《数值分析》之

常微分方程数值方法

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

https://faculty.ustc.edu.cn/yxu

微分方程

- 微分方程是研究自然科学和社会科学中的事物、物体和现象运动、演化和变化规律的最为基本的数学理论和方法。
- 物理、化学、生物、工程、航空航天、医学、经济和金融领域中的许多原理和规律都可以描述成适当的常微分方程，如牛顿的运动定律、万有引力定律、机械能守恒定律，能量守恒定律、人口发展规律、生态种群竞争、疾病传染、遗传基因变异、股票的涨伏趋势、利率的浮动、市场均衡价格的变化等，对这些规律的描述、认识和分析就归结为对相应的常微分方程描述的数学模型的研究。
- 因此，微分方程的理论和方法不仅广泛应用于自然科学，而且越来越多的应用于社会科学的各个领域。
- 一般情况下，这些微分方程都需要用数值方法去求解。

初值问题

- 如下方程称为初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

其中y是x的未知函数

- 例：

$$\begin{cases} y' = y\tan(x+3) \\ y(-3) = 1 \end{cases}$$

要在一个包含初始点$x_0 = -3$的区间上确定$y(x)$. 这个方程的解析解是$y(x) = \sec(x+3)$. 由于$\sec x$在$x = \pm\pi/2$时变成无穷，因此解仅对$-\pi/2 < x+3 < \pi/2$成立

- 例子说明：对于初值问题，如果$f(x,y)$只在(x_0,y_0)的一个邻域内连续，那么解的存在区域肯定局限在这个邻域内。但是，即使$f(x,y)$是处处连续的，那么解的存在区域也可能是有限的.

存在性

- 例：

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. 直接性态分析: 解曲线从$x = 0$出发，斜率为1, 因此$y(x)$在$x = 0$时递增，所以$1 + y^2$也递增，所以我们可以期望$y(x)$有一个垂直渐近线
2. 实际上，方程的解析解为$y(x) = \tan x$, 所以在$x = \pi/2$处出现渐近线

存在性定理

Theorem (初值问题的第一存在性定理)

若f在中心为(x_0, y_0)的矩形

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant \alpha, |y - y_0| \leqslant \beta\}$$

内连续，则在$|x - x_0| \leqslant \min(\alpha, \beta/M)$内初值问题有解$y(x)$, 其中$M$是$|f(x, y)|$在矩形$R$内的最大值

讨论下述初值问题

$$\begin{cases} y' = (x + \sin y)^2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

解的存在区域

- $f(x,y) = (x + \sin y)^2$, $(x_0, y_0) = (0,3)$
- 在矩形
  $$\{(x,y) : |x - x_0| \leqslant \alpha, |y - y_0| \leqslant \beta\}$$
  内f满足
  $$|f(x,y)| \leqslant (\alpha + 1)^2 := M$$
- 所以该问题的解在整个实轴上存在，因为可以通过选择足够大的β, 使得$\min(\alpha, \beta/M)$为任意正数

- 在初值问题中，即使f为连续函数，那么也有可能出现多解的情形
- 例：

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

显然$y(x) \equiv 0$是这个问题的解，而$y(x) = x^3/27$也是一个解

- 因此我们需要对f再多做一些假设

Theorem (初值问题解的唯一性定理)

若$f(x,y)$和$\partial f(x,y)/\partial y$在矩形

$$R = \{(x,y) : |x - x_0| \leqslant \alpha, |y - y_0| \leqslant \beta\}$$

内连续，则初值问题在区间$|x - x_0| < \min(\alpha, \beta/M)$内有唯一解

第二存在性定理

Theorem (初值问题解的第二存在性定理)

若f在$a \leqslant x \leqslant b, -\infty < y < +\infty$内连续并且满足不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2| \tag{1}$$

则初值问题在区间$[a, b]$上有唯一解

- 不等式(1)称为关于第二个变量的Lipschitz条件。对于单变量函数，它简化为

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$$

这个条件比连续性更强，但它比可导弱些。因为可导肯定满足Lipschitz条件

例

证明函数

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i |x - w_i|$$

满足Lipschitz条件

- 容易验证有下述不等式：

$$\begin{aligned}
|g(x_1) - g(x_2)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} a_i |x_1 - w_i| - \sum_{i=1}^{n} a_i |x_2 - w_i| \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \big[|x_1 - w_i| - |x_2 - w_i| \big] \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i| \big| |x_1 - w_i| - |x_2 - w_i| \big| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot |x_1 - x_2|
\end{aligned}$$