《数值分析》之

数值积分

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

https://faculty.ustc.edu.cn/yxu

- 在微积分中，二重积分的计算是用化为累次积分的方法进行的。
- 计算二重数值积分也同样采用累次积分的计算过程。简化起见，我们仅讨论矩形区域上的二重积分。
- 对非矩形区域的积分，大多可以变化为矩形区域上的累次积分。

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

a,b,c,d 为常数，f 在D 上连续。将它变为化累次积分

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \\
=&\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx \\
=&\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy
\end{aligned}$$

- 做等距节点，x轴，y轴分别有$h = \frac{b-a}{m}$, $k = \frac{d-c}{n}$
- 将x作为常数,先计算$\int_c^d f(x,y)dy$,有

$$\int_c^d f(x,y)dy \approx \frac{k}{2}\left(f(x,y_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x,y_i) + f(x,y_n)\right)$$

- 再将y作为常数，在x方向，计算上式的每一项的积分

$$\int_a^b f(x,y_0)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0,y_0)+2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j,y_0)+f(x_m,y_0)\right)$$

$$\int_a^b f(x,y_n)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0,y_n)+2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j,y_n)+f(x_m,y_n)\right)$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \sum_{i=1}^{n-1} f(x,y_i) &= \sum_{i=1}^{n-1}\int_a^b f(x,y_i)\\ &\approx \sum_{i=1}^{n-1}\frac{h}{2}\left(f(x_0,y_i)+2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j,y_i)+f(x_m,y_i)\right)\end{aligned}$$

二重积分的复化梯形公式

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \approx \frac{hk}{4}\Bigg(f(x_0,y_0)+f(x_0,y_n)+f(x_m,y_0)+f(x_m,y_n)$$

$$+2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j,y_0)+2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j,y_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_0,y_i)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_n,y_i)$$

$$+4\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j,y_i)\Bigg)$$

- 系数，在积分区域的四个角点为1/4，4个边界为1/2，内部节点为1
- 误差

$$-\frac{(b-a)(d-c)}{12}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\xi,\eta)+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(\bar{\xi},\bar{\eta})\right)$$

二重积分的复化Simpson公式

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \approx hk \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \omega_{i,j} f(x_j, y_i)$$

- 系数

$$U = \{u_0, u_1, \cdots, u_m\} = \{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\}$$
$$V = \{v_0, v_1, \cdots, v_n\} = \{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\}$$
$$\omega_{i,j} = u_i v_j$$

- 误差

$$-\frac{(b-a)(d-c)}{180}\left(h^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(\xi,\eta) + k^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4} f(\bar{\xi},\bar{\eta})\right)$$