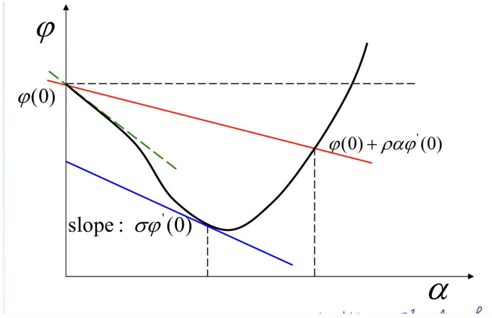
Exercise 1.写出基于Wolfe-Powell准则的非精确一维搜索算法中插值多项式$p^{(1)}(t), p^{(2)}(t)$的具体表达式。

设$p^{(1)}(t) = At^2 + Bt + C$，则有

$$\begin{cases} A\alpha_1^2 + B\alpha_1 + C & = \varphi_1 \\ 2A\alpha_1 + B & = \varphi_1' \\ A\alpha^2 + B\alpha + C & = \varphi \end{cases}$$



解得

$$\begin{cases} A = \frac{\varphi-\varphi_1+\varphi_1'(\alpha_1-\alpha)}{(\alpha-\alpha_1)^2} \\ B = \frac{\varphi_1'(\alpha^2-\alpha_1)^2+2\alpha_1(\varphi_1-\varphi)}{(\alpha-\alpha_1)^2} \\ C = \frac{\varphi_1\alpha(\alpha-2\alpha_1)+\varphi_1'\alpha\alpha_1(\alpha_1-\alpha)+\varphi\alpha_1^2}{(\alpha_1-\alpha)^2} \end{cases}$$

设$p^{(2)}(t) = \tilde{A}t^2 + \tilde{B}t + \tilde{C}$，则有

$$\begin{cases} \tilde{A}\alpha^2 + \tilde{B}\alpha + C & = \varphi \\ 2\tilde{A}\alpha_1 + \tilde{B} & = \varphi_1' \\ 2\tilde{A}\alpha + \tilde{B} & = \varphi' \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \tilde{A} = \frac{\varphi'-\varphi_1'}{2\alpha-2\alpha_1} \\ \tilde{B} = \frac{\varphi_1'\alpha-\varphi'\alpha_1}{\alpha-\alpha_1} \\ \tilde{C} = \frac{\varphi(2\alpha-2\alpha_1)+\varphi'(2\alpha\alpha_1-\alpha^2)-\varphi_1'\alpha^2}{2\alpha-2\alpha_1} \end{cases}$$

Exercise 2.证明基于Goldstein准则的非精确一维搜索算法的全局收敛性。

设$\nabla f(x)$在水平集 $L(x^{(0)}) = \{x \mid f(x) \le f(x^{(0)})\}$ 上存在且一致连续。下降算法的搜索方向$d^{(k)}$与$-\nabla f(x^{(k)})$ 之间的夹角θ_k满足式(97), 其中步长α_k由三种方法之一确定：

(1) 精确一维搜索
(2) Goldstein准则 (92),(93)
(3) Wolfe-Powell准则 (94),(95)

那么，或者对某个k有$\nabla f(x^{(k)}) = 0$, 或者$f(x^{(k)}) \to -\infty$, 或者$\nabla f(x^{(k)}) \to 0$.

Goldstein准则：

$$\begin{cases} \varphi(\alpha) & \le \varphi(0) + \rho\alpha\varphi'(0) & (92) \\ \varphi(\alpha) & \ge \varphi(0) + (1-\rho)\alpha\varphi'(0) & (93) \end{cases}$$

设$\forall k$, $g^{(k)} = \nabla f(x^k) \ne 0$和$f(x^{(k)})$有下界，则$f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)}) \to 0$，由(92)式，$-g^{(k)}s^{(k)} \to 0$。

$f(x^{k+1}) < f(x^k)$

单调+有界

（反证法）若$g^{(k)} \to 0$不成立，则$\exists \epsilon > 0$和子列$\{x^{(k)}\}_{k\in K} s.t. \|g^{(k)}\| \ge \epsilon$从而由

$$-{g^{(k)}}^\top s^{(k)} = \|g^{(k)}\|\|s^{(k)}\|\cos\theta_k \ge \epsilon\|s^{(k)}\|\sin\mu$$

以及$\theta_k \le \frac{\pi}{2} - \mu, \forall k$得$\|s^{(k)}\| \to 0.$

又有

$$f(x^{(k)} + s^{(k)}) = f(x^{(k)}) + \nabla f(x^{(k)})^\top s^{(k)} + o(\|s^{(k)}\|)(\text{泰勒展开})$$

得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x^{(k)})-f(x^{(k+1)})}{-\nabla f^{(k)}{}^{\top}s^{(k)}}=1$$

由(93)式得

$$\frac{f(x^{(k)})-f(x^{(k+1)})}{-\nabla f^{(k)}{}^{\top}s^{(k)}}\le 1-\rho<1$$

矛盾!

所以$g^{(k)}=\nabla f(x^{(k)})\to 0, k\to\infty$.

Exercise 3.将非线性方程组求根$F(x)=0$的牛顿迭代，用于求最优化问题$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$，给出相应的迭代格式并说明理由。

$\nabla f(x)=0$

牛顿迭代法的原理是取函数$F(x)$在$x^{(k)}$处泰勒展开的线性部分，作为函数的一阶近似，令其等于0并得到迭代格式，即：

$$F(x^{(k)})+DF(x^{(k)})(x-x^{(k)})=0$$

其中$DF(x^{(k)})$为F在$x^{(k)}$的Jacobian，其形式为

$$DF(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_n}\\ \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

解得迭代格式为

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-DF(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)})$$

同理，对于无约束最优化问题$min_{x\in\mathbb{R}^n f(x)}$，类似地求解$\nabla f(x)=0$即可，得到迭代格式为

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-(D(\nabla f(x)))^{-1}\nabla f(x^{(k)})=x^{(k)}-(\nabla^2 f(x))^{-1}\nabla f(x^{(k)})$$

Exercise 4.证明对称秩一牛顿法具有遗传性和二次终止性

对于二次函数

对于二次函数$f(x)=\frac{1}{2}x^{\top}Gx+c^{\top}x$,

$$\nabla f(x)=Gx+c,\nabla^2 f(x)=G'$$

由牛顿法$y^{(k)}=G_k s^{(k)}$, 正割条件为$H_{k+1}y^{(k)}=s^{(k)}$ $s^{(k)}=x^{(k+1)}-x^{(k)}$, $y^{(k)}=\nabla f(x^{(k+1)})-\nabla f(x^{k})$

遗传性：使用归纳法。 $H_k y^{(i)}=s^{(i)}$ $i=0,1,\cdots,k-1$ * 有些同学不知道对什么进行归纳

1. $k=1$时，由正割条件，$H_1 y^{(0)}=s^{(0)}$。

2. 假设遗传性对于k成立，即$H_k y^{(l)} = s^{(l)}, l = 0, 1, \ldots, k-1$.
3. 对于$k+1$, 只须证明$l < k$的情况（$l = k$时，由正割条件直接可得结论成立），即

$$H_{k+1} y^{(l)} = s^{(l)}, l = 0, 1, \ldots, k-1$$

由对称秩一校正公式

$$H_{k+1} y^{(l)} = H_k y^{(l)} + \frac{(s^{(k)} - H_k y^{(k)})(s^{(k)} - H_k y^{(k)})^\top y^{(l)}}{(s^{(k)} - H_k y^{(k)})^\top y^{(k)}}$$

其中

$$\begin{aligned}(s^{(k)} - H_k y^{(k)})^\top y^{(l)} &= s^{(k)}{}^\top y^{(l)} - y^{(k)}{}^\top H_k y^{(l)} \\ &= s^{(k)}{}^\top y^{(l)} - y^{(k)}{}^\top s^{(l)} \\ &= s^{(k)}{}^\top G s^{(l)} - s^{(k)}{}^\top G s^{(l)} \\ &= 0\end{aligned}$$

故$H_{k+1} y^{(l)} = H_k y^{(l)} = s^{(l)}, l = 0, 1, \ldots, k-1$.

二次终止性：（这里需要假定$s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$线性无关）

由遗传性知

$$\begin{gathered}H_n y^{(l)} = s^{(l)}, l = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \Downarrow \\ H_n G s^{(l)} = s^{(l)}, l = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \Downarrow \\ (H_n G - I) s^{(l)} = 0, l = 0, 1, \ldots, n-1\end{gathered}$$

因为$s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$线性无关，所以$(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$可逆，所以

$$H_n G - I = 0 \Rightarrow H_n = G^{-1} = (\nabla^2 f(x))^{-1}$$

由迭代格式

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - H_n \nabla f(x^{(n)}) = x^{(n)} - G^{-1} \nabla f(x^{(n)})$$

又因为

$$\begin{gathered}\nabla f(x^{(n+1)}) - \nabla f(x^{(n)}) = G(x^{(n+1)} - x^{(n)}) \\ \Downarrow \\ x^{(n+1)} = x^{(n)} - G^{-1} \nabla f(x^{(n)}) + G^{-1} \nabla f(x^{(n+1)})\end{gathered}$$

所以

$$G^{-1} \nabla f(x^{(n+1)}) = 0 \Rightarrow \nabla f(x^{(n+1)}) = 0$$

即有限步终止且$H_n = [\nabla^2 f(x^*)]^{-1}$.

Exercise 5.利用秩一校正的求逆公式（sherman-Morrison定理），由$H_{k+1}^{(DFP)}$推导$B_{k+1}^{(DFP)}$.

$$(A+uv^\top)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^\top uv^\top A^{-1}}{1+v^\top A^{-1}u}$$
$$H_{k+1}^{(DFP)}=H_k+\frac{s^{(k)}s^{(k)\top}}{s^{(k)\top}y^{(k)}}-\frac{H_ky^{(k)}y^{(k)\top}H_k}{y^{(k)\top}H_ky^{(k)}}$$
$$B_{k+1}^{(DFP)}=B_k+(1+\frac{s^{(k)\top}B_ks^{(k)}}{y^{(k)\top}s^{(k)}})\frac{y^{(k)}y^{(k)\top}}{y^{(k)\top}s^{(k)}}-\frac{B_ks^{(k)}y^{(k)\top}+y^{(k)}s^{(k)\top}B_k}{y^{(k)\top}s^{(k)}}$$

为方便书写，忽视所有的角标k, 并令$M=H+\frac{ss^\top}{s^\top y}$，则有

$$M^{-1}=H^{-1}-\frac{H^{-1}ss^\top H^{-1}}{s^\top y+s^\top Bs}=B-\frac{Bss^\top B}{s^\top y+s^\top Bs}\quad(5.1)$$

$$B_{k+1}^{(DFP)}=(H_{k+1}^{(DFP)})^{-1}=M^{-1}+\frac{M^{-1}Hyy^\top HM^{-1}}{y^\top Hy-y^\top HM^{-1}Hy}\quad(5.2)$$

将(5.1)代入(5.2)第二个等号右边第二项并展开，消去分子分母常数和$BH=I$得

$$\begin{aligned}\frac{M^{-1}Hyy^\top HM^{-1}}{y^\top Hy-y^\top HM^{-1}Hy}&=\frac{yy^\top(s^\top y+s^\top Bs)}{y^\top ss^\top y}-\frac{ys^\top B}{s^\top y}-\frac{Bsy^\top}{y^\top s}+\frac{Bss^\top B}{s^\top y+s^\top Bs}\\&=(1+\frac{s^\top Bs}{y^\top s})\frac{yy^\top}{y^\top s}-\frac{ys^\top B+Bsy^\top}{y^\top s}+\frac{Bss^\top B}{s^\top y+s^\top Bs}\quad(5.3)\end{aligned}$$

将(5.1), (5.3)代入(5.2)即可得

$$B_{k+1}^{(DFP)}=B_k+(1+\frac{s^{(k)\top}B_ks^{(k)}}{y^{(k)\top}s^{(k)}})\frac{y^{(k)}y^{(k)\top}}{y^{(k)\top}s^{(k)}}-\frac{B_ks^{(k)}y^{(k)\top}+y^{(k)}s^{(k)\top}B_k}{y^{(k)\top}s^{(k)}}$$

Exercise 6.共轭梯度法性质定理：设目标函数$f(x)=\frac{1}{2}x^\top Gx+c^\top x$,则采用精确一维搜索的共轭梯度法经$m\le n$步迭代后终止，且对所有的$1\le k\le m$成立下列关系：

$$\begin{aligned}&d^{(k)\top}Gd^{(j)}=0,j=0,1,\dots,k-1&&(6.1)\\&g^{(k)\top}g^{(j)}=0,j=0,1,\dots,k-1&&(6.2)\\&d^{(k)\top}g^{(k)}=-g^{(k)\top}g^{(k)}&&(6.3)\\&span\{g^{(0)},g^{(1)},\dots,g^{(k)}\}=span\{g^{(0)},Gg^{(0)},\dots,G^kg^{(0)}\}&&(6.4)\\&span\{d^{(0)},d^{(1)},\dots,d^{(k)}\}=span\{d^{(0)},Gg^{(0)},\dots,G^kg^{(0)}\}&&(6.5)\end{aligned}$$

共轭梯度法步骤中得到的的条件：

$$
\begin{cases}
g^{(k+1)^\top} d^{(k)} = 0 & (\text{由精确一维搜索})(6.6) \\
\alpha_k = \dfrac{g^{(k)^\top} g^{(k)}}{d^{(k)^\top} G d^{(k)}} & (\text{由精确一维搜索})(6.7) \\
g^{(k+1)} = g^{(k)} + \alpha_k G d^{(k)} & (\nabla f(x^{(k+1)})\text{直接展开})(6.8) \\
\beta_k = \dfrac{g^{(k+1)^\top} g^{(k+1)}}{g^{(k)^\top} g^{(k)}} & (6.9) \\
d^{(k+1)} = -g^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)} & (6.10)
\end{cases}
$$

证明(6.3):

$$
\begin{aligned}
d^{(k)^\top} g^{(k)} &= -g^{(k)^\top} g^{(k)} + \beta_k d^{(k-1)^\top} g^{(k)} && (by(6.10)) \\
&= -g^{(k)^\top} g^{(k)} + 0 && (by(6.6)) \\
&= -g^{(k)^\top} g^{(k)}
\end{aligned}
$$

证明(6.1)**与**(6.2):

1. k = 1时直接验证可得结论成立
2. 假设(6.1)与(6.2)对k成立
3. (6.8)式左右两边转置后同右乘$g^{(j)}$得

$$
\begin{aligned}
g^{(k+1)} g^{(j)} &= g^{(k)^\top} g^{(j)} - \alpha_k d^{(k)^\top} G g^{(j)} \\
&= g^{(k)^\top} g^{(j)} - \alpha_k d^{(k)^\top} G (d^{(j)} - \beta_{j-1} d^{(j-1)}) \\
&= g^{(k)^\top} g^{(j)} - \alpha_k d^{(k)^\top} G d^{(j)}
\end{aligned}
$$

$j = k$时，将(6.7)式代入即可得上式为0；$j < k$时，由归纳假设得上式为0。

综上，(6.2)成立。

4. 由(6.10)式，

$$
\begin{aligned}
d^{(k+1)^\top} G d^{(j)} &= (-g^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)}) G d^{(j)} \\
&= -g^{(k+1)} G d^{(j)} + \beta_k d^{(k)} G d^{(j)} \\
&= g^{(k+1)^\top} (g^{(j)} - g^{(j+1)})/\alpha_k + \beta_k d^{(k)} G d^{(j)}
\end{aligned}
$$

$j = k$时，由$(6.2), (6.7), (6.9)$得上式为0；$j < k$时，由归纳假设得上式为0.

综上，(6.1)成立。

证明(6.4)

由(6.10)式知，存在可逆方阵

$d^{(0)} = -g^{(0)}$ β_0 $d^{(k+1)} = -g^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)} \Leftrightarrow g^{(k+1)} = -d^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)}$

$$
Q = \begin{bmatrix}
-1 & B_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & B_1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & -1 & B_{k-1} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1
\end{bmatrix}
$$

$d^{(k)} \Rightarrow d^{(k-1)}$

使得$(d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(k)}) Q = (g^{(0)}, g^{(1)}, \dots, g^{(k)})$，所以

$$span\{g^{(0)}, g^{(1)}, \ldots, g^{(k)}\} = span\{d^{(0)}, d^{(1)}, \ldots, d^{(k)}\}(6.11)$$

1. $k=0$时，直接由定义得结论成立。
2. 假设结论对k成立，即$span\{g^{(0)}, g^{(1)}, \ldots, g^{(k)}\} = span\{g^{(0)}, Gg^{(0)}, \ldots, G^k g^{(0)}\}$.
3. 对于$k+1$，由(6.8)式和归纳假设， $g_{k+1} = g_k + \alpha_k G d_k$

$$g_{k+1} \in span\{g^{(0)}, Gg^{(0)}, \ldots, G^{k+1} g^{(0)}\}$$

> **共轭方向法基本定理：** 严格凸二次函数$f(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + c^T x$,
> 共轭方向法执行精确一维搜索，则每步迭代点$x^{(k+1)}$是$f(x)$在线性流形
> $$\mathcal{V} = \{x \mid x = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{k} \beta_j d^{(j)}, \forall \beta_j \in \mathbb{R}\}$$
> 中的唯一极小点。

$d^{(0)}, d^{(1)}, \ldots, d^{(k)}$是一组共轭方向，由共轭方向法基本定理得

$$g^{(k+1)} \perp span\{d^{(0)}, d^{(1)}, \ldots, d^{(k)}\}(6.12)$$

所以由(6.11), (6.12)和归纳假设

$$g^{(k+1)} \notin span\{d^{(0)}, d^{(1)}, \ldots, d^{(k)}\} = span\{g^{(0)}, Gg^{(0)}, \ldots, G^k g^{(0)}\}$$

所以结论对$k+1$成立，即

$$span\{g^{(0)}, g^{(1)}, \ldots, g^{(k+1)}\} = span\{g^{(0)}, Gg^{(0)}, \ldots, G^{k+1} g^{(0)}\}$$

(6.5)式证明与(6.4)式同理。

Exercise 8.证明折线法（信赖域方法）子问题模型的函数单调性。

$$\begin{aligned}
s_C^{(k)} &= -\frac{\|g^{(k)}\|^2}{g^{(k)\top} B_k g^{(k)}} g^{(k)} \\
s_N^{(k)} &= -B_k^{-1} g^{(k)} \\
x^{(k+1)} &= x^{(k)} + s_C^{(k)} + \lambda(s_N^{(k)} - s_C^{(k)})
\end{aligned}$$

(1)证明沿着Cauchy点$x_C^{(k+1)}$和牛顿点$x_N^{(k+1)}$的连线，到$x^{(k)}$的距离单调增加.

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= \|s_C^{(k)} + \lambda(s_N^{(k)} - s_C^{(k)})\|^2 \\
&= (s_C^{(k)} + \lambda(s_N^{(k)} - s_C^{(k)}))^\top (s_C^{(k)} + \lambda(s_N^{(k)} - s_C^{(k)})) \\
&= s_C^{(k)\top} s_C^{(k)} + 2\lambda s_C^{(k)\top}(s_N^{(k)} - s_C^{(k)})) + \lambda^2 (s_N^{(k)} - s_C^{(k)}))^\top (s_N^{(k)} - s_C^{(k)})) \\
L(\lambda)' &= 2 s_C^{(k)\top}(s_N^{(k)} - s_C^{(k)})) + 2\lambda(s_N^{(k)} - s_C^{(k)}))^\top (s_N^{(k)} - s_C^{(k)})) \\
&\geq 2 s_C^{(k)\top}(s_N^{(k)} - s_C^{(k)})) \\
&= 2\frac{\|g^{(k)}\|^2}{g^{(k)\top} B_k g^{(k)}} g^{(k)} B_k^{-1} g^{(k)} (1 - \frac{\|g^{(k)}\|^2 g^{(k)}}{g^{(k)\top} B_k g^{(k)} B_k^{-1} g^{(k)}})
\end{aligned}$$

其中

$I=(B_k^{\frac{1}{2}})^{T} B_k^{-\frac{1}{2}}$

$\|g^{(k)}\|^4=(\|g^{(k)}\|^2)^2=((g^{(k)})^{T}g^{(k)})^2$

B_k对称正定

Cauchy

$$
\begin{aligned}
1-\frac{\|g^{(k)}\|^2 g^{(k)}}{g^{(k)\top} B_k g^{(k)} B_k^{-1} g^{(k)}} &= 1-\frac{\|g^{(k)}\|^4}{g^{(k)\top} B_k g^{(k)} g^{(k)\top} B_k^{-1} g^{(k)}} \\
&= 1-\frac{((\sqrt{B_k} g^{(k)})^\top ((\sqrt{B_k^{-1}} g^{(k)}))^2}{g^{(k)\top} B_k g^{(k)} g^{(k)\top} B_k^{-1} g^{(k)}} \\
&\geq 1-\frac{\|\sqrt{B_k} g^{(k)}\|^2 \|\sqrt{B_k^{-1}} g^{(k)}\|^2}{g^{(k)\top} B_k g^{(k)} g^{(k)\top} B_k^{-1} g^{(k)}} \\
&= 1-\frac{g^{(k)\top} B_k g^{(k)} g^{(k)\top} B_k^{-1} g^{(k)}}{g^{(k)\top} B_k g^{(k)} g^{(k)\top} B_k^{-1} g^{(k)}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以$L(\lambda)' \geq 0, \lambda \in [0,1]$，具有单调性。

(2)证明沿着Cauchy点$x_C^{(k+1)}$和牛顿点$x_N^{(k+1)}$的连线，子问题模型函数值单调减少。

$g^{(k)}(s)$

$s_C+\lambda(s_N-s_C)$

$$
\begin{aligned}
h(\lambda) &= q^{(k)}(s_C^{(k)}+\lambda(s_N^{(k)}-s_C^{(k)})) \\
&= f(x^{(k)})+g^{(k)\top}(s_C^{(k)}+\lambda(s_N^{(k)}-s_C^{(k)})) \\
&\quad +\frac{1}{2}(s_C^{(k)}+\lambda(s_N^{(k)}-s_C^{(k)}))^\top B_k (s_C^{(k)}+\lambda(s_N^{(k)}-s_C^{(k)})) \\
h(\lambda)' &= g^{(k)\top}(s_N^{(k)}-s_C^{(k)})+s_C^{(k)\top} B_k (s_N^{(k)}-s_C^{(k)})+\lambda(s_N^{(k)}-s_C^{(k)})^\top B_k (s_N^{(k)}-s_C^{(k)}) \\
&\leq g^{(k)\top}(s_N^{(k)}-s_C^{(k)})+s_C^{(k)\top} B_k (s_N^{(k)}-s_C^{(k)})+(s_N^{(k)}-s_C^{(k)})^\top B_k (s_N^{(k)}-s_C^{(k)}) \\
&= (g^{(k)\top}+s_C^{(k)\top} B_k+(s_N^{(k)}-s_C^{(k)})^\top B_k)(s_N^{(k)}-s_C^{(k)}) \\
&= (g^{(k)\top}+s_N^{(k)\top} B_k)(s_N^{(k)}-s_C^{(k)}) \\
&= 0\cdot(s_N^{(k)}-s_C^{(k)}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以沿着Cauchy点$x_C^{(k+1)}$和牛顿点$x_N^{(k+1)}$的连线，子问题模型函数值单调减少。