《数值分析》误差简介

徐岩

中国科学技术大学数学科学学院

yxu@ustc.edu.cn

https://faculty.ustc.edu.cn/yxu

内容

- 误差和有效数字
- 约束误差
- 一些例子

误差

- x^*：精确值
- x：近似值

绝对误差

- 绝对误差 = 精确值 − 近似值 = $x^* - x$
- 绝对误差可正可负

相对误差

- 相对误差 $= \dfrac{\text{绝对误差}}{\text{精确值}} = \dfrac{x^* - x}{x^*}$
- 相对误差 $= \dfrac{\text{绝对误差}}{\text{近似值}} = \dfrac{x^* - x}{x}$

误差的来源

- 原始误差：模型误差（忽略次要因素，如空气阻力）和原始数据误差
  - 数学模型的误差
  - 物理模型的误差
- 舍入误差：计算误差，计算机仅能表示表示有限位数据引起

- 截断误差：方法误差，算法本身引起
  - $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$，在实际计算中，常常使用有限项近似无穷项

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

被舍弃的余项

$$(-1)^k\frac{x^{k+1}}{(k+1)(1+\theta x)^{k+1}},0<\theta<1$$

即为截断误差。

误差的运算

- 加减

$$(x^* \pm y^*) - (x \pm y) = e_x \pm e_y$$

$$\frac{e_x \pm e_y}{x^* \pm y^*} \quad \text{两相近数相减，相对误差增大}$$

- 相乘

$$\begin{aligned}(x^* \cdot y^*) - (x \cdot y) &= x^*(y * - y) + y(x^* - x) = ye_x + x^* e_y \\ &= \max\{|x^*|, |y|\}(|e_x| + |e_y|)\end{aligned}$$

- 相除

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^*}{y^*} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{x^* y - y^* x}{yy^*}\right| = \left|\frac{-x^*(y^* - y) + y(x^* - x)}{yy^*}\right| \\ &= \left|\frac{-x^* e_y + ye_x}{yy^*}\right| \quad \text{小数作除数，绝对误差增大}\end{aligned}$$

有效位数

定义： 当x的误差为某一位的半个单位，则这一位到第一个非零的位数称为x的有效位数。

- 有效位的多少直接影响到近似值的绝对误差和相对误差
- 3.28和0.00587均有3位有效数字
- 4.0和4.000分别有2位和4位有效数字

误差控制

- 选择收敛稳定的数值方法
- 提高数值计算的精度：单精度、双精度
- 避免2个非常接近的数相减
- 多个数求和时，从小数加到大数

一些例子

例

在计算机中求函数$f(x) = 1 - \cos(x)$在x接近0点的值。
$\cos(x) \simeq 1$当x接近0点时，此时如果用此公式直接计算，很容易在0点附近失去精度。如果采用如下公式，

$$1 - \cos(x) = \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{1 + \cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}$$

则可以避免这样的问题

例

在计算机中求函数$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$在x取比较大的值.

$$\begin{aligned} f(12345) &= \sqrt{12346}-\sqrt{12345} \\ &= 111.113-111.108 \\ &= 0.005 \end{aligned}$$

但实际上，$f(12345)=0.0045000326262775 1.$

例

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

应该用下面的方式来计算

$$s_n = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$$

例

$$A_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$$

我们有

$$A_n + 5A_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1}}{x+5} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$$

构造方法如下

1. $A_n = \frac{1}{n} - 5A_{n-1}$, $A_0 = ln\frac{6}{5}$,记作$\hat{A}_n$
2. $A_{n-1} = \frac{1}{5}(\frac{1}{n} - A_n)$, $A_8 = 0.019$,记作$\tilde{A}_n$

一些例子

n	A_n	$\hat{A}_n$	$\tilde{A}_n$
0	0.182	0.182	0.182
1	0.088	0.090	0.088
2	0.058	0.050	0.058
3	0.0431	0.083	0.0431
4	0.0343	-0.165	0.0343
5	0.0284	1.025	0.0284
6	0.024	-4.958	0.024
7	0.021	24.933	0.021

- 对格式1，如果前一步有误差，则被放大5倍加到后一步
- 这样的格式称为不稳定格式。

上机作业

级数计算[Hamming (1962)]

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+x)}$$

x取值$x = 0.0, 0.1, 0.2, \cdots, 1.0, 10.0, 20.0, \cdots, 300.0$共41个值，要求误差小于$10^{-6}$，并给出相应的$k$的取值上界（找到满足条件的最小的$k$）。

输出格式：三列：

x, $\varphi(x)$, k