Numerical Analysis Homework6

Zhang Jiyao,PB20000204

2023 年 4 月 23 日

1 Introduction

利用复化梯形积分公式和复化3点Gauss积分公式计算积分的通用程序计算下列三个积分

$$I_1(f) = \int_0^1 e^{-x^2} dx \tag{1}$$

$$I2(f) = \int_0^4 \frac{1}{1+x^2} dx \tag{2}$$

$$I_3(f) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+cos(x)} dx \tag{3}$$

其中取节点$x_i, i = 0, ...N$,N为$2^k, k = 1, ..., 7$.并且给出误差估计以及计算收敛阶。

2 Method

对于复化梯形积分公式,对任意的区间$[a, b]$,以及等距节点x_k,我们有

$$T_n = \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)]$$

而对于复化三点Gauss积分公式,在区间$[-1, 1]$上我们有

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{5}{9} f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

那么对于一般的小区间$[x_i, x_{i+1}]$,可以通过坐标变换将其变为$[-1, 1]$。对一般的区间$[a, b]$我们有

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)\int_{-1}^1 f(\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)t)dt$$

$$= \frac{1}{18}(b-a)[5f(\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a)\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(\frac{1}{2}(a+b)) + 5f(\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\sqrt{\frac{3}{5}})]$$

那么我们仍然先取等距节点,然后在每个小区间上积分再对所有小区间求和即可。

3 Results

使用复化梯形得到的结果如下

*	$l_1(f)$		$l_2(f)$		$l_3(f)$	
N	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2	0.0155	0	0.1330	0	0.5612	0
4	0.00384	2.0088	0.0036	5.2097	0.0376	3.9000
8	0.00096	2.0022	5.6426e-04	2.6712	1.9279e-04	7.6073
16	0.00024	2.0006	1.4408e-04	1.9695	5.1226e-09	15.1998
32	5.9878e-05	2.0001	3.6038e-05	1.9993	4.4409e-16	23.4595
64	1.4969e-05	2.0000	9.0106e-06	1.9998	8.8818e-16	-1
128	3.7423e-06	2.0000	2.2527e-06	2.0000	8.8818e-16	0

使用Gauss积分公式得到的结果为

*	$l_1(f)$		$l_2(f)$		$l_3(f)$	
N	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2	3.6111e-08	0	1.2676e-04	0	0.0061	0
4	4.0215e-10	6.4885	1.2593e-04	0.0095	7.3833e-04	3.0504
8	5.7422e-12	6.1300	2.4580e-07	9.0009	4.3261e-06	7.4151
16	8.7708e-14	6.0328	2.0706e-12	16.8571	1.1502e-10	15.1988
32	1.3323e-15	6.0407	4.5741e-14	5.5004	3.5527e-15	14.9826
64	0	Inf	6.6613e-16	6.1015	4.4409e-16	3
128	2.2204e-16	-Inf	2.2204e-16	1.5850	9.3259e-15	-4.3923

4 Discussion

对于复化梯形积分公式得到的结果来说,前两个结果较稳定,收敛阶数基本控制在2左右,误差也不算太大。但第三个积分得到的结果虽然误差较小,但收敛阶数不太稳定。这可能与具体的函数性质有关,并且注意到在$N = 64$和$N = 128$时得到的结果是一样的。可能也和计算机计算的精度有关系。

而对于Gauss积分公式，就结果而言，得到的误差还是小于复化梯形公式的。但注意到Gauss积分公式的收敛阶数相当不稳定，往往具有较大的波动，但同时收敛速度也十分的快。以上就是Gauss积分公式的优点和缺点。

5 Computer Code

```
function Gauss=G(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
  sum=0;
```

```
 ga=sqrt(3/5);
  for k=1:n
      x=a+k*h;
      y=x-h;
      sum=sum+(5*f((x+y)/2-(x-y)*ga/2)+8*f((x+y)/2)+5*f((x+y)/2+(x-y)*ga/2))*(x-y)/18;
  end
Gauss=sum;
end

f=@(x)exp(-x*x);
g=@(x)(1/(1+x*x));
h=@(x)(1/(2+cos(x)));
f1=@(x)exp(-(0.5+0.5*x)*(0.5+0.5*x));

int11=zeros(7,1);
int12=zeros(7,1);
int13=zeros(7,1);
int21=zeros(7,1);
int22=zeros(7,1);
int23=zeros(7,1);
error11=zeros(7,1);
error12=zeros(7,1);
error13=zeros(7,1);
error21=zeros(7,1);
error22=zeros(7,1);
error23=zeros(7,1);
order11=zeros(7,1);
order12=zeros(7,1);
order13=zeros(7,1);
order21=zeros(7,1);
order22=zeros(7,1);
order23=zeros(7,1);

for k=1:7

    N=2^k;

    int11(k)=T(f,0,1,2^k);
    int12(k)=T(g,0,4,2^k);
    int13(k)=T(h,0,2*pi,2^k);
 int21(k)=G(f,0,1,2^k);
```

```
 int22(k)=G(g,0,4,2^k);
 int23(k)=G(h,0,2*pi,2^k);

    error11(k)=abs(0.5*sqrt(pi)*erf(1)-int11(k));
    error12(k)=abs(atan(4)-int12(k));
    error13(k)=abs(2*pi/(sqrt(3))-int13(k));
     error21(k)=abs(0.5*sqrt(pi)*erf(1)-int21(k));
    error22(k)=abs(atan(4)-int22(k));
    error23(k)=abs(2*pi/(sqrt(3))-int23(k));

    if(k>1)
      order11(k)=log(error11(k-1)/error11(k))/log(2);
      order12(k)=log(error12(k-1)/error12(k))/log(2);
      order13(k)=log(error13(k-1)/error13(k))/log(2);
      order21(k)=log(error21(k-1)/error21(k))/log(2);
      order22(k)=log(error22(k-1)/error22(k))/log(2);
      order23(k)=log(error23(k-1)/error23(k))/log(2);
    end

end
for k=1:7
    t=2^k;

    disp(["N is:" t]);
    disp(["l1:error of trapezium error is:" error11(k)]);
    disp(["l1:order of trapezium error is:" order11(k)]);
    disp(["l2:error of trapezium error is:" error12(k)]);
    disp(["l2:order of trapezium error is:" order12(k)]);
    disp(["l3:error of trapezium error is:" error13(k)]);
    disp(["l3:order of trapezium error is:" order13(k)]);
    disp(["1l:error of Gauss error is:" error21(k)]);
    disp(["1l:order of Gauss error is:" order21(k)]);
    disp(["12:error of Gauss error is:" error22(k)]);
    disp(["12:order of Gauss error is:" order22(k)]);
    disp(["13:error of Gauss error is:" error23(k)]);
    disp(["13:order of Gauss error is:" order23(k)]);
end


function Tn=T(f,a,b,n)
    h=(b-a)/n;
```

```
    sum=0;
    for k=1:n-1
        x=a+h*k;
        sum=sum+f(x);
    end

    format long

    Tn=(f(a)+2*sum+f(b))*h/2;
end
```