1、求解

$$\min_{x} \quad \|x\|_2 + \frac{1}{2\tau}\|x - z\|_2^2 \tag{1.1}$$

Sol:由于目标函数为凸函数，因此有$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$，可以得到

$$\frac{x}{\|x\|_2} + \frac{1}{\tau}(x - z) = 0 \tag{1.2}$$

推出

$$z = \left(1 + \frac{\tau}{\|x\|_2}\right) x \tag{1.3}$$

因此对1.3取L^2范数可以得到

$$\|z\|_2 = \|x\|_2 \left(1 + \frac{\tau}{\|x\|_2}\right) = \|x\|_2 + \tau \tag{1.4}$$

所以$\|z\|_2 \geq \tau$。若$\|z\|_2 = \tau$，则$\|x\|_2 = 0$；若$\|z\|_2 > \tau$，则将1.4代入1.3可得：

$$x = \frac{z}{\|z\|_2}\left(\|z\|_2 - \tau\right) \tag{1.5}$$

综上，我们可以得到

$$x = \frac{z}{\|z\|_2}\max\left(\|z\|_2 - \tau, 0\right) \tag{1.6}$$

~~1~~ 1-范数 ppt有 1

0-范数 $\min_{x} \|x\|_0 + \frac{1}{2\tau}\|x-z\|_2^2$

$r(x) = \|x\|_0$ 时 $= \min_{x} \sum_{i=1}^{n} |x_i|_0 + \frac{1}{2\tau}(x_i - z_i)^2$

$(\text{shrink}(z,\tau))_i = \begin{cases} 0 & z_i^2 \leq 2\tau \\ z_i & z_i^2 > 2\tau \end{cases}$ 对每个分量求解 $\min_{x_i} \text{sgn}(x_i) + \frac{1}{2\tau}(x_i - z_i)^2$

$\Leftarrow$ 分类讨论即可

拉
其中
再按
一章
izat
ng.

扫描全能王 创建

2、根据优化问题

$$\min_{X\in C^n} \quad \mu\|X\|_p + \|AX-b\|_q \tag{1.7}$$

写出two block ADMM的迭代步，其中$p=1, q=1$

Sol:首先将优化模型1.7转化，

$$\begin{aligned} \min_{X,Y\in C^n} \quad & \mu\|X\|_1 + \|Y\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & AX-b=Y \end{aligned} \tag{1.8}$$

写出上述模型的增广拉格朗日函数

$$L(X,Y,\lambda_Y,\rho) = \mu\|X\|_1 + \|Y\|_1 + \mathrm{Re}(\lambda_Y^T(AX-b-Y)) + \frac{\rho}{2}\|AX-b-Y\|_2^2 \tag{1.9}$$

可以得到

$$L(X,Y,\lambda_Y,\rho) = \mu\|X\|_1 + \|Y\|_1 + \frac{\rho}{2}\|AX-b-Y+u_Y^k\|_2^2 - \frac{\rho}{2}\|u_Y^k\|_2^2 \tag{1.10}$$

其中$u_Y^k = \frac{1}{\rho}\lambda_Y^T$。

因此可以得到ADMM迭代步

$$\begin{aligned} X^{k+1} = & \quad \arg\min_X \left(\mu\|X\|_1 + \frac{\rho}{2}\|AX-b-Y^k+u_Y^k\|_2^2\right) \\ Y^{k+1} = & \quad \arg\min_Y \left(\|Y\|_1 + \frac{\rho}{2}\|AX^{k+1}-b-Y+u_Y^k\|_2^2\right) \end{aligned} \tag{1.11}$$

（或求导）
可由收缩算子写出结果时要写出

拉格朗日乘子更新步

$$u_Y^{k+1} = u_Y^k + \gamma\left(AX^{k+1} - Y^{k+1} - b\right) \tag{1.12}$$

其中$\gamma > 0$为步长。注：若将模型1.7转化为：

$$\begin{aligned} \min_{X,Z\in C^n} \quad & \mu\|Z\|_1 + \|AX-b\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & X-Z=0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

再按上述思路得到ADMM迭代步也是正确的。

最后一章参考群文件参考资料

Optimization Methods for Large Scale Machine Learning.