

Numerical Analysis Homework4

Zhang Jiyao, PB20000204

2023 年 4 月 10 日

1 Introduction

编程实现用Richardson外推计算 $f'(x)$ 的值, $h = 1$. 函数 $f(x)$ 分别取

$$\ln x, x = 3, M = 3$$

$$\tan x, x = \sin^{-1}(0.8), M = 4$$

$$\sin(x^2 + \frac{1}{3}x), x = 0, M = 5$$

并计算如下的三角阵列

$$\begin{bmatrix} D(0,0) & & & & \\ D(1,0) & D(1,1) & & & \\ D(2,0) & D(2,1) & D(2,2) & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ D(M,0) & D(M,1) & D(M,2) & \dots & D(M,M) \end{bmatrix} \quad (1)$$

2 Method

我们采用执行 M 步的理查森外推算法:

1. 选取一个方便的 h 值(例如 $h = 1$)并且计算 $M + 1$ 个数

$$D(n, 0) = \varphi\left(\frac{h}{2^n}\right) \quad (0 \leq n \leq M)$$

2. 用下列公式计算

$$D(n, k) = \frac{4^k}{4^k - 1} D(n, k-1) - \frac{1}{4^k - 1} D(n-1, k-1)$$

这里

$$k = 1, 2, \dots, M, n = k, k+1, \dots, M.$$

3 Results

按照顺序,求得的导数值依次由下面三张表格所示

0.346574	0	0	0
0.336472	0.33105	0	0
0.334108	0.33332	0.333334	0
0.333526	0.333333	0.333333	0.333333

-1.30619	0	0	0	0
6.46534	9.05584	0	0	0
3.2091	2.12369	1.66154	0	0
2.87298	2.76094	2.80342	2.82155	0
2.8009	2.77688	2.77794	2.77753	2.77736

0.176784	0	0	0	0	0
0.321478	0.369709	0	0	0	0
0.332298	0.335904	0.333651	0	0	0
0.333196	0.333496	0.333335	0.33333	0	0
0.333307	0.333343	0.333333	0.333333	0.333333	0
0.333327	0.333334	0.333333	0.333333	0.333333	0.333333

4 Discussion

从得到的最终值,即 $D(M, M)$ 可以看出,所得到的近似导数值还是较为准确的.基本接近实际的导数值.并且所运行的步数 M 也没有太多.综上,Richardson外推法确实是一个性能优良的算法.

5 Computer Code

```
function [Dy,dy,n] =diffext1 (fun,x0,max)
h=1;j=1; n=1; jdW=1; xdW=1;
x1=x0+h;
x2=x0-h;
Dy(1,1)=(feval(fun,x1)-feval(fun,x2))/(2*h);

while(j<max)
    x1=x0+2^(-j)*h;
    x2=x0-2^(-j)*h;
    Dy(j+1,1)=(feval(fun,x1)-feval(fun,x2))/(2^(1-j)*h);
```

```

        for k=1:j
            Dy(j+1,k+1)=Dy(j+1,k)+(Dy(j+1,k)-Dy(j,k))/(4^k-1);
        end
        jdW=abs(Dy(j+1,j+1)-Dy(j+1,j));
        j=j+1;
    end

    [n,n]=size(Dy);
    dy=Dy(n,n);

    fun1=@(x)(log(x));
    x1=3;max1=4;

    D1=diffext1(fun1,x1,max1);

    fun2=@(x)(tan(x));
    x2=asin(0.8);max2=5;

    D2=diffext1(fun2,x2,max2);

    fun3=@(x)(sin(x^2+x/3));
    x3=0;max3=6;

    D3=diffext1(fun3,x3,max3);

    digits(6);

    disp(vpa(D1));
    disp(vpa(D2));
    disp(vpa(D3));

```