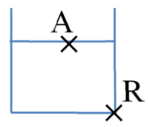
Exercice 1.

Vitesse d'écoulement en sortie de réservoir

Document 1 – Réservoir de récupération d'eau de pluie

Le réservoir permet de récupérer l'eau de pluie d'un toit. C'est un cylindre de 3,5 m de diamètre. Il contient une hauteur de 3,0 m d'eau. À sa base, se trouve un orifice de 2,5 cm de diamètre, dans lequel on a fixé un robinet R.



Données :
$g = 9.8\ m.s^{-2}$, $\rho_{eau} = 1000\ kg.m^{-3}$, pression atmosphérique : $P_{atm} = 1013\ hPa$

1) Écrire l'équation de continuité pour les points A et R.

Le débit en A est égale au débit en R :

$$Q_A = Q_R$$
$$v_A.S_A = v_R.S_R$$

2) En déduire que l'écoulement en A est négligeable devant la vitesse de l'écoulement en R.

À partir de l'équation de continuité on en déduit :

$$\frac{v_A}{v_R} = \frac{S_R}{S_A}$$

On a $S_R \ll S_A$ (la section S_R du robinet est *très inférieure à* la section S_A du réservoir) donc,

$$\frac{S_R}{S_A} \ll 1$$

Donc

$$\frac{v_A}{v_R} \ll 1$$

On en déduit que la vitesse d'écoulement en A est très inférieur à la vitesse d'écoulement en B :

$$v_A \ll v_R$$

3) Quelle est la pression exercée en A et en R ?

À la surface au point A, la pression est la pression atmosphérique : $P_A = P_{atm} = 1013\ hPa$.
Au niveau du point R, puisque le robinet est ouvert, la pression est aussi celle de la pression atmosphérique : $P_R = P_{atm}$=1013 hPa.

4) Écrire l'équation de Bernoulli entre A et R.

Entre A et R l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{1}{2}\rho.v_A^2 + P_A + \rho.g.z_A = \frac{1}{2}\rho.v_R^2 + P_R + \rho.g.z_R$$

On peut simplifier car $P_A = P_R$ (d'après la question 3)

$$\frac{1}{2}\rho.v_A^2 + \rho.g.z_A = \frac{1}{2}\rho.v_R^2 + \rho.g.z_R$$

En arrangeant l'écriture on obtient :

$$\rho.g.z_A - \rho.g.z_R = \frac{1}{2}\rho.v_R^2 - \frac{1}{2}\rho.v_A^2$$

$$\rho.g.(z_A - z_R) = \frac{1}{2}\rho.(v_R^2 - v_A^2)$$

On peut encore simplifier l'équation car :

- $v_A \ll v_R$ donc $v_R^2 - {v_A}^2 \approx {v_R}^2$

- $z_A - z_B = h$

$$g.h = \frac{1}{2} v_R^2$$

5) À l'aide de la question 1) et 4) montrer que la vitesse d'écoulement en R peut s'écrire $v_R = \sqrt{2gh}$.

De la question précédente on obtient :

$$g.h = \frac{1}{2} v_R^2$$

$$\frac{1}{2} v_R^2 = g.h$$

$$v_R^2 = 2.g.h$$

$$v_R = \sqrt{2.g.h}$$

6) Calculer cette vitesse v_R.

$$v_R = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 3{,}0}$$
$$= 7{,}67\ m.s^{-1}$$