《数值分析》之

常微分方程数值方法

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

https://faculty.ustc.edu.cn/yxu

线性多步法的分析

- 本节余下部分讨论一般的线性多步法理论。
- 线性多步法的一般形式为

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y_{n-k} = h(b_k f_n + b_{k-1} f_{n-1} + \cdots + b_0 f_{n-k})$$

  - 这称为k步方法
  - 系数a_i, b_i已知
  - y_i表示解在x_i上的近似，$x_i = x_0 + ih$, f_i表示$f(x_i, y_i)$
  - 假定y_0, y_1, $\ldots$, y_{n-1}的值已知，采用上式计算y_n. 因此可以假定$a_k \neq 0$
  - 若$b_k = 0$, 方法称为**显式**的(explicit)，此时y_n可直接由上式简单计算出来
  - 若$b_k \neq 0$, 则右端项f_n中包含未知数y_n, 因此称为**隐式**(implicit) 方法

阶

- 微分方程数值解的精度在很大程度上是由使用的算法的**阶**确定的
- 阶表明方法所模拟的Taylor级数解中有多少项被考虑。
    - 例如，在Adams-Bashforth公式中，它之所以被称为五阶的，是因为它近似地产生与带有$h, \ldots, h^5$的Taylor级数方法相同的精度
    - 从而在利用Adams-Bashforth公式求解的每一步中误差都可以期望是$\mathcal{O}(h^6)$
- 下面的论述将把阶的概念变得更精确

- 定义线性泛函如下：

$$Ly = \sum_{i=0}^{k} \Big(a_i y(ih) - hb_i y'(ih) \Big)$$

这里为了简化记号，设$k = n$，并且第一个值是在$x = 0$，而不是$x = n - k$

- 上述泛函可作用到任何可微的函数y上。在下面的分析中，假定y是由$x = 0$的Taylor级数表示。利用y的Taylor级数，可以把L表示为下列形式：

$$Ly = d_0 y(0) + d_1 hy'(0) + d_2 h^2 y''(0) + \cdots$$

- 为了计算系数d_i，写出y和y'的Taylor级数：

$$y(ih) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ih)^j}{j!} y^{(j)}(0) \qquad y'(ih) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ih)^j}{j!} y^{(j+1)}(0)$$

- 然后代入到泛函L的定义式中，按h的幂次重新整理，得到d_i的值如下：

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \sum_{i=0}^{k} a_i \\
d_1 &= \sum_{i=0}^{k} (ia_i - b_i) \\
d_2 &= \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{2} i^2 a_i - ib_i\right) \\
&\ \vdots \\
d_j &= \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i^j}{j!} a_i - \frac{i^{j-1}}{(j-1)!} b_i\right), \quad j \geqslant 1
\end{aligned}
$$

线性多步法定理

Theorem

线性多步法的下列三个性质等价：

1. $d_0 = d_1 = \cdots = d_m = 0$
2. 对每个次数不超过m的多项式p有$Lp = 0$
3. 对一切$y \in C^{m+1}$, Ly是$\mathcal{O}(h^{m+1})$

证明：若性质1成立，则泛函为

$$Ly = d_{m+1} h^{m+1} y^{(m+1)}(0) + \cdots$$

而对于次数不超过m的多项式p, $p^{(j)}(0) = 0$, $j > m$。所以$Lp = 0$, 即性质2成立。

假设性质2成立。若$y \in C^{m+1}$, 则由Taylor定理，记$y = p + r$, 其中p是一个次数不超过m的多项式，函数r在0点的前m阶导数为零，从而

$$Ly = Lr = d_{m+1} h^{m+1} r^{(m+1)}(\xi) = \mathcal{O}(h^{m+1})$$

所以性质3成立。
最后，若性质3成立，则必定有$d_0 = d_1 = \cdots = d_m = 0$，即性质1成立。 $\square$

- 因此阶的严格定义是唯一使得

$$d_0 = d_1 = \cdots = d_m = 0 \neq d_{m+1}$$

成立的自然数m.

例

分析由下式确定的Milne方法的阶是多少？

$$y_n - y_{n-2} = \frac{1}{3}h(f_n + 4f_{n-1} + f_{n-2})$$

- $a_0 = -1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ b_0 = 1/3,\ b_1 = 4/3,\ b_2 = 1/3$
- 因此有

$$\begin{aligned} d_0 &= a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ d_1 &= -b_0 + (a_1 - b_1) + (2a_2 - b_2) = 0 \\ d_2 &= (a_1/2 - b_1) + (2a_2 - 2b_2) = 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} d_3 &= \left(\frac{1}{6}a_1 - \frac{1}{2}b_1\right) + \left(\frac{4}{3}a_2 - 2b_2\right) = 0 \\ d_4 &= \left(\frac{1}{24}a_1 - \frac{1}{6}b_1\right) + \left(\frac{2}{3}a_2 - \frac{4}{3}b_2\right) = 0 \\ d_5 &= \left(\frac{1}{120}a_1 - \frac{1}{24}b_1\right) + \left(\frac{4}{15}a_2 - \frac{2}{3}b_2\right) = -\frac{1}{90} \end{aligned}$$

所以方法是四阶的。

说明

- 如果其它特性不相上下的话，我们可能更喜欢高阶方法。
- 为了产生一个$2k$阶的k步方法，那么考虑下述$2k+1$个方程：
$$d_0 = d_1 = \cdots = d_{2k} = 0$$
这是一个有$2k+2$个未知数的$2k+1$个齐次线性方程构造的方程组，因此必定有非平凡解
- 1956年Dahlquist证明了对于$a_k \neq 0$存在一个解
- 但是多步法的首要特征是稳定性。Dahlquist证明了一个稳定k步法不能有大于$k+2$的阶

- 定义V表示所有无穷复数序列组成的集合，即V中元素具有形式
$$y = (y_1, y_2, y_3, \ldots), \quad y_i \in \mathbb{C}$$
实际上，y可以看作是正整数$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$上的复值函数。用$y_n$代替函数$y$在自变量$n$处的值$y(n)$只是为了方便。
- 在V中定义通常的加法和数乘，V就成为线性空间，这个空间是无限维的。
- 考虑线性算子$L : V \to V$, 其中最重要的一类就是移位算子，记为E, 定义为
$$Ey = (y_2, y_3, y_4, \ldots)$$
即$(Ey)_n = y_{n+1}$

线性差分算子

- 移位算子可以连续复合在一起，例如$(EEy)_n = y_{n+2}$，$(E^k y)_n = y_{n+k}$.
- 由E的幂次有限线性组合表示的线性算子，称为线性差分算子，它的形式为
$$L = \sum_{i=0}^{m} c_i E^i$$
其中E^0为恒等算子。
- V的所有线性差分算子构成从V到V的所有线性算子形成的空间的子空间，E的幂次就是这个空间的一组基。
- 此处我们主要研究线性差分方程$Ly = 0$的所有解。显然集合$\{y : Ly = 0\}$是V的一个线性子空间，称为L的零空间。当找到这个子空间的一组基后，我们就认为求解出了方程$Ly = 0$.

- L是E的一个多项式，记$L = p(E)$, 其中p是一个多项式，称为L的特征多项式，定义为

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} c_i \lambda^i$$

- 例：当$c_0 = 2$, $c_1 = -3$, $c_2 = 1$, 其它$c_i = 0$, 对应的线性差分方程为

$$(E^2 - 3E^1 + 2E^0)y = 0 \quad \text{或者}$$
$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0, \quad n \geqslant 1, \quad \text{或者}$$
$$p(E)y = 0, \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

- 很容易得到上述方程的解。实际上，可以任意选择y_1, y_2, 那用应用$y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n=0$就可以迭代确定后面的分量。例如

$$(1,0,-2,-6,-14,-30,\ldots)$$
$$(1,1,1,1,\ldots)$$
$$(2,4,8,16,\ldots)$$

其中第一个很难看出通项，而后两个解的形式为$y_n=\lambda^n$, $\lambda=1,2$. 而这两个数就是特征多项式的根
- 是否存在其它形式为λ^n的解呢？把$y_n=\lambda^n$代入$y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n=0$可得

$$\lambda^n(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

因此此类形式的其它解只可能是$(0,0,0,\ldots)$

- 实际上，由$u_n = 1$和$v_n = 2^n$定义的解形成了零空间的一组基。实际上，设y是任意解，下面求解常数α, β使得$y = \alpha u + \beta v$。这个等式即

$$y_n = \alpha u_n + \beta v_n$$

特别地，对于$n = 1, 2$, 有

$$y_1 = \alpha + 2\beta, \quad y_2 = \alpha + 4\beta$$

方程组有唯一解α, β. 对于其它的n:

$$\begin{aligned} y_n &= 3y_{n-1} - 2y_{n-2} \\ &= 3(\alpha u_{n-1} + \beta v_{n-1}) - 2(\alpha u_{n-2} + \beta v_{n-2}) \\ &= \alpha(3u_{n-1} - 2u_{n-2}) + \beta(3v_{n-1} - 2v_{n-2}) \\ &= \alpha u_n + \beta v_n \end{aligned}$$

Theorem (零空间定理)

若λ是多项式p的一个根，则$(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots)$是差分方程$p(E)y = 0$的一个解。若$p$的所有根为单根，则差分方程的每个解是这些特解的一个线性组合。

证明：若λ为任意复数，$u = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots)$，则有$(Eu)_n = \lambda u_n$，即$Eu = \lambda u$. 从而有$E^i u = \lambda^i u$. 由此可得

$$p(E)u = \left(\sum_{i=0}^{m} c_i E^i\right) u = \sum_{i=0}^{m} c_i (E^i u) = \sum_{i=0}^{m} c_i \lambda^i u = p(\lambda) u$$

所以若$p(\lambda) = 0$, 则有$p(E)u = 0$.

设多项式p的所有根λ_k都是单根，则对每个根λ_k, 差分方程$p(E)y=0$有一个解$u^{(k)}=(\lambda_k,\lambda_k^2,\lambda_k^3,\ldots)$. 设$y$是差分方程的任意解，下面把它表示成$y=\sum_{k=1}^m a_k u^{(k)}$. 实际上，取这级数的前$m$项，得到

$$y_i=\sum_{k=1}^m a_k\lambda_k^i,\qquad i=1,2,\ldots,m$$

方程组的系数阵为Vandermonde矩阵，因此可得到唯一的$a_1,\ldots,a_m$使得上式成立。令

$$z=y-\sum_{k=1}^m a_k u^{(k)}$$

那么有$p(E)z=0$，由此可得$z=0$. □

重根

- 若λ是p的一个k重根，那么下述序列是差分方程$p(E)y=0$的解：

$$
\begin{aligned}
y(\lambda) &= (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) \\
y'(\lambda) &= (1, 2\lambda, 3\lambda^2, \dots) \\
y''(\lambda) &= (0, 2, 6\lambda, \dots) \\
&\vdots \\
y^{(k-1)}(\lambda) &= \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)
\end{aligned}
$$

Theorem (零空间的基定理)

设p是一个多项式，并且$p(0)\neq 0$, 则可以得到$p(E)$的零空间一组基为：对于p的每个k重根λ, 有相应的k个解$y(\lambda)$, $y'(\lambda)$, $\dots$, $y^{(k-1)}(\lambda)$，其中$y(\lambda)=(\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\dots)$

例

求差分方程的通解

$$4y_n + 7y_{n-1} + 2y_{n-2} - y_{n-3} = 0$$

- $p(\lambda) = 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 2\lambda - 1 = (\lambda+1)^2(4\lambda - 1)$. p有一个二重根-1和单根$1/4$. 所以基解为

$$\begin{aligned} y(-1) &= (-1, 1, -1, 1, \ldots) \\ y'(-1) &= (1, -2, 3, -4, \ldots) \\ y(1/4) &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\right) \end{aligned}$$

从而通解为

$$\begin{aligned} y &= \alpha y(-1) + \beta y'(-1) + \gamma y(1/4) \\ &= \alpha(-1)^n + \beta n(-1)^{n-1} + \gamma(1/4)^n \end{aligned}$$

- 如果对于V中元素$y=(y_1, y_2, \ldots)$存在常数c使得对所有的n，有$|y_n| \leqslant c$，即
$$\sup_n |y_n| < \infty$$
则称y有界。
- 若形如$p(E)y = 0$的差分方程的解有界，则称此差分方程是稳定的。

Theorem

对于一个满足$p(0) \neq 0$的多项式p，下述条件是等价的：

1. 差分方程$p(E)y = 0$是稳定的
2. p的所有根满足$|z| \leqslant 1$，并且所有重根满足$|z| < 1$

线性多步法的理论分析

- 线性多步法的一般形式为

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y_{n-k} = h(b_k f_n + b_{k-1} f_{n-1} + \cdots + b_0 f_{n-k})$$

- 设想初值问题的数值解是由不同步长计算得到的，
用$y(h,x)$表示在步长h时得到的数值解。精确解记为$y(x)$。
线性多步法称为收敛的，是指对于区间$[x_0,x_m]$中的任意x，

$$\lim_{h\to 0} y(h,x) = y(x)$$

这里的前提条件就是初始值满足同样的定义，即

$$\lim_{h\to 0} y(h,x_0+nh) = y_0, \quad 0 \leqslant n < k$$

以及函数f满足基本的存在性定理的假设。

收敛性和相容性

- 线性多步法相应的两个多项式是

$$p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_0$$
$$q(z) = b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \cdots + b_0$$

- 若p的所有根位于圆盘$|z| \leqslant 1$中，而且模为1的根是单根，则方法是稳定的
- 若$p(1) = 0$, $p'(1) = q(1)$, 则方法是相容的

Theorem (线性多步法的稳定性和相容性定理)

线性多步法收敛的充要条件就是这个多步法是稳定的和相容的。

这个定理的必要性证明比较简单。充分性相当复杂，不给出。

若方法不稳定，则或者p有一个根λ满足$|\lambda| > 1$或者p有一个根λ满足$|\lambda| = 1$, 并且$p'(\lambda) = 0$.
考虑初值问题(其解为$y(x) \equiv 0$)：

$$\begin{cases} y' = 0, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

那么线性多步法是由等式

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y_{n-k} = 0$$

确定。这是一个线性差分方程，它的一个解是$y_n = h\lambda^n$, 其中λ就是p的一个根。若$|\lambda| > 1$, 则对所有$0 \leqslant n < k$, 我们有

$$|y(h, nh)| = h|\lambda^n| < h|\lambda|^k \to 0, \quad h \to 0$$

满足了前面的限制条件$\lim\limits_{h\to 0} y(h, x_0 + nh) = y_0$。

但是它违背收敛条件$\lim\limits_{h\to 0} y(h,x) = y(x)$，因为若$x = nh$，则$h = x/n$，并且

$$|y(h,x)| = |y(h,nh)| = x|\lambda|^n/n \to \infty$$

另外一方面，若$|\lambda| = 1$且$p'(\lambda) = 0$，则上述差分方程的一个解是$y_n = hn\lambda^n$。这时同样满足限制条件：

$$|y(h,nh)| = hn|\lambda|^n = hn < hk \to 0, \quad h \to 0, 0 \leqslant n < k$$

但违背收敛条件，因为

$$|y(h,x)| = (x/n)n|\lambda|^n = x \neq 0$$

- 考虑问题

$$\begin{cases} y' = 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

其精确解为$y \equiv 1$. 线性多步法仍然是

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y_{n-k} = 0$$

取$y_0 = y_1 = \cdots = y_{k-1} = 1$得到一个解，然后利用线性多步法得到后面的$y_k$值。因为方法收敛，所以$\lim_{n\to\infty} y_n = 1$. 把它代入到多步法的定义中，得到$a_k + a_{k-1} + \cdots + a_n = 0$, 即$p(1) = 0$.

- 再考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

其精确解为$y = x$. 多步法表示为

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y_{n-k} = h[b_k + b_{k-1} + \cdots + b_0]$$

由于方法收敛，从而是稳定的，因而$p(1) = 0$, $p'(1) \neq 0$. 下面验证$y_n = (n+k)h\gamma$, $\gamma = q(1)/p'(1)$给出上面非齐次差分方程的解，实际上，

$$\begin{aligned}
& h\gamma[a_k(n+k) + a_{k-1}(n+k-1) + \cdots + a_0 n] \\
= & nh\gamma(a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0) + h\gamma[ka_k + (k-1)a_{k-1} + \cdots + a_1] \\
= & nh\gamma p(1) + h\gamma p'(1) \\
= & h\gamma p'(1) = hq(1) = h(b_k + b_{k-1} + \cdots + b_0)
\end{aligned}$$

- 因为

$$\lim_{h\to 0}(n+k)h\gamma = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, k-1$$

所以这个数值解中的开始值与初值$y(0) = 0$相容。此时的收敛条件要求当$nh = x$时

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x$$

因此我们有

$$\lim_{n\to\infty}(n+k)h\gamma = x$$

而$\lim\limits_{n\to\infty} kh = 0$, 所以得到$\gamma = 1$即$p'(1) = q(1)$

$$y_n - y_{n-2} = \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n-1} + f_{n-2})$$

- 这是一个四阶的隐式方法，它由下述两个多项式来描述：

$$p(z) = z^2 - 1$$
$$q(z) = \frac{1}{3}z^2 + \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}$$

- p的根为$+1$和-1，都是单根，而且$p'(z) = 2z$，所以$p'(1) = 2 = q(1)$，从而相容性和稳定性条件满足，即Milne方法是收敛的。

- 目标是分析多步法中产生的局部截断误差，即假定在所有前面的值$y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots$是准确的假设下，利用给定的多步法得到y_n所产生的误差：$y(x_n) - y_n$. 这个误差是由差分方程近似微分方程而导致的。其中不包含舍入误差

Theorem (线性多步法的局部截断误差定理)

若多步法是m阶的，$y \in C^{m+2}$, 而且$\partial f/\partial y$连续，则

$$y(x_n) - y_n = \frac{d_{m+1}}{a_k} h^{m+1} y^{(m+1)}(x_{n-k}) + \mathcal{O}(h^{m+2})$$

其中系数d_k定义见第4节。

证明：只要证明$n=k$时的等式就可以了。利用第4节中定义的线性泛函L, 我们有

$$Ly=\sum_{i=0}^{k}\left(a_i y(x_i)-hb_i y'(x_i)\right)=\sum_{i=0}^{k}\left(a_i y(x_i)-hb_i f\left(x_i,y(x_i)\right)\right)$$

另一方面，数值解满足等式：

$$0=\sum_{i=0}^{k}\left(a_i y_i-hb_i f\left(x_i,y_i\right)\right)$$

因为我们已假定$y_i=y(x_i)$, $i<k$, 所以从上面两式相减得到

$$Ly=a_k(y(x_k)-y_k)-hb_k\left(f\left(x_k,y(x_k)\right)-f\left(x_k,y_k\right)\right)$$

对前一结果的最后一项应用中值定理，得到

$$\begin{aligned} Ly &= a_k(y(x_k) - y_k) - hb_k \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, \xi)(y(x_k) - y_k) \\ &= (a_k - hb_k F)(y(x_k) - y_k) \end{aligned}$$

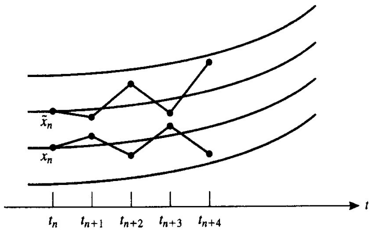
其中ξ位于$y(x_k)$和y_k之间，$F = \partial f(x_k, \xi)/\partial y$. 若使用的方法是$m$阶的，则

$$Ly = d_{m+1} h^{m+1} y^{(m+1)}(x_0) + \mathcal{O}(h^{m+2})$$

把上述两式组合起来，即证明了定理。这里略去了分母中的$hb_k F$. □

整体截断误差

- 目标是建立起微分方程数值求解中的整体截断误差界。
- 在求解过程中任何给定的x_n步上，设计算出来的解为y_n，它不同于真解$y(x_n)$，差$y(x_n)-y_n$就是整体截断误差。
- 整体截断误差不只是前面点上出现的所有局部截断误差之和。因为在求解过程中每一步必须使用前面步上计算的近似纵坐标作为初值，而纵坐标是有误差的，所以数值过程实际上试图跟踪的是错误的解曲线
- 因此我们需要了解改变初值对解曲线上后面纵坐标的影响。



- 考虑初值问题：
$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = s \end{cases}$$
这里$f_y = \partial f/\partial y$连续，并且在$0 \leqslant x \leqslant T$, $y \in \mathbb{R}$定义的区域内满足$f_y(x, y) \leqslant \lambda$.
- 解是x的函数，但也与初值s有关，所以记为$y(x; s)$. 定义$u(x) = \partial y(x; s)/\partial s$.
- 对初值问题中u关于s的微分可得到一个微分方程(称为变分方程)为
$$\begin{cases} u'(x) = f_y(x, y)u, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

例

在初值问题

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = s \end{cases}$$

中显式地求出u.

- 这里$f(x,y) = y^2$, $f_y = 2y$, 因此变分方程为

$$\begin{cases} u' = 2yu, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

- 初值问题的解是$y(x) = \dfrac{s}{1-sx}$，因此变分方程变为

$$\begin{cases} u'(x) = 2s(1-sx)^{-1}u(x), \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

其解为

$$u(x) = \frac{1}{(1-sx)^2}$$

Theorem

若$f_y \leqslant \lambda$, 则变分方程的解满足不等式

$$|u(x)| \leqslant e^{\lambda x}, \quad x \geqslant 0$$

证明：从变分方程得到

$$u'/u = f_y = \lambda - \alpha(x)$$

其中$\alpha(x) \geqslant 0$. 对上式进行积分，得到

$$\log|u| = \lambda x - \int_0^x \alpha(\tau)d\tau = \lambda x - A(x)$$

由于$A(x) \geqslant 0$, 所以$\log|u| \leqslant \lambda x$, 即$|u| \leqslant e^{\lambda x}$ □

Theorem

若初值问题用初值s和$s+\delta$求解，则解曲线在x上差别至多为$|\delta|e^{\lambda x}$

证明：根据u的定义，对变分方程采用中值定理，再根据变分方程定理，得到

$$
\begin{aligned}
&|y(x;s)-y(x;s+\delta)| \\
&=\left|\frac{\partial}{\partial s}y(x,s+\theta\delta)\right||\delta| \\
&=|u(x)|\cdot|\delta| \leqslant |\delta|e^{\lambda x}
\end{aligned}
$$

□

Theorem

若在$x_1, x_2, \ldots, x_n$上的局部截断误差在数量上不超过δ, 则在x_n上的整体截断误差不超过

$$\delta \frac{e^{n\lambda h}-1}{e^{\lambda h}-1}$$

证明：设在$x_1, x_2, \ldots$上数值解的局部截断误差为$\delta_1, \delta_2, \ldots$. 在计算$y_2$时初始条件有一个$\delta_1$的误差，由初值问题解曲线定理，在解曲线上这个误差在x_2的影响至多是$|\delta_1|e^{\lambda h}$. 把这个值加到x_2的截断误差上，因此x_2的整体截断误差至多为$|\delta_1|e^{\lambda h}+|\delta_2|$. 这个误差在$x_3$上的影响不大于$(|\delta_1|e^{\lambda h}+|\delta_2|)e^{\lambda h}$, 把这个值加到$x_3$的截断误差上。以这个方式继续下去，得到在$x_n$上的整体截断误差不大于

$$\sum_{k=1}^{n}|\delta_k|e^{(n-k)\lambda h} \leqslant \delta \sum_{k=0}^{n-1} e^{k\lambda h} = \delta \frac{e^{n\lambda h}-1}{e^{\lambda h}-1}$$

Theorem

若数值解中局部截断误差是$\mathcal{O}(h^{m+1})$, 则整体截断误差是$\mathcal{O}(h^m)$.

证明：在整体截断误差界定理中，设δ是$\mathcal{O}(h^{m+1})$。因为e^z-1是$\mathcal{O}(z)$, $nh=x$, 所以整体截断误差的阶减少一。 □