

《数值分析》之

数值积分

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

<https://faculty.ustc.edu.cn/yxu>

- Bernoulli多项式是由下列等式定义

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(t) = (n+1)t^n$$

- 最初的几个Bernoulli多项式是

$$B_0(t) = 1$$

$$B_1(t) = t - \frac{1}{2}$$

$$B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

$$B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$$

Bernoulli 多项式性质

- ① $B'_n = nB_{n-1}, (n \geq 1).$
- ② $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}, (n \geq 2).$
- ③ $B_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(0)t^{n-k}.$
- ④ $B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t).$

Theorem

函数 $G(t) = B_{2n}(t) - B_{2n}(0)$ 在开区间 $(0, 1)$ 中没有零点。

证明：有性质2和4，令 $t = 0$ 得到

$$B_n(0) = B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$$

从而有 $B_3(0) = B_5(0) = B_7(0) = \dots = 0$ 。

反证法。假设 $G(t)$ 在开区间 $(0, 1)$ 中有一个零点。

由 $G(0) = G(1) = 0$ ，由 Rolle 中值定理知 $G'(t)$ 在 $(0, 1)$ 中有 2 个零点。

$\therefore G'(t) = B'_{2n}(t) = 2nB_{2n-1}(t)$ ， $\implies B_{2n-1}(t)$ 在 $(0, 1)$ 中有 2 个零点。

又 $\because B_{2n-1}(0) = B_{2n-1}(1) = 0$ ，

$\implies B'_{2n-1}(t) = (2n-1)B_{2n-2}(t)$ 在 $(0, 1)$ 中有 3 个零点。

由此可知，对所有奇数指标 $k < 2n$ ， B_k 在 $(0, 1)$ 中至少有 2 个零点。

因此， B_3 除 0, 1 两个零点外，在 $(0, 1)$ 中还有 2 个零点。而 B_3 为三次多项式，这显然是不可能的。

Theorem

对于 $f \in C^{2m}[0, 1]$,

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{b_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)] + R$$

其中

$$b_k = B_k(0)$$

$$R = -\frac{b_{2m}}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi), \quad (0 < \xi < 1).$$