Numerical Analysis Homework9

Zhang Jiyao,PB20000204

2023 年 5 月 12 日

1 Introduction

问题1

应用RKF45或RKF54方法，设计实现自适应方法，求解如下常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} y' = e^{yx} + cos(y - x) \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

初值步长取为$h = 0.01$，在自适应方法中步长的选取采用第二种策略。

在解溢出前终止，输出时输出解的范围；要求输入一个介于上述范围的值，应用简单的两点线性插值计算出对应的函数值。

问题2

初值问题

$$\begin{cases} x' = \frac{t-e^{-t}}{x+e^{x}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

该方程的真解由等式

$$x^2 - t^2 + 2e^x - 2e^{-t} = 0$$

隐式给出。

当$t = 1$时，数值求解等式$x^2 - t^2 + 2e^x - 2e^{-t} = 0$，将这一数值解作为参考的准确解。

利用Adams-Bashforth公式计算方程在$t = 1$的数值解，利用Runge-Kunta格式得到初值，取节点$x_i, i = 0, ..., N$，$N = 2^k$，$k = 3, ..., 8$，并给出误差表格。

2 Method

对于第一个问题，利用RKF54方法，我们有

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + \sum_{i=1}^{6} a_i F_i \\ &= y(x) + \frac{16}{135}F_1 + \frac{6656}{12825}F_3 + \frac{28561}{56430}F_4 - \frac{9}{50}F_5 + \frac{2}{55}F_6 \end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
F_1 &= hf(x,y)\\
F_2 &= hf(x+\frac{h}{4}, y+\frac{F_1}{4})\\
F_3 &= hf(x+\frac{3h}{8}, y+\frac{3F_1}{32}+\frac{9F_2}{32})\\
F_4 &= hf(x+\frac{12h}{13}, y+\frac{1932F_1}{2197}-\frac{7200F_2}{2197}+\frac{7296F_3}{2197})\\
F_5 &= hf(x+h, y+\frac{439F_1}{216}-8F_2+\frac{3680}{513}F_3-\frac{845F_4}{4104})\\
F_6 &= hf(x+\frac{h}{2}, y-\frac{8F_1}{27}+2F_2-\frac{3544}{2565}F_3+\frac{1859}{4104}F_4-\frac{11}{40}F_5)
\end{aligned}
$$

对于自适应算法选取步长，采用第二种策略:在每一步计算后，采用如下通用公式确定下一步的步长

$$h = 0.9h(\frac{\delta}{|e|})^{\frac{1}{1+p}}$$

p是Runge-Kutta方法中第一个公式的阶。

考虑局部截断误差:设v是在x_0+h上近似解的值，它是从x_0出发取长度为h的步长一步得到的；设u是在x_0+h上的另一种数值近似解，它是从x_0出发取长度为$\frac{h}{2}$步长进行两步计算得到的。u, v可以计算。

局部截断误差为:

$$Ch^5 = \frac{u-v}{1-2^{-4}} \approx u-v$$

对于问题2:

先利用五阶的Runge-Kunta公式得到y_1, y_2, y_3, y_4的值，然后启动公式，运用Adams-Bashforth公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}(1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4})$$

这里$f_i = f(x_i, y_i)$，因此可运用上述公式得到结果。

3 Results

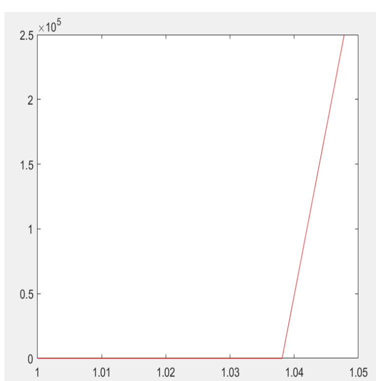

图 1: 问题1数值解的图像

N	误差	阶
8	0	NaN
16	0	NaN
32	0	NaN
64	0	NaN
128	0	NaN
256	0	NaN

4 Discussion

对于第一个问题，由图像可以看出得到的数值解y的增长速率是很大的，因此采用两点线性插值得到的误差应该会是很大的。

对于第二个问题，可以看到Adams-Bashforth公式的性能十分优良，得到的数值解甚至没有误差。

5 Computer Code

```
function [t,y,n]=RungeKutta(f,x0,y0)
h=0.01;
M=100;

t(1)=x0;
b(1)=x0;
y(:,1)=y0;
c(:,1)=y0;
for i=1:M


t(i+1)=t(i)+h;
k1=h*f(t(i),y(:,i));
k2=h*f(t(i)+h/4,y(:,i)+k1/4);
k3=h*f(t(i)+h*(3/8),y(:,i)+k1*(3/32)+k2*(9/32));
k4=h*f(t(i)+h*(12/13),y(:,i)+k1*(1932/2197)-k2*(7200/2197)+k3*(7296/2197));
k5=h*f(t(i)+h,y(:,i)+(439/216)*k1-8*k2+(3680/513)*k3-(845/4104)*k4);
k6=h*f(t(i)+h/2,y(:,i)-(8/27)*k1+2*k2-(3544/2565)*k3+(1859/4104)*k4-(11/40)*k5);

y(:,i+1)=y(:,i)+k1*(16/135)+k3*(6656/12825)+k4*(28561/56430)-k5*(9/50)+k6*(2/55);

l=h/2;
```

```
b(i+1)=t(i)+l;
d1=l*f(b(i),c(:,i));
d2=l*f(b(i)+l/4,c(:,i)+d1/4);
d3=l*f(b(i)+l*(3/8),c(:,i)+d1*(3/32)+d2*(9/32));
d4=l*f(b(i)+l*(12/13),c(:,i)+d1*(1932/2197)-d2*(7200/2197)+d3*(7296/2197));
d5=l*f(b(i)+l,c(:,i)+(439/216)*d1-8*d2+(3680/513)*d3-(845/4104)*d4);
d6=l*f(b(i)+l/2,c(:,i)-(8/27)*d1+2*d2-(3544/2565)*d3+(1859/4104)*d4-(11/40)*d5);

c(:,i)=c(:,i)+d1*(16/135)+d3*(6656/12825)+d4*(28561/56430)-d5*(9/50)+d6*(2/55);



d1=l*f(b(i+1),c(:,i));
d2=l*f(b(i+1)+l/4,c(:,i)+d1/4);
d3=l*f(b(i+1)+l*(3/8),c(:,i)+d1*(3/32)+d2*(9/32));
d4=l*f(b(i+1)+l*(12/13),c(:,i)+d1*(1932/2197)-d2*(7200/2197)+d3*(7296/2197));
d5=l*f(b(i+1)+l,c(:,i)+(439/216)*d1-8*d2+(3680/513)*d3-(845/4104)*d4);
d6=l*f(b(i+1)+l/2,c(:,i)-(8/27)*d1+2*d2-(3544/2565)*d3+(1859/4104)*d4-(11/40)*d5);

c(:,i+1)=c(:,i)+d1*(16/135)+d3*(6656/12825)+d4*(28561/56430)-d5*(9/50)+d6*(2/55);

h=0.9*h*(10^(-4)/(abs(y(:,i+1)-c(:,i+1))))^(1/6);

if(isnan(h))
    break;
end
end

function [t,y,n]=RungeKutta5(f,x0,y0,N)

h=1/2^N;
t(1)=x0;
b(1)=x0;
y(:,1)=y0;
c(:,1)=y0;
for i=1:4



t(i+1)=t(i)+h;
k1=h*f(t(i),y(:,i));
k2=h*f(t(i)+h/4,y(:,i)+k1/4);
k3=h*f(t(i)+h*(3/8),y(:,i)+k1*(3/32)+k2*(9/32));
```

```
k4=h*f(t(i)+h*(12/13),y(:,i)+k1*(1932/2197)-k2*(7200/2197)+k3*(7296/2197));
k5=h*f(t(i)+h,y(:,i)+(439/216)*k1-8*k2+(3680/513)*k3-(845/4104)*k4);
k6=h*f(t(i)+h/2,y(:,i)-(8/27)*k1+2*k2-(3544/2565)*k3+(1859/4104)*k4-(11/40)*k5);

y(:,i+1)=y(:,i)+k1*(16/135)+k3*(6656/12825)+k4*(28561/56430)-k5*(9/50)+k6*(2/55);

end

test=@(t,y)exp(y*t)+cos(y-t);

t0=1;
y0=3;
[t1,y1]=RungeKutta(test,t0,y0);

plot(t1,y1,'r');

 disp(["解的范围是:" [1,t1(5)]]);
 z0=input("输入一个范围内的数");

 b=3+(z0-1)*(y1(4)-3)/(t1(5)-1);

 disp(["对应的函数值为:" b] );

test=@(t,y)((t-exp(-t))/(y+exp(y)));

t0=0;
y0=0;
z0=zeros(1,6);
error=zeros(1,6);
order=zeros(1,5);
for k=3:8
h=1/2^k;
X=linspace(0,1,2^k+1);
[t1,y1]=RungeKutta5(test,t0,y0,k);

for n=6:2^k+1

y1(n)=y1(n-1)+h*(1901*test(t1(n-1),y1(n-1))-2774*test(t1(n-2),y1(n-2))+2616*test(t1(n-3),y1(n-3))
t1(n)=t1(n-1)+h;
end
z0(k-2)=y1(2^k+1);
error(k-2)=z0(k-2)+1;
```

```
end

for p=2:6
order(p-1)=log(error(p-1)/error(p))/log(2);
end
```