《数值分析》之

函数逼近

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

https://faculty.ustc.edu.cn/yxu

Newton插值

- Lagrange插值的缺点：无承袭性。增加一个节点，所有的基函数都要重新计算
- 承袭性：$N_{n+1}(x) = N_n(x) + q_{n+1}(x)$
  - $N_n(x)$是利用$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$插值得到的$n$阶多项式
  - $N_{n+1}(x)$是利用$\{x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}\}$插值得到的$n+1$阶多项式
  - 增加一个节点，仅需在原有n个节点的多项式基础上添加多项式$q_{n+1}(x)$

- 由$N_{n+1}(x_i) = N_n(x_i) = f(x_i), i = 0, \cdots, n$ 可知，$q_{n+1}(x)$有$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$这$n+1$个零点
  则有$q_{n+1}(x) = a_{n+1}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$,其中$a_{n+1}$为实数
- $N_n(x) = N_{n-1}(x) + q_n(x)$
  则有$q_n(x) = a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$,其中$a_n$为实数
- $N_1(x) = N_0(x) + q_1(x)$
  则有$q_1(x) = a_1(x-x_0)$,其中a_1为实数

Newton插值多项式

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$
\begin{aligned}
N_n(x_0) &= a_0 = f(x_0), \\
N_n(x_1) &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1), \\
N_n(x_2) &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2), \\
&\cdots \\
N_n(x_n) &= a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1}) = f(x_n)
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f(x_0), \\
a_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
a_2 &= \frac{1}{x_2 - x_1}\left(\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - a_1\right) \\
a_3 &= \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}\frac{1}{x_3 - x_1} - a_2\right)
\end{aligned}
$$

差商定义

定义

- 一阶差商

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- k阶差商
  设$\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$互不相同，$f(x)$关于$\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$的$k$阶插商为

$$f[x_0, x_1 \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, \cdots, x_k] - f[x_0, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

差商算法

$$
\begin{array}{ll|llll}
x_0 & f(x_0) & & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] & & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\
\cdots & & & & \\
x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & f[x_0, x_1, \cdots, x_n]
\end{array}
$$

例

x	5	-7	-6	0
$f(x)$	1	-23	-54	-954

结点为$5, -7, -6, 0$，

$$
\begin{array}{rr|rrr}
5 & 1 & & & \\
-7 & -23 & 2 & & \\
-6 & -54 & -31 & 3 & \\
0 & -954 & -150 & -17 & 4
\end{array}
$$

$c_0 = 1,\ c_1 = 2,\ c_2 = 3,\ c_3 = 4,$ 所以插值多项式为

$$p_3(x) = 1 + 2(x-5) + 3(x-5)(x+7) + 4(x-5)(x+7)(x+6)$$

Newton插值多项式的表示

Newton插值多项式表示为

$N_n(x) =$
$f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f(x_0), \\
a_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] \\
a_2 &= \frac{1}{x_2 - x_1}\left(\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - a_1\right) \\
&= \frac{1}{x_2 - x_1}(f[x_2, x_0] - f[x_1, x_0]) = f[x_0, x_1, x_2] \\
&\cdots \\
a_n &= f[x_0, x_1, \cdots, x_n]
\end{aligned}
$$

n 阶差商

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

对角线元素即为Newton插值的系数

算法

- 计算Newton多项式的值

```
for(i=1;i<=n;i++) !计算差商表
{
    for(j=n;j>=i;j--)
        y[j]=(y[j]-y[j-1])/(x[j]-x[j-i]);
}

fx=y[n]; !求Newton多项式的值
for(i=n;i>=1;i--)
{
    fx=y[i-1]+(x-x[i-1])fx;
}
```

差商性质

- k阶差商$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$可由$f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_k)$的线性表示
  - 由多项式插值的唯一性，知$N_k(x)=L_k(x)$.
  - x^k的系数相同
  - $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$
- 对称性：若$i_0,i_1,\cdots,i_k$为$0,1,\cdots,k$的任意排列，则有

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_k}]$$

- 若$f(x)$为m次多项式，则$f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x]$为$m-k$次多项式。
- 函数差商与函数导数的关系

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)$$

Newton插值多项式的误差

多项式插值误差定理对于Newton插值多项式同样成立，故有对$[a, b]$中每个x，都有$\xi_x \in (a, b)$使得

$$f(x) - N_n(x) = R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

而

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1 \cdots, x_n] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

故有

$$f[x, x_0, x_1 \cdots, x_n] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

上机作业2

对函数

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x \in [-1, 1]$$

构造牛顿插值多项式$p_N(x)$，插值节点取为:

1. $x_i = 1 - \frac{2}{N}i,\ \ i = 0, 1, \cdots, N$
2. $x_i = -\cos(\frac{2i+1}{2N+2}\pi),\ \ i = 0, 1, \cdots, N \quad$ (Chebyshev point)

并计算如下误差

$$\max_i \{|f(y_i) - p(y_i)|,\ y_i = \frac{i}{50} - 1,\ i = 0, 1, \cdots, 100\}$$

对$N = 5, 10, 20, 40$比较以上两组节点的结果，并在一张图中画出$N = 20$时$f(x)$数值计算结果。

输出形式如下：

N=5

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

N=10

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

N=20

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

N=40

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXX

Newton形式与差商的推广

- 为了简化记号，把插值结点重记为$t_0, \ldots, t_m$，其中$t_0 = t_1 = \cdots = t_{k_1-1} = x_0$，…
- 记f在结点$t_0, t_1, \ldots, t_m$上次数不超过m的插值多项式的x^m项系数为$f[t_0, \ldots, t_m]$.

Theorem (Newton插值多项式定理)

满足插值条件的多项式可以写为

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i)$$

证明：归纳法。 □

高阶差商的性质

- 差商是结点的对称函数
- $f[x_0,\ldots,x_0]=f^{(n)}(x_0)/n!$
- 设$x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n$,

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\begin{cases}\frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_n]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0} & x_n\neq x_0\\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} & x_n=x_0\end{cases}$$

- 消去性质：$f[x_0,\ldots,x_n]=\{(x-x_{n+1})f(x)\}[x_0,\ldots,x_n,x_{n+1}]$
- Leibnitz法则:

$$(fg)[x_0,\ldots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}f[x_0,\ldots,x_k]g[x_k,\ldots,x_n]$$

用Newton方法确定一个多项式，满足

$$p(1) = 2, p'(1) = 3, p(2) = 6, p'(2) = 7, p''(2) = 8$$

解：

已知信息

$$\begin{array}{cc|cccc}
1 & 2 & 3 & ? & ? & ? \\
1 & 2 & ? & ? & ? & \\
2 & 6 & 7 & 4 & & \\
2 & 6 & & & & \\
2 & 6 & & & &
\end{array}$$

用Newton方法确定一个多项式，满足

$$p(1)=2, p'(1)=3, p(2)=6, p'(2)=7, p''(2)=8$$

解：

新信息的计算

1	2				
1	2	3			
2	6	4	1		
2	6	7	3	2	
2	6	7	4	1	-1

从而所求多项式为

$$p(x)=2+3(x-1)+(x-1)^2+2(x-1)^2(x-2)-(x-1)^2(x-2)^2$$

例1 给定f在x_0和x_1上的函数值和一阶导数值(共四个条件)，要求一个三次多项式$p(x)$, 在给定结点上与给定信息吻合。

待定

$$p(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^2(x - x_1)$$

则可知

$$\begin{aligned} a &= f(x_0) \\ b &= f'(x_0) \\ a + b(x_1 - x_0) + c(x_1 - x_0)^2 &= f(x_1) \\ b + 2c(x_1 - x_0) + d(x_1 - x_0)^2 &= f'(x_1) \end{aligned}$$

因此插值多项式存在唯一。

例2 求一多项式p，使得$p(0)=0$, $p(1)=1$, $p'(1/2)=2$.
由于给定了三个条件，因此试用二次多项式：$p(x)=a+bx+cx^2$. 由$p(0)=0 \Longrightarrow a=0$. 而另外两个条件有

$$\begin{aligned} 1 &= p(1) = b+c \\ 2 &= p'(1/2) = b+c \end{aligned}$$

因此不存在二次多项式满足插值条件。因此考虑三次多项式，$p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$. 此时解不唯一：$d=-4$, $b+c=5$, $a=0$.

Hermite 插值问题

Hermite插值指的是对一个函数在一组结点上的函数值和导数值进行插值。
给定函数f以及结点$x_0, \ldots, x_n$，求多项式p:

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = 0, 1, i = 0, \ldots, n$$

- 多项式插值空间的维数，
- 共有2(n+1)个条件
- 多项式最高次数为2n+1

Hermite 插值问题（续）

$$H(x)=\sum_{i=0}^{n}h_i(x)f(x_i)+\sum_{i=0}^{n}g_i(x)f'(x_i)$$

问题变为求解插值基函数$\{h_i(x)\}_i^n$, $\{g_i(x)\}_i^n\in P^{2n+1}(x)$,满足

$$\begin{cases} h_i(x_j)=\delta_{ij} \\ h_i'(x_j)=0 \end{cases},\quad \begin{cases} g_i(x_j)=0 \\ g_i'(x_j)=\delta_{ij} \end{cases},$$

	h_0	$\cdots$	h_n	g_0	$\cdots$	g_n
x_0	1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	0	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0
x_0'	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n'	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	1

Hermite 插值基函数

$$h_i(x) = \left(1 - 2(x - x_i)\sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j}\right)\ell_i^2(x)$$

$$g_i(x) = (x - x_i)\ell_i^2(x)$$

当取2个节点时的Hermite插值多项式基函数为

$$h_0(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$h_1(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

$$g_0(x) = (x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$g_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

例 给定$f(-1)=0$, $f(1)=4$, $f'(-1)=2$, $f'(1)=0$,
求Hermite插值多项式，并计算$f(0.5)$
解：

$$H_3(x)=h_0(x)\cdot 0+h_1(x)\cdot 4+g_0(x)\cdot 2+g_1(x)\cdot 0$$

只需计算$h_1(x)$和$g_0(x)$

$$h_1(x)=\left(1-2\frac{x-1}{1+1}\right)\left(\frac{x+1}{1+1}\right)^2=\frac{1}{4}(2-x)(x+1)^2$$

$$g_0(x)=(x+1)\left(\frac{x-1}{-1-1}\right)^2=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)^2$$

$$H_3(x)=(2-x)(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)(x-1)^2$$

$$H_3(0.5)=3.5625$$

Theorem (Hermite插值误差估计定理)

若$f \in C^{2n+2}[a,b]$，$[a,b]$内的插值结点为$x_0,\ldots,x_n$，$p(x)$为相应的$Hermite$插值多项式，$\deg p \leqslant 2n+1$，则对于任意$x \in [a,b]$，存在$\xi_x \in (a,b)$使得

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$$

证明方法与无重结点的多项式插值误差估计定理完全类似。

Hermite 插值问题推广

给定函数f以及结点$x_0, \ldots, x_n$，求多项式p:

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = 0, \ldots, k_i - 1, i = 0, \ldots, n$$

Theorem (Hermite插值定理)

存在唯一的次数不超过$m = k_0 + \cdots + k_n - 1$的多项式满足上述插值条件。

证明：通过在幂基$\{1, x, \ldots, x^m\}$下待定多项式的系数，得到一个线性方程组$Au = b$, 其中A为$(m+1) \times (m+1)$阶矩阵(称为广义Vandermonde矩阵). 为证其有唯一解，只要证$Au = 0$仅有零解，即满足$p^{(j)}(x_i) = 0$的次数不超过m的多项式只能是零多项式。这可以通过统计p的零点数得证。 $\square$