$F-$极大测度，并且是支撑在$y$的正轨道上的。令$\mathcal{U}_y$为$P_y$在$Lip(X, \mathbb{R})$中的内部。

引理 3.14. 令$F, u \in Lip(X, \mathbb{R})$满足$\mathcal{L}_F(u) = u$，并且令$\overline{F}$是由上面3.13定义的。

设存在$M \in \mathbb{N}^+$使得对每个$Q > 1$以及$\delta_0 > 0$，都存在$0 < \delta < \delta_0$以及一个在$[\overline{F} = 0]$中的$p(\delta)-$周期$\delta-$伪轨道$(x_k^\delta)_k$，至多有M个跳跃使得$\frac{\gamma_\delta}{\delta} \geq Q$，其中$\gamma_\delta := \min_{0 \leq i < j < p(\delta)} d(x_i^\delta, x_j^\delta)$.

则F是在$\cup_{y\text{周期}} \mathcal{U}_y$的闭包里的。

接下来我们开始证明定理3.12。

证明. 我们证明$\mathcal{O} := \cup_{y\in \mathrm{Per}(T)} \mathcal{U}_y$是开且稠密的。它显然是开的。反证，若它不是稠密的，则存在一个非空的开集

$$\mathcal{W} \subset Lip(X, \mathbb{R}).$$

并且是和$\mathcal{O}$不交的。则由定理3.11以及遍历分解可知，我们可以选取$F \in \mathcal{W}$，使得存在一个遍历的极大测度μ，具有测度熵

$$h_\mu(T) = 0.$$

由引理3.13-2(iii)可知，对$\mathcal{L}_F$的任意不动点u，我们都有$supp(\mu) \subset [\overline{F} = 0]$，其中$\overline{F}$是(3)中的形式。令$q \in supp(\mu) \subset [\overline{F} = 0]$是$\mu$的一个通有点，即，对任意连续函数$f : X \to \mathbb{R}$，我们都有

$$\int f d\mu = \langle f\rangle\langle q\rangle = lim_N \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(T^i(q)).$$

因为F是不在$\cup_{y\in Per(T)}\mathcal{U}_y$的闭包里的，则由3.14以及$M=2$可知，有如下的断言

断言 3.15. 存在$Q>1$以及$\delta_0>0$，使得若$0<\delta<\delta_0$以及$(x_k)_{k\geq 0}\subset O(q)$是一个$p-$周期$\delta-$伪轨道，有至多两个跳跃，则$\gamma = min_{1\leq i<j<p} d(x_i,x_j) < \frac{1}{2}Q\delta.$

取N_0使得下式成立

$$2Q^{-N_0} < \delta_0.$$

固定一点$\omega\in \mathrm{supp}(\mu)$，其中Brin-Katok定理(见[8])成立，即

$$h_\mu(T) = -lim_{L\to+\infty}\frac{1}{L}log\mu(V(\omega,L,\epsilon)).$$

这里$V(\omega,L,\epsilon)$是一个动力球：

$$V(\omega,L,\epsilon) := \{x\in X|d(T^k x, T^k\omega)<\epsilon, \forall k=0,...,L\}.$$

给定$N>N_0$，令$0\leq t_1^N < t_2^N < ...$为所有$\frac{1}{2}Q^{-N}$回归到$\omega$，即为

$$\{t_1^N, t_2^N, ...\} = \{n\in\mathbb{N}|d(T^n q,\omega)\leq \frac{1}{2}Q^{-N}\}.$$

我们还需要下面的引理，这是由[12]给出的。

引理 3.16. 对$\forall l\geq 0, t_{l+1}^N - t_l^N \geq \sqrt{2}^{N-N_0-1}$.

利用上面的引理我们继续证明定理3.12，写作

$$B(\omega,r) := \{x\in X|d(x,\omega)\leq r\},$$

给定$N\gg N_0$，令$f_N: X\to\mathbb{R}$为一个连续函数使得$0\leq f\leq 1$，$f|_{B(\omega,\frac{1}{2}Q^{-N-1})}\equiv 1$以及条件$q$是$\mu$的通有点和引理3.14，我们有

$$\mu(B(\omega,\frac{1}{2}Q^{-N-1})) \leq \int f_N d\mu = \lim_{L\to+\infty}\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1} f_N(T^i q), \tag{3.1}$$

$$\leq lim_{L\to+\infty}\frac{1}{L}\#\{0\leq i<L|d(T^i q,\omega)\leq \frac{1}{2}Q^{-N}\}, \tag{3.2}$$

$$\leq lim_{L\to+\infty}\#\{l|t_l^N\leq L\}, \tag{3.3}$$

$$\leq \sqrt{2}^{-N+N_0+1}. \tag{3.4}$$

成立。回忆关于ω的动力球为

$$V(\omega,L,\epsilon) := \{x\in X|d(T^k x, T^k\omega)<\epsilon, \forall k=0,...,L\},$$

则我们有

$$V(\omega,L,\epsilon) = S_1\circ ...\circ S_L(B(T^L\omega,\epsilon)).$$

这里S_k是T的逆的一个分支，使得$S_k(T^k\omega)=T^{k-1}\omega$，因此

$$V(\omega,L,\epsilon)\subset B(\omega,\lambda^L\epsilon).$$

取N使得下式成立

$$\frac{1}{2}Q^{-N-2} \leq \lambda^L \epsilon \leq \frac{1}{2}Q^{-N-1},$$

则有

$$-N \leq L\frac{log\lambda}{logQ} + \frac{log(2\epsilon)}{logQ} + 2.$$

由3.4可知，我们有

$$\mu(V(\omega, L, \epsilon)) \leq \mu(B(\omega, \lambda^L \epsilon)) \leq \mu(B(\omega, \frac{1}{2}Q^{-N-1})) \leq \sqrt{2}^{-N+N_0+1}.$$

$$\frac{1}{L}log\mu(V(\omega, L, \epsilon)) \leq \frac{1}{L}(log\sqrt{2})(-N + N_0 + 1), \tag{3.5}$$

$$\leq \frac{log\lambda}{logQ}log\sqrt{2} + \frac{1}{L}(log\sqrt{2})(2 + \frac{log(2\epsilon)}{logQ} + N_0 + 1). \tag{3.6}$$

则由Brin-Katok定理(见[8])以及ω的选择可知，我们有

$$h_\mu(T) = -lim_{L\to+\infty}\frac{1}{L}log\mu(V(\omega, L, \epsilon)) \geq \frac{log\lambda^{-1}}{logQ}log\sqrt{2} > 0.$$

这与F和μ的选择矛盾了。因此这样的非空开集$\mathcal{W}$是不存在的，这就证明了$\mathcal{O}$是稠密的。

□

3.4 极大测度的熵

前面问题证明的另一部分是下面这个定理。作为一个弱版本的猜想，Morris在[22]证明了：

定理 3.17. 设X为紧度量空间，$T : X \hookleftarrow$为扩张映射。存在残差集$\mathcal{G} \subset Lip(X, \mathbb{R})$使得若$F \in \mathcal{G}$，则有唯一的$F-$极大测度且这个测度零熵。

这个定理的证明思路是用一个小周期的周期轨对F进行微扰，新的极小测度在周期轨的附近，因此它有小熵。

这个定理的原始版本是针对有限移位的Hölder函数，但证明的方法与Morris给出的相同。

证明. 对于$p \geq 1$，令$M^p(T)$为支撑在周期小于等于p的周期轨上的$T-$不变概率测度集。我们要确定一个周期轨道$\{z, Tz, ..., T^{p-1}z\}$和其对应的不变测度$\mu = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\delta_{T^i z}$。

令$e_0 > 0, 0 < \lambda < 1$使得对于每个$x \in X$，T在x处的逆分支都是良定义的，单射，且是球$B(x, e_0)$上的λ收缩。

令

$$\mathcal{E}_\gamma := \{f \in Lip(X, \mathbb{R}) : h(\mu) < 2\gamma h_{top}(T), \forall \mu \in M_{max}(f)\}.$$

已知$\mathcal{O} = \{f \in Lip(X, \mathbb{R}) : \#M_{max}(f) = 1\}$是残差集。

这足以证明对于每个$\gamma > 0$，$\mathcal{E}_\gamma$开且稠密。则集合

$$\mathcal{G} = \mathcal{O} \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_{\frac{1}{n}},$$

满足定理的要求。

第一步，$\mathcal{E}_\gamma$是开的。

假设$f \in Lip(X,\mathbb{R}), f_n \in Lip(X,\mathbb{R}) \setminus \mathcal{E}_\gamma$且$lim_n f_n = f$，则存在$\nu_n \in M_{max}(f_n)$满足$h(\nu_n) \geq 2\gamma h_{top}(T)$。若有必要，可以取一子列，使得$\nu_n \to \nu \in M_T$对于任意$\mu \in M$我们有

$$\int f \mathrm{d}\mu - \|f - f_n\|_\infty \leq \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int f_n \mathrm{d}\nu_n \leq \int f \mathrm{d}\nu_n + \|f - f_n\|_\infty.$$

取极限我们可以得到$\int f \mathrm{d}\mu \leq \int f \mathrm{d}\nu, \forall \mu \in M$，因此$\nu \in M_{max}(f)$。由于映射$m \mapsto h(m)$是上半连续的，我们有$h(\nu) \geq 2\gamma h_{top}(T)$。因此，$f \in Lip(X,\mathbb{R}) \setminus \mathcal{E}_\gamma$。我们得出结论$Lip(X,\mathbb{R}) \setminus \mathcal{E}_\gamma$是闭的，即$\mathcal{E}_\gamma$是开的。

第二步，$\mathcal{E}_\gamma$与每个非空开集相交。

令$\mathcal{U} \subset Lip(X,\mathbb{R}$是一个非空开集，由前一节的结论可知存在$f \in \mathcal{U}$使得$M_{max}(f)$有且仅有一个元素$\mu$。若$\mu$是周期轨，则$f \in \mathcal{U} \cap \mathcal{E}_\gamma$完成。否则，任何在$\mathrm{supp}(\mu)$上的测度都是最大测度。令$K := \mathrm{supp}(\mu)$不包含一个周期轨。已知存在实数$C > 0$和一个紧的不变集$K$使得对于任意$\nu \in M_T$，

$$-\alpha(f) - C\int d(x,K)\mathrm{d}\nu \leq \int f \mathrm{d}\nu,$$

并且使得K不包含周期轨。

取$\beta > 0$充分小使得当$f + g \in \mathcal{U}$，

$$\|g\|_0 + Lip(g) \leq (diam(X) + 1)\beta,$$

其中$diam(X)$为X的直径，即X中两点距离的最大值。

我们将构造一组近似函数使得当n充分大时，$f_n \in \mathcal{U} \cap \mathcal{E}_\gamma$。接下来两步我们选择一组构造中用到的周期轨。

第三步。

断言 3.18. 给定任意$0 < \theta < 1$，存在一组整数$(m_n)_n$和一组周期轨$\mu_n \in M^n(T)$使得

$$\int d(x,K)\mathrm{d}\mu_n = o(\theta^{m_n}), \lim_{n\to\infty} \frac{logn}{m_n} = 0.$$

断言3.18的证明. 由Bressaud和Quas在[7]的结论，对任意$k > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} n^k (\inf_{\mu\in M^n(T)} \int d(x,K)\mathrm{d}\mu) = 0.$$

则存在一组周期轨$\mu_n \in M^n(T)$使得

$$\lim_{n\to\infty} n^k \int d(x,K)\mathrm{d}\mu_n = 0,$$

定义

$$r_n := log_\theta(\int d(x,K)\mathrm{d}\mu_n).$$

由于

$$\theta^{r_n} \leq n^k\theta^{r_n} \leq 1 \iff 0 \geq \frac{log_\theta n}{r_n} \geq -\frac{1}{k}.$$

我们有$r_n^{-1} log_\theta(n) \to 0$。定义$m_n := \lfloor \frac{1}{2} r_n \rfloor$，则$m_n^{-1} log_\theta(n) \to 0$且

$$\int d(x,K)\mathrm{d}\mu_n = \theta^{r_n} \leq \theta^{m_n + \frac{1}{2} r_n} = o(\theta^{m_n}).$$

满足要求。 □

第四步。

固定

$$0 < \theta < min\{e_0, \lambda, e_0 Lip(T)^{-1}\},$$

按照第三步的方式选取m_n和μ_n。定义$L_n := \mathrm{supp}(\mu_n)$

断言 3.19. 存在$N_\gamma > 0$使得当$n \geq N_\gamma$，对于每个不变测度$\nu \in M_T$满足$h(\nu) \geq 2\gamma h_{top}(T)$，都有

$$\nu(\{x \in X : d(x, L_n) \geq \theta^{m_n}\}) > \gamma.$$

断言3.19的证明. 回忆T的Markov分解是有限个集合S_i覆盖X使得

(a)$S_i = \overline{intS_i}$。

(b)若$i \neq j$则$intS_i \cap intS_j = \emptyset$。

(c)$f(S_i)$是S_j的并。

Ruelle在[24]证明了对于扩张映射，存在任意小直径的Markov分解。设$\mathbb{P}$是一个Markov分解，满足$diam(\mathbb{P}) < e_0$。其中的元素为

$$\mathbb{P}^{(n)} := \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathbb{P} = \{\bigcap_{i=0}^{n-1} A_i : A_i \in T^{-i}\mathbb{P}\},$$

半径小于$\lambda^{n-1}e_0$且一直是开集。且$\sigma-$代数

$$\mathbb{P}^\infty = \sigma(\cup_n \mathbb{P}^{(n)}) = \mathcal{B}orel(X).$$

包含这些开集。因此，（见Walters[27]定理4.18）对任意不变测度$\nu \in M_T$，

$$h(\nu) = \inf_k \frac{1}{k} \sum_{A \in \mathbb{P}^{(k)}} -\nu(A) log(\nu(A)),$$

由拓扑熵的定义，我们有

$$\lim_{k \geq 1} \frac{1}{k} log(\#\mathbb{P}^{(k)}) \leq h_{top}(T).$$

选择N_γ充分大使得对于任意$n \geq N_\gamma$，

$$\frac{2 + log(\#\mathbb{P})}{m_n} + \frac{log(n)}{m_n} + \frac{\gamma}{m_n} log(\#\mathbb{P}^{(m_n)}) < 2\gamma h_{top}(T).$$

令$\nu \in M_T$，假设对于一些$n \geq N_\gamma$，

$$\nu(\{x \in X : d(x, L_n) \geq \theta^{m_n}\}) \leq \gamma.$$

我们要证$h(\nu) < 2\gamma h_{top}(T)$的必要性。

令

$$W_n := \{A \in \mathbb{P}^{(m_n)} : \exists x \in A, d(x, L_n) < \theta^{m_n}\},$$

则有

$$\tilde{\gamma}_n := \sum_{A \in \mathbb{P}^{(m_n)} \setminus W_n} \nu(A) \leq \gamma.$$

我们有

$$h(\nu) \leq \frac{1}{m_n} \sum_{A \in W_N} -\nu(A) log(\nu(A)) + \frac{1}{m_n} \sum_{A \in \mathbb{P}^{(m_n)} \setminus W_n} -\nu(A) log(\nu(A)) \leq \frac{1}{m_n}(1 + (1 - \tilde{\gamma}_n) log(\#W_n)) + \frac{1}{m_n}(1 + \gamma log(\#\mathbb{P}^{(m_n)})).$$

设g是T^{m_n}的逆的分支。若x, y在g的定义域内，我们有

$$d(g(x), g(y)) \geq Lip(T)^{-m_n} d(T^{m_n}(g(x)), T^{m_n}(g(y))) \geq Lip(T)^{-m_n} d(x, y).$$

由于$\theta^{m_n} < e_0 Lip(T)^{-m_n}$，存在$g$是$T^{m_n}$的逆的分支使得球

$$B(y, \theta^{m_n}) \subset g(B(T^{m_n} y, e_0)).$$

由于$\mathbb{P}$是半径小于e_0的Markov分解，

$$\mathbb{P}^{(m_n)} = \{g(A) : A \in \mathbb{P}\}.$$

由此可以得到球$B(y, \theta^{m_n})$与$\mathbb{P}^{(m_n)}$最多相交在$\#\mathbb{P}$个元素，这是因为在T^{m_n}的作用下，

$$\#\{B \in \mathbb{P}^{(m_n)} : B \cap B(y, \theta^{m_n}) \neq \emptyset\} \leq \#\{A \in \mathbb{P} : A \cap B(T^{m_n} y, e_0) \neq \emptyset\} \leq \#\mathbb{P}.$$

由于L_n最多只有n个元素，$\#W_n \leq n\#\mathbb{P}$。我们有

$$h(\nu) \leq \frac{1}{m_n}(1 + (1 - \tilde{\gamma}_n) log(n)\#\mathbb{P}) + \frac{1}{m_n}(1 + \gamma log(\#\mathbb{P}^{(m_n)})) \leq \frac{2 + log(\#\mathbb{P})}{m_n} + \frac{log(n)}{m_n} + \frac{\gamma}{m_n} log(\#\mathbb{P}^{(m_n)}) < 2\gamma h_{top}(T).$$

□

第五步，我们完成定理的证明。

定义一组函数$f_n \in Lip(X, \mathbb{R})$，

$$f_n(x) = f(x) - \beta d(x, L_n).$$

其中$L_n = supp\mu_n$。由β的定义，我们有对任意$n \geq 1, f_n \in \mathcal{U}$。由第三步，我们有

$$\int d(x, K) \mathrm{d}\mu_n = o(\theta^{m_n}).$$

由第四步，当n充分大时，

$$\int d(x, L_n) \mathrm{d}\nu \geq \theta^{m_n} \nu(\{x \in X : d(x, L_n) \geq \theta^{m_n}\}) \geq \gamma \theta^{m_n}.$$

对任意$\nu \in M_T$使得$h(\nu) \geq 2\gamma h_{top}(T)$。

因此，我们可以选择n使得$\beta \int d(x, L_n) \mathrm{d}\nu > C \int d(x, K) \mathrm{d}\mu_n$对于任意$\nu \in M_T$使得$h(\nu) \geq 2\gamma h_{top}(T)$。由此可见对于所有这样的测度$\nu$，

$$\int f_n \mathrm{d}\nu = \int f \mathrm{d}\nu - \beta \int d(x, L_n) \mathrm{d}\nu < -\alpha(f) - C \int d(x, K) \mathrm{d}\mu_n \leq \int f \mathrm{d}\mu_n = \int f_n \mathrm{d}\mu_n \leq -\alpha(f_n).$$

我们证明了若意$\nu \in M_T$且$h(\nu) \geq 2\gamma h_{top}(T)$，则$\nu \notin M_{max}(f_n)$，所以$f_n \in \mathcal{E}_\gamma \cap \mathcal{U}$。我们得出$\mathcal{E}$在$Lip(X, \mathbb{R})$里稠密，则完成了定理的证明。

□

下面是加强光滑性后的一个结论：

定理 3.20. 令$T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$为一个实解析扩张映射，并令$f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$为一个实解析函数，则只有以下两种情况：

(i) f实解析余调于一个常数，即存在实解析函数g以及常数c使得$f = g \circ T - g + c$，

(ii) f的每个极大测度都是零熵的。

我们证明的关键要素之一是一个横向结果。要减少技巧性，我们只说明证明这个定理所需的特殊版本。假设T保持定向，即T到$\mathbb{R}$上的任意一个提升是严格递增的，且$T(0)=0$。设$\widehat{T}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为$T$对于自然投影$\pi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$的唯一提升，则$\widehat{T}(0)=0$。令$\tau=\widehat{T}^{-1}$，$\tau_i(x)=\tau(x+i)$，令$\hat{f}=f\circ\pi$，对$\mathbf{i}=(i_n)_{n\geq 1}\in\Sigma_d:=\{0,1,...,d-1\}^{\mathbb{N}}$，考虑

$$h_{\mathbf{i}}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\hat{f}\circ\tau_{i_n}\circ\tau_{i_{n-1}}\circ...\circ\tau_{i_1}(x)-\hat{f}\circ\tau_{i_n}\circ\tau_{i_{n-1}}\circ...\circ\tau_{i_1}(0)).$$

则他是$\mathbb{R}$上的解析函数。

引理 3.21. 在以上假设下，只有以下两种情况：

$(i)f$实解析，余调于一个常数c，且$h_{\mathbf{i}}\equiv h_{\mathbf{j}},\forall\mathbf{i},\mathbf{j}\in\Sigma_d$；

$(ii)h_{\mathbf{i}}\not\equiv h_{\mathbf{j}},\forall\mathbf{i}\neq\mathbf{j}\in\Sigma_d$

证明这个引理用到一个重要的观察，$G_0:=\{\mathbf{i}\in\Sigma_d:h_{\mathbf{i}}=h_{\mathbf{0}}\}$是$\Sigma_d$的闭子群。当$d$为素数时，马上能得出$G_0=\{\mathbf{0}\}$或$\Sigma_d$。同样的结论对于其它$d$也是成立的，细节可以用Fourier分析证明。下面说明这个引理在证明定理3.20中的作用。由遍历分解，即将不变测度写成若干个遍历测度的混合，只需证任意遍历极大测度μ是零熵的。设S为μ的支撑集，不妨设$T(0)=0,0\notin S$，则S可视为$(0,1)$的紧子集，S中的逆轨道空间定义为：

$$\mathcal{S}=\{((i_n)_{n\geq 1},x):i_n\in\{0,1,...,d-1\},x\in S,\tau_{i_n}\tau_{i_{n-1}}...\tau_{i_1}(x)\in S,\forall n\}.$$

由引理3.21，若集合

$$\mathcal{S}_i=\{x\in S:(\mathbf{i},x)\in\mathcal{S}\},$$

由一个极限点x_0，则$\mathbf{i}$属于一个至多两个元素的集合M。由前面证过的定理，μ是零熵的。M由下面确定，只与x_0有关：

定义 3.7. 给定$x\in S$，在$\mathcal{S}^x:=\{\mathbf{i}\in\Sigma_d:(\mathbf{i},x)\in\mathcal{S}\}$上定义两个全序$\prec_{\pm}^x$如下。给定$\mathbf{i}\neq\mathbf{j}\in\mathcal{S}^x$，

•$\mathbf{i}\prec_+^x\mathbf{j}$若存在$\delta>0$使得$h_{\mathbf{i}}'(y)<h_{\mathbf{j}}'(y),\forall y\in(x,x+\delta)$；

•$\mathbf{i}\prec_-^x\mathbf{j}$若存在$\delta>0$使得$h_{\mathbf{i}}'(y)>h_{\mathbf{j}}'(y),\forall y\in(x-\delta,x)$。

这两个全序都有唯一最大值$\kappa_{\pm}(x)$，则有$M=\{\kappa_{\pm}(x)\}$。

下面完成定理3.20的证明。

定理3.20的证明. 我们假设f不实解析余调于常数，则只需证每个(T,f)的极大测度μ满足$h_T(\mu)=(0)$。先增加一个条件$(*)T$保持定向且$Fix(T)\setminus\mathrm{supp}(\mu)\neq 0$

设$\mathcal{T}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$是$T$的逆向极限，即对$x\in\tau_{i_0}([0,1))\cap S$，

$$\mathcal{T}((i_n)_{n\geq 1},\widehat{T}(x)-i_0),$$

由于$0\notin S$，T共轭到符号是d的单侧移位，$\mathcal{T}$共轭到符号是d的双侧移位。

我们需要下面这个熟知的结论。

命题 3.22. 若ν为双侧全移位$\sigma:\{0,1,...,d-1\}\circlearrowleft$的遍历不变Borel测度，使得$h_\sigma(\nu)>0$，则对任意$U\subset\Sigma_d$Borel集满足$\nu(U)>0$，对于$\nu-a.e.(i_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in U$，

$$\{(j_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in U:j_n=i_n,\forall n\geq 0\},$$

$$\{(j_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in U:j_n=i_n,\forall n<0\}.$$

都是不可数集。

另外，由于$\Phi:\Sigma_d\to\mathbb{R},\Phi(\mathbf{i},x)=dist(x,(\mathcal{S}_{\mathbf{i}}\cup\{2\})\setminus\{x\})$是Borel可测的，$B:=\Phi^{-1}(0)=\{(\mathbf{i},x)\in\mathcal{S}:x$是$\mathcal{S}_{\mathbf{i}}$的极限点$\}$是Borel可测的。

由遍历分解，只需证μ为T的遍历测定的情况。作为逆向极限，$\mathcal{T}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$也有一个正熵的遍历不变测度$\tilde{\mu}$。

我们要证明$\tilde{\mu}(\mathcal{S})=0$来导出矛盾。由引理3.21和$B$的定义，$\forall(\mathbf{i},x)\in B,\mathbf{i}\in\{\kappa_{\pm}(x)\}$，所以由命题3.22，$\tilde{\mu}(B)=0$。再由$B$的定义，任意$\forall(\mathbf{i},x)\in\mathcal{S}\setminus B$，集合$\{y\in S:(\mathbf{i},y)\in\mathcal{S}\setminus B\}$是可数集，所以再由命题3.22，$\tilde{\mu}(\mathcal{S}\setminus B)=0$，得到$\tilde{\mu}(\mathcal{S})=0$。

如果去掉条件$(*)$，可以利用(T,f)和$(T^k,f+f\circ T+...+f\circ T^{k-1})$最大化问题的等价性。定义

$$S_0=\{x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}:f(x)=g(T(x))-g(x)+\beta(f)\},$$

由于f不解析余调到常数，$S_0\subsetneq\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，则$S=\mathrm{supp}(\mu)$无处稠密。特别地，有一个$T$的周期点$p\notin S$。设$k$是一个正偶数使得$T^k(p)=p$。由前面已经证过的结论，$h_{T^k}(\mu)=0$，因此得到$h_T(\mu)=0$。 □

参考文献

[1] J.F. Alves, V. Araujo, B. Saussol, On the uniform hyperbolicity of some non-uniformly hyperbolic systems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131 (2003), 1303–1309.

[2] P. Billingsley, *Convergence of probability measures(second edition)* Wiley, 1999.

[3] T. Bousch, Le poisson n'a pas d'êtes, *Ann. Inst. Henri Poincaré (Proba. et Stat.)*, 36 (2000), 489–508.

[4] T. Bousch, La condition de Walters, *Ann. Sci. ENS*, 34 (2001), 287–311.

[5] T. Bousch, Un lemme de Mané bilatéral, *Compt. Rend. Acad. Science Paris*, série I, 335 (2002), 533–536.

[6] T. Bousch, Le lemme de Mané-Conze-Guivarc’h pour les systèmes amphi-dynamiques rectifiables, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 20 (2011), 1–14.

[7] X. Bressaud, A. Quas, Rate of approximation of minimizing measures, *Nonlinearity*, 20 (2007), no. 4, 845–853.

[8] M. Brin, A. Katok, On local entropy, geometric dynamics, In: *Proc. Int. Symposium*, Rio de Janeiro/Brasil 1981, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1007, pp. 30– 38 (1983).

[9] S. Bullett and P. Sentenac, Ordered orbits of the shift, square roots, and the devil’s staircase, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 115 (1994), 451–481.

[10] Y. Cao, Non-zero Lyapunov exponents and uniform hyperbolicity, *Math. Studies*, no. 7, Van Nostrand, 1966.

[11] Z. N. Coelho, Entropy and ergodicity of skew-products over subshifts of finite type and central limit asymptotics, *Ph.D. Thesis*, Warwick University, (1990).

[12] G. Contreras, Ground states are generically a periodic orbit, *Invent.Math.* (2016) 205: 383–412.

[13] G. Contreras, A. O. Lopes, Ph. Thieullen, Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle, *Ergod. Th. Dyn. Sys.*, 21 (2001), 1379–1409.

[14] R. Engelking General Topology, *Heldermann Verlag*, Berlin, 1989.

[15] R. Gao, W. Shen, Low complexity of optimizing measures over an expanding circle map, *math.DS.* arXiv: 2206.05467.

[16] O. Jenkinson, Conjugacy rigidity, cohomological triviality, and barycentres of invariantmeasures, *Ph. D. thesis*, Warwick University, 1996.

[17] O. Jenkinson, Frequency locking on the boundary of the barycentre set, *Exp. Math.*, 9 (2000), 309–317.

[18] O. Jenkinson, Ergodic Optimization, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser A*, 15 (2006), 197-224.

[19] O. Jenkinson, Ergodic Optimization in dynamical systems, *Ergod. Theory Dyn. Syst.*, 39(10): 2593–2618, 2019.

[20] C. Liverani, Rigorous numerical investigation of the statistical properties of piecewise expanding maps, A feasibility study, *Nonlinearity*, 14 (2001), 463–490.

[21] A. O. Lopes, Ph. Thieullen, Sub-actions for Anosov diffeomorphisms, *Geometric methods in dynamics II*, Astérisque vol. 287, 2003.

[22] I. D. Morris, Maximizing measures of generic hölder functions have zero entropy, *Nonlinearity*, 21 (2008), 993–1000.

[23] R. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem, *Math. Studies*, no. 7, Van Nostrand, 1966.

[24] D. Ruelle, Thermodynamic Formalism: The Mathematical Structures of Equilibrium Statistical Mechanics, 2nd edn., Cambridge University Press, Cambridge Mathematical Library, Cambridge (2004).

[25] H. Tietze, U. Funktionen , die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, *J. Reine Angew. Math.*, 145 (1914), 9–14.

[26] H. Tong, Some characterizations of normal and perfectly normal spaces, *Duke Math. J.*, 19 (1952), 289–292.

[27] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer, 1981.