《数值分析》之

函数逼近

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

https://faculty.ustc.edu.cn/yxu

概念

- 实际中，函数$f(x)$多样，复杂，通常只能观测到一些离散数据；或者函数$f(x)$过于复杂而难以运算。这时我们要用近似函数$\varphi(x)$来逼近$f(x)$。
- 函数逼近：在科学计算中用到大量复杂函数，对它们直接进行微分、积分等计算不是很容易，而插值是一种最简单的逼近方法。
- 在计算中函数通常是用离散点表示的，特别是函数来自于微分方程的数值解。插值是复原函数的直接方法。
- 在计算机图形学中需要处理由大量离散点表示的曲线和曲面，这称为曲线和曲面拟合(fitting)，其核心步骤就是函数插值。

发展概况

- 单变量函数插值：从十八世纪开始，单变量多项式插值就得到了系统发展，Lagrange, Hermite, Newton等人都有重要贡献。至今已相当成熟，出现了多项式插值、三角函数插值、样条插值，并且催生了如样条函数理论等在现代大规模科学计算和计算机辅助设计中扮演主要角色的理论体系
- 多变量函数插值：至今还处于发展阶段。比较成熟的是张量积形式的插值理论，而其它形式的插值以及多变量样条理论还不是很完善

插值函数

定义

$f(x)$ 为定义在区间$[a,b]$上的函数，$x_0, x_1, \cdots, x_n$为区间上n+1个互不相同的点，Φ为给定的某一函数类。求Φ上的函数$\varphi(x)$,满足

$$\varphi(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$$

则称$\varphi(x)$为$f(x)$关于节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$在Φ上的**插值函数**。称$x_0, x_1, \cdots, x_n$为**插值节点**，称$(x_i, f(x_i))$为**插值点**。

- 插值函数是否存在唯一?
- 如何构造插值函数?
- 插值函数的误差如何估计?

代数多项式

- 易于运算
- 无穷光滑
- 易于计算积分和导数
- 通常选择代数多项式作为插值基函数

Theorem

若x_i两两不同，则对任意给定的y_i, 存在唯一的次数至多是n次的多项式p_n使得$p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$.

证明：在幂基$\{1, x, \ldots, x^n\}$下待定多项式p的形式为

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

由插值条件$p(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$, 得到如下方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

系数矩阵为Vandermonde矩阵，其行列式非零，因此方程组有唯一解。

多项式插值定理（续）

- 插值矩阵方法(待定系数法)：不具有实用价值，但具有很高的理论价值
- 注意Vandermonde矩阵是病态的，因此不推荐应用该方法计算插值多项式的形式。
- 对于给定的问题，插值多项式存在唯一。但是可以用不同的方法给出插值多项式的不同表示形式。

不同形式的插值多项式

- Lagrange插值
- Newton插值
- Hermite插值

- Lagrange基函数: 由多项式插值定理存在函数$\ell_i(x)$满足$\ell_i(x_j)=\delta_{ij}$. 实际上,

$$\ell_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

- Lagrange插值多项式:

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\ell_k(x)$$

- 如果插值节点相同,给定的数据点$\{y_i\}$有多组,那么采用Lagrange插值是相当有效的。但求值算法不是很直接。
- Lagrange插值的缺点:无承袭性。增加一个节点,所有的基函数都要重新计算

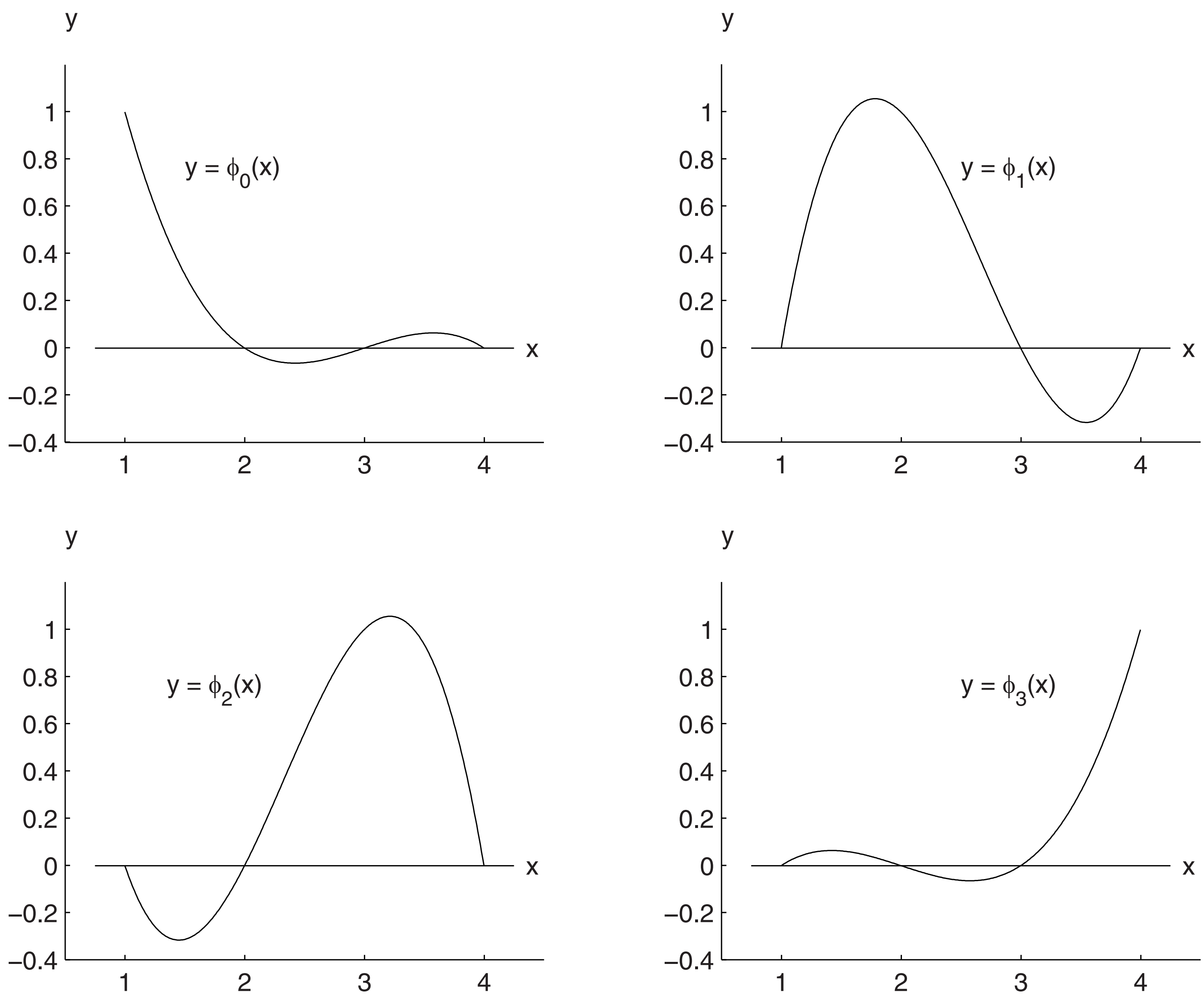
线性插值

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad \ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$
$$L_1(x) = f(x_0)\ell_0(x) + f(x_1)\ell_1(x)$$

二次插值

$$\ell_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$
$$\ell_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$
$$\ell_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)},$$
$$L_2(x) = f(x_0)\ell_0(x) + f(x_1)\ell_1(x) + f(x_2)\ell_2(x)$$

三次插值基函数



例

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

结点为$5,-7,-6,0$，所以基函数是

$$\ell_0(x)=\frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6)5}=\frac{1}{660}x(x+6)(x+7)$$

$$\ell_1(x)=\frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)}=-\frac{1}{84}x(x-5)(x+6)$$

$$\ell_2(x)=\frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)}=-\frac{1}{66}x(x-5)(x+7)$$

$$\ell_3(x)=\frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)}=-\frac{1}{210}(x-5)(x+6)(x+7)$$

所以Lagrange型插值多项式
为$L_3(x)=\ell_0(x)-23\ell_1(x)-54\ell_2(x)-954\ell_3(x)$

算法

- 计算Lagrange基函数

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

```
fx=0.0
for(i=0;i<=n;i++) {
    tmp=1.0;
    for(j=0;j<i;j++)
        tmp=tmp*(x-x[j])/(x[i]-x[j]);
    for(j=i+1;j<=n;j++)
        tmp=tmp*(x-x[j])/(x[i]-x[j]);
    fx=fx+tmp*y[i];
}
return fx;
```

多项式插值误差定理

Theorem

设$f \in C^{n+1}[a,b]$，多项式p是f在不同结点$x_0, x_1, \ldots, x_n$上的插值多项式，$\deg p \leqslant n$。则对$[a,b]$中每个x，都有$\xi_x \in (a,b)$使得

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

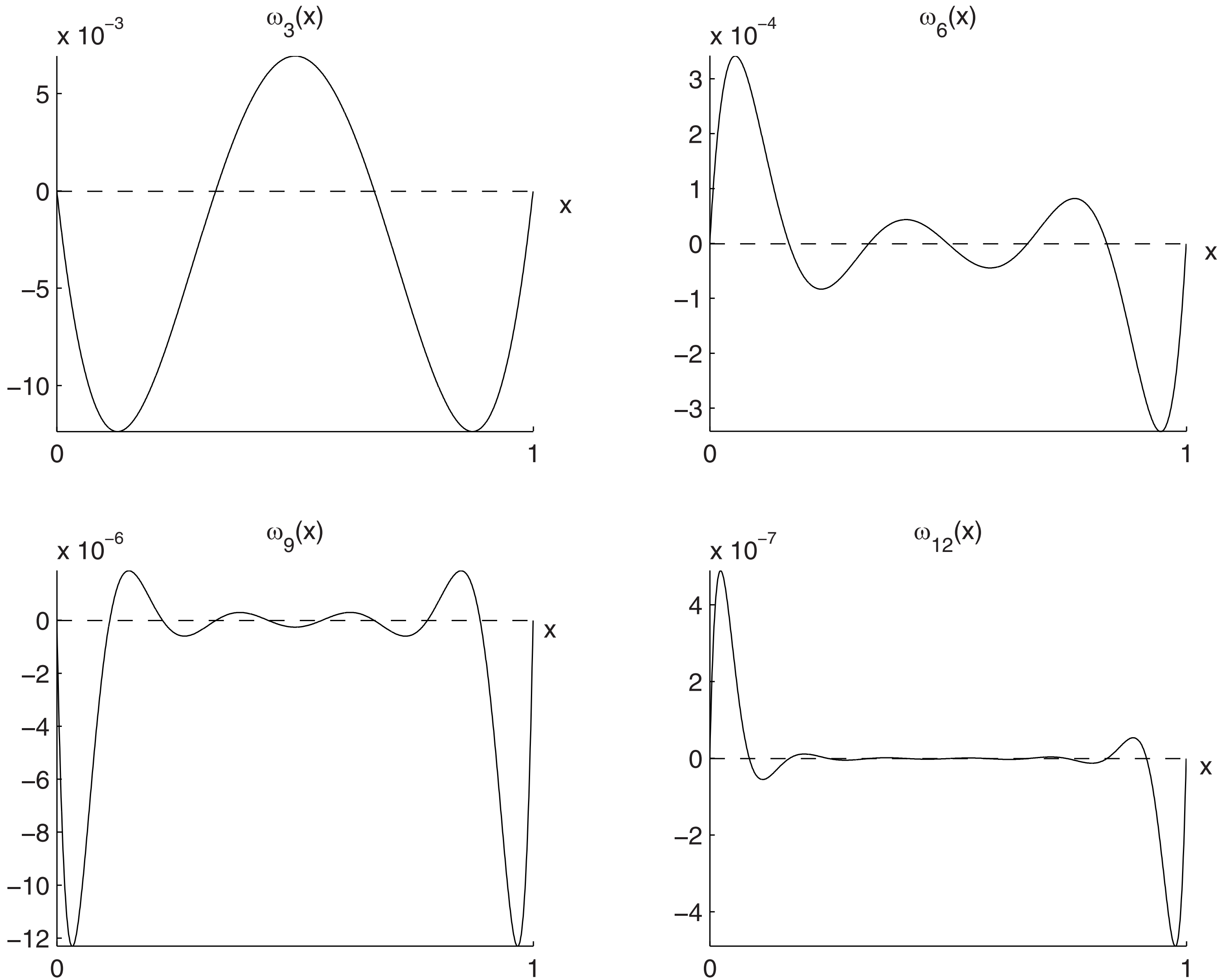
证明：当x与某个结点重合时结论成立。对其它情形，固定x, 令

$$\phi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{w(x)} w(t), w(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

则$\phi(t)$在$[a,b]$内有$n+2$个零点，从而存在$\xi_x \in (a,b)$使得$\phi^{(n+1)}(\xi_x) = 0$，即

$$0 = f^{(n+1)}(\xi_x) - (n+1)! \frac{f(x) - p(x)}{w(x)}.$$

多项式插值误差定理 $w(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$



误差估计的应用

- 可以应用于基于多项式构造的各种近似算法(如数值积分)的误差分析
- 建立插商与导数之间的关系：在结点确定的区间内存在一点ξ使得

$$f[x_0,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

当$f(x)=x^k, k=0,1,\cdots,n$关于节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$上的Lagrange插值多项式就是其本身，因此Lagrange基函数$\ell_i(x)$满足

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\ell_i(x)x_i^k=x^k, k=0,1,\cdots,n$$

令$k=0$,得到

$$\sum_{i=0}^{n}\ell_i(x)=1$$

多项式插值事后误差估计

- 给定$x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}$
- 取$x_0, x_1, \cdots, x_n$，构造$L_n(x)$
- 取$x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$，构造$\widetilde{L}_n(x)$

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$f(x) - \widetilde{L}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n+1})$$

- 近似$f^{(n+1)}(\xi_1) \approx f^{(n+1)}(\xi_2)$,有

$$\frac{f(x) - L_n(x)}{f(x) - \widetilde{L}_n(x)} \approx \frac{x - x_0}{x - x_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow f(x) - L_n(x) \approx \frac{x - x_0}{x_0 - x_{n+1}}(L_n(x) - \widetilde{L}_n(x))$$

- 插值误差可以用2组插值函数的差来估计

上机作业1

对函数

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5,5]$$

构造Lagrange插值多项式$p_L(x)$，插值节点取为:

1. $x_i = 5 - \frac{10}{N}i,\ i = 0, 1, \cdots, N$
2. $x_i = -5\cos(\frac{2i+1}{2N+2}\pi),\ i = 0, 1, \cdots, N$ (Chebyshev point)

并计算如下误差

$$\max_i\{|f(y_i) - p(y_i)|,\ y_i = \frac{i}{10} - 5,\ i = 0, 1, \cdots, 100\}$$

对$N = 5, 10, 20, 40$比较以上两组节点的结果，并在一张图中画出$N = 10$时$f(x)$数值计算结果。

输出形式如下：

N=5

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

N=10

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

N=20

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

N=40

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

算法

- 计算Lagrange基函数

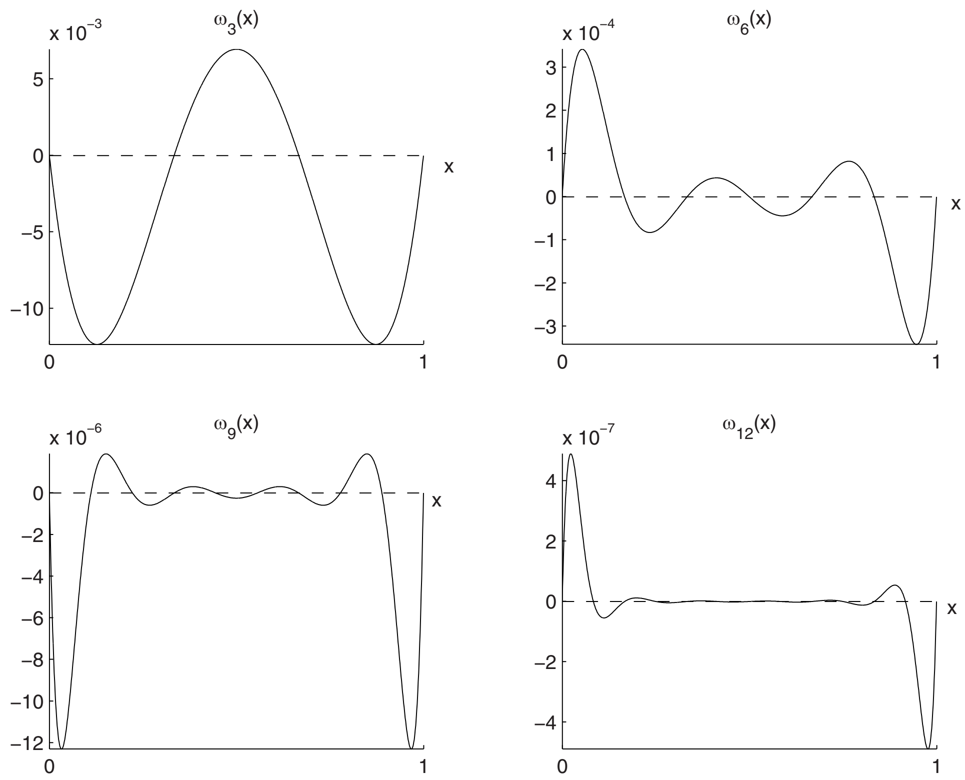
$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

```
fx=0.0
for(i=0;i<=n;i++) {
    tmp=1.0;
    for(j=0;j<i;j++)
        tmp=tmp*(x-x[j])/(x[i]-x[j]);
    for(j=i+1;j<=n;j++)
        tmp=tmp*(x-x[j])/(x[i]-x[j]);
    fx=fx+tmp*y[i];
}
return fx;
```

多项式插值误差定理

设$f \in C^{n+1}[a,b]$，多项式p是f在不同结点$x_0, x_1, \ldots, x_n$上的插值多项式，$\deg p \leqslant n$。则对$[a,b]$中每个x，都有$\xi_x \in (a,b)$使得

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$



最佳结点的选取

- 即如何选取结点x_i, 使得$w(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n)$ 在$[a, b]$上的绝对值最大值最小?
- 为了简单起见，不妨令$[a, b] = [-1, 1]$. 转而考虑一般的首一n次多项式$p(x)$使得它在$[-1, 1]$上的绝对值最大值最小。
- 需要用到(第一类)Tchebyshev多项式*。

*Tchebyshev (1821.5.16–1894.12.8), 俄罗斯数学家。1850年证明了Bertrand猜测，即n与$2n$之间必有至少一个素数，也接近证明了素数定理。同时他在概率论、正交函数和积分理论方面有重要贡献。其英文名有时也写作Chebyshev

有两种等价的定义方式

- 递归定义：

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1.$$

- 解析形式定义：

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Tchebyshev多项式性质

- $|T_n(x)| \leqslant 1, \ -1 \leqslant x \leqslant 1$
- $T_n\left(\cos\frac{j\pi}{n}\right) = (-1)^j, \ j = 0, \ldots, n$
- $T_n\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right) = 0, \ j = 1, \ldots, n$
- $2^{1-n}T_n$是一个首一多项式

Theorem

设$p(x)$为一个n次首一多项式，则

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p(x)|\geqslant 2^{1-n}$$

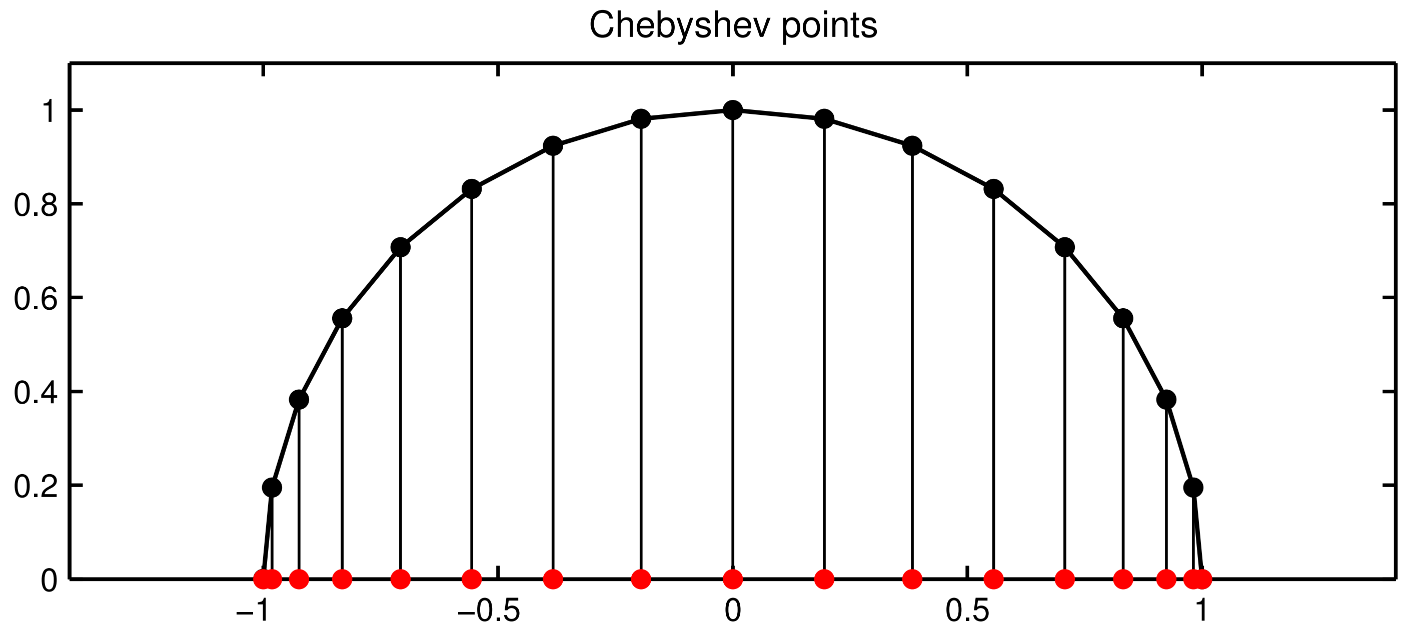
证明：反证法。设对任意$x\in[-1,1]$, $|p(x)|<2^{1-n}$.
令$q(x)=2^{1-n}T_n$, $x_i=\cos(i\pi/n)$,

$$(-1)^i p(x_i)\leqslant |p(x_i)|<(-1)^i q(x_i)$$

即$(-1)^i\big(q(x_i)-p(x_i)\big)>0$, $i=0,\ldots,n$. 这说明在区间$[-1,1]$上，多项式$q-p$的符号在正负之间变动了$n+1$次，即它在$(-1,1)$ 之间至少有n个根，而这是不可能的，因为$q-p$的次数至多是$n-1$. $\square$

最佳结点选取

- Tchebyshev结点：结点x_i是Tchebyshev多项式$T_{n+1}(x)$的根



- 插值误差

$$|f(x)-p(x)| \leqslant \frac{1}{2^n(n+1)!}\max_{|t|\leqslant 1}|f^{(n+1)}(t)|$$

关于收敛性的定理

Theorem (Faber's定理)

对任意给定的结点组

Wererstrass 一致逼近原理

$$a \leqslant x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leqslant b, \quad n \geqslant 0 \tag{1}$$

在区间$[a, b]$上存在一个连续函数f使得f在这组结点上的插值多项式不能一致收敛于f.

Theorem

若$f \in C[a, b]$，则存在(1)式中那样的一组结点，使得f在这组结点上的插值多项式p_n满足

$$\lim_{n \to \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$$

$(B_n h_1)(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{k}{n} B_k^n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x$ 一致逼近

- $C[a,b]$上的正线性算子L是指它满足
  1. 线性性： $(B_n h_2)(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} \to x^2 \ (n \to \infty)$

Weierstrass一致逼近定理

$$L(af + bg) = aLf + bLg, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad f, g \in C[a,b]$$

也可利用 B_n 构造性证明.

  2. 正性：若$f \geqslant 0$，则$Lf \geqslant 0$
- 正线性算子的著名例子来自于Serge Bernstein在1912年定义的如下算子：在$C[0,1]$中，

$\| B_n f - f \|_\infty \to 0$

$$(B_n f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underline{B_k^n(x)}, \qquad B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

线性无关

这里的$\{B_k^n(x)\}$称为Bernstein基函数。

$f(x) = 1, \ x, \ x^2$ $\quad h_0(x) = 1 \quad h_1(x) = x \quad h_2(x) = x^2$

$(B_n h_0)(x) = \sum_{i=0}^{n} B_k^n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 = h_0$ 一致逼近

Bohman-Korovkin定理 （必考定理之一）

Theorem （$\|f-g\|_\infty \to 0$ 可理解为f一致逼近于g）

设$L_n(n \geqslant 1)$是定义在$C[a,b]$上的一个正线性算子序列，其中每个算子在相同的空间中取值。若对于函数$f(x)=1,x,x^2$，$\|L_nf-f\|_\infty \to 0$成立，则对所有的$f\in C[a,b]$此结论也成立。

证明：若L为正线性算子，则由$f \geqslant g$可知$Lf \geqslant Lg$，进一步有$L(|f|) \geqslant |Lf|$. 记$h_k(x)=x^k$，$k=0,1,2$. 再定义$\alpha_n,\beta_n,\gamma_n$如下：

$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$

$-L|f| \leqslant Lf \leqslant L|f|$

$$\alpha_n = L_nh_0 - h_0, \quad \beta_n = L_nh_1 - h_1, \quad \gamma_n = L_nh_2 - h_2$$

由定理的假设可知

$$\|\alpha_n\|_\infty \to 0, \quad \|\beta_n\|_\infty \to 0, \quad \|\gamma_n\|_\infty \to 0$$

下面证明对于任意$f\in C[a,b]$以及任意的$\varepsilon>0$，存在m使得当$n>m$时$\|L_nf-f\|_\infty < 3\varepsilon$.

由于f在紧区间上连续，从而一致连续，所以存在$\delta > 0$, 使得对于区间$[a, b]$中所有的x和y, 当$|x-y| < \delta$时，$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
令$c = 2\|f\|_\infty/\delta^2$, 则有当$|x-y| \geqslant \delta$时，

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2\|f\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty \frac{(x-y)^2}{\delta^2} = c(x-y)^2$$

从而对于$[a, b]$内的任意x, y有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + c(x-y)^2$$

上述不等式重写为：

$h_0 = 1$

$$|f - f(y)h_0| \leqslant \varepsilon h_0 + c[h_2 - 2yh_1 + y^2 h_0]$$

从而根据正线性算子的定义有：

$|Lf| \le L|f|$

$$|L_n f - f(y)L_n h_0| \leqslant \varepsilon L_n h_0 + c[L_n h_2 - 2yL_n h_1 + y^2 L_n h_0]$$

进一步用y代替x，

$$
\begin{aligned}
&|(L_n f)(y) - f(y)(L_n h_0)(y)| \\
&\leqslant \varepsilon (L_n h_0)(y) + c[(L_n h_2)(y) - 2y(L_n h_1)(y) + y^2 (L_n h_0)(y)] \\
&= \varepsilon[1+\alpha_n(y)] + c[y^2 + \gamma_n(y) - 2y(y+\beta_n(y)) + y^2(1+\alpha_n(y))] \\
&= \varepsilon + \varepsilon\alpha_n(y) + c\gamma_n(y) - 2cy\beta_n(y) + cy^2\alpha_n(y) \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon\underbrace{\|\alpha_n\|_\infty}_{\to 0} + c\underbrace{\|\gamma_n\|_\infty}_{\to 0} + 2c\underbrace{\|h_1\|_\infty\|\beta_n\|_\infty}_{\to 0} + c\underbrace{\|h_2\|_\infty\|\alpha_n\|_\infty}_{\to 0}
\end{aligned}
$$

因此存在m，当$n \geqslant m$时，$\|L_n f - f \cdot L_n h_0\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$. 因此必要时再增大$m$有

$$
\begin{aligned}
\|L_n f - f\|_\infty \leqslant& \|L_n f - f \cdot L_n h_0\|_\infty + \|f \cdot L_n h_0 - f \cdot h_0\|_\infty \\
\leqslant& 2\varepsilon + \|f\|_\infty \|\alpha_n\|_\infty \leqslant 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

□

Bernstein算子的情形

- h_0: $(B_n h_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(x) = 1$
- h_1:
$$(B_n h_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x$$
- h_2:
$$(B_n h_2)(x) = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} \to x^2$$

从而Bohman-Korovkin定理此时给出了Weierstrass定理：即有界闭区间上的连续函数可以被多项式一致逼近。