Numerical Analysis Homework8

Zhang Jiyao,PB20000204

2023 年 4 月 28 日

1 Introduction

利用四阶龙格-库塔方法和各种λ的值，譬如，$\lambda = 5, -5, -10$，数值求解下列初值问题:

$$\begin{cases} x' = \lambda x + \mathrm{cost} - \lambda \mathrm{sint} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

并且在区间$[0, 5]$上比较数值解和解析解，利用步长$h = 0.01$，并考虑λ对数值的准确性有什么影响。

2 Method

首先我们可以直接求出方程的解析解。通过观察不难发现$x(t) = sint$是方程的一个解，且满足初值条件。

下面用四阶龙格-库塔方法求解数值解。

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

其中有

$$\begin{cases} F_1 = hf(t, x) \\ F_2 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1) \\ F_3 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_2) \\ F_4 = hf(t + h, x + F_3) \end{cases}$$

3 Results

把数值解和解析解画在一个坐标系内，比较它们的图像

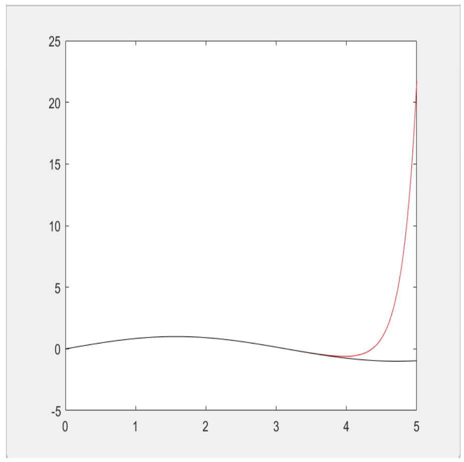

图 1: 当λ=5时的图像

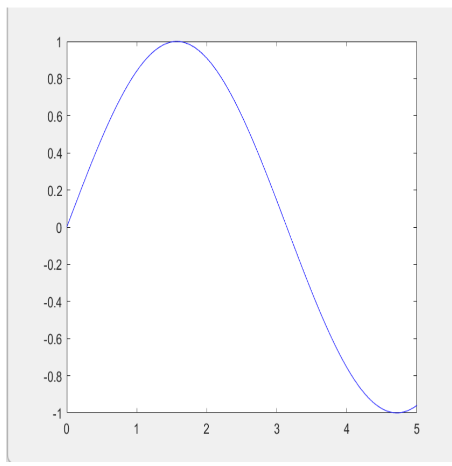

图 2: 当λ=-5时的图像

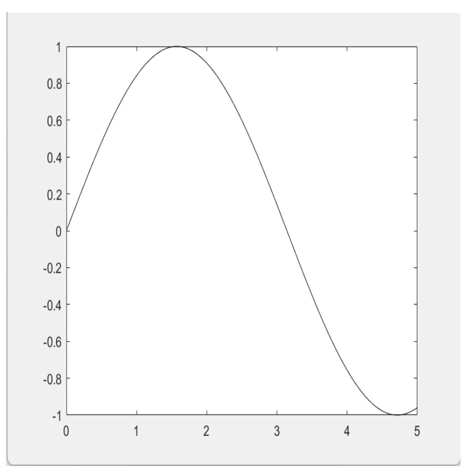

图 3: 当λ=-10时的图像

4 Discussion

观察结果可以发现，当$\lambda = -5$或$\lambda = -10$时，数值解与解析解结果的差距很小，从图像上是基本看不出来的。通过数值计算发现误差一般在1e-8量级左右。考虑到四阶龙格-库塔方法的误差是$O(h^5)$，这个结果也是合理的。

当$\lambda = 5$时，数值解与解析解差距较大。猜想这可能与λ的符号有关。因为$\lambda > 0$时，对很大的x，总有$x > \mathrm{sinx}$，所以x'基本都大于0，因此采用龙格-库塔方法计算带来的误差较大。

5 Computer Code

```
function [t,y,n]=Runge(f,tspan,y0)
h=0.01;
t0=tspan(1);
tn=tspan(2);

n=floor((tn-t0)/h);
t(1)=t0;
y(:,1)=y0;
for i=1:n
t(i+1)=t(i)+h;
k1=f(t(i),y(:,i));
k2=f(t(i)+h/2,y(:,i)+h*k1/2);
k3=f(t(i)+h/2,y(:,i)+h*k2/2);
k4=f(t(i)+h,y(:,i)+h*k3);
y(:,i+1)=y(:,i)+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;

end

test1=@(t,y)(5*y+cos(t)-5*sin(t));
test2=@(t,y)(-5*y+cos(t)+5*sin(t));
test3=@(t,y)(-10*y+cos(t)+10*sin(t));
tspan=[0 5];
y0=0;

[t1,y1]=Runge(test1,tspan,y0);
[t2,y2]=Runge(test2,tspan,y0);
[t3,y3]=Runge(test3,tspan,y0);
error1=zeros(501,1);
error2=zeros(501,1);
error3=zeros(501,1);

for i=1:501
```

```
    error1(i)=abs(y1(i)-sin(t1(i)));
    error2(i)=abs(y2(i)-sin(t2(i)));
    error3(i)=abs(y3(i)-sin(t3(i)));
    t4(i)=t1(i);
    y4(i)=sin(t1(i));
end
figure(1);
plot(t1,y1,'r',t4,y4,'k');
figure(2);
plot(t2,y2,'r',t4,y4,'b');
figure(3);
plot(t3,y3,'r',t4,y4,'k');
```