极值测度的复杂性研究

张继耀　朱子睿

中国科学技术大学

2023年5月17日

Contents

拓扑动力系统

我们首先给出遍历理论中主要研究的一些对象

- 相空间: X, 一个紧度量空间
- 连续自映射: $T : X \to X$
  - T是一个保测映射
  - 在概率空间$(X, \mathcal{B}, \mu)$上的迭代
- $M_T(X)$: X上所有的T-不变 $Borel$概率测度集合
- $M_T^e(X)$: $M_T(X)$中所有的遍历测度集合

极值测度的定义

对一个连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$

- 时间均值:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$$

- 极小/极大遍历均值:

$$\beta(f) := \inf_{\mu \in M_T(X)} \int f d\mu \text{以及 } \alpha(f) := \sup_{\mu \in M_T(X)} \int f d\mu$$

- f-极小(极大)测度: 对 $\mu \in M_T(X)$ 满足

$$\int f d\mu = \beta(f) \; \left(\int f d\mu = \alpha(f) \right)$$

极值测度的定义

- 极小/极大测度集合:

$$M_{\min}(f) := \left\{ \mu \in M_T(X) : \int f d\mu = \beta(f) \right\}$$

$$M_{\max}(f) := \left\{ \mu \in M_T(X) : \int f d\mu = \alpha(f) \right\}$$

Birkhoff遍历定理

设X为一个紧度量空间,X上有概率测度μ,T为$X \to X$上的连续映射.若T为保测映射,且是遍历的; μ是一个T−不变测度,f为μ−可积的.那么对几乎处处的x,都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = \int f d\mu$$

极值测度的定义

但上式的极限不一定总是存在的！因此我们考虑如下定义

- 第一种是定义$Reg(f,T)$,极限存在的所有$x\in X$的集合:

$$\tau(f)=\sup_{x\in Reg(f,T)}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_nf(x)$$

- 第二种是考虑简化集合:

$$\gamma(f)=\sup_{x\in X}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_nf(x).$$

- 第三种是考虑在一个轨道上的优化,然后增加轨道长度:

$$\delta(f)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sup_{x\in X}S_nf(x).$$

- 以及之前定义过的:

$$\alpha(f):=\sup_{\mu\in M_T(X)}\int fd\mu$$

极值测度的定义

Ergodic Optimization, Jenkinson, Discrete Contin. Dyn. Syst, 2006

设$T: X \to X$是紧度量空间X上的连续映射,若$f: X \to \mathbb{R}$是上半连续的,则有

$$\alpha(f) = \beta(f) = \gamma(f) = \delta(f) \in [-\infty, \infty).$$

- 因此我们定义$\mu \in M_T$为$f-$极大的,若:

$$\int f d\mu = \alpha(f)$$

- 记所有的$f-$极大测度集合为$M_{\max}(f)$
- 类似的可以定义极小测度,注意到$-\alpha(f) = \beta(-f)$,这两个问题事实上等价,我们下面只考虑极大测度情形.

极值测度的存在性

Ergodic Optimization, Jenkinson, Discrete Contin. Dyn. Syst, 2006

令$T: X \to X$是一个紧度量空间上的连续映射,并且$f: X \to \mathbb{R}$是上半连续的, 则有
(i):存在至少一个$f-$极大测度
(ii):$M_{max}(f)$的极值点恰为那些遍历的$f-$极大测度.特别的，至少有一个遍历的$f-$极大测度

因此我们可以将不变测度的范围缩小到遍历测度.

方法介绍

尽管我们已经证明了极大测度的存在性,但对一个一般的函数f,想直接求出它的极大测度是很困难的;于是我们转而研究极大测度的一些典型性质.

- 极大测度的唯一性:怎样的函数f会有唯一的极大测度?
- 极大测度的支撑集: 是否为满支撑?是否支撑在周期轨上?
- 极大测度的熵: 极大测度是否有零熵?

方法介绍

我们的策略是:在对T加上适当的假设后,想去确定$f-$极大测度的一般性质,其中f可以是某个很大的函数空间中任意的函数.这里我们主要讨论一个函数空间中的"通有"函数.

- 映射T: 一致扩张,双曲......
- 对应的函数空间: C^0, Hölder, C^k, $\cdots$,解析
- 复杂性: 零熵, 支集为周期轨,$\cdots$

Remark

这里的"通有"是拓扑意义下的"通有",指的是在这个函数空间中存在一个开且稠密的子集,其中所有的函数f对应的极大测度都具有某些典型性质.

极大测度的唯一性

Ergodic Optimization, Jenkinson, Discrete Contin. Dyn. Syst, 2006

设X是一个紧度量空间，设$T : X \to X$是一个连续映射，并且只有有限多个遍历的不变测度。令E是一个拓扑向量空间，并且可以连续稠密嵌入到C^0中。那么$\mathcal{U}(E)$在E中是开且稠密的。
其中 $\mathcal{U}(E) = \{f \in E :$ 有唯一的f–极大测度$\}$.

推论

令$T : X \to X$是一个紧度量空间上的连续映射,则对$\forall 0 \leq \alpha \leq 1$以及$r \in Z_{\geq 0}$,一个$C^{r,\alpha}$中的通有函数是有唯一极大测度的.

遍历测度的唯一性

Ergodic Optimization, Jenkinson, Discrete Contin. Dyn. Syst, 2006

令$T : X \to X$为一个紧度量空间上的连续映射,则对任意的遍历测度$\mu \in M_T$,都存在一个连续函数$f : X \to \mathbb{R}$,使得μ是一个唯一的f−极大测度.

极大测度的支撑集

Ergodic Optimization, Jenkinson, Discrete Contin. Dyn. Syst, 2006

设$T : X \to X$是传递的,双曲的,具有局部积结构,则有

$$FS(C^0) := \{f \in C^0 : 每个f\text{–}极大测度都有满支撑\}.$$

是C^0中的一个残差集.

Remark

这里残差集定义为一个稀疏集的补集,稀疏集定义为无处稠密集的可数并.

推论

令$T : X \to X$是传递的，双曲的，具有局部积结构。一个通有的C^0函数有一个唯一的极大测度，并且这个测度是满支撑的。

极大测度的支撑集

Ergodic Optimization, Jenkinson, Discrete Contin. Dyn. Syst, 2006

令$T : X \to X$为传递的,双曲的带有局部积结构.设X不是由一个单周期轨组成的,若$(r, \alpha) > (0, 0)$,用NFS指代$C^{r,\alpha}$中没有全支撑的极大测度的函数f集合,则集合

$$NFS(C^{r,\alpha}) := \{f \in C^{r,\alpha} : f\text{没有全支撑的极大测度}\}.$$

是$C^{r,\alpha}$中开且稠密的.

推论

设$T : X \to X$是双曲的具有局部积结构,以及X不是由一个单周期轨组成的.设$(r, \alpha) > (0, 0)$,则对一个$C^{r,\alpha}$中的通有函数,有唯一的极大测度,且这个测度不是满支撑的.

支撑在周期轨上

Morris, Nonlinearity, 2008

设X为紧度量空间,$T : X \hookleftarrow$为扩张映射.存在残差集$\mathcal{G} \subset Lip(X, \mathbb{R})$使得若$F \in \mathcal{G}$,则有唯一的$F$–极大测度且这个测度零熵.

Contreras,Invent.,2016

若X是一个紧度量空间,$T : X \hookleftarrow$为扩张映射.则存在开且稠密的集合$\mathcal{O} \subset \mathrm{Lip}(X, \mathbb{R})$使得对$\forall F \in \mathcal{O}$,都有一个单一的$F$–极大测度,并且支撑在一个周期轨上.

极大测度的熵

定理(Gao,Shen)

令$T:\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$为一个实解析扩张映射，并令$f:\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$为一个实解析函数，则只有以下两种情况：
$(i)f$实解析余调于一个常数，即存在实解析函数g以及常数c使得$f=g\circ T-g+c$，
$(ii)f$的每个极大测度都是零熵的。

Thanks for your attention!