Numerical Analysis Homework3

Zhang Jiyao,PB20000204

2023 年 4 月 10 日

1 Introduction

对函数

$$f(x) = e^x, x \in [0.1]$$

构造等距节点的样条插值函数,对以下两种类型的样条函数

(1):一次分片线性样条

(2):满足$S'(0) = 1$,$S'(1) = e$的三次样条

并计算如下误差

$$max_i\{\left|f(x_{i-\frac{1}{2}}) - S(x_{i-\frac{1}{2}})\right|, i = 1, ..., N\}$$

说明:其中$x_{i-\frac{1}{2}}$是每个小区间的中点.对$N = 5, 10, 20, 40$比较以上两组节点的结果。并且计算该算法的收敛阶,公式如下

$$Ord = \frac{ln(\frac{Error_{old}}{Error_{now}})}{ln(\frac{N_{now}}{N_{old}})}$$

2 Method

先讨论第一种一次分片线性样条的情况,该情况下比较简单。因为构造的一次分片线性样条在每个区间上面都是线性函数,那么只需要根据每个区间两侧端点的值,构造对应区间上的线性函数即可。为了计算一点的值,只需要利用以下公式即可

$$y = \frac{x - x_0(i+1)}{x_0(i) - x_0(i+1)} y_0(i) + \frac{x - x_0(i)}{x_0(i+1) - x_0(i)} y_0(i+1)$$

说明:x是待求节点,y是待求值,$x_0(i)$是第i个区间的左端点,$y_0(i)$是其对应的值

接下来讨论三次样条的情况。因为三次样条本身已经确定了$4n-2$个自由度,只需要给出边界的两个自由度。而本题中$S'(0) = 1$,$S'(1) = e$满足要求。记$M_i = S''(x_i)$,则我们可以给出M_i满足的线性方程组

$$
\begin{bmatrix}
u_1 & h_1 & & & \\
h_1 & u_2 & h_2 & & \\
 & h_2 & u_3 & h_3 & \\
 & \cdots & \cdots & & \\
 & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\
 & & h_{n-2} & u_{n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \cdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1}
\end{bmatrix}
\tag{1}
$$

然后我们采用追赶法解这个线性方程组。

其中$h_i = x_{i+1} - x_i$,$u_i = 2(h_i + h_{i+1})$,$b_i = 6\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$,$v_i = b_i - b_{i-1}$,再结合边界条件$S'(0) = 1$,$S'(1) = e$即可得出结论。

接下来讨论计算样条函数在某一确定点处的值。先确定x是在哪个区间中,比如说是$[x_i, x_{i+1}]$中,那么重写$S_i(x)$的表达式为

$$S_i(x) = y_i + (x - t_i)[C_i + (x - t_i)[B_i + (x - t_i)A_i]]$$

其中,$A_i = \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i}$,$B_i = \frac{M_i}{2}$,$C_i = -\frac{h_i M_{i+1}}{6} - \frac{h_i M_i}{3} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$

3 Results

n	Method (1) error	order	Method (2) error	order
5	0.0123	——	1.0907e-05	——
10	0.0032	1.9288	6.9559e-07	3.9709
20	8.2853e-04	1.9642	4.3871e-08	3.9869
40	2.0973e-04	1.9820	2.7538e-09	3.9938

4 Discussion

观察数据可知，两种方法都有随着N越来越大,误差减小，收敛阶增大的趋势。

首先单独讨论。第一种方法的误差相对较大,在$N = 5$时误差已经达到了0.01,可见分片线性样条并不是一个优秀的插值函数。并且观察到N从20变到40时,误差反而增大,这说明这种算法不够稳定,可能在某些节点处会有较大的误差。

相比之下，第二种方法的误差就小了很多,误差最大也不过$1e - 5$量级.并且误差随着N的增大越来越小，较为稳定。

两者之间对比的话，无论误差还是收敛阶,第二种方法都完胜第一种。综上我们可以认为三次样条插值是更好的算法。

5 Computer Code