

凸优化的内点算法

兰 桂 林

中国科学技术大学

2023 年 6 月 6 日

Outline

- 1 Interior-Point Method
 - Barrier Method
 - Primal-Dual Method

- 2 作业要求

Outline

- 1 Interior-Point Method
 - Barrier Method
 - Primal-Dual Method

- 2 作业要求

- 主要见杨老师 pptP286-308
- 用对数屏障函数近似约束
- 近似后问题的解与原问题的解的差随着 t 的增大趋近于零

算法流程

- 两重循环，内循环为牛顿迭代。
- 初始点必须为严格可行的内点，不显然时可以用两阶段法先找到内点。

Algorithm: *Barrier method*

given strictly feasible x , $t := t^{(0)} > 0$, $\gamma > 1$, tolerance $\epsilon > 0$.

repeat

- ① *Centering step.* Starting at x , compute $x^*(t)$ by minimizing $tf_0(x) + \phi(x)$, subject to $Ax = b$.
- ② *Update.* $x := x^*(t)$
- ③ *Stopping criterion.* **quit** if $m/t < \epsilon$.
- ④ *Increase t .* Let $t := \gamma t$.

算法流程

Algorithm: *Newton's method for equality constrained minimization.*

given starting point $x \in \text{dom } f$ with $Ax = b$, tolerance $\epsilon > 0$.

repeat

- ① Compute the Newton step $\delta_{x_{nt}}$ and the decrement $\kappa(x)$.
- ② *Stopping criterion.* **quit** if $\kappa^2/2 \leq \epsilon$.
- ③ *Line search.* Choose step size α by backtracking line search.
- ④ *Update.* $x := x + \alpha\delta_{x_{nt}}$.

- 用牛顿迭代求解扰动 KKT 条件

算法流程

Algorithm: *Primal-dual interior-point method.*

given x that satisfies

$$f_1(x) < 0, \dots, f_m(x) < 0, \lambda > 0, \gamma > 1, \epsilon_{\text{feas}} > 0, \epsilon > 0$$

repeat

- ① *Determine t .* Set $t := \gamma(m/\hat{\eta})$.
- ② *Compute primal-dual search direction $\delta_{y_{pd}}$.*
- ③ *Line search and update.* Determine step length $\alpha > 0$ and set $y := y + \alpha \delta_{y_{pd}}$.

until $\|r_{\text{pri}}\|_2 \leq \epsilon_{\text{feas}}, \|r_{\text{dual}}\|_2 \leq \epsilon_{\text{feas}}, \text{ and } \hat{\eta} \leq \epsilon.$

二者区别

- 原始对偶法只需要一步牛顿迭代，不需要内外两重循环。
- 原始对偶法的迭代不能保证一定可行，障碍法可以。
- 原始对偶法效率更高。
-

Outline

- 1 Interior-Point Method
 - Barrier Method
 - Primal-Dual Method

- 2 作业要求

作业内容

- 编程实现凸优化的内点法, Barrier Method 和 Primal-Dual Method 二者选其一实现, 有其他内点法的实现方式也可以
- 优化问题的约束需包含等式约束和不等式约束
- 至少给出两个测试案例并给出结果
- 收敛性分析: 分析初始点, γ 等参数对收敛性的影响

作业说明

- 编程语言：Python(推荐使用)、C++、Matlab 等
- 鼓励独立完成，不反对组队（最多 2 人合作，但要写明各自的分工）
- 提交内容：
 - 源代码：编程实现的完整源代码
 - 算法文档（实验报告）：主要包含算法流程介绍、收敛性分析、实验结果（图、表）等
 - 技术文档（说明文档）：算法调用接口说明，举例说明使用流程（不要让人在源码里手动调参!!!）
- 提交时间：截至 6 月 30 日 23: 59
- 提交方式：将命名格式为“学号 + 姓名”的压缩包发送至邮箱 lg109805012@mail.ustc.edu.cn（邮件主题同文件名，注意不要发错邮箱！没有按要求命名扣分！）
- 期末考试时间：7 月 3 日上午 8: 30-10: 30