Numerical Analysis Homework10

Zhang Jiyao,PB20000204

2023 年 5 月 12 日

1 Introduction

画出五阶Adams-Bashforth公式和五阶Adams-Moulton公式的绝对稳定性区域，可以使用Mathematica绘制。

2 Method

多步方法的绝对稳定性:若差分方程作用到微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y.(Re\lambda < 0)$$

时，对任意的初值，总存在左半复平面上的一个区域，当λh在这个区域时，差分方程的解趋于0，这个区域称为稳定区域。

即为复数ω的集合，它使得$p - \omega q$的根位于单位圆盘内部。

基于等距节点$t_i = x_0 + ih(1 \leq i \leq n)$的五阶Adams-Bashforth公式为:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{720}[1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}]$$

即有

$$x_{n+1} - x_n = \frac{h}{720}[1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}]$$

则有:

$$p(z) = z^5 - z^4$$

$$q(z) = \frac{1}{720}[1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}]$$

则多项式$\phi = p - \lambda hq$为：

$$\phi = z^5 + (-1 - h\lambda\frac{1901}{720})z^4 + (0 + h\lambda\frac{2774}{720})z^3 + (0 - h\lambda\frac{2616}{720})z^2 + (0 + h\lambda\frac{1274}{720})z + (0 - h\lambda\frac{251}{720})$$

求$h\lambda$的值，使得多项式的根都落在单位圆盘内。

基于等距节点$t_i = x_0 + ih(1 \leq i \leq n)$的五阶Adams-Moulton公式为:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{720}[251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}]$$

即有

$$x_{n+1} - x_n = \frac{h}{720}[251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}]$$

则有:

$$p(z) = z^4 - z^3$$

$$q(z) = \frac{1}{720}[251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}]$$

则多项式$\phi = p - \lambda hq$为：

$$\phi = (-1 - h\lambda\frac{251}{720})z^4 + (-1 - h\lambda\frac{646}{720})z^3 + (0 + h\lambda\frac{264}{720})z^2 + (0 - h\lambda\frac{106}{720})z + (0 - h\lambda\frac{19}{720})$$

求$h\lambda$的值，使得多项式的根都落在单位圆盘内。

3 Results

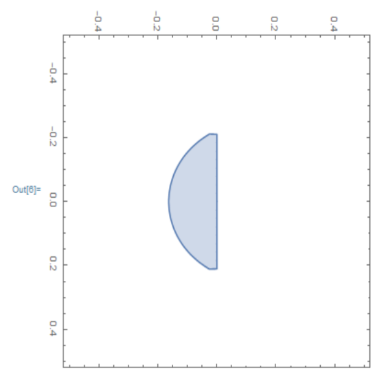

图 1: Adams-Bashforth公式的图像

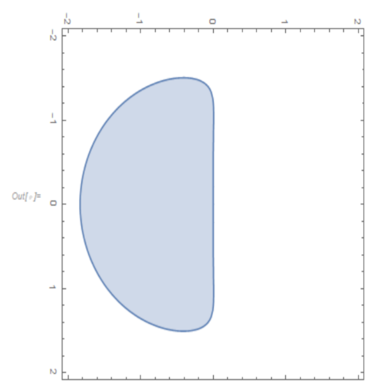

图 2: Adams-Moulton公式的图像

4 Discussion

可以看到两个方法的绝对稳定性区域都是落在左半平面的。

5 Computer Code

```
In[•]:= Clear[f, x, y, a, b];
        清除
        x[a_, b_] := a * I + b;
                     虚数单位
        f[z_, a_, b_] := (1 - 251 * x[a, b] / 720) * z^4 + (-1 - 646 * x[a, b] / 720) * z^3 +
           (264 * x[a, b] / 720) * z^2 + (-106 * x[a, b] / 720) * z + (19 * x[a, b] / 720);

        y[a_, b_] := NSolve[f[z, a, b] == 0, z];
                     数值求解
        p = RegionPlot[Norm[y[a, b][[1, 1, 2]]]  ≤ 1 && Norm[y[a, b][[2, 1, 2]]]  ≤ 1 &&
            绘制区域     模                                模
           Norm[y[a, b][[3, 1, 2]]]  ≤ 1  && Norm[y[a, b][[4, 1, 2]]]  ≤ 1 ,
                                             模
          {a, -2, 2}, {b, -2, 2}]
        Rotate[
        旋转
         p,
         3 Pi / 2]
           圆周率
```

General: Further output of Part::partd will be suppressed during this calculation.

```
In[◦]:= Clear[f, x, y, a, b];
        清除
        x[a_, b_] := a * I + b;
                        虚数单位
        f[z_, a_, b_] := z^5 + (-1 - 1901 * x[a, b] / 720) * z^4 + (2774 * x[a, b] / 720) * z^3 +
            (-2616 * x[a, b] / 720) * z^2 + (1274 * x[a, b] / 720) * z + (-x[a, b] * 251 / 720);

        y[a_, b_] := NSolve[f[z, a, b] == 0, z];
                     数值求解
          p = RegionPlot [Norm[y[a, b][[1, 1, 2]]]  ≤ 1 && Norm[y[a, b][[2, 1, 2]]]  ≤ 1 &&
              绘制区域     模                            模
            Norm[y[a, b][[3, 1, 2]]]  ≤ 1  && Norm[y[a, b][[4, 1, 2]]]  ≤ 1  &&
            模                                 模
            Norm[y[a, b][[5, 1, 2]]]  ≤ 1 , {a, -0.5, 0.5}, {b, -0.5, 0.5}]
            模
        Rotate[p, 3 Pi / 2]
        旋转        圆周率
```