《数值分析》之

数值积分

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

https://faculty.ustc.edu.cn/yxu

数值积分问题

- 数值积分是应用函数在给定区间上的定义，计算出在该区间上的积分（近似）值
- 为什么需要数值积分?
  - 从数学上说，有些初等函数的原函数不是初等函数
  - 有些时候我们只知道函数在给定区间上有限个点处的函数值
  - 虽然有些函数的原函数可以得到，但是求值过于复杂
- 数值积分的策略是用另一个函数替代原来的被积函数，而前者的积分是很容易计算的
  - 多项式（来自于多项式插值或逼近）以及样条函数是常用的选择

通过多项式插值计算数值积分

- 目标是计算积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

- 选取$[a, b]$中的结点$x_0, x_1, \ldots, x_n$，应用Lagrange插值过程：
  1. Lagrange插值基函数为

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

  2. 在结点上插值f的次数最多是n的多项式为

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)$$

积分公式

- 近似积分：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)dx$$

- 从而得到一个适用于所有f的公式：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

其中

$$A_i = \int_a^b \ell_i(x)dx$$

该公式对所有的n阶多项式是精确成立的。

- 如果结点是等距的，那么上述公式称为Newton-Cotes公式

梯形法则

- 当$n=1$, $x_0=a$, $x_1=b$时，对应的公式称为梯形法则：
  - 此时
  $$\ell_0(x)=\frac{b-x}{b-a},\qquad \ell_1(x)=\frac{x-a}{b-a}$$
  - 从而
  $$A_0=A_1=\frac{b-a}{2}$$
  - 相应的求积分式为
  $$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$
- 该公式对所有的线性多项式函数精确成立

梯形法则的误差

- 对一般函数，梯形法则的误差为 $-\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi), \xi \in (a,b)$

1. 多项式插值中的误差

$$E(x) = f(x) - p(x) = f''(\xi_x)(x-a)(x-b)/2$$

2. 对其进行积分，并应用积分中值定理[1]

$$\int_a^b E(x)dx = -\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi_x)(x-a)(b-x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b (x-a)(b-x)dx = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$$

[1] 令u, v为区间$[a,b]$上的连续函数，$v \geqslant 0$. 那么存在$\xi \in (a,b)$使得

$$\int_a^b u(x)v(x)dx = u(\xi)\int_a^b v(x)dx$$

$$\int_{-5}^{5} \frac{1}{1+x^2} dx$$

n	I_n
1	0.38462
2	6.79487
3	2.08145
4	2.37401
5	2.30769
6	3.87045
7	2.89899
8	1.50049
9	2.39862
10	4.67330
11	3.24477
12	−0.31294
13	1.91980
14	7.89954
15	4.15556

复化梯形法则

- 把单个区间上的积分公式应用在区间被划分以后的每个子区间上，便得到复化(composite, 复合）法则或公式
- 对于梯形法则，把区间$[a, b]$划分为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

在每个子区间上应用梯形法则，得到复化梯形法则：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\ &\approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]\end{aligned}$$

分析

- 复化梯形法则相当于用分片线性多项式(即连接结点处函数值的折线)替换被积函数f得到的数值积分公式
- 对于等距节点$x_i = a + ih$, $h = (b-a)/n$, 复化梯形法则具有形式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right]$$

- 复化梯形法则的误差为

$$-\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi)$$

其中$\xi \in (a, b)$。证明中用到了下述事实：

1. 在(a, b)中存在一点ξ使得

$$f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

   这里$\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$
2. $n = (b-a)/h$

待定系数法

- 从上节可知，公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

对于所有次数不超过n的多项式精确成立，其中A_i是第i个Lagrange插值基函数在区间$[a,b]$上的积分

- 反过来，如果我们知道上述公式对所有次数不超过n的多项式精确成立，那么是否必定有下式成立呢？

$$A_i = \int_a^b \ell_i(x)dx$$

- 答案是肯定的，因为上述公式对于任何ℓ_i精确成立，从而

$$\int_a^b \ell_j(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \ell_j(x_i) = A_j$$

新的求解方法

- 因此当加上条件"对所有次数不超过n的多项式精确成立"后，上述公式是唯一确定的，从而我们不必要通过计算Lagrange插值基函数的积分来确定系数，而是采用更有效直接的待定系数法
- 例如，重新推导前面的例题，即确定下式中的A_0, A_1和A_2:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1/2) + A_2 f(1)$$

  - 由于公式对所有次数不超过2的多项式精确成立，把$f(x) = 1, x, x^2$作为试用函数，得到

$$1 = \int_0^1 dx = A_0 + A_1 + A_2$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}A_1 + A_2$$

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{4}A_1 + A_2$$

- 从而得到联立方程组的解为

$$A_0 = \frac{1}{6}, \quad A_1 = \frac{2}{3}, \quad A_2 = \frac{1}{6}$$

- 由于公式是线性的，因此对所有次数不超过2的多项式都精确成立
- 值得指出的是，由于积分节点是对称分布的，而且由于所有系数的和为1，因此这里只要算出x在$[0,1]$上的积分值，就可以算出所有的系数

- 如果把例题中的$[0,1]$区间换为一般的$[a,b]$, 得到著名的Simpson法则

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

- 从公式的推导过程可知，它对所有次数不超过2的多项式精确成立。而出人意料的是它对所有次数不超过3的多项式也精确成立，原因在于：

$$\frac{1}{4}(b^4-a^4)=\int_a^b x^3dx=\frac{b-a}{6}\left[a^3+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right]$$

Simpson法则的误差

- 误差项的准确表示为

$$-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$$

  其中$\xi \in (a,b)$.
- 下面应用Taylor展开，可以证明误差是$\mathcal{O}(h^5)$, $h=(b-a)/2$
  1. 重写积分公式如下：

$$\int_a^{a+2h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)]$$

  2. 右端项的Taylor展开结果为

$$2hf(a)+2h^2f'(a)+\frac{4}{3}h^3f''(a)+\frac{2}{3}h^4f'''(a)+\frac{100}{3\cdot 5!}h^5f^{(4)}+\cdots$$

3. 设

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

根据微积分基本定理，$F' = f$. 再根据Taylor展开，积分公式的左端为

$$F(a+2h) = 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + \frac{4}{3}h^3 f''(a) + \frac{2}{3}h^4 f'''(a) + \frac{32}{5!}h^5 f^{(4)}(a) + \cdots$$

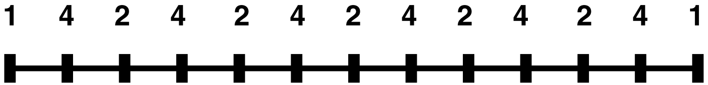
4. 把上述两个Taylor展开结合在一起，有

$$\int_a^{a+2h} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)] - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(a) - \cdots$$

复化Simpson法则

- 前述的Simpson法则可以应用到有偶数个子区间的复化情形
- 设n为偶数，$x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$, 则复化Simpson法则为

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \\
&= \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n/2} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] \\
&= \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2\sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right]
\end{aligned}$$



- 误差为$-\frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in (a, b)$

计算$\pi = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

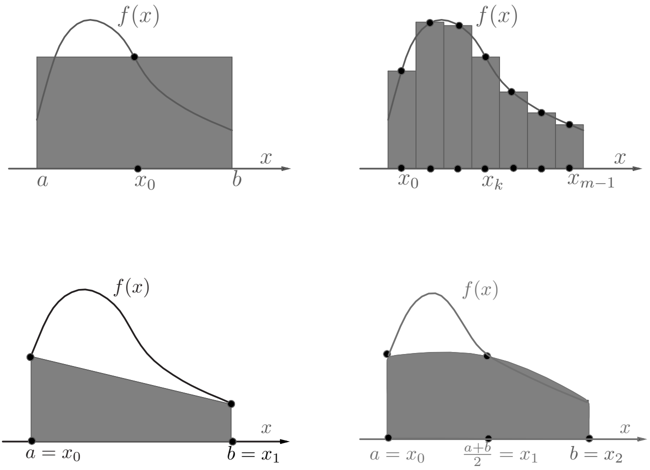
解:

$$T_8 = \frac{1}{16}\left[f(0) + 2\sum_{k=1}^{7} f(x_k) + f(1)\right] = 3.138988494$$

$$S_4 = \frac{1}{24}\left[f(0) + 4\sum_{odd} f(x_k) + 2\sum_{even} f(x_k) + f(1)\right] = 3.141592502$$

其中$x_k = k/8$.

几个常用积分公式



一般积分公式

- 可以把前面的数值积分公式一般化为离散点上的函数值的线性组合

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \equiv I_n(f)$$

要求公式对于所有次数不超过n的多项式精确成立。

- 数值积分有k阶代数精度是指：

$$I_n(x^i) = I(x^i), \quad i = 0, \cdots, k, \quad I_n(x^{k+1}) \neq I(x^{k+1}).$$

对任意次数不高于k次的多项式f(x)，数值积分没有误差

例

确定下面公式中的系数，使得当f为次数不超过3的多项式时精确成立：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx \approx A_0 f\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+A_1 f\left(-\frac{1}{4}\pi\right)+A_2 f\left(\frac{1}{4}\pi\right)+A_3 f\left(\frac{3}{4}\pi\right)$$

- 由于公式要对所有次数不超过3的多项式精确成立，因此把$f(x)=x^i$, $i=0,1,2,3$代入得到四个线性方程。而根据对称性，应有$A_0=A_3$, $A_1=A_2$, 所以只需要应用两个条件如下：

$$0=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx = 2A_0+2A_1$$

$$-4\pi=\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos x\,dx = 2A_0(3\pi/4)^2+2A_1(\pi/4)^2$$

得到解为$A_1=A_2=-A_0=-A_3=4/\pi$

区间变换

- 经过变量的线性变换，我们可以从某一个区间上的数值积分公式导出其它区间上的数值积分公式，而且两个公式同时对次数不超过同样m的多项式精确成立
- 假设有一个数值积分公式

$$\int_c^d f(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(t_i)$$

已知，它对所有次数不超过m的多项式精确成立

- 为了导出在区间$[a,b]$上的公式，定义t 的线性函数

$$\lambda(t) = \frac{b-a}{d-c}t + \frac{ad-bc}{b-c}$$

满足$\lambda(c)=a$, $\lambda(d)=b$, 而且其间线性变化

- 对积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

作变量代换$x = \lambda(t)$, $dx = \frac{b-a}{d-c}dt$,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{d-c}\int_c^d f(\lambda(t))dt \approx \frac{b-a}{d-c}\sum_{i=0}^{n} A_i f(\lambda(t_i))$$

- 从而得到$[a, b]$区间上的数值积分公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{d-c}\sum_{i=0}^{n} A_i f\left(\frac{b-a}{d-c}t_i + \frac{ad-bc}{d-c}\right)$$

由于当f为多项式时，$f(t)$与$f(\lambda(t))$具有相同的次数，因此对于次数不超过m 的多项式，新公式也精确成立

误差分析

由于前面的数值积分公式本质上是来自于多项式插值，因此基于多项式插值的误差公式我们也可以给出数值积分的误差估计

- 如果p是在点$x_0, x_1, \dots, x_n$上插值$f \in C^{(n+1)}[a, b]$的次数不超过n的多项式，那么

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

- 从而我们有

$$\int_a^b f(x) - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) dx$$

- 如果在$[a,b]$上$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$, 则有

$$\left| \int_a^b f(x) - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| dx$$

- 类似于多项式插值理论中（第一类）Tchebyshev多项式的零点使得

$$\max_{x \in [a,b]} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

达到最小，哪么如何选取x_i使得

$$\int_a^b \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| dx$$

最小?

第二类Tchebyshev多项式

- 函数

$$U_{n+1}(x) = \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin\theta}, \quad x = \cos\theta$$

称为第二类Tchebyshev多项式

- 递推表示为

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x$$
$$U_{n+1}(x) = 2xU_n - U_{n-1}, \quad n \geqslant 1$$

- 它满足如下正交关系：

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \delta_{mn}\frac{\pi}{2}$$

- 与第一类Tchebyshev多项式的关系为 $T_n'(x) = nU_{n-1}(x)$

- $U_{n+1}(x)$是次数为$n+1$的多项式，首项系数为2^{n+1}
- 它的零点都在$[-1,1]$内，分别是

$$x_i = \cos\frac{(i+1)\pi}{n+2}, i = 0, 1, \ldots, n$$

- 从而有

$$\frac{U_{n+1}(x)}{2^{n+1}} = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$\int_{-1}^{1} \left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right| dx = \frac{1}{2^n}$$

理由在于：

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |U_{n+1}(x)| dx &= \int_{0}^{\pi} |\sin(n+2)\theta| d\theta \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \int_{\pi i/(n+2)}^{\pi(i+1)/(n+2)} (-1)^i \sin(n+2)\theta d\theta \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+1} \left(\frac{\cos(n+2)\theta}{n+2} \Big|_{\pi i/(n+2)}^{\pi(i+1)/(n+2)} \right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

极值性质定理

Theorem

在所有的n次首一多项式p中，使得

$$\int_{-1}^{1} |p(x)| dx$$

最小的多项式是$2^{-n}U_n(x)$

证明：首先证明下述正交关系：

$$I = \int_{-1}^{1} U_m(x)\,\mathrm{sign}[U_n(x)]dx = 0, \qquad 0 \leqslant m < n$$

实际上，在积分I中进行变量代换$\cos\theta = x$得到

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \sin(m+1)\theta \,\mathrm{sign}\left[\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\right] d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_{k\varphi}^{(k+1)\varphi} \sin(m+1)\theta d\theta \qquad \varphi = \frac{\pi}{n+1} \\
&= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} [\cos(m+1)(k+1)\varphi - \cos(m+1)k\varphi]
\end{aligned}
$$

为了证明最后的求和项等于零，需要借助于复数的Euler公式，转化为幂级数求和。[2]

[2] 实际上，在一些数学手册中可以很容易找到上述求和表达式，从而得证所需要的结论。如在“Table of Integrals, Series, and Products, 6th Ed.”中的1.343给出了如下公式

$$
\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos kx = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\cos x/2}
$$

令$\alpha = (m+1)\varphi + \pi$, 则有

$$
\begin{aligned}
(m+1)I &= \sum_{k=0}^{n}[\cos(k+1)\alpha + \cos k\alpha] \\
&= \mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{n}[e^{i\alpha(k+1)} + e^{i\alpha k}] \right\} \\
&= \mathrm{Re}\frac{e^{i\alpha(n+2)} - e^{i\alpha} + e^{i\alpha(n+1)} - 1}{e^{i\alpha} - 1} \\
&= \frac{\mathrm{Re}[(e^{-i\alpha} - 1)(e^{i\alpha(n+2)} - e^{i\alpha} + e^{i\alpha(n+1)} - 1)]}{|e^{i\alpha} - 1|^2}
\end{aligned}
$$

最后一项的分母为实数，分子为(经过简单的计算后)

$$
\mathrm{Re}(e^{i\alpha n} - e^{i\alpha(n+2)} + e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = \cos n\alpha - \cos(n+2)\alpha = 0
$$

下面完成定理的证明。令p为任意的首一n次多项式，则p有表示

$$p = 2^{-n} U_n + a_{n-1} U_{n-1} + \cdots + a_0 U_0$$

从而根据前面的正交关系，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |p| dx \geqslant \int_{-1}^{1} p \,\mathrm{sign}\, U_n dx &= \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1} U_n \,\mathrm{sign}\, U_n dx \\ &= 2^{-n} \int_{-1}^{1} |U_n| dx\end{aligned}$$

$\square$

更紧致的误差估计

- 对于$[-1,1]$区间上的数值积分，如果数值积分的$n+1$个结点来自于U_{n+1}的零点，那么

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!2^n}$$

- 如果积分区间为$[a,b]$，那么相应的积分结点可以是$[-1,1]$区间中的仿射变换，即为

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(i+1)\pi}{n+2}, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

上机作业

对函数

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x \in [-1,1]$$

构造Lagrange插值多项式$p_L(x)$，插值节点取为:

$$1.\ x_i = 1 - \frac{2}{N}i,\ \ i = 0,1,\cdots,N$$

$$2.\ x_i = -\cos(\frac{i+1}{N+2}\pi),\ \ i = 0,1,\cdots,N$$

利用$\int_{-1}^{1} p_L(x)dx$计算积分$\int_{-1}^{1} f(x)dx$的近似值，并计算如下误差

$$|\int_{-1}^{1} p_L(x)dx - \int_{-1}^{1} f(x)dx|,$$

对$N = 5,10,15,20,25,30,35,40$比较以上两组节点的结果。

输出形式如下：

N	$\int_{-1}^{1} p_L(x)dx$	$\int_{-1}^{1} f(x)dx$	$\left\vert \int_{-1}^{1} p_L(x)dx - \int_{-1}^{1} f(x)dx \right\vert$
5			
10			
15			
20			
25			
30			
35			
40			

奇异积分的计算

- 主要考虑如下几类奇异积分
  1. 被积函数$f(x)$在某点具有有限跳跃，即存在$c \in [a, b]$, $f(c+) - f(c-)$为非零有限值
  2. 无界函数的积分
  3. 积分区间无界
- 上述函数的积分不能通过直接采用多项式插值逼近原函数，然后用多项式的积分代替被积函数的积分，因为插值误差的界是无限的

间断函数的积分

- 令c为间断点，那么

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

  此时可以在$[a,c-]$和$[c+,b]$上应用前面的数值积分公式，以得到$I(f)$的近似值
- 当在积分区间中具有有限个此类间断点时，可以类似处理
- 当间断点不预先知道时，需要对函数的图形进行分析，或者采用自适应积分的方法以确定间断点的存在

无界函数的积分

- 假设 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$ (当f在$x\to b-$时为无穷可类似处理; 如果是在区间内点为无界，那么可以从该内点把区间分开，再分开处理)
- 假设
$$f(x)=\frac{\phi(x)}{(x-a)^{\mu}},\quad 0\leqslant\mu<1$$
这里$\phi(x)$以M为界
- 那么
$$|I(f)|\leqslant M\lim_{t\to a+}\int_t^b\frac{1}{(x-a)^{\mu}}dx=M\frac{(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu}$$

计算方法

- 对于任意ε: $0<\varepsilon<b-a$, 积分可写为$I(f)=I_1+I_2$,

$$I_1=\int_a^{a+\varepsilon}\frac{\phi(x)}{(x-a)^\mu}dx,\qquad I_2=\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{\phi(x)}{(x-a)^\mu}dx$$

- I_2为正常的积分，按通常的数值积分公式计算
- 为了计算I_1, 把$\phi(x)$在$x=a$点进行Taylor展开：

$$\phi(x)=\Phi_p(x)+\frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)!}\phi^{(p+1)}(\xi_x),\quad p\geqslant 0$$

其中

$$\Phi_p(x)=\sum_{k=0}^{p}\frac{(x-a)^k}{k!}\phi^{(k)}(a)$$

- 从而有

$$
\begin{aligned}
I_1 =& \varepsilon^{1-\mu} \sum_{k=0}^{p} \frac{\varepsilon^k \phi^{(k)}(a)}{k!(k+1-\mu)} \\
&+ \frac{1}{(p+1)!} \int_a^{a+\varepsilon} (x-a)^{p+1-\mu} \phi^{(p+1)}(\xi_x) dx
\end{aligned}
$$

- 因此当用第一项(有限和)代替I_1时，对应的误差E_1有如下估计

$$
|E_1| \leqslant \frac{\varepsilon^{p+2-\mu}}{(p+1)!(p+2-\mu)} \max_{a \leqslant x \leqslant a+\varepsilon} |\phi^{(p+1)}(x)|
$$

- 对于固定的p, 右端项为ε的增函数。而当$\varepsilon < 1$，并且$\phi^{(p+1)}(x)$ 随着p的增加，变化不是很快时，那么右端项随着p增加而减小
- 实际应用时，在确定计算I_1和I_2的数值公式参数时，需要保证两者的误差几乎相当

无界区间

- 考虑积分

$$I(f) = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

- $I(f)$存在的一个充分条件是

$$\exists \rho > 0, \text{s.t.} \quad \lim_{x \to +\infty} x^{1+\rho} f(x) = 0$$

第一种方法

- 为了计算$I(f)$，把它分为两部分：$I(f)=I_1+I_2$，其中

$$I_1=\int_a^c f(x)dx, \qquad I_2=\int_c^\infty f(x)dx$$

  这里要选择恰当的c，使得I_2对整个积分的贡献可以被忽略。即如果希望数值计算出来的积分值与$I(f)$的误差不超过δ，那么要选择c使得$|I_2|\leqslant \delta/2$
- 作业：在计算积分

$$\int_0^\infty \cos^2(x)e^{-x}dx$$

  时为了使得误差不超过$\delta=10^{-3}$，那么c应取什么值？

第二种方法

- 把积分在$c>0$点分开，此时不需要保证第二个积分足够小
- 为了计算I_2, 引入变量代换$x=1/t$:

$$I_2=\int_c^{\infty} f(x)dx=\int_0^{1/c}\frac{f(1/t)}{t^2}dt:=\int_0^{1/c} g(t)dt$$

- 如果$g(t)$在区间$[0,1/c]$内连续，那么可以采用通常的数值积分方法；否则可以采用无界函数的积分方法

- 还有一种方法，需要用到正交多项式，放在Gauss积分一节中讲述

上机作业

- 分别编写用复化Simpson积分公式和复化梯形积分公式计算积分的通用程序
- 用如上程序计算积分

$$I(f) = \int_0^4 sin(x)dx$$

取节点$x_i, i = 0, \cdots, N$, N为$2^k, k = 1, \cdots, 12$,并分析误差

- 利用公式计算算法的收敛阶。

$$Ord = \frac{\ln(Error_{old}/Error_{now})}{\ln(N_{now}/N_{old})}$$

输出形式如下：

N	复化Simpson error	order	复化梯形error	order
2		−		−
4				
8				
16				
32				
64				
128				
256				
512				
1024				
2048				
4096				