

Pomocné texty k přednáškám z teorie elektromagnetického pole

ZS 2015/2016

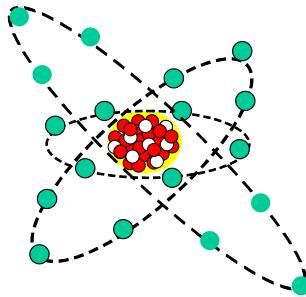
Opravená verze prosinec.2015
(na str.50 opravený vztahy pro potenciál)

Text je průběžně opravován a modifikován

1 Podstata elektromagnetických jevů

1.1 Elektromagnetické jevy, elektromagnetické síly

Elektromagnetické jevy jsou svázány se samotnými vlastnostmi hmoty a častic, ze kterých je hmota tvořena. Pro základní představu vystačíme s prvním intuitivním modelem atomu, ve kterém si můžeme představit relativně malé elektrony, které se pohybují kolem hmotného jádra složeného z protonů a neutronů (viz Obr.1).

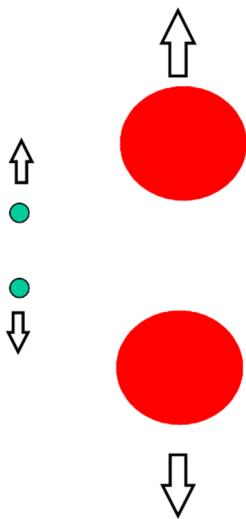


Obr.1 Jednoduchý model atomu

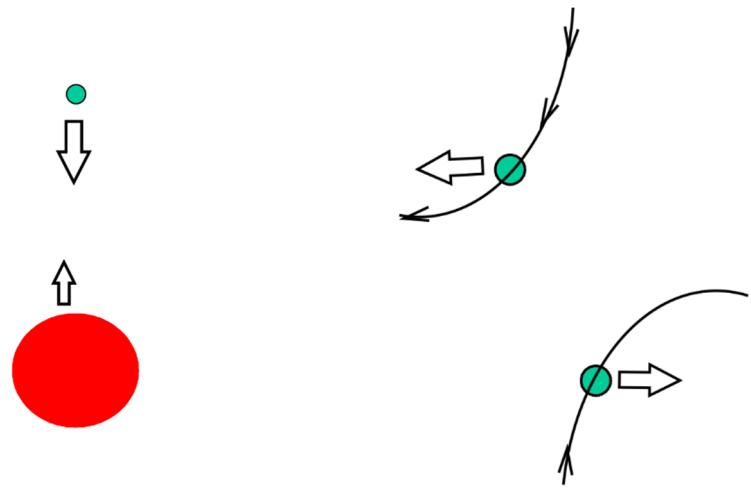
Mezi těmito částicemi působí různé druhy sil, které se podílejí na vazbě částic uvnitř atomů. Jedny z nich se nazývají **elektromagnetické (elektrické a magnetické)**.

Pro první přiblížení lze říci, že **elektrické síly** působí na statické i pohybující se částice ve směru **po spojnici mezi nimi**, těmito silami jsou elektrony a protony navzájem přitahovány či odpuzovány (viz Obr.2).

Magnetické síly oproti tomu působí pouze na pohybující se částice ve směru kolmém **na směr jejich pohybu, zakřivují tak dráhy jejich pohybu** (viz Obr.3).



Obr.2 Elektrická síla



Obr.3 Magnetická síla

V elektricky neutrálním tělese se elektromagnetické síly navenek nijak neprojevují. Částice jsou rozmístěny, nebo se pohybují, tak, že se vzájemné elektromagnetické síly uvnitř těles kompenzují.

Z **makroskopického pohledu** se elektromagnetické síly uplatní až tehdy, pokud dojde uvnitř těles k přeskupení častic a narušení jejich vzájemné počáteční rovnováhy.

Účinek elektrických sil se navenek projeví například v případě, pokud se podaří nahromadit na jednom tělese větší počet častic jednoho druhu na úkor častic druhého druhu, což je případ elektricky nabitého tělesa. Celá tato tělesa se potom elektrickou silou přitahují nebo odpuzují (například desky deskového kondenzátoru).

Účinek magnetických sil se navenek projeví například v případě, že se částice uvedou do pohybu v určitém vyvoleném směru (elektrický proud ve vodičích) a potom se i vodiče protékané elektrickým proudem navzájem přitahují nebo odpuzují.

Podle naší představy na sebe částice hmoty silově působí prostřednictvím **silového elektromagnetického pole**, které je těmito částicemi vytváreno. Ve výše uvedených ilustračních případech se jedná o působení na relativně malou vzdálenost, v elektromagnetickém poli však může dojít k silovému působení i na velmi velké vzdálenosti. **Elektromagnetické pole totiž objektivně existuje a nejedná se pouze o abstraktní představu.** Velice podstatné je, že se časovými změnami rozmístění častic v prostoru vybudí i časově proměnné elektromagnetické pole, které má schopnost se šířit v prostoru v podobě elektromagnetické vlny. Všechny silové účinky se potom mohou přenášet na velké vzdálenosti. Elektromagnetická vlna přenáší energii a po vybuzení může existovat nezávisle na svých zdrojích.

Při hledání podobnosti by bylo možno srovnat šíření elektromagnetické vlny s vlnou šířící se v určité hmotné substanci, kde je vznik mechanicky předáván mezi jednotlivými částicemi a atomy – tlakovou vlnou ve vodě, zvukovou tlakovou vlnou ve vzduchu. Tyto vlny po vybuzení rovněž objektivně existují nezávisle na svých zdrojích a přenášejí energii.

Velice podstatnou odlišnost lze však spatřovat v mechanizmu šíření elektromagnetické vlny. Elektromagnetická vlna se šíří stejně dobře i ve vakuu, kde nejsou k dispozici žádné hmotné částice. Existence všeprstupujícího média – éteru, ve kterém by se elektromagnetická vlna šířila srovnatelným způsobem, nebyla navzdory prvotním předpokladům experimentálně prokázána.

1.2 Elektrický náboj

1.2.1 Pojem elektrického náboje, elementárního elektrického náboje

Při prvotním zkoumání, v době kdy ještě nebyla struktura hmoty v podobě elementárních častic známa, se pozorovatelům elektrické jevy mezi vodivými a nevodivými tělesy navenek jevily tak, jakoby se mezi nimi přelévalo neviditelné fluidum, tehdy nazvané „elektřina“. Tělesa se touto „elektřinou“ plnila (nabíjela) nebo naopak vyprazdňovala (vybíjela). Z této doby pochází i pojmenování „elektrický náboj“. Ze současného pohledu se však jedná pouze o přeskupování častic určitého druhu a o jejich vzájemnou interakci.

Z hlediska elektromagnetického silového působení bychom mohli částice pomyslně rozdělit do tří skupin.

V první skupině by byly částice, které na sebe navzájem elektromagnetickými silami vůbec nepůsobí a nepůsobí ani na částice ze zbylých dvou skupin. Těmito částicemi přisuzujeme vlastnost, že jsou **elektricky neutrální** a říkáme, že **nenesou elektrický náboj**. K těmto částicím patří **neutron**, který je obsažen v jádře atomů.

Částicím z druhé skupiny přisoudíme vlastnost, že **nesou kladný elektrický náboj**. K těmto částicím patří podle konvence **protony**. Částice z této skupiny se navzájem odpuzují.

Částicím ve třetí skupině bychom mohli přisoudit vlastnost, že **nesou záporný elektrický náboj**. K těmto částicím patří konvence **elektrony**. Částice z této skupiny se elektrickými silami rovněž navzájem odpuzují. Částice nesoucí kladný náboj (protony) a záporný náboj (elektrony) se elektrickými silami přitahují.

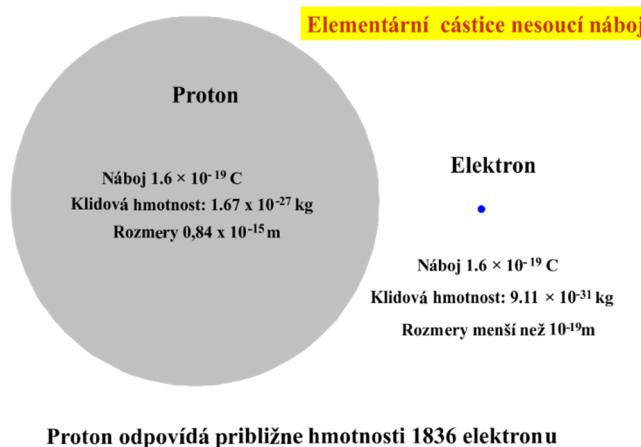
1.2.2 Vlastnosti elektrického náboje

Jednotkou elektrického náboje je **Coulomb**. Tato jednotka je odvozena pomocí definovaného elektrického proudu, což je tok volně pohyblivých elektronů v elektrických vodičích. Elektrický proud o velikosti 1 Ampér je definován jako náboj o velikosti 1 Coulomb, který projde vodičem za jednu sekundu.

Porovnáme-li rozměry a hmotnosti, protony jsou mnohanásobně větší než elektrony (viz porovnání na Obr.4). Dva relativně malé elektrony se však odpuzují stejně velkou elektrickou silou, jako dva mnohanásobně větší protony, a stejně velkou silou se proton a elektron přitahuje. **Elektromagnetické síly tedy primárně s hmotností nesouvisejí.**

Vzhledem k tomu, že nebyla prokázána existence jiných částic, které by na sebe působily menší silou, než kladně nabité protony nebo záporně nabité elektrony, přisuzujeme těmto částicím vlastnost, že nesou takzvaný **elementární elektrický náboj, který není možné již dále dělit.**

Elektrický náboj protonu a elektronu je tedy co do velikosti stejně velký, liší se pouze znaménkem, přisuzujeme mu velikost 1.6×10^{-19} C. **Elementární elektrický náboj protonu je kladný, elektronu záporný.**



Obr.4 Proton a elektron

Elektrické náboje nikde nevznikají ani nezanikají, nabité částice se mohou v rámci určitých hmotných těles nebo v prostoru přemístit, posouvat, hromadit. Na povrchu i uvnitř těles se může nahromadit sumární elektrický náboj, vodiči protékají náboje v podobě elektrického proudu, elektromagnetické jevy se tak mohou projevit i z makroskopického hlediska.

1.2.3 Volné a vázané elektrické náboje, volný a vázaný elektrický proud

Nabité částice, které vytvářejí elektromagnetické pole a které se zkráceně označují jen jako **elektrické náboje**, lze s ohledem na charakter jejich působení rozdělit do dvou druhů – **volné a vázané**. Tato klasifikace je pro základní popis elektromagnetických jevů **velice důležitá** a prostupuje celou teorií elektromagnetického pole.

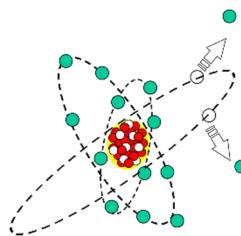
Jak bude dále ukázáno, představují volné náboje **primární zdroj** elektromagnetického pole, zatímco vázané náboje v různých materiálech se obvykle svým elektromagnetickým polem projevují až **sekundárně** jako reakce na primárně vybužené pole volných nábojů. Vázané náboje potom ovlivňují chování materiálů v elektromagnetickém poli.

1.2.3.a Volné náboje, kondukční proud

Jak již bylo řečeno, elektromagnetické působení elektricky nabitého částic se projeví až po narušení nábojové rovnováhy v původně neutrálních atomech.

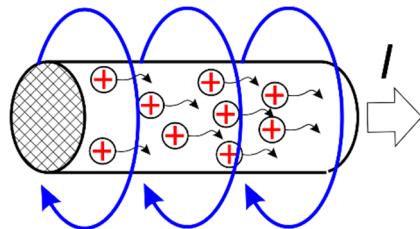
Elektrické účinky se projeví přeskupením částic jednoho druhu oproti částicím druhého druhu, **magnetické účinky** uvedením částic jednoho druhu do relativního pohybu vůči částicím druhého druhu. To se primárně podaří pouze v případě, pokud bude možné s elektricky nabitymi částicemi volně pohybovat. Touto vlastností disponují takzvané **volné náboje**, které jsou charakteristické pro materiály, které nazýváme **vodiče** (zlato, stříbro, měď, hliník, ..). Nositeli volného náboje jsou zde **valenční elektrony**, které jsou ve vodičích slabě vázány k jádrům, snadno se uvolňují a v tělese se volně pohybují v podobě pomyslného elektronového plynu (viz Obr.5). Tyto náboje se mohou ve vodičích volně přesouvat, hromadit a dokonce přecházet z jednoho vodivého tělesa na druhé.

Nahromaděné volné elektrické náboje vytvářejí ve svém okolí **elektrické pole**



Obr.5 Atomy ve vodiči

Pokud se volné náboje navíc i pohybují, vytvářejí ve svém okolí rovněž **magnetické pole** (viz Obr.6). Mohou to být například elektrony, které se pohybují ve vodičích v podobě **elektrického kondukčního proudu**.



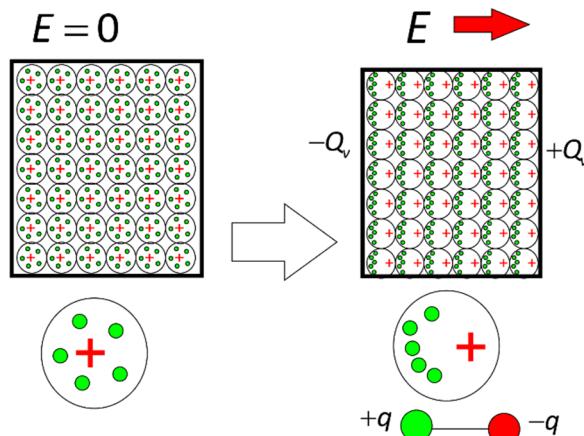
Obr.6 Náboje pohybující se ve vodiči formou elektrického proudu

1.2.3.b Vázané náboje, vázané proudy

Ne ve všech materiálech jsou k dispozici volně pohyblivé nabité částice (volné elektrické náboje, volné elektrony), jako tomu bylo ve vodičích. Záporné elektrony mohou být pevně vázány k jádrům s kladnými protony a není možné je tak snadno oddělit. Elektrické náboje v těchto materiálech se nazývají **vázané**. Tyto materiály tvoří druhou velmi důležitou skupinou a označují se jako **elektricky nevodivé**.

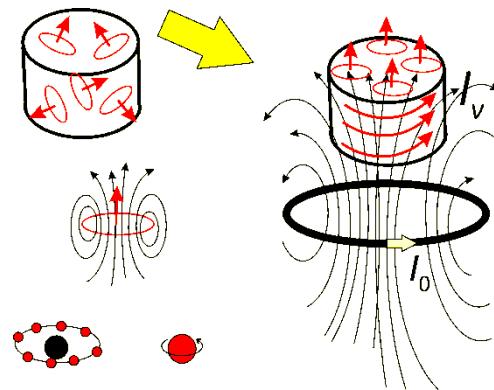
Neznamená to však, že se takové materiály nemohou v elektromagnetickém poli naveneck projevit. Elektrony se sice nemohou volně pohybovat, mohou se však i zde vlivem vnějšího elektromagnetického pole posunout ze svých neutrálních poloh či pozměnit dráhu svého pohybu a tím rovněž dojde k narušení nábojové rovnováhy v původně neutrálním tělese. Vázané náboje se tak i v tomto případě projeví z makroskopického hlediska a i zde se vybudí kolem elektricky nabitych částic elektromagnetické pole.

Může například dojít k posunutí těžiště kladného a záporného náboje v původně vyváženém neutrálním atomu (viz Obr.7). Vzniknou tak takzvané **elektrické dipoly** jako dvojice s kladným a záporným nábojem, které se mohou ve vnějším elektrickém poli dále posouvat nebo natáčet. Z makroskopického pohledu se posuv nábojů projeví jako výsledný vázaný náboj, který se objeví na povrchu dielektrika, nebo prostorový vázaný náboj rozložený s určitou hustotou v objemu dielektrika. Tento mechanizmus je charakteristický pro látky, které se nazývají **dielektrické**. V dalším textu bude podrobně popsán.



Obr.7 Vázané náboje v dielektriku – elektrické dipoly

V materiálech mohou vzniknout i pomyslné **vázané proudy**. V jednoduchém modelu hmoty obíhají elektrony kolem atomů a navíc rotují kolem osy (spin elektronu). Vytvářejí tak pomyslné elementární proudové smyčky, které se nazývají **magnetické dipoly** Obr.8. Tyto smyčky rovněž budí magnetické pole, které je opět v neutrálním stavu uvnitř atomu vykompenzované a naveneck se neprojevuje. Superpozicí proudů těchto elementárních proudových smyček, které se působením vnějšího magnetického pole natočí, vznikají pomyslné vázané proudy i v objemu a na povrchu těles (viz Obr.8). Vznik vázaných proudů je charakteristický pro **feromagnetické** materiály. V následujícím textu bude tento mechanizmus rovněž podrobně popsán.



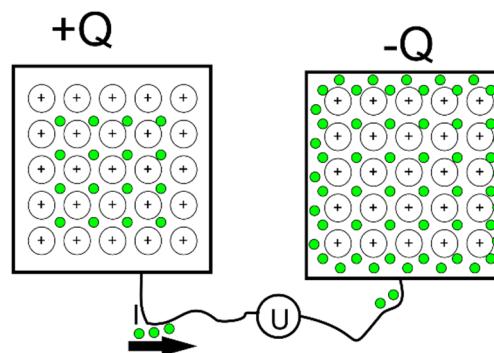
Obr.8 Vázané proudy – magnetické dipoly

Nelze udělat jednoznačnou hranici mezi dielektrickými a magnetickými materiály, oba zmíněné mechanizmy se projevují u všech jmenovaných druhů. Jsou však materiály, kdy je jeden z mechanizmů dominantní. To se týká již zmíněných **dielektrických** materiálů na jedné straně a **feromagnetických** materiálů na straně druhé.

1.2.4 Elektricky nabité těleso, pojem bodového elektrického náboje

V makroskopické teorii elektromagnetického pole nezkoumáme chování jednotlivých elektricky nabitých částic - elektronů a protonů, posuzujeme celá **elektricky nabité tělesa**.

O elektricky nabitému tělese mluvíme tehdy, pokud v tomto tělese, nebo v jedné jeho části, převládne náboj s jedním znaménkem. Prakticky k tomu dojde například tímto jednoduchým mechanizmem: Připojíme-li mezi dvě tělesa z elektricky vodivého materiálu (elektrody) zdroj napětí, potenciálový rozdíl způsobí, že se část volných elektronů z jednoho tělesa přemístí na druhé těleso (viz Obr.9). V jednom tělesu potom převládne náboj záporných elektronů a celé těleso se bude jevit jako „**záporně nabité**“, ve druhém se vytvoří nadbytek protonů a těleso se bude jevit jako „**kladně nabité**“. Tento mechanizmus, včetně jevu, který se nazývá polarizace dielektrika, bude v následném textu popsán podrobněji.



Obr.9 Elektricky nabité tělesa

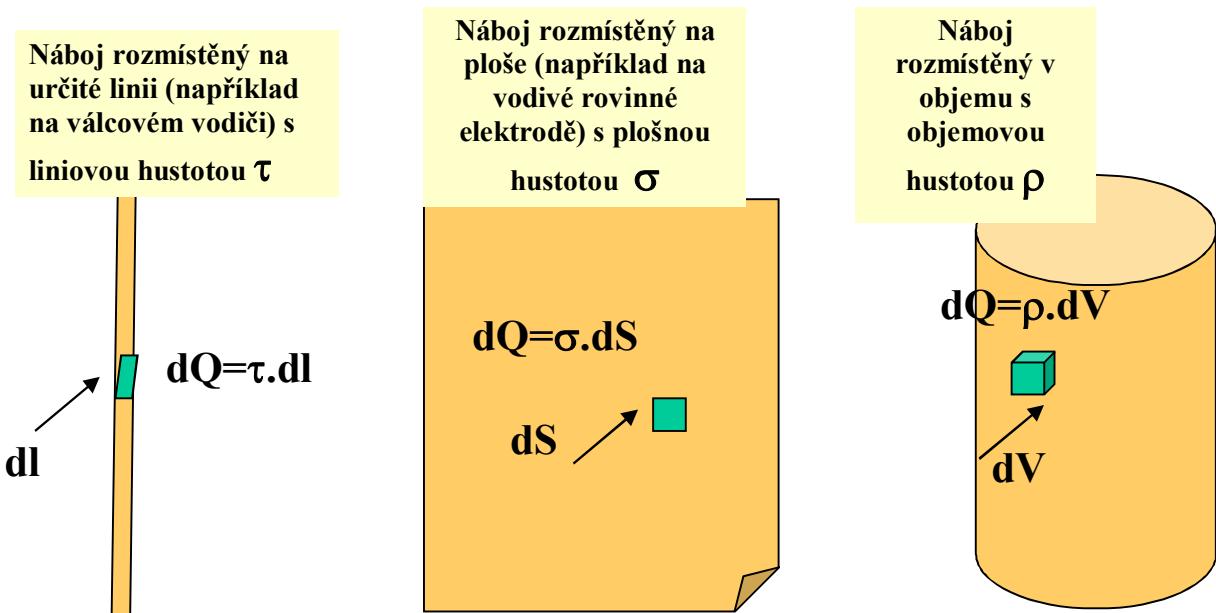
U elektricky „nabitých“ těles předpokládáme, že se sumární náboj nešený blíže nespecifikovaným počtem protonů či elektronů rozmístí podle určitého klíče **spojitě** v jejich objemu či na jejich povrchu. Slova „kladný nebo záporný náboj“ užíváme bez bližší specifikace částic, kterým tento náboj přísluší. Z historického hlediska dokonce kalkulujeme s hypotetickými volnými kladnými náboji a za elektrický proud označujeme tok kladných nábojů, přestože se ve skutečnosti jedná o opačný pohyb záporně nabitých volných elektronů.

Pro popis množství náboje rozmístěného v různých částech objemu nabitých těles zavádíme pojem **objemová hustota náboje** ρ . Obdobně zavádíme **plošnou hustotu náboje** σ pro náboj rozmístěný na povrchu těles.

Pokud se jedná o osově symetrická tělesa (například vodiče), zavádíme navíc pojem **liniové hustotu náboje** τ . Tato hustota potom značí celkové množství náboje na jednotku délky v osovém směru.

Pro úvahy o výsledném působení náboje rozmístěného na elektricky nabitych tělesech je užitečné zavést abstraktní pojem **bodového elektrického náboje**, což je náboj konečné velikosti umístěný na geometricky zanedbatelně velikém tělese.

Za bodový náboj lze potom považovat libovolnou malou část nabitého tělesa, například náboj na elementu délky dl osově symetrického nabitého tělesa (vodiče) $dQ = \tau dl$, náboj na elementu plochy dS na povrchu nabitého tělesa $dQ = \sigma dS$, nebo náboj v elementu objemu dV nabitého tělesa $dQ = \rho dV$ (Obr.10).



Obr.10 Bodový náboj jako část elektricky nabitého tělesa

1.3 Nestacionární elektromagnetické pole, elektrostatické pole a stacionární magnetické pole

V obecném případě se vždy při časových změnách prostorového rozmístění nábojů vybudí časově proměnné = **nestacionární** elektromagnetické pole, které má dvě složky - **elektrickou a magnetickou**. Tyto složky jsou navzájem od sebe neoddělitelné zcela stejně, jako například napětí a proud v elektrickém obvodu. Tato podobnost není náhodná. Bude ukázáno, že napětí je integrální veličinou související s elektrickým polem a elektrický proud je integrální veličinou související s magnetickým polem. Časově proměnné elektrické složce odpovídá magnetická složka, říkáme, že časová změna elektrického pole budí magnetické pole. Stejně je tomu i naopak. Časově proměnné magnetické pole je pevně vázán s časově proměnným elektrickým polem.

Pouze ve dvou velice důležitých speciálních případech je možné elektrické a magnetické pole sledovat relativně nezávisle na sobě a zkoumat jejich základní vlastnosti a odlišnosti.

Jedná se o časově neproměnné elektrické pole buzené nepohyblivými náboji, které se nazývá **elektrostatické**. Takové pole by se například vytvořilo přivedením stejnosměrného napětí mezi dvě elektricky vodivá tělesa (elektrody).

Dále se jedná rovněž o časově neproměnné **stacionární magnetické pole**, které je buzeno ustáleným časově neproměnným tokem nabitych částic – stejnosměrným elektrickým proudem. Pro pochopení základních zákonitostí je studium těchto polí velmi užitečné.

2 Základní popis elektrického a magnetického pole z hlediska silového působení

2.1 Výchozí vztahy pro elektrostatické pole, síla v elektrickém poli, definice intenzity elektrického pole

2.1.1 Vymezení pojmu elektrostatického pole

Časově neproměnné elektrické pole buzené nepohybujícími se volnými náboji se nazývá **elektrostatické**. Elektrostatické pole se vytvoří například mezi dvěma vodivými elektrodami, mezi které je přivedeno stejnosměrné napětí. Část elektronů se natrvalo přemístí z jedné elektrody na druhou. Jedna elektroda se bude jevit jako kladně nabité, druhá záporně nabité.

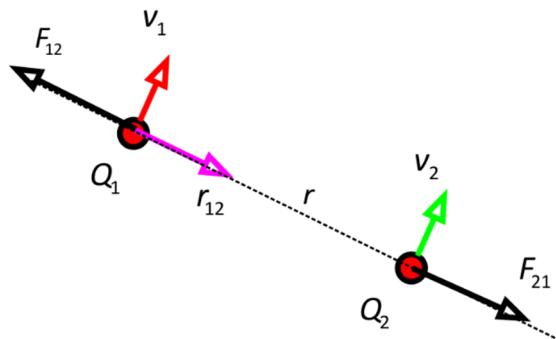
V tomto případě ke vzniku magnetického pole a obecně ani nestacionárního elektromagnetického pole z makroskopického hlediska vůbec nedojde, protože magnetické pole je buzeno pouze pohybujícími se náboji. Uvnitř materiálu samozřejmě pohybující se náboje existují, jejich magnetické účinky se však navenek neprojevují, uvnitř tělesa se navzájem vyrovňávají.

V této části bude definováno několik důležitých veličin a budou popsány zákonitosti, které platí pro elektrické pole obecně. V části popisující nestacionární elektromagnetické pole bude následně ukázáno, v kterých oblastech je elektrostatické pole specifické.

Zkoumání elektrostatického pole má i velký praktický význam. Zcela stejným přístupem lze řešit velkou a významnou množinu problémů, které se nazývají **kvazistacionární**. V těchto případech k současným časovým změnám elektrického i magnetického pole dochází a elektrické i magnetické pole existuje současně. Tyto časové změny však nejsou natolik významné, aby se výsledek zásadně odlišoval od stacionárního řešení.

2.1.2 Síla mezi náboji v elektrickém poli - Coulombův zákon

Coulombův zákon je základní zákon elektrostatického pole, popisuje vzájemné silové působení dvou abstraktních bodových nábojů (viz část 1.2.4.). Náboj lze v tomto případě chápout obecně bez ohledu na to, zda se jedná ve smyslu předchozího textu o volný nebo vázaný náboj. **Zákon platí pro libovolné náboje, volné i vázané, a je nutné jej chápout jako důležitý axiom.** Nabité částice (náboje) objektivně existují a působí na sebe danou elektrickou silou. Z čeho do dalších důsledků tato síla pochází, není v současné době dále vysvětlitelné.



Obr.11 Coulombův zákon

Na Obr.11 jsou znázorněny dva bodové náboje. Na náboj Q_2 působí ve směru po spojnici mezi náboji síla \mathbf{F}_{21} o velikosti:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{r}_{12} \quad (2.1)$$

\mathbf{r}_{12} je jednotkový vektor $|\mathbf{r}_{12}|=1$, který je orientován po spojnici ve směru od budícího náboje k náboji, na kterém posuzujeme silové účinky. Působí zde jako ukazatel udávající směr síly, velikost síly neovlivňuje. V případě, že budou mít oba náboje stejná znaménka, bude síla působit ve směru tohoto vektoru a bude odpudivá, v opačném případě bude síla působit proti směru jednotkového vektoru a bude přitažlivá.

r je vzdálenost mezi náboji

Na náboj Q_1 působí síla, která je stejně veliká, ale směrově opačně orientovaná:

$$|\mathbf{F}_{12}| = |\mathbf{F}_{21}| \quad (2.2)$$

Konstantní člen v Coulombově zákonu lze vyjádřit několika způsoby:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{10^{-7}}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2 10^{-7} = (3 \cdot 10^8)^2 10^{-7} = 9 \cdot 10^9 \quad (2.3)$$

Ze značné velikosti konstanty $9 \cdot 10^9$ by se mohlo jevit, že elektrické síly nabývají velkých hodnot. Náboje, které se dokáží nahromadit na reálných tělesech, se však řádově pohybují v hodnotách kolem 10^{-5} - 10^{-7} C, proto je i hodnota sil nepatrná. Jednotka náboje jeden Coulomb je poměrně veliká, je definována pomocí elektrického proudu o velikosti 1 ampér (1A). Je to náboj, který projde vodičem za čas jedné sekundy (1 s).

Konstanta:

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9} [\text{F/m}] \quad (2.4)$$

se nazývá permitivita vakua, má jednotku [F/m] a bude ukázáno, že souvisí s definicí kapacity.

Konstanta

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [\text{H/m}] \quad (2.5)$$

se nazývá permeabilita vakua, má jednotku [H/m] a bude ukázáno, že souvisí s definicí indukčnosti.

Konstanta

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 [\text{m/s}] \quad (2.6)$$

je rychlosť svetla ve vakuu, vzájemná souvislost s permitivitou a permeabilitou bude ukázána při popisu elektromagnetické vlny.

2.1.3 Definice intenzity elektrického pole

Při popisu vzájemného silové působení nábojů vycházíme z představy, že každý náboj kolem sebe vytváří **silové elektrické pole**, které existuje bez ohledu na to, jestli je přítomen nějaký jiný náboj, na kterém silové účinky tohoto pole posuzujeme. Pokud je k dispozici jiný náboj, působí na něj síla daná existencí elektrického pole vybuzeného ostatními náboji.

Jak již bylo částečně řečeno, ve stacionárním případě je tento pohled poněkud problematický. Nedá se jednoduše prohlásit, zda se nejdříve o vzájemné silové působení dvou nábojů, které bychom slovně mohli formulovat takto: Pokud jsou k dispozici alespoň dva náboje, působí na sebe silou, pokud je k dispozici pouze jeden osamocený náboj, nevznikne v jeho okolí nic.

V nestacionárním případě elektrické pole, jako neoddělitelná složka obecného elektromagnetického pole, skutečně existuje a může se šířit v prostoru v podobě elektromagnetické vlny, která nese energii a existuje nezávisle na zdrojích, které tuto vlnu vybudily.

Pro popis silových účinků elektrického pole se používá vektorová veličina, která se nazývá **intenzita elektrického pole E**. Tato veličina se zavádí následující **důležitou** definiční rovnicí:

$$\mathbf{F} = Q \cdot \mathbf{E} \quad (2.7)$$

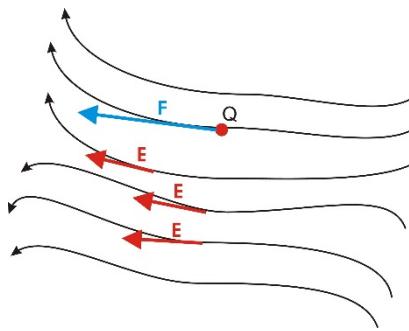
Podle (2.7) tedy intenzita elektrického pole **E** udává v určitém místě v elektrickém poli velikost a směr síly, která by působila na náboj **Q** vložený do tohoto místa. Pokud by byl náboj jednotkový a kladný, je intenzita číselně rovna působící síle:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}(Q=1) \quad (2.8)$$

Jednotku intenzity elektrického pole je volt na metr [V/m]. Tato jednotka tedy nesouvisí přímo ani s jednotkou síly [N], ani s jednotkou náboje [C]. Později bude ukázáno, že je dána napětím jako prací, kterou by vykonala intenzita elektrického pole jako síla působící na jednotkový kladný náboj při přenesení tohoto náboje o jednotkovou vzdálenost.

2.1.4 Siločáry elektrického pole

Směr působící intenzity elektrického pole je graficky znázorněn tzv. **siločárami** (viz Obr.12). Vektor intenzity elektrického pole je v každém místě k siločáru tečný. Siločára neznázorňuje sama o sobě velikost intenzity elektrického pole. Ke grafickému znázornění velikosti se někdy používá plošná hustota siločar. Siločára tedy ukazuje dráhu, po které by se v elektrickém poli pohyboval v daném směru libovolně veliký bodový kladný náboj.



Obr.12 Intenzita elektrického pole

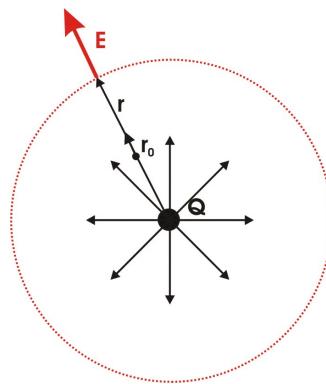
2.1.5 Intenzita elektrického pole v okolí bodového náboje

Porovnáním vztahu pro silové působení dvou bodových nábojů (2.1) a definiční rovnice (2.7) lze snadno získat vztah pro intenzitu elektrického pole v okolí bodového náboje. Je to základní elementární vztah pro určení intenzity elektrického pole buzeného nejjednodušším možným zkoumaným objektem. Z tohoto vztahu se budou odvíjet další úvahy a vycházet vztahy pro intenzitu elektrického pole složitějších nabitych těles. Konkrétně v případě podle Obr.11 vybudí tedy náboj Q_1 v místě, kde se nachází náboj Q_2 , elektrické pole s intenzitou:

$$\mathbf{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \mathbf{r}_{12} \quad (2.9)$$

Vybuzené elektrické pole potom zpětně působí na náboj Q_2 silou, která je dána (po kontrolním zpětném dosazení) výše definovaným Coulombovým zákonem:

$$\mathbf{F}_{21} = Q_2 \mathbf{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{r}_{12} \quad (2.10)$$



Obr.13 Elektrické pole bodového náboje

Obecně tedy vybudí libovolný bodový náboj Q podle Obr.13 v daném místě orientovaném ve směru jednotkového vektoru \mathbf{r}_O a ve vzdálenosti dané poloměrem r elektrické pole s intenzitou:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{r}_O \quad (2.11)$$

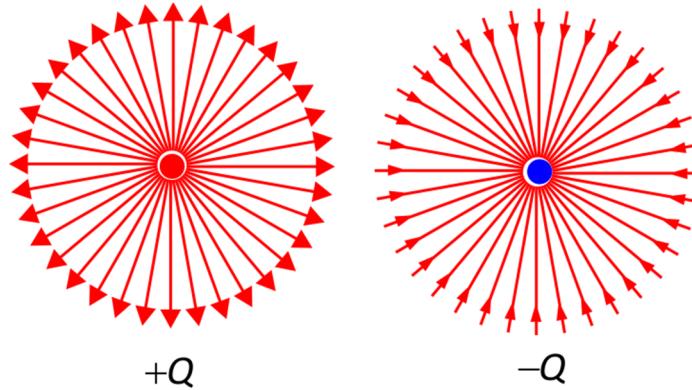
Poznámka

Z matematického pohledu, přestože to nebylo předem zdůrazněno, představuje vztah pro intenzitu elektrického pole bodového náboje vektorovou funkci popsanou ve sférické soustavě souřadnic s počátkem v místě tohoto náboje (viz kapitola 8.1.3). V této soustavě má intenzita elektrického pole bodového náboje pouze radiální složku a ta je funkcí pouze poloměru vzdálenosti. Není funkcí úhlů φ , θ ve sférické soustavě - kdekoliv na sférické ploše o poloměru r je intenzita elektrického pole co do velikosti konstantní a má pouze radiální směr. Ostatní složky vektoru jsou nulové.

2.1.6 Siločáry elektrického pole kladného a záporného bodového náboje

S ohledem na definici siločar elektrického pole, které v každém místě ukazují směr vektoru intenzity elektrického pole, siločáry z kladného náboje paprskovitě vystupují (viz Obr.14). Ve vztahu (2.11) je to matematicky popsáno pomocí jednotkového vektoru \mathbf{r}_O , který ukazuje po spojnici od náboje k místu, kde je počítáno pole. Je to rovněž v souladu s definicí intenzity elektrického pole, která udává směr a velikost síly působící na jednotkový kladný náboj. V tomto případě by byla tato síla odpudivá, protože se dva kladné náboje, kladný budící a vložený kontrolní kladný jednotkový, odpuzují. Tvar siločar elektrického pole vypadá podobně, jako by elektrické pole z kladných nábojů pomyslně vytékal rovnoměrně na všechny strany do prostoru. Kladné náboje se někdy označují jako „zřídla“ vytékajícího elektrického pole.

Do záporného náboje naopak siločáry vstupují, je to opačný směr než má jednotkový vektor \mathbf{r}_O , síla působící na jiný (jednotkový) kladný náboj v tomto elektrickém poli je přitažlivá. Tvar siločar elektrického pole vypadá tak, jakoby elektrické pole rovnoměrně vtékal z prostoru do záporného náboje. Záporné náboje se někdy označují jako „nory“ pro vtékající elektrické pole.



Obr.14 Elektrické pole kladného a záporného bodového náboje

2.2 Výchozí vztahy pro stacionární magnetické pole, síla v magnetickém poli, definice magnetické indukce

<p><i>Předchozí nutná znalost</i></p>	
<p>8.3.2</p>	<p><i>Vektorový součin</i></p>

2.2.1 Vymezení pojmu stacionární magnetické pole

Stacionární magnetické pole je primárně buzené rovnoměrně se pohybujícími volnými náboji. V technické praxi zkoumáme především problémy, ve kterých se náboje nepohybují ve volném prostoru, ale ve vodičích ve formě elektrického proudu, který má v tomto případě konstantní časově neproměnnou hodnotu (stejnosměrný proud).

V obecném nestacionárním případě se při časových změnách elektrického proudu vybudí nestacionární elektromagnetické pole, které má neoddělitelnou elektrickou a magnetickou složku. V části 7 bude popsáno, jakým způsobem je v takovém případě magnetické pole svázáno s časovými změnami elektrického pole.

Při studiu stacionárního magnetického pole k časovým změnám elektrického pole nedochází.

V této části bude definováno několik důležitých veličin a budou popsány zákonitosti, které platí pro magnetické pole obecně. V části popisující nestacionární elektromagnetické pole bude ukázáno, v čem bylo stacionární magnetické pole specifické.

Stejným postupem jako ve stacionárním magnetickém poli lze navíc řešit velkou množinu technicky důležitých problémů, které se nazývají **kvazistacionární**. V těchto případech k časovým změnám elektrického proudu a potažmo i elektrického a magnetického pole dochází, tyto změny však nejsou natolik významné, aby se výsledek zásadně odlišoval od stacionárního řešení.

2.2.2 Síla v magnetickém poli mezi rovnoměrně se pohybujícími náboji

Vztah pro magnetickou sílu mezi dvěma abstraktními rovnoměrně se pohybujícími bodovými náboji je v první části zcela podobný Coulombovu zákonu pro elektrickou sílu, ve druhé části má relativně komplikovanější tvar. Kromě velikosti nábojů a jejich vzájemné polohy v něm vystupují i rychlosti, s jakými se náboje pohybují. Rychlosti pohybu jsou ve vztahu zakomponovány v podobě dvojného vektorového součinu, který zohledňuje vírovou povahu magnetického pole (2.12).

Tento zákon je nutné rovněž chápát jako další důležitý axiom, který je svým významem srovnatelný s Coulombovým zákonem v elektrickém poli: Nabité částice(náboje) objektivně existují a pokud se pohybují, působí na sebe magnetickou silou uvedené velikosti. Z čeho do dalších důsledků tato síla pochází, není v současné době dále vysvětlitelné.

Pro sílu v magnetickém poli platí vztah (viz Obr.15,Obr.16,Obr.17):

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \left[\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12}) \right] \quad (2.12)$$

\mathbf{r}_{12}

je jednotkový vektor, který je orientován po spojnici ve směru od budícího náboje k náboji, na kterém posuzujeme silové účinky.

r

je vzdálenost mezi náboji

Konstanta

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [\text{H/m}] \quad (2.13)$$

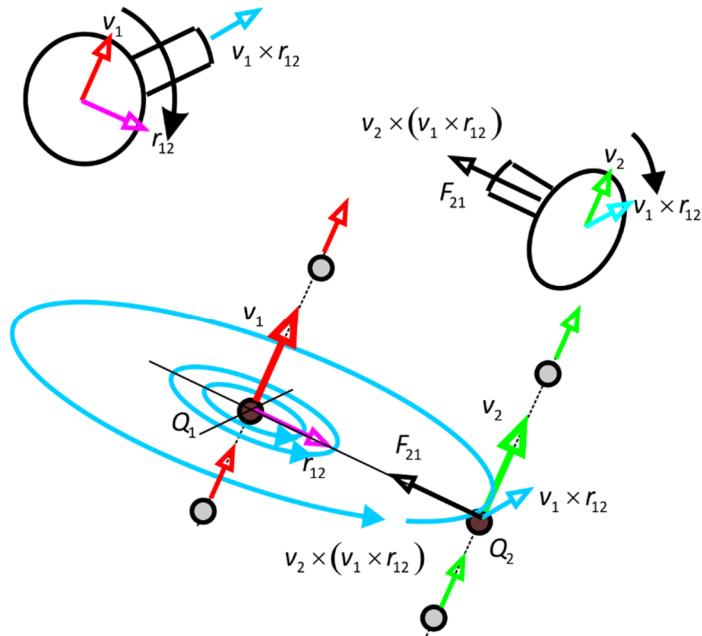
se nazývá permeabilita vakua, má jednotku [H/m]. Bude ukázáno, že tato veličina souvisí s definicí indukčnosti.

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$

vektory rychlostí pohybujících se nábojů

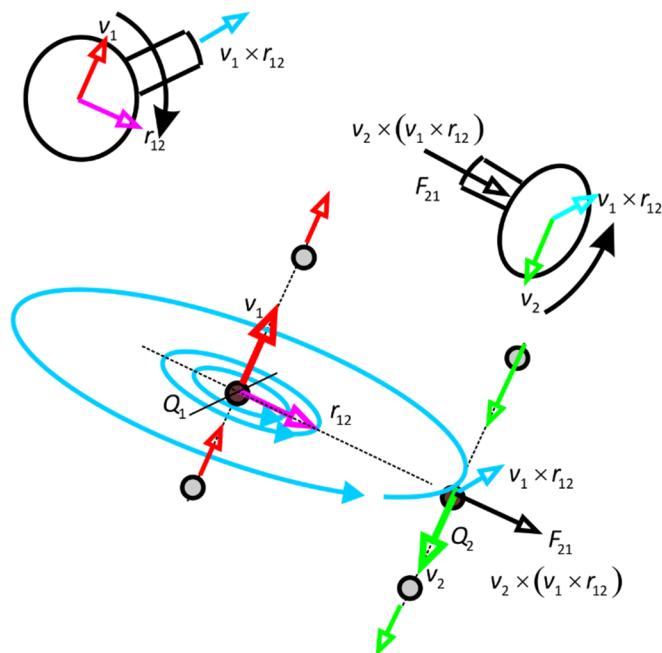
Při stanovení směru a velikosti síly je nutné postupně vyčíslit vektorové součiny v závorkách vztahu (2.12) v naznačeném sledu. Nejprve $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12}$ a následně zleva vektorově násobit rychlostí \mathbf{v}_2 . Pořadí ani sled operací není možné zaměňovat.

Na obrázku Obr.15 je znázorněna situace, kdy se náboje pohybují v paralelních liniích ve stejném směru. Mezi náboji působí v tomto případě přitažlivá síla. Na obrázku jsou graficky znázorněny vektory jako výsledky dílčích vektorových součinů s pomocí mnemotechnického pravidla „pravotočivého šroubu“ (viz 8.3.2).



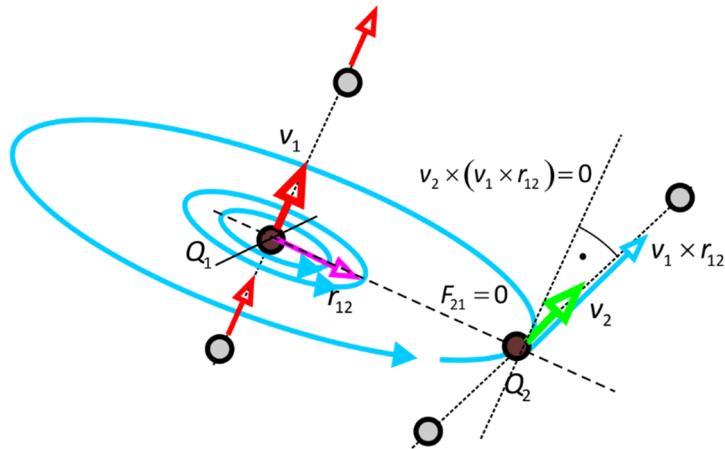
Obr.15 Náboje se pohybují v paralelních liniích ve stejném směru

Na náboje, které se pohybují v paralelních liniích v opačných směrech (Obr.16), působí odpudivá síla.



Obr.16 Náboje se pohybují v paralelních liniích v opačném směru

Pokud se náboje pohybují v navzájem kolmých směrech Obr.17, je síla mezi nimi nulová.



Obr.17 Náboje se pohybují v navzájem kolmých směrech

2.2.3 Definice magnetické indukce

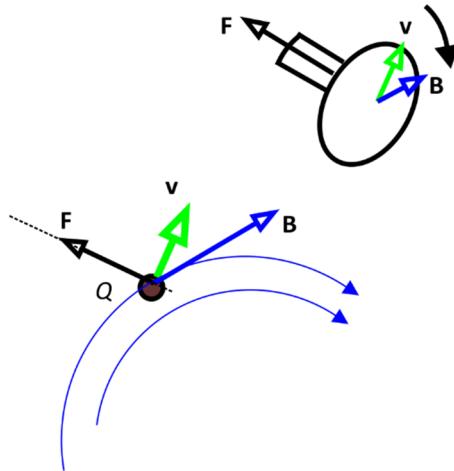
Podobně jako v elektrickém poli vycházíme z představy, že v okolí pohybujících se elektrických nábojů vzniká magnetické pole bez ohledu na to, jestli je přítomen nějaký jiný náboj, na kterém silové účinky tohoto magnetického pole posuzujeme.

Ve stacionárním případě je tento pohled opět problematický a nedá se jednoduše prohlásit, že se nejedná o sílu vzájemného působení dvou nábojů. V nestacionárním případě však magnetické pole jako složka obecného elektromagnetického pole skutečně existuje a může se šířit v prostoru v podobě elektromagnetické vlny, která přenáší energii. Po vybuzení tato vlna existuje i bez zdrojů, které ji vyvolaly.

Pro popis silových účinků v magnetickém poli se zavádí „silová“ veličina, která se nazývá **magnetická indukce** a označuje se **B**. Pokud vložíme do daného místa v magnetickém poli, ve kterém má magnetická

indukce velikost \mathbf{B} , kladný bodový náboj Q , který se pohybuje v daném směru rychlostí \mathbf{v} , působí na tento náboj podle definičního vztahu pro magnetickou indukci síla \mathbf{F} (2.14) (viz Obr.18):

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.14)$$



Obr.18 Magnetická indukce, siločáry magnetického pole

Jednotkou magnetické indukce je Tesla [T]. Síla v magnetickém poli je kolmá na rovinu, ve které leží vektor magnetické indukce \mathbf{B} a vektor rychlosti pohybujícího se náboje \mathbf{v} . Orientace je dána kladným smyslem podle definovaného vektorového součinu a na obrázku je znázorněna pomocí pravidla pravotočivého šroubu. Směr magnetického pole znázorňují siločáry magnetického pole, vektor magnetické indukce je v každém místě k siločáře tečný.

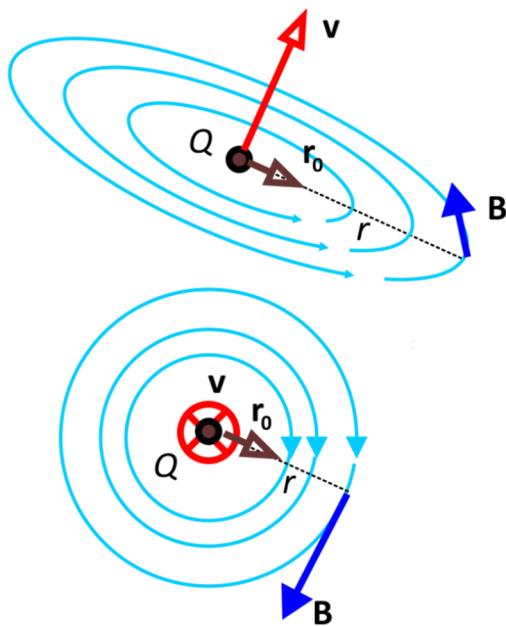
2.2.4 Magnetická indukce rovnoměrně se pohybujícího bodového náboje

Porovnáním vztahu (2.12) a definiční rovnice (2.14) lze snadno určit magnetickou indukci buzenou jedním rovnoměrně se pohybujícím kladným bodovým nábojem. Konkrétně v případě podle (Obr.15, Obr.16, Obr.17) by platilo, že náboj Q_1 vybudí v místě, kde se nachází náboj Q_2 , magnetické pole s magnetickou indukcí \mathbf{B}_{12} :

$$\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1}{r^2} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12}) \quad (2.15)$$

Toto magnetické pole působí zpětně ně náboj Q_2 magnetickou silou, jejíž velikost po zpětném dosazení musí odpovídat výchozímu vztahu (2.12):

$$\mathbf{F}_{21} = Q_2 (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_{12}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} [\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12})] \quad (2.16)$$



Obr.19 Magnetické pole letícího bodového náboje

Obecně tedy vybudí jeden pohybující se bodový náboj v daném místě orientovaném ve směru jednotkového vektoru \mathbf{r}_0 a ve vzdálenosti dané poloměrem r magnetickou indukci (viz Obr.19) o velikosti:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0) \quad (2.17)$$

Siločáry magnetického pole, které ukazují směr magnetické indukce, tvoří kolem letícího náboje uzavřené kruhové linie (víry magnetického pole). Směr linií magnetického pole lze určit mnemotechnickým pravidlem pravé ruky: Pokud bychom pomyslně obemkli dlaní a prosty pravé ruky dráhu pohybujícího se náboje a palec pravé ruky by ukazoval směr pohybu, zahnuté prsty ukáží směr siločar magnetického pole.

2.3 Lorenzova síla

Lorenzovou sílou se nazývá celková síla působící obecně na náboj pohybující se v elektromagnetickém poli. Má složku elektrickou (2.7) a magnetickou (2.14):

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.18)$$

3 Obecné vlastnosti elektrostatického pole

3.1 Gaussova věta elektrostatiky, divergence vektorové funkce

Předchozí znalosti, které jsou nezbytně nutné pro pochopení dalšího textu	
8.3.1	Skalární součin dvou vektorů

8.5	<i>Tok vektorové veličiny plochou, tok uzavřenou plochou, divergence vektorové funkce</i>
-----	---

3.1.1 Gaussova věta elektrostatiky

Tvar elektrického pole a matematické vztahy, které jej popisují (viz elektrické pole bodového náboje **2.1.5, 2.1.6**), opravedlňují naší představu elektrického pole pomyslně vytékajícího z kladných nábojů a vtékajícího do záporných nábojů. Že tomu tak opravdu je, je analogicky vysvětleno v části **8.5, 8.5.2**, která pojednává o problému toků obecného média uzavřenou plochou, pokud jsou zdroje tohoto média uvnitř nebo vně plochy. V následující části bude ukázáno, že pro intenzitu elektrického pole formálně platí zcela stejná integrální rovnice, která se nazývá Gaussova věta elektrostatiky.

3.1.1.a Obecné znění Gaussovy věty elektrostatiky

Tato věta je velice důležitá pro další teoretické úvahy i pro řešení konkrétních problémů v elektrickém poli. Rovnice matematicky popisuje situaci, ve které je v určitém objemu V rozmištěn celkový náboj Q s objemovou hustotou ρ . V této souvislosti se jedná o náboj v abstraktním pojetí bez bližší specifikace, zda je to konkrétně náboj volný či vázaný (viz **1.2.3, 3.2.1, 3.2.2**). Celkovým nábojem se tedy rozumí volný i vázaný.

$$\oint\limits_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\iiint_V \rho dV}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

Náboj vybudí v prostoru elektrické pole. Jaká bude jeho konkrétní velikost v určitém místě, závisí na rozmištění náboje a jeho velikosti, zatím umíme vypočítat elektrické pole pouze bodového náboje.

Pokud intenzitu vybuzeného elektrického pole integrujeme po uzavřené ploše kolem tohoto objemu (3.1), bude výsledek vždy roven podílu velikosti náboje a permitivity vakua: $\frac{Q}{\epsilon_0}$. Integrací se v tomto případě rozumí

postup, při kterém v každém místě uzavřené plochy vypočteme skalární součin intenzity vybuzeného elektrického pole \mathbf{E} a vektorového elementu plochy $d\mathbf{S}$, který je na tuto plochu kolmý. Tento postup opakujeme pomyslně pro všechny elementy uzavřené plochy a dílčí výsledky integrací sečteme.

Jak je patrné z matematického popisu rovnice (3.1), Výsledek integrace není vůbec závislý na tom, jak je náboj konkrétně uvnitř objemu rozmištěn. Mohou to být jednotlivé bodové náboje, nabité těleso, či celkový náboj spojitě rozmištěný v daném objemu. Nezávisí ani na tvaru uzavřené plochy kolem tohoto objemu, ale výlučně na velikosti náboje, který je plochou obemknut.

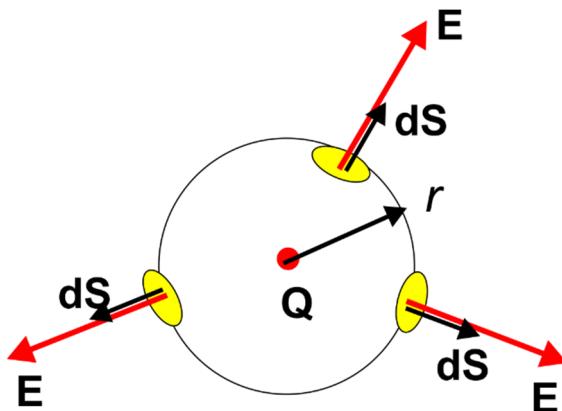
Při porovnání rovnic pro vytékající médium, jak bylo popsáno v části **8.5**, a rovnice (3.1) je patrné, že se celý problém chová tak, jako by z elektrických nábojů, které zde představují zdroj o mohutnosti $\frac{Q}{\epsilon_0}$, vytékal do

prostoru pomyslný celkový tok neviditelného elektrického pole ψ_{E_cel} o velikosti $\frac{Q}{\epsilon_0}$. Intenzita elektrického pole \mathbf{E} v této souvislosti představuje plošnou hustotu tohoto toku: $\psi_{E_cel} = \oint\limits_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

Pozn.: Se stejnou logikou bude v další části zaveden elektrický indukční tok ψ , který bude souviseť s elektrickou indukcí \mathbf{D} , jako jeho plošnou hustotou: $\psi = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$. Elektrická indukce se bude týkat pouze volného náboje: $\Psi_{cel} = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_0$. Tako zavedený indukční tok má totiž velký význam v další teorii elektromagnetického pole. Jeho časové změna $\frac{d\psi}{dt}$ souvisí s „indukovaným“ magnetickým polem a nazývá se Maxwellův posuvný proud.

3.1.1.b Platnost Gaussovy věty elektrostatiky pro jeden bodový náboj umístěný uprostřed uzavřené sférické plochy

Nejsnadnější je ukázat, že rovnice (3.1) platí pro elektrické pole bodového náboje, který je obklopen uzavřenou sférickou plochou se středem v místě náboje Obr.20.



Obr.20 Gaussova věta pro bodový náboj

Podle Obr.20 lze skalární součin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ v integrálu vztahu (3.1) zapsat jednoduchým způsobem. Vektory intenzity elektrického pole \mathbf{E} a elementární vektory orientované plochy $d\mathbf{S}$ jsou v každém místě sférické obalové ploše rovnoběžné, skalární součin dvou vektorů je možné zaměnit prostým algebraickým součinem:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{E}| |d\mathbf{S}| \cos(0) = E dS \quad (3.2)$$

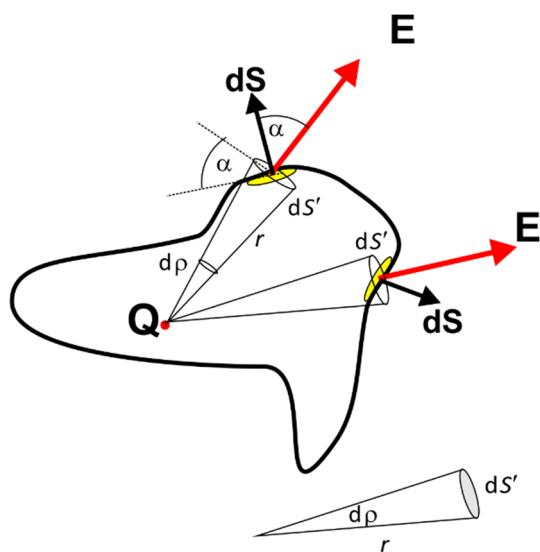
Na sférické obalové ploše, která má velikost $4\pi r^2$, se všechny body nacházejí na konstantním poloměru vzdálenosti od bodového náboje, který leží uprostřed. Intenzita elektrického pole zde musí být z důvodu symetrie a kauzality všude stejně veliká (viz část 2.1.5) a má velikost: $E(r) = \text{konst} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Po dosazení do vztahu (3.1) potom platí skutečně:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S E dS = E(r) \iint_S dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.3)$$

3.1.1.c Platnost Gaussovy věty elektrostatiky pro bodový náboj a uzavřenou plochu libovolného tvaru

V této části je ukázáno, že Gaussova věta elektrostatiky platí rovněž v případě, kdy má obalová plocha kolem bodového náboje obecný tvar (viz Obr.21). Z této skutečnosti je potom možné učinit závěr, že Gaussova věta musí platit i pro libovolný počet bodových nábojů a potažmo i pro celé nabité těleso, či prostorově rozložený náboj v dané uzavřené ploše libovolného tvaru.



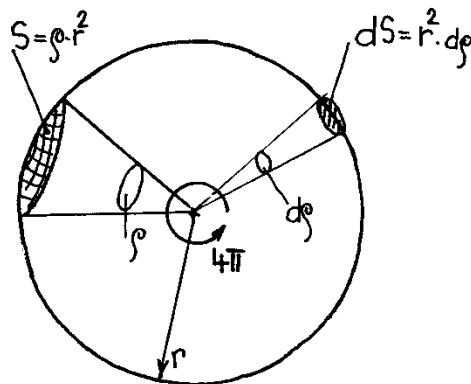
Obr.21 Gaussova věta, plocha obecného tvaru

Pro dokázání platnosti je možné prostor kolem náboje jako bodového zdroje elektrického pole rozdělit na pomyslné elementární kužele a zkoumat poměrnou část elektrického toku, který těmito kužely prochází. Pro podobné úlohy se zavádí pojem prostorového úhlu, a to zcela analogicky, jako je tomu u úhlu v rovině, který je vyjádřen v obloukové míře.

Prostorový úhel příslušející určitému kuželu udává poměrnou část plochy, kterou tento kužel vytkne při daném poloměru na sférické obalové ploše, která má celkovou velikost $4\pi r^2$. Prostorový úhel nabývá hodnoty od 0 do 4π steradiánů [sr] a vytkne na obalové ploše vrchlík s plochou (viz Obr.21, Obr.22):

$$S = \rho r^2$$

Je patrné, že prostorový úhel 4π zahrnuje celý prostor a vytknutá plocha je celá sférická obalová plocha $S = 4\pi r^2$. Pro prostorový elementární úhel $d\rho$, kterým je vymezen elementární kužel, bude poměrná velikost vytknuté elementární plochy dána vztahem: $dS = r^2 d\rho$ (Obr.22).



Obr.22 Prostorový úhel

Velikost elektrického toku, který teče v daném místě o vzdálenosti r obecně natočenou elementární plochou $d\mathbf{S}$ (Obr.21) je:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{E}| |d\mathbf{S}| \cos(\alpha) = E(r) dS' \quad (3.4)$$

Je patrné, že dS' je průměr elementárního vektoru plochy v daném místě $d\mathbf{S}$ do směru kolmého na spojnici k bodovému náboji (kolmého na intenzitu elektrického pole) a je možné jej na určitém poloměru r vyjádřit pomocí již zmíněného prostorového úhlu elementárního kuželeta $d\phi$:

$$dS' = r^2 d\phi \quad (3.5)$$

Tok procházející elementárním kuželem potom bude:

$$E(r) dS' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\phi \quad (3.6)$$

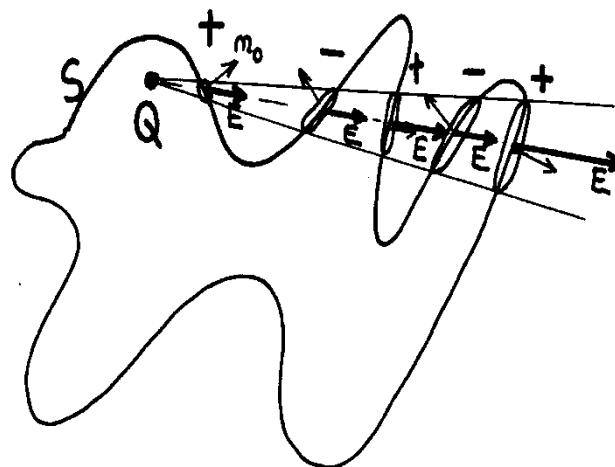
Z (3.6) je patrné, že tok libovolným elementárním kuželem není závislý na poloměru vzdálenosti. S kvadrátem vzdálenosti klesá velikost intenzity elektrického pole, ve stejném poměru se však zvětšuje velikost vytknuté elementární plochy. Výsledný tok uzavřenou plochou je potom opět dán součtem toků všemi elementárními kuželi (přes celý prostor – prostorový úhel 4π):

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{4\pi} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.7)$$

3.1.1.d Členitá uzavřená plocha

Pokud má obalová plocha složitý tvar Obr.23, elektrický tok procházející některým z elementárních kuželů může protínat tuto plochu na několika místech. **Vstupující elektrický tok je však s ohledem na orientaci vektoru elementární plochy ve směru vnější normály záporný a vystupující kladný (viz 8.5.2).** Elektrický

tok každým vytknutým elementárním kuželem vstupuje na sudém počtu míst a vystupuje na lichém, hodnoty s kladným a záporným znaménkem se navzájem odečtou, výsledek je opět hodnota stejná jako ve (3.7).

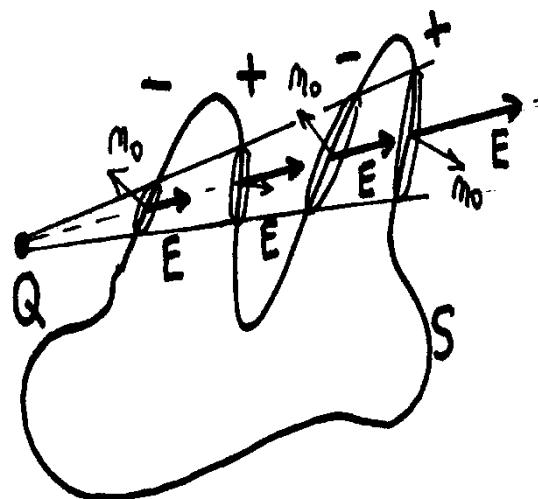


Obr.23 Členitá uzavřená plocha

3.1.1.e Náboj ležící mimo uzavřenou plochu

Pokud náboj leží vně uzavřené plochy (Obr.24), elektrický tok každým elementárním kuželem na stejném počtu míst do plochy vstupuje i vystupuje, celková součtová hodnota je nulová.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.8)$$



Obr.24 Náboj leží vně plochy

3.1.2 Elektrické pole v bodě, divergence vektorové funkce, Gaussova věta elektrostatiky v diferenciálním tvaru

Elektrické pole, jak bylo ukázáno v části **2.1.5 a 2.1.6**, se chová tak, jakoby pomyslně vytékal z kladných nábojů a vtékalo do záporných. Následně bude popsáno, jak lze uvedenou vlastnost zobecnit a popsat v jednom bodě prostoru. Takový postup je velice důležitý pro jakékoliv další úvahy o elektrickém poli i elektromagnetickém poli obecně, neboť poslouží k nalezení obecných zákonitostí, jejichž zkoumání je v integrální podobě rovnic nemožné.

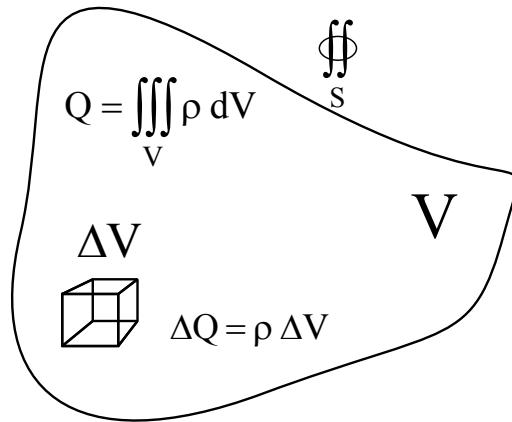
Předpokládejme, že máme vymezený objem V , ve kterém je rozmístěn elektrický náboj s objemovou hustotou ρ (Obr.25). Celkový náboj uzavřený v ploše je potom:

$$Q = \iiint_V \rho \, dV$$

a platí Gaussova věta elektrostatiky:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\iiint_V \rho \, dV}{\epsilon_0}$$

Pokud vytkneme v určitém místě elementární objem ΔV dostatečně malý, abychom mohli předpokládat, že je zde objemová hustota náboje konstantní a její velikost je ρ (celkový náboj – volný i vázaný), platí samozřejmě i v tomto případě Gaussova věta elektrostatiky (3.1), ale objemový integrál hustoty náboje lze nahradit prostým algebraickým součinem.



Obr.25 Pojem divergence vektorové funkce

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0} \quad (3.9)$$

Pokud výsledný tok intenzity elektrického pole přes uzavřenou plochu obklopující elementární objem dělíme velikostí objemu a objem necháme limitovat k nule, dostáváme matematický operátor, která se nazývá divergence vektorové funkce (v tomto případě intenzity elektrického pole). **Divergenci je možné slovně**

popsat jako „objemovou hustotu výtoku“, tedy jako množství toku intenzity elektrického pole, které vytéká z jednotky objemu:

$$\text{div } \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.10)$$

Zpětnou úvahou potom dojdeme k dalším závěrům. Pokud z jednotky objemu vytče množství $\text{div } \mathbf{E}$, z elementárního objemu dV potom množství $\text{div } \mathbf{E} dV$. Zpětnou integrací pro konečný objem V obklopený uzavřenou plochou S musí potom platit, že celkové množství, které vytče z celého objemu, proteče uzavřenou obalovou plochou kolem tohoto objemu (viz Gaussova věta 8.5.3):

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \text{div } \mathbf{E} dV = \frac{\iiint_V \rho dV}{\epsilon_0} \quad (3.11)$$

Porovnáním levé a pravé strany rovnice (3.11) dostáváme vztah, který se označuje jako **Gaussova věta elektrostatiky v diferenciálním tvaru**:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.12)$$

3.2 Elektrické pole v materiálech s různými vlastnostmi

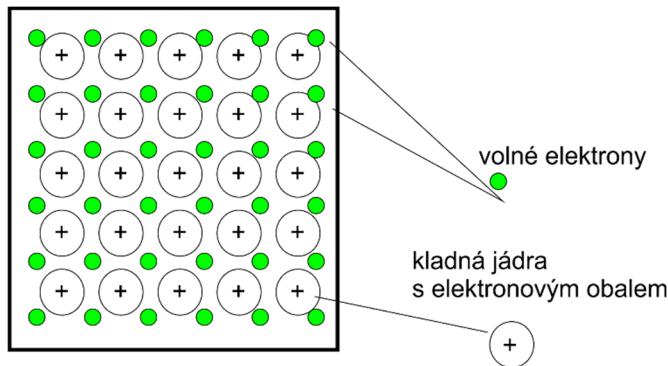
V předchozích částech bylo uvedeno, že elektrické pole je buzeno elektrickými náboji (nabitými částicemi – elektrony a protony). S ohledem na tuto skutečnost byly intuitivně popsány základní mechanizmy vzniku elektrického pole pro dva odlišné druhy materiálu – **vodiče a dielektrika**. Náboje byly rozděleny do dvou důležitých skupin – na **volné a vázané** (viz část 1.2.3).

Obecné vlastnosti elektrického pole byly v části 3 dále popisovány pro elektrické náboje bez bližší specifikace jejich výskytu. Pro exaktní popis působení elektrických nábojů v různých materiálech je nutné specifickým způsobem započítat účinky jak volných, tak vázaných nábojů.

3.2.1 Elektrické pole volných nábojů ve vodičích

3.2.1.a Vodič v neutrálním stavu

Elektricky vodivé materiály se vyznačují tím, že mají k dispozici volné nosiče náboje (viz 1.2.3.a). V teorii elektromagnetického pole se v obecných úvahách často kalkuluje s hypotetickými kladnými volnými náboji, ve skutečnosti se však jedná o záporně nabité elektrony. Ve vodiči v neutrálním stavu je kladný náboj jader atomů vyvážený se záporným nábojem volně pohyblivých elektronů (Obr.26), vodiče se naveneck žádným elektromagnetickým působením neprojevují..

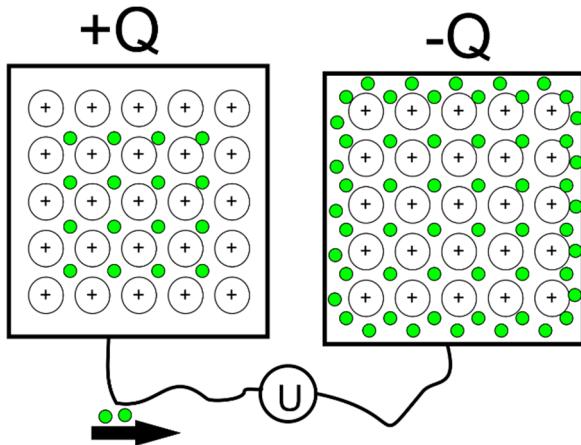


Obr.26 Volné nosiče náboje ve vodiči

3.2.1.b Elektrody nabité elektrickým nábojem

Přiložením zdroje napětí mezi dvě elektrody vykoná zdroj práci a přemístí část volných elektronů z jedné elektrody na druhou (Obr.27). Nábojová rovnováha se oproti neutrálnímu stavu poruší. U elektrody, která část elektronů ztratila, převládne kladný náboj a celá elektroda se jeví jako **kladně nabité**. U druhé elektrody převládne záporný náboj a tato elektroda se jeví jako **záporně nabité**. Kladný i záporný náboj je stejně velký, neboť se náboje pouze přemístily (Obr.27). V okolí elektrod se vytvoří elektrické pole, elektrody na sebe působí přitažlivou silou.

V každé elektrodě zůstává samozřejmě i nadále obrovský počet ostatních kladných i záporných nábojů, ty jsou však navzájem vyvážené a tvoří neutrální prostor. Při dalších úvahách je možné si všimnout pouze nábojů, které jsou ve vodiči navíc, nebo se jich naopak nedostává.

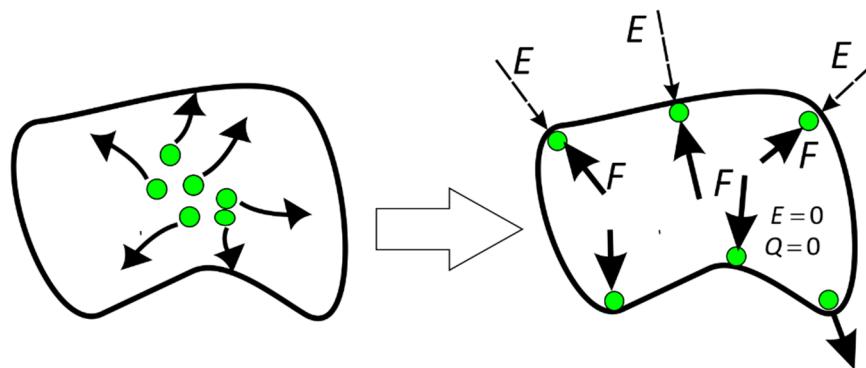


Obr.27 Dvě nabité vodivé elektrody

Volné elektrony, které v záporně nabitém tělesu převládají, se vlivem vzájemných odpudivých sil **přemístí na povrch tělesa** (viz Obr.28 napravo). Zde zaujmou takové konečné místo, aby na ně působila pouze síla ve směru kolmém k povrchu, a potom se již dále nemohou pohybovat. Intenzita elektrického pole, která udává sílu na jednotkový kladný náboj, je tedy orientována kolmo do povrchu záporně nabitého tělesa (viz Obr.28).

Volné elektrony, kterých je u kladně nabitého tělesa nedostatek, se pomyslně stlačí dovnitř (Obr.27), na povrchu vznikne ekvivalentní kladný náboj. Z kladně nabité elektrody intenzita elektrického pole vystupuje.

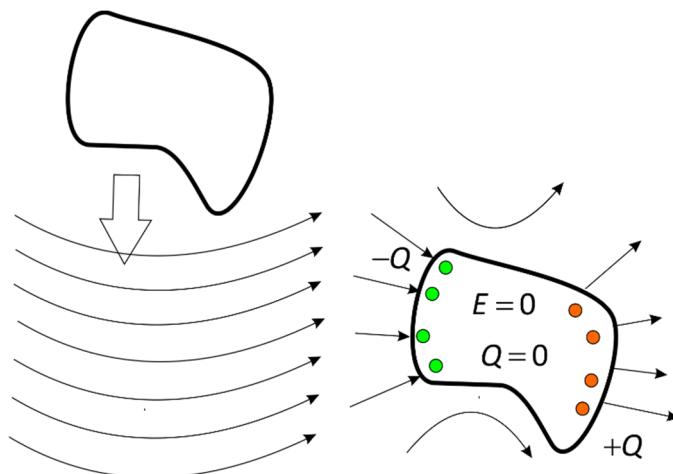
V ustáleném stavu se náboje uvnitř vodivého tělesa již nikam nepohybují a nepůsobí na ně žádná elektrická síla. Intenzita elektrického pole uvnitř je nulová. **Z pohledu superpozice se volné náboje na povrchu rozmístí tak, aby uvnitř tělesa zajistily nulovou intenzitu elektrického pole (Obr.28).**



Obr.28 Náboj umístěný na povrchu záporně nabitého vodivého tělesa

3.2.1.c Vodivé těleso vložené do elektrického pole

Pokud by se do vnějšího elektrického pole vložilo elektricky vodivé těleso s volně pohyblivými elektrony, elektrony se posunou proti směru působící intenzity elektrického pole a vytvoří na jedné straně tělesa záporný náboj. Na druhé straně zůstane celkový kladný náboj. Náboje se opět rozmístí na povrchu tělesa tak, aby vytvořily uvnitř tělesa nulovou intenzitu elektrického pole (Obr.29). Ve svém objemu tak eliminují intenzitu vnějšího elektrického pole. Siločáry vnějšího elektrického pole se zdeformují a do vodivého tělesa vstoupí opět kolmo.



Obr.29 Vodivé těleso vložené do vnějšího elektrického pole

3.2.2 Elektrické pole v dielektriku

3.2.2.a Dielektrické materiály v neutrálním stavu

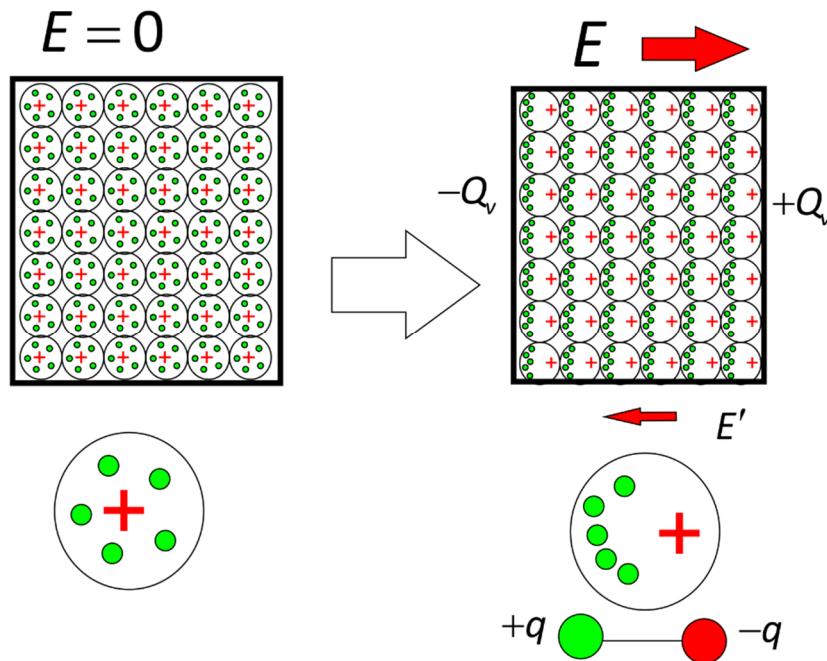
V dielektrickém materiálu se za normálních okolností žádné volné nosiče náboje nevyskytuje, elektrony jsou pevně vázané k jádru atomů. Nabité částice jsou bez vnějšího elektrického pole rozmístěny tak, že je dokonale vyvážen kladný a záporný elektrický náboj (Obr.30 vlevo), dielektrické těleso navenek nevykazuje žádné elektrické účinky.

3.2.2.b Dielektrické materiály ve vnějším elektrickém poli

Po vložení dielektrického materiálu do vnějšího elektrického pole se může navzájem posunout těžiště kladných nábojů (protonů v jádrech) a záporných nábojů (elektronů v elektronovém obalu). Vzniknou tak navzájem pevně vázané dvojice nábojů, které se nazývají **elektrické dipoly** (Obr.30 napravo). Uvnitř homogenního tělesa však zůstane stále rovnoměrně rozložený kladný a záporný náboj, neboť vedle sebe leží konce dipólů s opačným znaménkem. Výsledná objemová hustota náboje zůstane nulová. Pokud není těleso homogenní a nemá v každém místě stejný počet dipólů, vytvoří se nenulová objemová hustota vázaného náboje i uvnitř tělesa. Na povrchu tělesa, kde není vyvážený kladný a záporný náboj konců dipólů, se vytvoří povrchový kladný a záporný náboj, který se nazývá vázaný (Obr.30). Vázané náboje, stejně jako jakékoli jiné náboje, vytvárají své okolí elektrické pole (Obr.30).

Vázané náboje však není možné z jednoho tělesa přesunout na jiné těleso, jsou k tělesu pevně „vázány“. Po zániku vnějšího pole dipoly zaniknou, vázaný náboj vymizí. **Elektrické pole vázaných nábojů v dielektriku vznikne sekundárně jako reakce na elektrické pole volných nábojů.** Toto elektrické pole je orientováno s ohledem na posunuté náboje opačně a vnější pole ve svém objemu oslabí.

Pozn. V předchozích odstavcích byl intuitivně naznačen mechanizmus vzniku elektrických dipólů, který se nazývá elektronová polarizace. Tento mechanizmus je pro vysvětlení základního principu nevhodnější. Existují ovšem materiály, ve kterých se vytvářejí elektrické dipoly vlivem chemických vazeb i bez vnějšího elektrického pole. Tyto dipoly jsou však rozmístěny chaoticky a jejich účinky se vyruší. Po vložení do vnějšího elektrického pole se tyto dipoly natáčejí a pole oslabují. Existují i materiály, které vykazují elektrické účinky i bez vnějšího elektrického pole, elektrické dipoly jsou permanentně natočeny. Tyto materiály se nazývají elektrety.

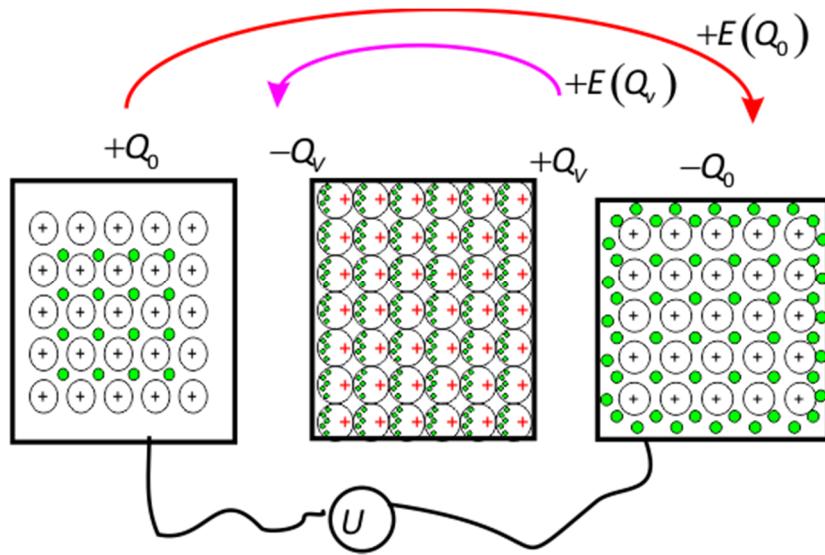


Obr.30 Elektrické pole v dielektrickém materiálu – elektrické dipoly

3.2.3 Sumární elektrické pole volných nábojů ve vodičích a vázaných nábojů v dielektrických materiálech

V soustavě, ve které se nacházejí vodivé elektrody s připojeným zdrojem napětí a současně i dielektrický materiál, je možné celý problém intuitivně chápát následujícím způsobem: Nahromaděné volné náboje na elektrodách **primárně vybudí elektrické pole** $+E(Q_0)$ (Obr.31). Toto elektrické pole posune vůči sobě

vázané kladné a záporné náboje v dielektriku (vytvoří nebo natočí dipóly). Vázané náboje potom rovněž vybudí elektrické pole $+E(Q_v)$, které elektrické pole volných nábojů oslabí (Obr.31).



Obr.31 Výsledné elektrické pole

V další části bude ukázáno, jak lze sumárně zohlednit účinky volných i vázaných nábojů. Toto zobecnění je možné udělat pouze při bodovém (diferenciálním popisu problému). Ve vztahu pro elektrické pole buzené v bodě celkovým nábojem s objemovou hustotou ρ v rovnici (3.12) je nutné zvlášť započítat vliv volného náboje s objemovou hustotou ρ_0 (viz část 3.2.5) i vázaného náboje s objemovou hustotou ρ_v (viz část 3.2.6):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 + \rho_v}{\epsilon_0}$$

Volné a vázané náboje mají odlišnou fyzikální podstatu. Volné náboje s objemovou hustotou ρ_0 lze posuzovat zcela stejně jako abstraktní bodové náboje v části 3. Vázané náboje se však vyskytují pouze v podobě dvojic kladných a záporných nábojů – dipólů, zohlednění jejich účinku bude odlišné.

3.2.4 Superpozice elektrického pole volných a vázaných nábojů, vztah mezi intenzitou elektrického pole E , elektrickou indukcí D a polarizací P

Pro správné pochopení této části je nutné souběžně prostudovat:

3.2.5	Započítání elektrického pole volných nábojů – elektrická indukce \mathbf{D} , elektrický indukční tok Ψ , Gaussova věta pro elektrickou indukci
3.2.6	Započítání elektrického pole vázaných nábojů – vektor polarizace \mathbf{P}

V rovnici (3.12), která byla odvozena obecně pro intenzitu elektrického pole a celkový náboj rozmístěný v objemu s objemovou hustotou ρ , je nutné separátně zahrnout objemovou hustotu volného i vázaného náboje:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{cel}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 + \rho_v}{\epsilon_0} \quad (3.13)$$

Objemová hustota volného náboje ρ_0 , jak je podrobně popsáno v části **3.2.5**, je vyjádřena pomocí nově zavedené vektorové veličiny, která se nazývá **elektrická indukce** \mathbf{D} , vztahem:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_0 \quad (3.14)$$

Jednotkou elektrické indukce je $[C/m^2]$. Elektrická indukce souvisí pouze s volnými náboji. Pokud chápeme volné náboje jako primární zdroje elektrického pole (viz **3.2.3**), lze elektrickou indukci v tomto ohledu chápout jako **primární „zdrojovou“ veličinu elektrického pole**.

Objemová hustota vázaného náboje ρ_v , jak je podrobně popsáno v **3.2.6**, je vyjádřena pomocí nově zavedené vektorové veličiny, která se nazývá **polarizace** \mathbf{P} , vztahem:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_v \quad (3.15)$$

Jednotkou polarizace je $[C/m^2]$. Polarizace souvisí pouze s vázanými náboji. Pokud chápeme vázané náboje jako „sekundární“ zdroje elektrického pole (viz **3.2.3**), polarizaci lze v tomto ohledu chápout jako **sekundární „zdrojovou“ veličinu elektrického pole**.

Po dosazení do rovnice (3.13) bude platit:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_0 + \rho_v}{\epsilon_0} = \frac{\operatorname{div} \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (3.16)$$

Po úpravě bude vzájemný vztah intenzity elektrického pole \mathbf{E} , elektrické indukce \mathbf{D} a polarizace \mathbf{P} :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (3.17)$$

E Výsledná intenzita elektrického pole buzená volnými i vázanými náboji

D Intenzita elektrického pole primárně buzená volnými náboji
 ϵ_0

P Intenzita elektrického pole sekundárně buzená vázanými náboji (dipóly)
 ϵ_0

Po přepsání:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.18)$$

Pro technicky zajímavé aplikace je možné celý problém zjednodušit. Polarizace \mathbf{P} je zcela jistě úměrná intenzitě elektrického pole \mathbf{E} . Čím větší bude intenzita elektrického pole, o to více se navzájem posunou vázané náboje v dipólu, o to větší bude dipólový moment a polarizace \mathbf{P} , která je objemovou hustotou dipólového momentu (viz 3.2.6). Polarizaci je tedy možné vyjádřit jako funkci intenzity elektrického pole. V podstatně části dielektrických materiálů navíc platí přímá úměra a pro vyjádření této závislosti se zavádí bezrozměrná konstanta χ_e , která se nazývá elektrická susceptibilita. Tato veličina představuje podíl mezi intenzitou elektrického pole vyvolaného vázanými náboji $\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$ a výslednou intenzitou elektrického pole \mathbf{E} :

$$\chi_e = \frac{\mathbf{P} / \epsilon_0}{\mathbf{E}}$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (3.19)$$

Po dosazení (3.19) do (3.18) je tedy celý jev polarizace reprezentován elektrickou susceptibilitou a následně další novou konstantou, která se nazývá relativní permitivita:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (3.20)$$

Relativní permitivita $\epsilon_r = 1 + \chi_e$. Je podílem intenzity elektrického pole vyvolaného volnými náboji $\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0}$ a výsledné intenzity elektrického pole \mathbf{E} , která je dána součtem pole volných i vázaných nábojů. Tato konstanta udává, kolikrát se elektrické pole vlivem vázaných nábojů oslavilo ve srovnání s elektrickým polem ve vakuu (vzduchu).

$$\epsilon_r = \frac{\mathbf{D} / \epsilon_0}{\mathbf{E}} \quad (3.21)$$

3.2.5 Započítání elektrického pole volných nábojů – elektrická indukce \mathbf{D} , elektrický indukční tok Ψ , Gaussova věta pro elektrickou indukci

V této části je zpětně zdůvodněno, jakým způsobem bylo možné v části 3.2.4, při posuzování výsledného působení volných i vázaných nábojů, započítat elektrické pole volných nábojů ve vodičích.

Na volné náboje můžeme pohlížet zcela stejně, jako na obecné hypotetické náboje v části 3.1. Volné náboje jsou **primárním zdrojem elektrického pole** a pro jejich zohlednění se zavádí nová „**zdrojová**“ veličina, která se nazývá **elektrická indukce \mathbf{D}** a její tok Ψ , který se nazývá **elektrický indukční tok**.

Elektrický indukční tok Ψ (Obr.32) pomyslně vytéká pouze z volných nábojů. Celková velikost indukčního toku Ψ_{cel} , který vytéká z náboje o velikosti Q_0 , je definována tak, že je rovna velikosti tohoto volného náboje Q_0 .

Elektrická indukce $\mathbf{D} [C/m^2]$ tedy představuje plošnou hustotu vytékajícího indukčního toku. Integrál elektrické indukce přes uzavřenou plochu musí být roven zdrojům, ze kterých elektrický indukční tok vytéká, což jsou v tomto případě právě volný náboje Q_0 s objemovou hustotou ρ_0 .

Pro elektrickou indukci tedy platí rovněž Gaussova věta elektrostatiky ale zde v poněkud modifikované podobě než v (3.1), náboj není dělen konstantou, která se nazývá permitivita vakuua ϵ_0 :

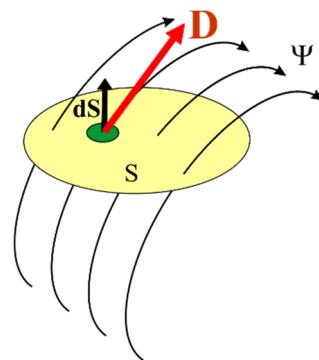
$$\Psi_{\text{cel}} = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_0 = \iiint_V \rho_0 dV \quad (3.22)$$

Pokud však takto definovanou elektrickou indukci permitivitou vakua ϵ_0 vydělíme, dostaneme intenzitu elektrického pole, kterou by budily pouze volné náboje:

$$\mathbf{E}(Q_0) = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0}$$

Pro elektrický indukční tok Ψ , pomyslně protékající libovolně natočenou plochou S a elektrickou indukcí \mathbf{D} , jako jeho plošnou hustotu, bude platit obecný vztah (viz 8.5):

$$\Psi = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.23)$$



Obr.32 Elektrická indukce a indukční tok

Z další části vyplýne, že takto definovaný **elektrický indukční tok má zcela zásadní význam** pro teorii elektromagnetického pole. V nestacionárním případě totiž časové změny tohoto toku $\frac{d\Psi}{dt}$ úzce souvisejí s časově proměnným magnetickým polem. Člen $\frac{d\Psi}{dt}$ je označen jako Maxwellův posuvný proud.

Při bodovém (diferenciálním) popisu (stejně jako v 8.5.4) je potom možné chápout divergenci elektrické indukce $\text{div } \mathbf{D}$ jako objemovou hustotu „výtoku“ elektrického indukčního toku. Tato hustota musí být rovna objemové hustotě volného náboje ρ_0 v daném místě:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_0 \quad (3.24)$$

Vztah (3.24) je použit v části **3.2.4** při posuzování výsledného působení volných i vázaných nábojů.

Rovnice (3.22) a (3.24) popisují „zřídlový“ charakter elektrického pole vytékajícího ze svých zdrojů (volných nábojů). Jsou součástí sady takzvaných Maxwellových rovnic (viz 7.4).

3.2.6 Započítání elektrického pole vázaných nábojů – vektor polarizace \mathbf{P}

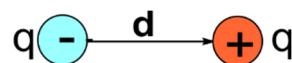
V této části je zpětně zdůvodněno, jakým způsobem bylo možné v části **3.2.4** při posuzování výsledného působení volných i vázaných nábojů započítat elektrické pole vázaných nábojů v dielektriku.

Účinek vázaných nábojů je nutné započítat odlišným způsobem, než tomu bylo u volných nábojů. Vázané náboje se nevyskytují samostatně, ale pouze v podobě dvojic kladných a záporných nábojů stejné velikosti – elektrických dipólů.

Pro popis tohoto problému se zavádějí další vektorové veličiny: dipólový moment \mathbf{p} a polarizace \mathbf{P} .

Dipólový moment je dán součinem velikosti náboje q a orientované vzdálenosti mezi náboji v dipólu \mathbf{d} . Orientace směřuje od záporného náboje ke kladnému (ve směru „posunu“ kladného náboje).

$$\mathbf{p} = q \mathbf{d} \quad (3.25)$$

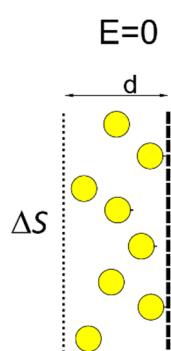


Obr.33 Elektrický dipól

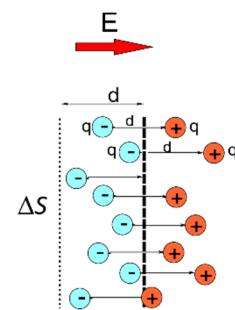
Dále se zavádí vektorová veličina, která se nazývá polarizace a značí $\mathbf{P} \left[\text{C/m}^2 \right]$. Tato veličina udává v daném místě objemovou hustotu dipólového momentu:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V} \quad (3.26)$$

Fyzikální význam takto definované polarizace \mathbf{P} je možné posoudit z následující jednoduché úvahy: Z dielektrického materiálu vyjmeme elementární objem o velikosti $\Delta V = \Delta S d$ (Obr.34). Vzdálenost d je zvolena tak, že udává, o kolik se posunou vázané náboje při polarizaci.



Obr.34 Element objemu před polarizací



Obr.35 Element objemu po polarizaci

Pokud budeme předpokládat, že v daném objemu je obsaženo n atomů a po polarizaci z nich vnikne n dipólů s dipólovým momentem $p = q d$ (Obr.34,Obr.35), bude pro definovanou polarizaci P v souladu s (3.26) platit:

$$P = \frac{n p}{\Delta V} = \frac{n q d}{\Delta S d} = \frac{n q}{\Delta S} = \frac{\Delta Q_v}{\Delta S} \quad (3.27)$$

Polarizace je tedy dána podílem celkového vázaného náboje ΔQ_v (vysunuté konce dipólů), který prošel při polarizaci plochou ΔS , a této plochy. Je to **plošná hustota vázaného náboje**. Je to náboj, který by se posunul při polarizaci jednotkou plochy v daném místě, pokud by tato plocha byla natočena kolmo na směr posunu prostopojícího vázaného náboje.

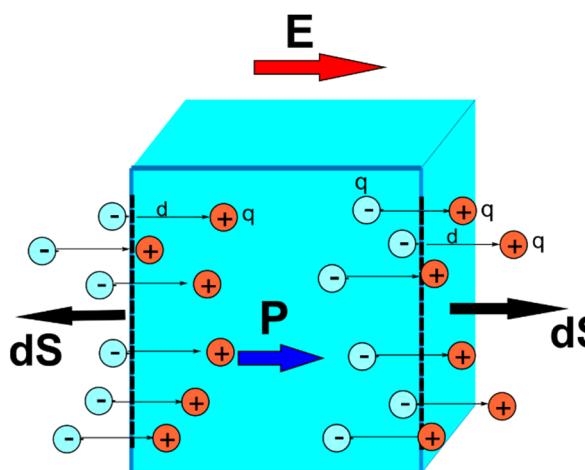
Pokud budeme uvažovat libovolně natočenou elementární plochu dS , lze dílčí vázaný náboj, který touto plochou prošel, vyjádřit standardně pomocí skalárního součinu:

$$dQ_v = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.28)$$

Celkový vázaný náboj, který projde (posune se) obecně tvarovanou plochou, je potom:

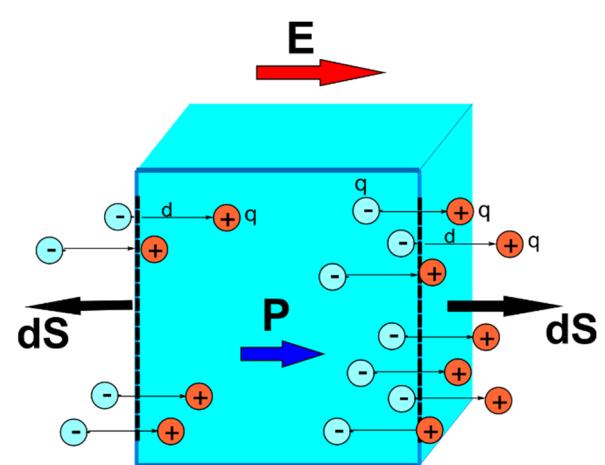
$$Q_v = \iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.29)$$

Velikost objemové hustoty vázaného náboje ve vztahu k polarizaci v daném bodě lze určit další jednoduchou úvahou.



Obr.36

Polarizace v homogenním dielektriku



Obr.37

Polarizace v nehomogenním dielektriku

Pokud vytkneme z polarizovaného tělesa elementární objem o velikosti ΔV (Obr.36, Obr.37), a vypočítáme vázaný náboj ΔQ_v , co v podobě konců dipólů vstoupí nebo vystoupí do tohoto objemu uzavřenou plochou kolem daného objemu, bude obecně platit:

$$\iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\Delta Q_v = -\rho_v \Delta V \quad (3.30)$$

V daném elementárním objemu vznikne vázaný náboj s objemovou hustotou ρ_v . Znaménko míinus vyplyná ze znaménkové konvence. Dipólový moment a potažmo i polarizace udávají směr posunu kladného náboje. Pokud je element plochy dS orientován ve směru vnější normály (ven z objemu) je skalární součin $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$ kladný v případě, že kladný náboj se posunul (vystoupil) z objemu ven. Pro kladný náboj, který do objemu

vstoupil, je skalární součin $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$ záporný. Pokud bude celý výsledek integrace $\iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$ kladný, znamená to, že více kladného náboje z daného objemu vystoupilo, než do něho vstoupilo. Potom se to musí projevit tím, že v objemu ΔV bude převládat záporný náboj s objemovou hustotou ρ_v (Obr.37).

To by platilo v nehomogenném dielektriku, kde jsou dipoly rozmístěny nerovnoměrně. V homogenním dielektriku by byl výsledek nulový, neboť by vstoupil stejně velký kladný i záporný náboj (Obr.36), protože počet dipólů by byl všude stejný.

$$\iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

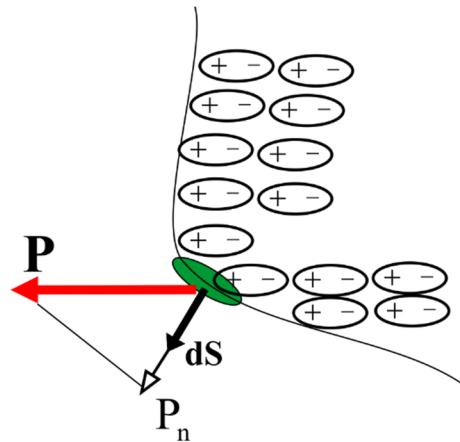
S ohledem na definovanou divergenci vektorové funkce, kterou je v tomto případě polarizace (viz 8.5.3), lze vyjádřit objemovou hustotu vázaného náboje v daném místě. Je to celkový vázaný náboj, který prostoupí obalovou plochou elementárního objemu, dělený tímto objemem:

$$\text{div } \mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = -\rho_v \quad (3.31)$$

V homogenním dielektriku, ve kterém je v každém místě stejný počet elektrických dipólů, bude analogicky platit:

$$\text{div } \mathbf{P} = 0 \quad (3.32)$$

Na povrchu dielektrika, kde se po polarizaci pomyslně nacházejí nevykompenzované konce dipólů, bude vázaný náboj rozložen s plošnou hustotou σ_v , jejíž velikost je možné vyčíslit průmětem vektoru polarizace do plochy v daném místě. Plošná hustota vázaného náboje je rovna normálové složce polarizace v daném místě.



$$dQ_v = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{P}| \cdot |d\mathbf{S}| \cos(\alpha) = P_n dS = \sigma_v dS$$

$$\sigma_v = P_n$$

4 Práce a energie v elektrickém poli, napětí, potenciál, kapacita

4.1 Práce v elektrickém poli, pojem napětí a potenciálu

Pro správné pochopení této části je nezbytně nutné prostudovat:

8.6

Integrace vektorové funkce po dráze, cirkulace vektorové funkce, rotace, Stokesova věta

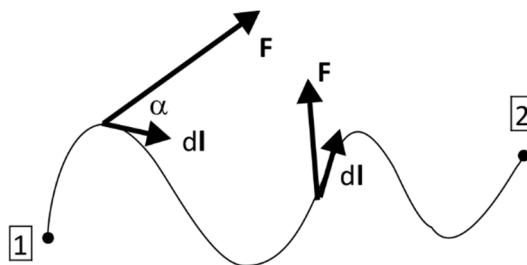
4.1.1 Práce v elektrickém poli – napětí

Práce vykonaná v obecném silovém poli sílou působící po určité dráze (Obr.38) je dána vztahem:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l} \quad (4.1)$$

Ve vztahu se vyskytuje skalární součin síly \mathbf{F} a vektorového elementu dráhy $d\mathbf{l}$, který zohledňuje skutečnost, že největší práce je konána silou působící ve směru dráhy. Síla působící kolmo na dráhu práci nekoná. Vektorový element dráhy $d\mathbf{l}$ je elementární vektor, jehož směr je tečný k dráze a jehož velikost odpovídá délce vytknutého elementu dráhy $|d\mathbf{l}| = dl$. Vykonaná elementární práce v daném místě je tedy:

$$dA = \mathbf{F} d\mathbf{l} = |\mathbf{F}| |d\mathbf{l}| \cos(\alpha) \quad (4.2)$$



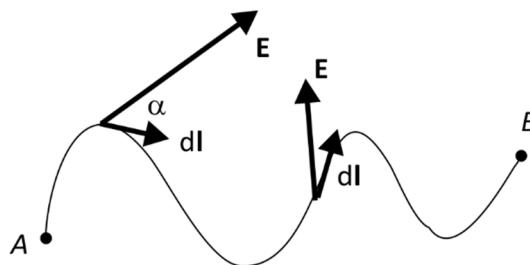
Obr.38 Síla konající práci

V elektrickém poli je naprosto stejná logika použitých veličin. Liší se pouze tím, že je vše vztaženo na jednotkový kladný náboj (Obr.39).

Silové působení v elektrickém poli popisuje intenzita elektrického pole \mathbf{E} , která svojí velikostí a směrem představuje sílu působící na jednotkový bodový kladný náboj $\mathbf{E} = \mathbf{F}(Q=1)$ (viz (2.7)). Zcela analogicky k (4.1) je tedy práce vykonaná elektrickým polem při přenesení jednotkového bodového kladného náboje z bodu A do bodu B popsána vztahem (4.3) a nazývá se napětí mezi těmito body.

$$U = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi_A - \varphi_B \quad (4.3)$$

Veličina φ_A, φ_B představuje potenciál v bodech A a B. Bude ukázáno, že elektrostatické pole je potenciálové. Práce vykonaná elektrickým polem přenesením elektrického náboje se vykoná na úkor potenciální energie, kterou má tento náboj a potažmo i celá soustava nábojů budících elektrické pole. Potenciální energie se sníží. Naopak práce potřebná k přemístění náboje proti směru působící intenzity elektrického pole se projeví zvýšením potenciální energie tohoto náboje a potažmo celé soustavy nábojů. Síla v elektrickém poli (intenzita elektrického pole) působí ve směru snižující se potenciální energie.



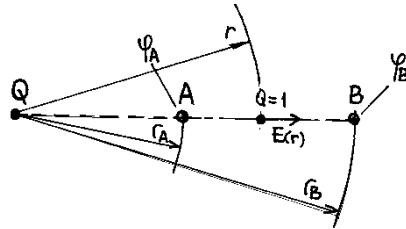
Obr.39 Práce vykonaná v elektrickém poli

V elektrickém poli plní funkci potenciální energie potenciál. Potenciál je možno v tomto případě chápat jako zobecněnou potenciální energii, kterou by měl v daném elektrostatickém poli jednotkový bodový kladný náboj. Práce vykonaná intenzitou elektrického pole po dráze mezi dvěma body je tedy rovněž rovna rozdílu potenciálů. Potenciál, podobně jako potenciální energie, je veličina nejednoznačná, může se lišit o libovolnou aditivní konstantu, která má význam potenciálu v místě, ke kterému se všechny hodnoty vztahují. Napětí (práce) jako rozdíl potenciálů je již hodnota jednoznačná.

4.1.2 Napětí mezi dvěma body v elektrickém poli bodového náboje

Napětí mezi dvěma body v elektrickém poli bodového náboje (Obr.40) se vypočte velice snadno, zejména v případě, když zvolíme tyto body na jedné siločáře. Intenzita potom ukazuje ve stejném směru jako integrační dráha a skalární součin v integrálu přejde na algebraický. Po dosazení za intenzitu elektrického pole bodového náboje bude platit:

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \varphi_A - \varphi_B \quad (4.4)$$

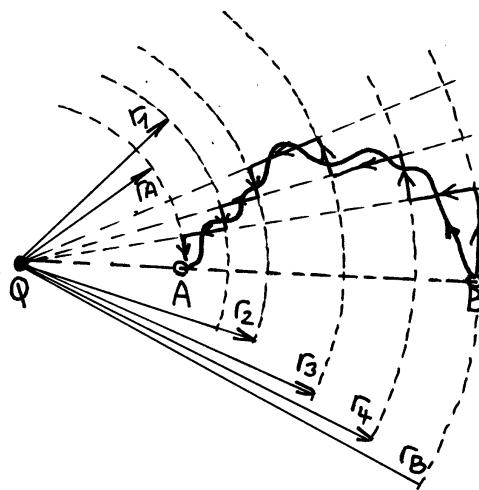


Obr.40 Napětí v elektrickém poli bodového náboje

Vypočítané napětí mezi dvěma body musí být rovno rozdílu potenciálů v těchto bodech $\varphi_A - \varphi_B$. Podle vztahu (4.4) se jeví, že hodnoty potenciálů budou v tomto případě dány vztahem $\varphi_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$, $\varphi_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$. V následujícím textu bude ukázáno, že to tak skutečně platí. Tyto hodnoty se však mohou lišit o libovolnou aditivní konstantu, aniž by se tím ovlivnil jejich výsledný rozdíl.

Abychom dokázali, že napětí nezávisí na tvaru dráhy, ale pouze na poloze počátečního a koncového bodu, můžeme přejít po libovolné dráze zpět z bodu B do bodu A. Spojitou dráhu si lze nahradit libovolně velkým počtem schodových úseků, ve kterých se zčásti pohybujeme proti směru elektrického pole (skalární součin $\mathbf{E} d\mathbf{l}$ je v tomto případě záporný) a zčásti ve směru kolmém na intenzitu elektrického pole. Při pohybu ve směru kolmém na siločáru se nekoná žádná práce, pro zbylé úseky platí:

$$\begin{aligned} \int_B^A \mathbf{E} d\mathbf{l} &= - \int_{r_B}^{r_4} E(r) dr - \int_{r_4}^{r_3} E(r) dr - \int_{r_3}^{r_2} E(r) dr - \int_{r_2}^{r_1} E(r) dr - \int_{r_1}^{r_A} E(r) dr = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_A} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \varphi_B - \varphi_A \end{aligned} \quad (4.5)$$



Obr.41 Integrace proti směru intenzity elektrického pole

Při pohybu z bodu B do bodu A bylo potřeba vykonat (vložit) stejnou práci, jaká byla v předchozím kroku při pohybu z bodu A do bodu B získána na úkor energie elektrického pole. Tato práce nezávisí na dráze, pouze na velikosti poloměrů v bodě A a B. Po uzavřené dráze je tedy vykonalá práce nulová, elektrostatické pole je skutečně potenciálové:

$$\oint_1 \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \quad (4.6)$$

V diferenciálním (bodovém) tvaru lze tento výraz zapsat pomocí operátoru rotace, který je podrobně popsán v **8.6.**

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (4.7)$$

4.2 Potenciál v elektrickém poli

Předchozí nutná znalost

Pro správné pochopení této části i dalších vztahů popisujících vlastnosti elektromagnetického pole je nezbytně nutné znát části:

8.4.1

Definice gradientu skalárni funkce

4.2.1 Obecný vztah mezi intenzitou elektrického pole a skalárním potenciálem v elektrostatickém poli

Práce dA vykonalá elektrickým polem s intenzitou \mathbf{E} při přenesení jednotkového náboje o úsek $d\mathbf{l}$ se musí projevit změnou potenciální energie $-d\varphi$:

$$dA = \mathbf{E} d\mathbf{l} = -d\varphi \quad (4.8)$$

Znaménko mínu má obecný význam a platí při posunu náboje v libovolném směru. Pokud se jednotkový kladný náboj posune ve směru působící intenzity elektrického pole \mathbf{E} , úhel vektorů \mathbf{E} a $d\mathbf{l}$ bude menší než $\pi/2$, skalární součin bude kladný. Kladná bude i práce dA , kterou vykonalo v tomto případě elektrické pole. O vykonanou práci se musí zmenšit potenciální energie (potenciál), kterou měl jednotkový kladný náboj v daném místě.

Pokud posuneme náboj proti směru působícího elektrického pole, bude úhel mezi vektory \mathbf{E} a $d\mathbf{l}$ větší než $\pi/2$. Skalární součin bude záporný. Je roven potřebné práci, kterou je nutné do soustavy při daném posuvu vložit. O tuto práci se zvětší potenciální energie (potenciál).

Přírůstek skalární funkce při přechodu z daného bodu ve směru vektoru $d\mathbf{l}$ je možné obecně zapsat pomocí gradientu skalární funkce (viz **8.4.1**) :

$$d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} \quad (4.9)$$

Porovnáním vztahu (4.8) a (4.9) bude pro vzájemný vztah mezi intenzitou elektrického pole a potenciálem platit:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad (4.10)$$

4.2.2 Příklad výpočtu potenciálu - potenciál elektrického pole buzeného bodovým nábojem

Elektrické pole bodového náboje je formálně popsané ve sférických souřadnicích, i když to nebylo v dané kapitole zvláště zdůrazněno. Tento popis je velmi výhodný, protože v případě, kdy je náboj umístěn do středu soustavy souřadnic, je vektorová funkce popisující intenzitu elektrického pole velice jednoduchá. Intenzita elektrického pole má pouze radiální složku $E_r(r)$ a velikost této složky je závislá pouze na poloměru vzdálenosti v této soustavě (Obr.128), nezávisí na úhlech φ a θ . Gradient skalární funkce ve sférické soustavě se počítá komplikovanějším způsobem (4.11), ale bude mít také pouze radiální složku:

$$\mathbf{E}(E_r, \underbrace{E_\varphi}_0, \underbrace{E_\theta}_0) = -\text{grad } \varphi = -\left(\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}, \underbrace{\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}}_0, \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}}_0 \right) \quad (4.11)$$

Skalární potenciál je tedy možné jednoduše stanovit z rovnice:

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{d\varphi(r)}{dr} \quad (4.12)$$

$$\varphi(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + K \quad (4.13)$$

Aditivní konstanta K má v tomto případě význam potenciálu definovaném na nekonečně velkém poloměru:

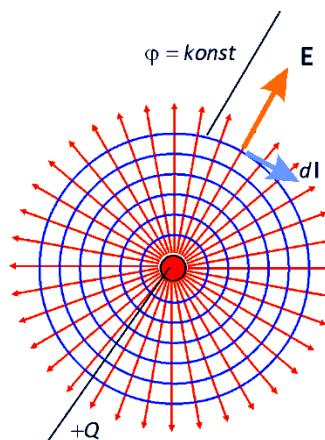
$$\varphi(r \rightarrow \infty) = K \quad (4.14)$$

Potenciál elektrického pole buzeného kladným bodovým nábojem je skutečně roven práci, kterou by bylo potřebné vykonat přemístění jiného v tomto případě jednotkového kladného náboje z nekonečna, kde by na něho již nepůsobila žádná síla, do místa o poloměru r . V tomto případě bychom položili velikost konstanty $K = 0$. Tato práce se promění na potenciální energii, kterou by měl jednotkový náboj v tomto místě.

Potenciál, stejně jako potenciální energie, je sám o sobě nejednoznačný. Jednoznačným se stane definováním jeho hodnoty v určitém místě, v tomto případě na určitém poloměru. Absolutní hodnota potenciálů však nemá praktický význam. Důležitější je rozdíl potenciálů mezi dvěma body, který zůstává vždy jednoznačný a je roven napětí mezi těmito body.

4.2.3 Ekvipotenciály

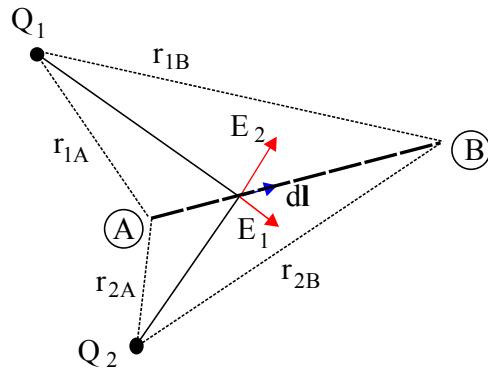
Ekvipotenciály v elektrickém poli jsou pomyslné linie, na kterých je hodnota potenciálu konstantní. V případě bodového náboje jsou ekvipotenciály soustředné kružnice se středem v bodě, kde je umístěn bodový náboj. Ekvipotenciály a siločáry tvoří síť navzájem kolmých linií. Při postupu po ekvipotenciále je totiž vektor intenzity elektrického pole vždy kolmý na vektorový element dráhy, vykonaná práce a současně i změna potenciálu daná skalárním součinem je nulová: $d\varphi = -\mathbf{E} d\mathbf{l} = -|\mathbf{E}| |d\mathbf{l}| \cos(\pi/2) = 0$. Potenciál zůstává konstantní.



Obr.42 Ekvipotenciály bodového náboje

4.2.4 Princip použití potenciálů v elektrickém poli

Pro některé výpočty, například stanovení kapacity, je nutné vypočítat napětí mezi dvěma body v elektrickém poli vybuzeném několika nabitémi objekty. Pro jednoduchost je taková situace znázorněna na Obr.43, kde je elektrické pole buzeno pouze dvěma bodovými náboji.



Obr.43 Použití potenciálů při výpočtu

Pokud bychom chtěli vypočítat napětí mezi dvěma body, například mezi bodem A a B na obrázku Obr.43, a vycházeli z integrace intenzity elektrického pole po dráze mezi těmito body, museli bychom v každém bodě znát hodnotu výsledného vektoru intenzity elektrického pole od všech nabitéch objektů. Pomocí skalárnho součinu potom integrovat (sčítat) průměr intenzity do směru dráhy:

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

Při výpočtu pomocí potenciálů je potřebné si znova uvědomit, že je napětí mezi dvěma body rovné práci, kterou by vykonalo elektrické pole při přemístění jednotkového kladného náboje mezi těmito body. O tu práci se zmenší potenciál (potenciální energie), kterou by v elektrickém poli kladný bodový náboj měl. Napětí je tedy rovno rozdílu potenciálů v těchto bodech.

Potenciál i napětí jsou skalární veličiny. Při výpočtu proto můžeme postupovat tak, že separátně vypočítáme práci vykonanou v elektrickém poli každého z nabitéch objektů a výslednou práci potom získáme sečtením těchto dílčích prací. Kdybychom například nejprve uvažovali elektrické pole buzené pouze nábojem Q_1 , je tato práce rovna rozdílu potenciálů buzených nábojem Q_1 v bodě A a B: $\{\varphi(Q_1, A) - \varphi(Q_1, B)\}$. Na aditivní konstantě, která by udávala hodnotu potenciálu v určitém bodě, vůbec nezáleží. Stejně tak by byla práce vykonaná v elektrickém poli náboje Q_2 : $\{\varphi(Q_2, A) - \varphi(Q_2, B)\}$. Pro celkové napětí (práci vykonanou přenesením jednotkového kladného náboje) v soustavě dvou nábojů podle Obr.43 bude tedy platit:

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \{\varphi(Q_1, A) - \varphi(Q_1, B)\} + \{\varphi(Q_2, A) - \varphi(Q_2, B)\} = \\ &= \left\{ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1A}} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1B}} \right\} + \left\{ \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2A}} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2B}} \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pokud pomyslně přeskupíme jednotlivé členy v rovnici, obvykle při výpočtu postupujeme tak, že vypočítáme výsledný potenciál v bodě A jako součet potenciálů všech nabitých objektů a odečteme od něho výsledný potenciál v bodě B rovněž od všech nabitých objektů:

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \varphi(A) - \varphi(B) \\ \varphi(A) &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1A}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2A}} \\ \varphi(B) &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1B}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2B}} \end{aligned}$$

4.3 Poissonova a Laplaceova rovnice pro potenciál v elektrickém poli

4.3.1 Poissonova rovnice

Poissonova rovnice je obecná diferenciální rovnice pro potenciál v elektrostatickém poli v oblasti, kde je celkový náboj rozložen s objemovou hustotou ρ_{cel} :

Po dosazení $E = -\mathbf{grad}\varphi$ z (4.10) do $\operatorname{div} E = \frac{\rho_{cel}}{\epsilon_0}$ z (3.12) dostaneme:

$$\operatorname{div} \mathbf{grad}\varphi = -\frac{\rho_{cel}}{\epsilon_0} \quad (4.16)$$

V kartézské soustavě souřadnic potom po dosazení z (8.16) a (8.29) dostáváme parciální diferenciální rovnici pro elektrický potenciál, která se nazývá Poissonova:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_{cel}}{\epsilon_0} \quad (4.17)$$

Pokud se označí výraz s druhými parciálními derivacemi na levé straně rovnice pomocí Laplaceova operátoru pro skalární funkci:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (4.18)$$

lze rovnici (4.17) zapsat v podobě:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_{cel}}{\epsilon_0} \quad (4.19)$$

4.3.2 Laplaceova rovnice

Pro oblast s nulovou hustotou náboje má rovnice nulovou pravou stranu a nazývá se Laplaceova.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.20)$$

Při zápisu pomocí Laplaceova operátoru potom:

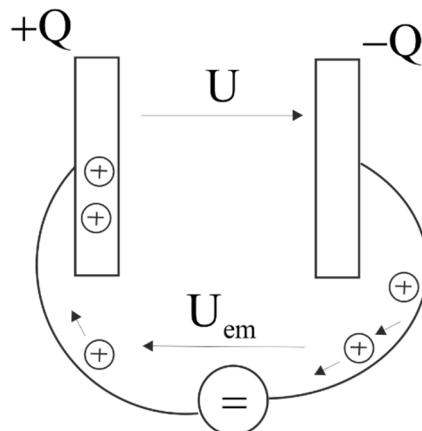
$$\Delta \varphi = 0 \quad (4.21)$$

Laplaceova (Poissonova) parciální diferenciální rovnice je často používána pro řešení elektrických polí pomocí různých numerických metod. Pro analytické výpočty není příliš vhodná. Použití této rovnice je ilustrováno v 9.1.3.

4.4 Kapacita

4.4.1 Definice kapacity

Připojíme-li mezi dvě elektrody zdroj napětí (Obr.44), elektromotorická síla zdroje rozdělí náboje na elektrodách (viz 5.3). Na přenesení jednotkového náboje je zdroj schopen vykonat práci rovnou elektromotorickému napětí zdroje. Na jedné elektrodě se objeví kladný náboj, na druhé záporný. Náboje se budou přelévat tak dlouho, dokud se nevyrovná elektromotorické napětí zdroje s napětím mezi elektrodami kondenzátoru. Toto napětí je dáno integrálem intenzity elektrického pole nahromaděných nábojů na elektrodách kondenzátoru.



Obr.44 Kapacita kondenzátoru

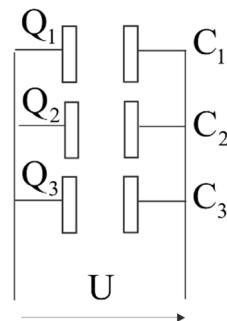
Velikost náboje na kondenzátoru je přímo úměrná napětí. Konstanta úměrnosti se nazývá kapacita:

$$Q = C U$$

(4.22)

Jednotkou kapacity je Farad [F].

4.4.2 Kondenzátory spojené paralelně



Obr.45 Paralelně spojené kondenzátory

Paralelně spojené kondenzátory (Obr.45) mají na elektrodách stejná napětí, každý z nich pojme náboj úměrný své kapacitě

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 U \\ Q_2 &= C_2 U \\ Q_3 &= C_3 U \end{aligned} \quad (4.23)$$

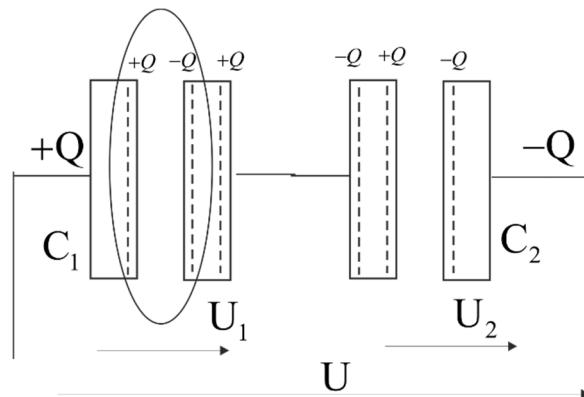
Pro celkový náboj bude platit:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 U + C_2 U + C_3 U = (C_1 + C_2 + C_3) U \quad (4.24)$$

Pro kapacitu paralelně spojených kondenzátorů podle definice (4.22) bude platit:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \quad (4.25)$$

4.4.3 Kondenzátory spojené do série



Obr.46 Kondenzátory spojené do série

Pokud jsou kondenzátory spojené do série (Obr.46), bude na elektrodách všech kondenzátorů stejný náboj. To je možné vysvětlit například pomocí Gaussovy věty elektrostatiky (viz 3.1 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$). Pokud vedeme uzavřenou integrační plochu po částech vnitřkem elektrod kondenzátorů a po částech vnějším prostorem (viz Obr.46), je zde intenzita elektrického pole nulová a nulová musí být i hodnota plošného integrálu. To je možné pouze v případě, kdy tato plocha obemyká celkový nulový náboj. Náboj na elektrodě spojené se zdrojem i na elektrodě spojené s druhým kondenzátorem musí být stejně velký, ale s opačným znaménkem. Podobnými úvahami lze dospět k tomu, že náboje na všech elektrodách musejí být stejně veliké. Pro dva kondenzátory například:

$$Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 \quad (4.26)$$

Pro součtové napětí na kondenzátorech bude platit:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C} \quad (4.27)$$

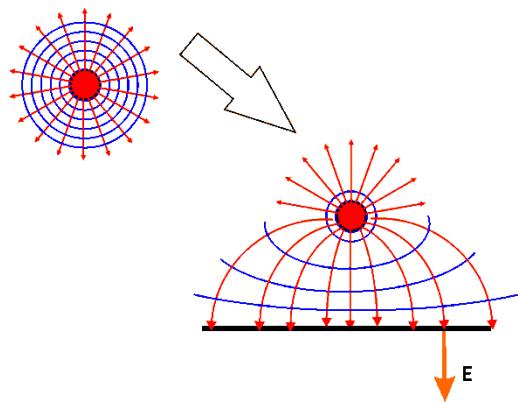
Pro kapacitu sériově spojených kondenzátorů podle definice (4.22) bude tedy platit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \\ C &= \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.5 Metoda zrcadlení v elektrickém poli

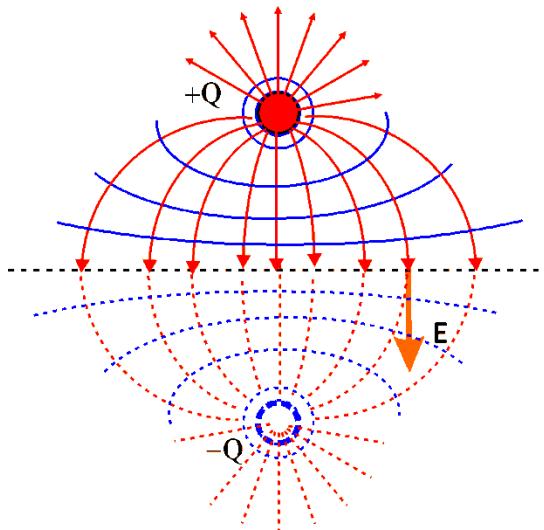
Na základě prvotních úvah o nabitém vodivém tělese a rozmístění volného náboje na jeho povrchu (**viz 3.2.1.b**) je patrné, že elektrická indukce (intenzita elektrického pole) směruje v elektrostatickém poli kolmo vně z povrchu nabitého vodivého tělesa a uvnitř je nulová. Z kladně nabité elektrody vystupuje, do záporné vstupuje. Povrch vodiče je ekvipotenciální (viz 4.2.3). Exaktněji je tato skutečnost formulována v podmínkách platných na rozhraní s dobrým vodičem (viz 7.5.1.c).

Siločáry elektrického pole nabité elektrody (kulové, válcové) se po umístění nad rozlehlou vodivou rovinu (zem) deformují a vstupují do této roviny kolmo (viz Obr.47).



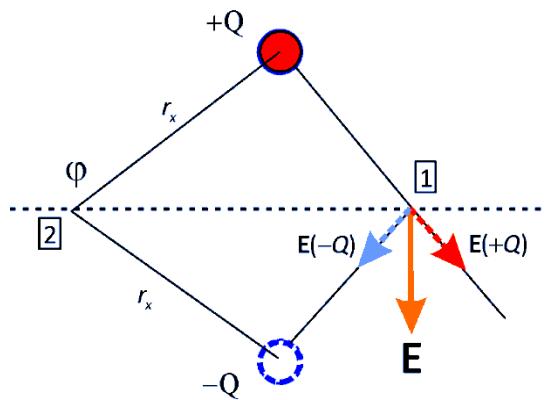
Obr.47 Elektrické pole kulové nabité elektrody nad rozlehlou vodivou rovinou

Základní princip metody zrcadlení v elektrickém poli spočívá v tom, že má elektrické pole nad vodivou rovinou zcela stejný tvar, jako by mělo elektrické pole vytvořené ve volném prostoru dvojicí stejných opačně nabitých elektrod (kulových, válcových).



Obr.48 Elektrické pole dvojice opačně nabitých kulových elektrod

Elektrické pole elektrod nad vodivou rovinou je potom možné počítat v náhradní soustavě, ve které si vodivou rovinu odmyslíme a její vliv respektujeme symetricky umístěnou opačně nabitou elektrodou. V náhradní soustavě (viz Obr.49) pak bude mít výsledná intenzita elektrického pole na dělící rovině skutečně pouze normálovou složku a elektrický potenciál bude konstantní. Budou tak splněny podmínky platné v elektrostatickém poli na rozhraní s libovolným vodičem.



Obr.49 Náhradní soustava pro výpočet elektrického pole kulové nebo válcové elektrody nad vodivou rovinou

Pro potenciál kulových elektrod na dělící rovině bude například platit:

$$\varphi = \varphi(+Q) + \varphi(-Q) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_x} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon r_x} + K = K = \text{konst}$$

4.6 Energie v elektrickém poli

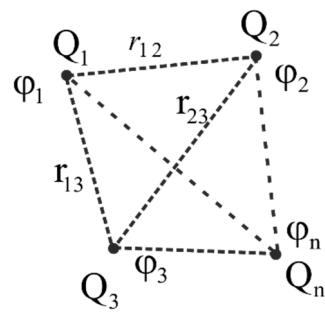
Pro správné pochopení této části je nezbytně nutné prostudovat:

4.1	<i>Práce v elektrickém poli, pojemy napětí a potenciálu</i>
4.2	<i>Potenciál v elektrickém poli</i>

Při úvahách o energii v elektrickém poli je výhodné začít s energií soustavy bodových nábojů. Poznatky lze potom na základě superpozice aplikovat i pro celá nabité tělesa a elektrické pole obecně.

4.6.1 Energie soustavy bodových nábojů

Máme-li soustavu bodových nábojů Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Náboje jsou umístěny v bodech 1, 2, ..., n (Obr.50), ve kterých jsou potenciály: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Energie elektrického pole této soustavy je dána sumičním vztahem:



Obr.50 Soustava bodových nábojů

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i \quad (4.29)$$

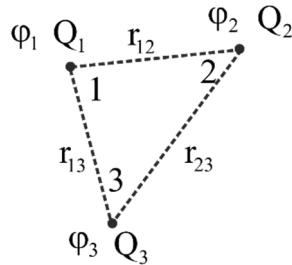
V tomto vztahu představuje φ_i potenciál v i-tém bodě, který je dán součtem potenciálů od všech nábojů umístěných v sousedních bodech:

$$\varphi_i = \sum_{\substack{k=1,n \\ k \neq i}} \frac{Q_k}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_{ik}} \quad (4.30)$$

Platnost tohoto vztahu je možné ukázat například na soustavě tří bodových nábojů (Obr.51).

Soustava nábojů v sobě skutečně určitou akumulovanou potenciální energii obsahuje. Kdyby byly náboje kladné, působila by na ně vzájemná odpudivá síla. Náboje by se vlivem této síly uvedly do pohybu ve směru od sebe a postupně by se urychlovaly tak dlouho, dokud by tato síla nebyla nulová. Elektrické pole by vykonalo práci, vlivem které by se celá potenciální energie přeměnila na kinetickou. Pokud bychom tedy chtěli stanovit velikost akumulované energie, musíme určit práci, kterou vykoná pole oddálením nábojů.

Lze postupovat i obráceným způsobem a stanovit naopak práci, kterou by musela vykonat síla působící v opačném směru, aby náboje do stanovených bodů přesunula.. Podobný postup je popsán v dalším textu.



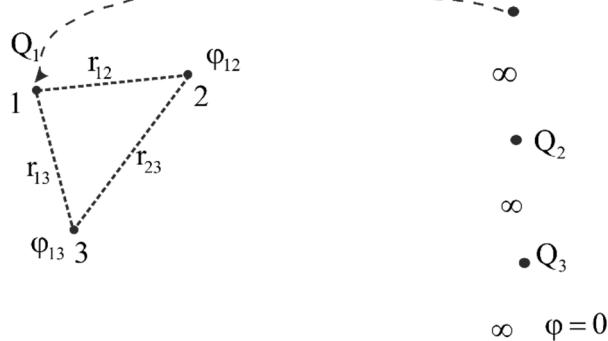
Obr.51 Soustava tří bodových nábojů

Na obrázku Obr.51 je soustava tří bodových nábojů, které jsou umístěny v příslušných bodech o dané vzdálenosti. Při stanovení „potenciální“ energie této soustavy budeme postupovat tak, že stanovíme práci, kterou bychom museli vykonat, abychom náboje přenesli z nekonečna, kde definujeme nulovou hodnotu této energie (nulový potenciál) do daných bodů. Tato práce se přemění na potenciální energii soustavy – energii elektrického pole. V této souvislosti je potřebné si uvědomit význam definovaného elektrického potenciálu v elektrostatickém poli.

Potenciál v daném bodě v elektrickém poli určitého zdroje (bodového náboje, nabitého vodiče, nabité elektrody) udává potenciální energii, kterou by zde měl jednotkový kladný náboj ve srovnání s referenčním bodem. Je roven současné práci, která by se musela vykonat, aby se jednotkový kladný náboj z referenčního bodu do daného bodu přemístil. Potenciál se může lišit o libovolnou aditivní konstantu a to je právě hodnota potenciálu definovaná v referenčním bodě. Rozdíl potenciálů mezi dvěma body je jednoznačně roven napětí a to je práce na přenesení jednotkového kladného náboje mezi těmito body.

Pokud je více zdrojů elektrického pole, superpozicí je možné sčítat v lineárním prostředí nejen intenzity elektrického pole ale i potenciály. Výhodou potenciálu oproti intenzitě elektrického pole je, že se jedná o skalární veličinu. Sčítáním potenciálů se sčítají potažmo i dílčí práce, které by byly potřebné k přesunutí jednotkového kladného náboje postupně k jednomu, druhému i ostatním zdrojům elektrického pole.

Pokud budeme pomyslně přemíšťovat náboj Q z nekonečna, kde definujeme nulovou hodnotu potenciálu, do bodu, ve kterém je potenciál φ , musíme vykonat práci: $A = Q\varphi$ (náboj není jednotkový).

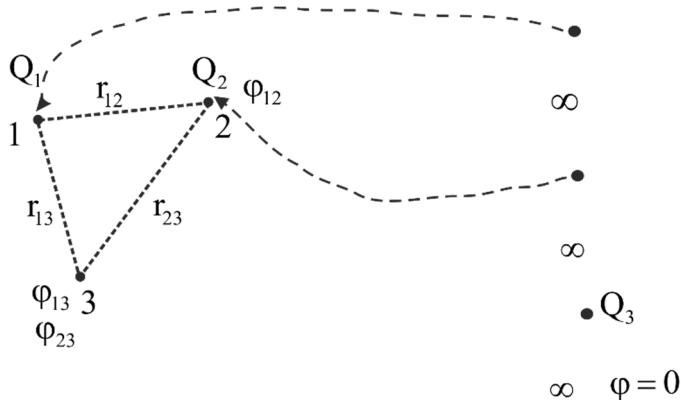


Pokud se přesune náboj Q_1 z nekonečna do bodu 1, není potřeba vykonat žádnou práci, v bodě 1 je nulový potenciál (ostatní náboje jsou daleko a nebudí v této oblasti elektrické pole):

$$A_1 = 0.$$

Po přesunutí náboje Q_1 se objeví potenciály od tohoto náboje v bodě 2 a 3:

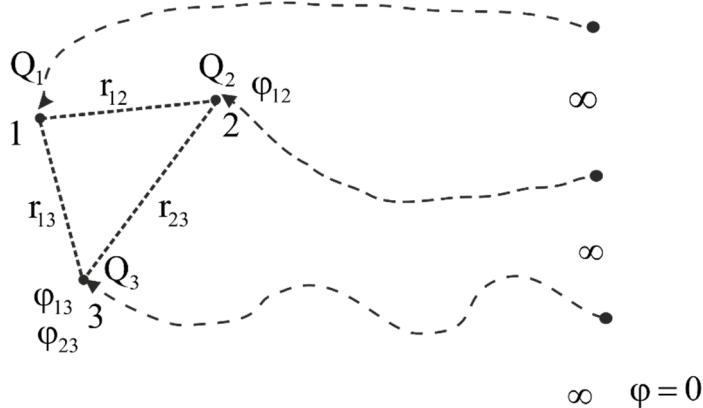
$$\varphi_{12} \text{ v bodě 2 a } \varphi_{13} \text{ v bodě 3.}$$



Pokud se následně přesune náboj Q_2 do bodu 2, je potřeba překonat elektrické pole, které vybudoval náboj Q_1 . Práce je v tomto případě rovna:

$$A_2 = Q_2 \varphi_{12}$$

Po přesunutí náboje Q_2 se v bodě 3 připočte ještě potenciál tohoto náboje a bude zde celkový potenciál $\varphi_{13} + \varphi_{23}$.



Pokud se následně přesune náboj Q_3 do bodu 3, je potřeba překonat elektrické pole, které vybudoval náboj Q_1 a Q_2 .

Práce je v tomto případě rovna:

$$A_3 = Q_3 (\varphi_{13} + \varphi_{23})$$

Sečtením dílčích prací dostaneme celkovou práci, která byla potřebná na přemístění nábojů do stanovených bodů. Tato práce se přeměnila na potenciální energii této soustavy – energii akumulované v elektrickém poli:

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 + A_3 = 0 + Q_2\varphi_{12} + Q_3(\varphi_{13} + \varphi_{23}) \\
 A &= Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right) \\
 A &= W_e = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Dosazením do sumačních vzorců (4.29), (4.30) je možné se přesvědčit, že dostaneme zcela stejnou hodnotu energie v elektrickém poli:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} \\
 \varphi_2 &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \\
 \varphi_3 &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \\
 W_e &= \frac{1}{2} \left[Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} \right) + Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right) + Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right) \right] \\
 W_e &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

4.6.2 Energie elektrického pole v nabitém kapacitoru

4.6.2.a Energie elektrického pole v kapacitoru pomocí energie soustavy bodových nábojů

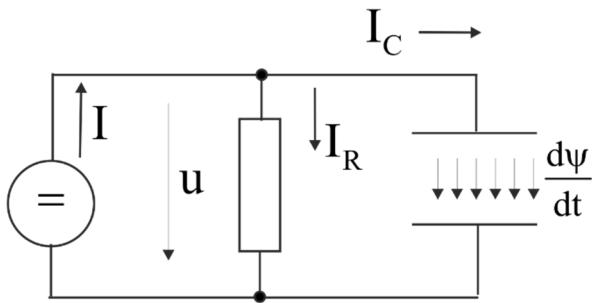
Odvozený vztah pro energii soustavy bodových nábojů (4.29) je možné jednoduše použít pro stanovení energie elektrického pole v nabitém kapacitoru. V tomto případě lze předpokládat, že jsou všechny pomyslné kladné bodové náboje rozmístěny na jedné elektrodě se zcela libovolným potenciálem φ_1 a všechny pomyslné záporné bodové náboje na záporné elektrodě s potenciálem φ_2 . Dosazením do sumačního vztahu (4.29) s uvážením, že náboje jsou stejně veliké ale s opačným znaménkem a rozdíl potenciálů dává napětí mezi elektrodami, potom plyně:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 Q_i \varphi_i = \frac{1}{2} (Q\varphi_1 - Q\varphi_2) = \frac{1}{2} Q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 \tag{4.33}$$

4.6.2.b Nabíjení kondenzátoru z proudového zdroje

Velikost energie elektrického pole, která se nahromadí v nabitém kondenzátoru, je možno stanovit i následující alternativní úvahou, která je symetricky podobná úvaze pro stanovení energie magnetického pole v induktoru protékaném elektrickým proudem (viz 6.7.1). V této úvaze bude i patrný význam elektrického indukčního toku Ψ a jeho časově změny $\frac{d\Psi}{dt}$ (Maxwellova posuvného proudu).

Kondenzátor s paralelně připojeným rezistorem je napájen z proudového zdroje (Obr.52).



Obr.52 Nabíjení kondenzátoru z proudového zdroje

Použijeme-li pro první přiblížení obvodový popis daného problému, bude napětí $u(t)$ na paralelní kombinaci rezistoru a kondenzátoru postupně stoupat. Rezistorem poteče v každém okamžiku proud:

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} \quad (4.34)$$

Kondenzátorem teče proud rovný časové změně náboje na deskách:

$$i_C(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(C u(t)) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (4.35)$$

Na začátku nabíjení je na kondenzátoru i rezistoru nulové napětí $u(t=0)=0$ a na deskách kondenzátoru nulový náboj. Celý proud proudového zdroje teče do kondenzátoru. S napětím se postupně zvětšuje velikost náboje. Napětí se ustálí na hodnotě $U = RI$. Náboj na hodnotě $Q = CU$.

Rovnice pro proud dodaný z proudového zdroje:

$$I = i_R(t) + i_C(t) = \frac{u(t)}{R} + C \frac{du(t)}{dt} \quad (4.36)$$

Po vynásobení všech částí členem $u(t) dt$ dostaneme v daném okamžiku bilanci energie. Člen na levé straně představuje energii dodanou zdrojem za dobu dt v daném časovém okamžiku t . Ta se rozdělí na energii přeměněnou na teplo v rezistoru a přírůstek energie elektrického pole v kondenzátoru:

$$\underbrace{u(t) Idt}_{\substack{\text{energie} \\ \text{dodaná} \\ \text{zdrojem}}} = \underbrace{\frac{u(t)^2}{R} dt}_{\substack{\text{energie} \\ \text{přeměněná} \\ \text{na teplo}}} + \underbrace{C u(t) du}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{energie} \\ \text{el.pole} \\ \text{v kondenzátoru}}} \quad (4.37)$$

Integrací „přírůstků“ energie pro celý děj, ve kterém se napětí na rezistoru i na kondenzátoru ustálí na hodnotě $U = RI$, dostaneme pro celkovou energii elektrického pole v kondenzátoru známý vztah:

$$W_e = C \int_0^U u du = \frac{1}{2} C U^2 \quad (4.38)$$

Když budeme nyní uvažovat, že tato energie obecně přísluší vytvořenému elektrickému poli, a budeme hledat souvislost s veličinami popisujícími toto pole, lze postupovat následujícím způsobem:

Na začátku nabíjení je na kondenzátoru i rezistoru nulové napětí. Na deskách kondenzátoru je nahromaděn nulový náboj, **mezi deskami je nulové elektrické pole a „protéká“ nulový elektrický indukční tok ψ** , který zde jako integrální veličina reprezentuje velikost elektrického pole. S napětím se postupně zvětšuje velikost náboje i elektrického indukčního toku. Napětí se ustálí na hodnotě $U = RI$. Náboj na hodnotě $Q = CU$. Stejnou hodnotu bude mít i elektrický indukční tok vybuzeného elektrického pole $\Psi = Q$ (viz definice elektrického indukčního toku a Gaussova věta **3.2.5**).

Elektrický proud nabíjející kondenzátor odpovídá časové změně náboje na deskách a **současně časové změně elektrického indukčního toku mezi deskami (Maxwellův posuvný proud – viz 7.3)**:

$$i_c = \frac{dQ}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \quad (4.39)$$

Pro elektrický proud dodávaný zdrojem platí v každém okamžiku diferenciální rovnice:

$$I = \frac{u}{R} + \frac{d\psi}{dt} \quad (4.40)$$

Po vynásobení levé i pravé strany rovnice napětím a časovým elementem dt dostáváme opět vztah pro bilanci energie:

$$\underbrace{I u dt}_{dA} = \underbrace{\frac{u^2}{R} dt}_{\text{teplota}} + \underbrace{u d\psi}_{dW_e} \quad (4.41)$$

Člen na levé straně $I u dt$ udává v daném časovém intervalu dt práci dA dodanou zdrojem. Člen $\frac{u^2}{R} dt$ udává energii, která se v rezistoru přemění na teplo. **Z této rovnice plyne důležitý závěr, že člen $u d\psi$ udává přírůstek energie elektrického pole.**

Výsledná energie elektrického pole potom bude obecně dána vztahem

$$W_e = \int_0^\Psi u d\psi \quad (4.42)$$

Pokud budeme předpokládat lineární závislost mezi elektrickým indukčním tokem a napětím (respektive nábojem a napětím), dostáváme se ke stejným závěrům, jako v předchozí obvodové úvaze:

$$\begin{aligned} \psi &= Q = C u \\ d\psi &= C du \end{aligned} \quad (4.43)$$

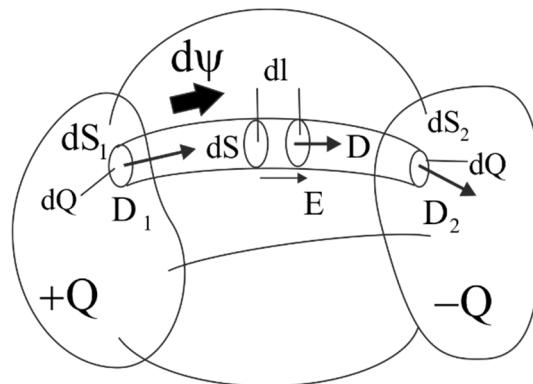
Pro energii v kondenzátoru:

$$W_e = \int_0^{\Psi} u d\psi = C \int_0^U u du = \frac{1}{2} C U^2 \quad (4.44)$$

4.6.3 Energie v elektrickém poli obecně vyjádřená pomocí vektorových veličin \mathbf{D} a \mathbf{E}

Úvahy o souvislosti energie elektrického pole s celkovým elektrickým indukčním tokem ψ lze dobře využít při hledání vztahu pro objemovou hustotu energie elektrického pole v určitém bodě.

Na obrázku Obr.53 je soustava dvou nabitych elektrod, mezi kterými se vytvořilo elektrostatické pole. Mezi elektrodami je napětí U , na elektrodách je rozmištěn celkový náboj o velikosti Q . Podle Gaussovy věty elektrostatiky je celkový elektrický indukční tok ψ_{cel} „vytékající“ z elektrody roven celkovému volnému náboji na této elektrodě:



Obr.53 Energie elektrického pole

$$\psi_{cel} = \iiint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q \quad (4.45)$$

Celková energie elektrického pole vybuzeného elektrodami je (viz 4.6.2):

$$W_e = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \psi_{cel} U \quad (4.46)$$

Pokud z celkového elektrického toku ψ_{cel} oddělíme část $d\psi$, která prochází z jedné elektory na druhou pomyslnou trubicí ve směru siločar elektrického pole, bude platit pro elektrickou indukci \mathbf{D} , což je plošná hustota elektrického indukčního toku, v každém místě trubice a potažmo na elektrodách:

$$d\psi = D_1 dS_1 = D_2 dS_2 = D dS = dQ \quad (4.47)$$

Pro ekvivalentní část energie elektrického pole v této trubici bude platit:

$$dW_e = \frac{1}{2} d\psi U \quad (4.48)$$

Pro intenzitu elektrického pole \mathbf{E} podél libovolné dráhy mezi elektrodami bude platit:

$$\int \mathbf{E} d\mathbf{l} = U \quad (4.49)$$

Pokud zvolíme dráhu podél vytknuté trubice a v určitém místě oddělíme z trubice část o délce dl , na které bude napětí $dU = E dl$, bude ve vytknutém objemovém elementu $dV = dS dl$ energie elektrického pole:

$$dW_e = \frac{1}{2} d\psi dU = \frac{1}{2} D dS E dl = \frac{1}{2} D E dS dl = \frac{1}{2} D E dV \quad (4.50)$$

Po vydelení energie elektrického pole objemem vytknutého elementu dostaváme objemovou hustotu energie elektrického pole.

$$w_e = dW_e / dV = \frac{1}{2} D E \quad (4.51)$$

Vztah pro hustotu energie elektrického pole platí i obecně, pokud je algebraický součin intenzity elektrického pole a elektrické indukce nahrazen skalárním součinem:

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (4.52)$$

Po zpětné integraci platí pro celkovou energii elektrického pole vztah:

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (4.53)$$

4.7 Síly působící v elektrickém poli, princip virtuálních prací

4.7.1 Určení síly působící na náboj v elektrickém poli o určité intenzitě

Síla působící v elektrickém poli na abstraktní kladný bodový náboj byla stanovena pomocí definované intenzity elektrického pole vztahem:

$$\mathbf{F} = Q \cdot \mathbf{E}$$

Pokud bychom rozčlenili nabité těleso na jednotlivé nabité prostorové elementy a považovali je za bodové náboje, bylo by možné sílu vypočítat superpozicí silových účinků na tyto elementy. Pro sílu působící na těleso, jehož náboj je rozložen v objemu tělesa s určitou objemovou hustotou ρ , by platilo:

$$\mathbf{F} = \iiint_V \mathbf{E} \cdot \rho dV$$

Podobně síla působící na těleso, které se nachází v elektrickém poli, jehož náboj je rozložen na povrchu s určitou plošnou hustotou σ :

$$\mathbf{F} = \iint_S \mathbf{E} \cdot \sigma dS$$

Při takovém výpočtu musíme konkrétně znát, jak je náboj v určitém tělese rozmístěn a jak velká intenzita elektrického pole kde působí. Tyto údaje však dokážeme snadno stanovit pouze v nejednodušších idealizovaných případech.

Při výpočtu síly působící na elementární objekty (bodové náboje, nabité vlákna, kulové elektrody, nabité roviny), lze využít princip superpozice a intenzitu elektrického pole pomyslně rozdělit na část buzenou vlastním tělesem a na část buzenou sousedními nabitymi tělesy. Pro výpočet síly vzájemného působení těles lze potom uvažovat pouze intenzitu elektrického pole od ostatních objektů. U objemného tělesa souvisí jeho vlastní intenzita elektrického pole s vnitřními silami, které by se snažily těleso deformovat.

4.7.2 Princip virtuálních prací

Vztah pro sílu působící v určité soustavě je možné formulovat rovněž na základě principu minima energie. Vnitřní síly působí v potenciálové soustavě v takovém směru, aby tuto soustavu uvedly do stavu s minimální možnou potenciální energií.

Za příklad je možné vzít pružinu, která má v nestlačeném stavu akumulovanou nulovou potenciální mechanickou energii. Pokud je pružina stlačena vnější silou, tato síla vykoná práci, která se přemění v potenciální energii. Vnitřní síla potom působí tak, aby vrátila pružinu do výchozí polohy. Podobně se chová například i hmotné těleso v zemském gravitačním poli. V nulové výšce má vůči zemi nulovou potenciální energii. Pro jeho vyzvednutí je nutné vykonat práci, která se přemění v potenciální energii. Na těleso bude působit síla (tíha), která se bude snažit o jeho přemístění do výchozí polohy.

Když budeme uvažovat soustavu s příslušnou akumulovanou energií, můžeme učinit „virtuální“ úvahu, jak by se „potenciální“ energie změnila, kdyby vnitřní síla F_x posunula soustavou v určitém směru "x" a změnila její geometrii (Obr.54). Ve skutečnosti však k žádným posuvům nedochází. Síla by v tomto případě vykonala práci (virtuální=zdánlivou) o velikosti dA_x , která by se projevila zmenšením potenciální energie soustavy dW_x :

$$dA_x = F_x dx = -dW_x \quad (4.54)$$

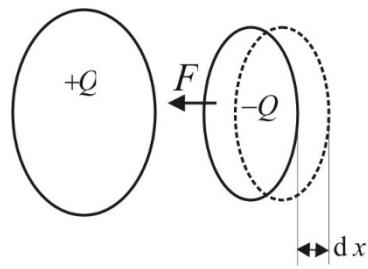
Z této úvahy potom vyplývá, že síla působící v soustavě v určitém směru je dána změnou energie při (virtuálním) posuvu v tomto směru. Pokud se energie v daném směru nemění, síla v tomto směru nepůsobí.

$$F_x = -\frac{dW_x}{dx} \quad (4.55)$$

V elektrickém poli je možné vyjádřit energii soustavy (například dvou elektrod) pomocí kapacity a přiloženého napětí:

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 \quad (4.56)$$

Výpočet síly působící v určitém směru se potom transformuje na určení změny kapacity při elementárním posunu v tomto směru.



Obr.54 Princip virtuálních prací

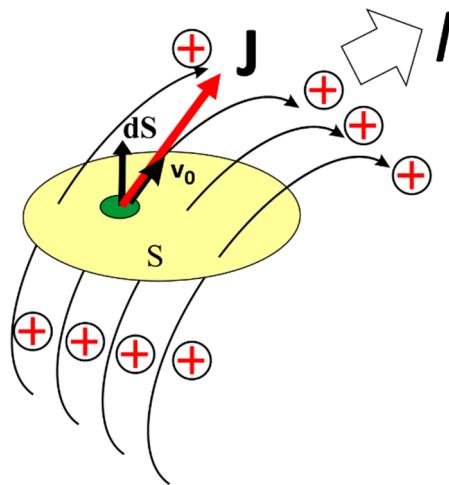
$$F_x = -\frac{dW_e}{dx} = -\frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx} \quad (4.57)$$

5 Stacionární proudové pole

5.1 Elektrický proud a proudová hustota

5.1.1 Elektrický konduktivní proud

Elektrický proud I [A] tekoucí určitou plochou S je definován limitním vztahem (5.1) jako množství elektrického náboje, které projde touto plochou za jednotku času. Je to skalární veličina. Z historických důvodů se za elektrický proud považuje tok hypotetických kladných nábojů. Kladným smyslem proudu rozumíme jejich pohyb od kladného k zápornému pólu zdroje. Ve skutečnosti se jedná o pohyb záporně nabitéch elektronů v opačném směru.



Obr.55 Elektrický proud a proudová hustota

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1)$$

5.1.2 Proudová hustota

Proudová hustota \mathbf{J} [A/mm^2] je vektorová veličina, která je definována limitním vztahem (5.2) jako velikost proudu, který projde jednotkou plochy natočené tak, aby procházející proud byl maximální možný. Směr proudové hustoty odpovídá směru vektoru rychlosti pohybujících se nábojů v daném místě. Na obrázku je tento směr vyznačen pomocí jednotkového vektoru ($|\mathbf{v}_0|=1$). Zmíněná elementární plocha s maximálním možným proudem musí být natočena kolmo na vektor proudové hustoty.

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \mathbf{v}_0 \quad (5.2)$$

Pokud nabité částice prostupují libovolně natočenou elementární plochou $d\mathbf{S}$, která je reprezentována vektorem se směrem kolmým na skutečnou plochu a s velikostí dané plochy, proud dI je dán skalárním součinem proudové hustoty a elementu plochy(Obr.55)::

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.3)$$

Podle definice skalárního součinu je proud dI skutečně největší, pokud náboje postupují plochou kolmo ($\alpha = 0$): V tomto případě je proud

$$dI_{\max} = |\mathbf{J}| |d\mathbf{S}| \cos(0) = J dS \quad (5.4)$$

a nulový, pokud je proudová hustota s plochou rovnoběžná ($\alpha = \pi/2$), náboje plochu obtékají:

$$dI = |\mathbf{J}| |d\mathbf{S}| \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad (5.5)$$

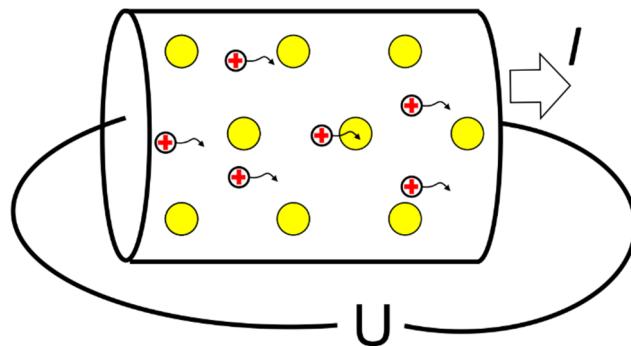
Sečtením (integrací) proudové hustoty na všech elementárních plochách dostaneme celkový proud plochou libovolného tvaru:

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.6)$$

5.2 Základní zákony ve stacionárním proudovém poli

5.2.1 Ohmův zákon (elektrický proud ve vodiči – kondukční proud)

Zdroj napětí připojený na vodič vyvolá ve vodiči potenciálový spád (nenulovou intenzitu elektrického pole), volné nosiče náboje se uvedou do pohybu a pohybují se ve vodiči v podobě elektrického proud (Obr.56). Na základě konvence se považuje za kladný smysl proudu tok pomyslných kladně nabitéch částic. Ohmův zákon vyjadřuje vztah mezi intenzitou elektrického pole a proudovou hustotou protékajícího proudu, jeho fyzikální podstatu je možné posoudit na základě následujících jednoduchých intuitivních úvah:

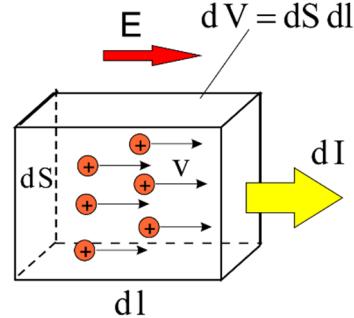


Obr.56 Elektrický proud ve vodiči

Na každou volně pohyblivou částici s nábojem q působí v elektrickém poli s nenulovou intenzitou elektrická síla: $\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E}$. Touto silou jsou částice urychlovány až do okamžiku, než dojde ke srážce s atomy, ze které se volné nosiče náboje oddělily. Po srážce částice odevzdají atomům svoji kinetickou energii, zpomalí se nebo zastaví, a opět se urychlují až do okamžiku další srážky (Obr.56). Předaná kinetická energie se v materiálu přemění na teplo. Rychlosť častic se ustálí na určité střední hodnotě v , která je úměrná intenzitě elektrického pole:

$$v = k \cdot E \quad (5.7)$$

Konstanta k v sobě tedy intuitivně postihuje pravděpodobnost srážek, je závislá na atomové struktuře daného materiálu a rovněž i na teplotě, vlivem které atomy kmitají a pravděpodobnost srážek tak zvyšuje.



Obr.57 Ohmův zákon

Na obrázku Obr.57 je vytknutý elementární objem vodiče o velikosti $dV = dS dl$. Pokud budeme uvažovat, že je k dispozici vodič s objemovou hustotou volného náboje ρ , potom je ve vytknutém objemu volný náboj o velikosti:

$$dQ = \rho dV \quad (5.8)$$

Pokud budeme dále uvažovat, že se náboje pohybují právě takovou rychlosťí v , aby urazily vzdálenost dl za čas dt :

$$v = \frac{dl}{dt} \quad (5.9)$$

bude platit, že čelní plochou vytknutého objemového elementu projde za tento čas celý náboj, který byl v elementu obsažen. Čelní plochou tedy poteče proud dI :

$$dI = \frac{dQ}{dt} = \frac{\rho dV}{dt} = \frac{\rho dS dl}{dt} = \rho \frac{dl}{dt} dS = \rho v dS \quad (5.10)$$

Pro proudová hustota na čelní ploše i v celém elementu bude platit:

$$J = \frac{dI}{dS} = \rho v \quad (5.11)$$

Plošná hustota proudu je tedy úměrná součinu objemové hustoty volných nábojů a jejich rychlosti. Po dosazení za stření rychlost pohybujících se nábojů z (5.9) platí pro vztah mezi proudovou hustotou a intenzitou elektrického pole:

$$J = \rho v = \rho k E = \sigma E \quad (5.12)$$

Zavedená souhrnná konstanta σ se nazývá **měrná vodivost** a její jednotkou je [S/m]. V obecné vektorové formě lze psát:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.13)$$

Vztah (5.13) se nazývá Ohmův zákon v diferenciálním tvaru.

Ohmův zákon je možné interpretovat následujícím způsobem: Pokud je k dispozici určitá intenzita elektrického pole \mathbf{E} jako síla působící na jednotkový kladný náboj, potom je tato síla schopná překonávat „odpor“ atomů stojících v cestě pohybujícím se elektronům a ve vodiči poteče elektrický proud s proudovou hustotou \mathbf{J} .

Pokud naopak má vodičem téci proud s proudovou hustotou \mathbf{J} , k překonání „odporu“ vodiče je potřebná intenzita elektrického pole \mathbf{E} .

5.2.2 Elektrický odpor

Elektrický odpor elementu podle obrázku Obr.57 je definován jako podíl napětí a proudu na tomto elementu:

$$dR = \frac{dU}{dI} = \frac{E dl}{J dS} = \frac{E dl}{\sigma E dS} = \frac{dl}{\sigma dS} \quad (5.14)$$

5.2.3 Jouleův zákon

Jouleův zákon souvisí s výkonem (prací za čas), který musí zdroj dodávat, aby vodičem protékal stanovený proud s danou proudovou hustotou. Dodaný výkon musí odpovídat výkonu, který se mění ve vodičích na teplo.

Práce dA spotřebována na přesunutí náboje o velikosti $dQ = Idt = J dS dt$ obsaženého v elementu dV o vzdálenost dl (Obr.57), je:

$$dA = F dl = dQ Edl = J EdS dl dt = J EdV dt \quad (5.15)$$

Práce vykonaná za čas je rovna **výkonu**, který musí zdroj trvale dodávat, aby vytknutým elementem tekl daný proud:

$$P(dV) = \frac{dA}{dt} = J E dV \quad (5.16)$$

Dodaný výkon se v objemu vodiče mění na teplo. Objemová hustota tohoto výkonu, která se nazývá „objemová hustota ztrát“ je:

$$p(V=1) = \frac{P(dV)}{dV} = J E = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma} \quad (5.17)$$

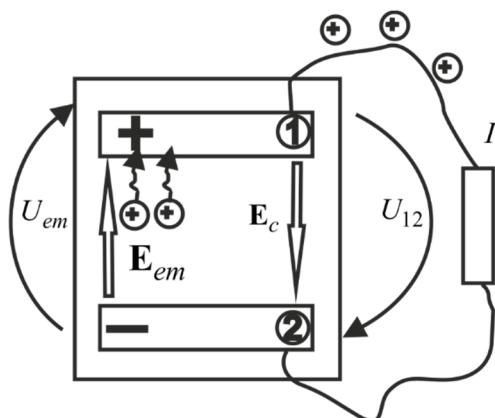
Rovnice (5.17) se obecně zapisuje pomocí skalárního součinu proudové hustoty a intenzity elektrického pole, nazývá se Jouleův zákon v diferenciálním tvaru

$$p(V=1) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (5.18)$$

5.3 Elektromotorické napětí zdroje, svorkové napětí

Aby mohl protékat mezi dvěma místy elektrický proud, musí být mezi těmito místy rozdíl potenciálů daný například nahromaděným kladným nábojem na jedné svorce a záporným nábojem na druhé svorce. Tato místa musí být propojena elektrickým vodičem, ve kterém se mohou nosit náboje volně pohybovat. Kdyby se jednalo o pouhý nahromaděný náboj na elektrodách, jako například u nabitého kondenzátoru, náboj by se zanedlouho vyčerpal a potenciály by se vyrovnaly. Ke vzniku trvalého elektrického proudu se musí náboj na svorkách neustále obnovovat. K tomu dochází ve zdroji elektrického napětí.

Ve zdroji musí kromě intenzity elektrického pole nahromaděných nábojů na svorkách \mathbf{E}_c , která způsobuje, že se kladné náboje pohybují ve vnějším obvodu od kladné svorky k záporné ve směru klesajícího potenciálu, působit ještě síla jiného druhu. Tato síla naopak vrací kladné náboje zpět na kladnou svorku, rozděluje tedy kladné a záporné náboje, nazýváme ji **rozdělující**. Tato síla může být různé povahy, je například dána chemickým pochodem v elektrickém článku, nebo se indukuje časovými změnami magnetického pole. Ve vzathu k jednotkovému kladnému náboji jí přisuzujeme ekvivalentně význam intenzity elektrického pole, kterou nazýváme **elektromotorická síla** \mathbf{E}_{em} .



Obr.58 Elektromotorické napětí

Práce, kterou by vykonala elektromotorická síla přenesením jednotkového kladného náboje ze záporné elektrody na kladnou, je definována jako **elektromotorické napětí zdroje** U_{em} :

$$U_{em} = \int_2^1 \mathbf{E}_{em} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.19)$$

Práce, kterou by vykonaly síly elektrického pole přenesením jednotkového kladného náboje z kladné svorky na zápornou, je definováno jako **svorkové napětí**.

$$U_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{l} \quad (5.20)$$

Pokud má zdroj rozpojené svorky (je naprázdno), nahromadí se působením elektromotorické síly \mathbf{E}_{em} na kladné a záporné svorce tak velký náboj, aby se elektromotorická síla \mathbf{E}_{em} a intenzita elektrického pole nahromaděných nábojů \mathbf{E}_c vyrovnila. Potom již další částice nikam nepřecházejí, uvnitř zdroje je intenzita elektrického pole nulová.

$$\mathbf{E}_{em} + \mathbf{E}_c = 0 \quad (5.21)$$

Na svorkách je napětí naprázdno, které je rovné elektromotorickému napětí:

$$U_{12} = U_{em} \quad (5.22)$$

Vypočítáme-li integrál výsledné intenzity elektrického pole po libovolné uzavřené dráze, která bude v jedné části procházet zdrojem napětí a v druhé části vně zdroje, bude integrál intenzity elektrostatického pole nulový, protože je toto pole potenciálové, zbude pouze integrál intenzity rozdělujících sil ve zdroji:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \underbrace{\int_2^1 (\mathbf{E}_{em} + \mathbf{E}_c) \cdot d\mathbf{l}}_{\text{ve zdroji}} + \underbrace{\int_1^2 \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{l}}_{\text{mimo zdroj}} = \int_2^1 \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{l} + \underbrace{\int_1^2 \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{l}}_0 + \int_2^1 \mathbf{E}_{em} \cdot d\mathbf{l} = \int_2^1 \mathbf{E}_{em} \cdot d\mathbf{l} = U_{em} \quad (5.23)$$

Integrál intenzity elektrického pole po uzavřené dráze procházející zdrojem již není nulový, podílí se zde práce dodaná do obvodu zdrojem, pole již není potenciálové.

Připojením vnějšího elektrického s rezistorem R začne protékat elektrický proud ve směru od kladné svorky k záporné. Svorkové napětí lze v tomto významu chápat jako práci, kterou dodá zdroj k přenesení jednotkového náboje mezi svorkami, tato práce se přemění v rezistoru na teplo. Velikost svorkového napětí je dána součinem odporu a procházejícího proudu.

$$U_{12} = R I \quad (5.24)$$

Rozdíl mezi svorkovým a elektromotorickým napětím odpovídá práci potřebné k přenesení jednotkového náboje v samotném zdroji. Tato práce je se stejnou logikou respektována vnitřním odporem zdroje R_i , je rovna pomyslnému úbytku napětí na vnitřním rezistoru:

$$\Delta U_i = U_{em} - U_{12} = R_i I \quad (5.25)$$

Elektromotorické napětí jako práce, kterou je schopen dodávat zdroj při přenášení jednotkového kladného náboje, se rozdělí na napětí na vnitřním odporu zdroje a vnějším odporu zátěže:

$$U_{em} = \Delta U_i + U_{12} \quad (5.26)$$

Pro napětí na svorkách bude platit:

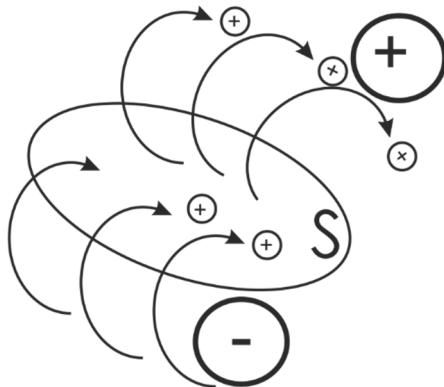
$$U_{12} = U_{em} - R_i I \quad (5.27)$$

Pokud není přenášen jednotkový náboj, ale náboj dQ za čas dt : $I = \frac{dQ}{dt}$, dostáváme po vynásobení proudem bilanci výkonů. Výkon dodávaný zdrojem se rozdělí na výkon přeměněný na teplo na vnitřním odporu zdroje a výkon přeměněný na teplo na rezistoru vnějšího obvodu:

$$\begin{aligned} U_{em} I &= \Delta U_i I + U_{12} I = R_i I^2 + R I^2 \\ P_{zdroj} &= \Delta P_{(R_i)} + \Delta P_{(R)} \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.4 Princip kontinuity elektrického proudu ve stacionárním proudovém poli

Na obrázku Obr.59 je znázorněn objem obklopený uzavřenou plochou S. Do tohoto objemu na různých místech vstupují ale také vystupují elektrické náboje.



Obr.59 Princip kontinuity elektrického proudu ve stacionárním proudovém poli

Pokud budeme integrovat proudovou hustotu po této ploše, dostaneme celkovou bilanci vstupujícího a vystupujícího náboje za jednotku času – bilanci elektrického proudu. Pokud se jedná o stacionární problém, bude vstupující a vystupující náboj stejný a bude platit:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.29)$$

Z makroskopického hlediska se jedná o nulový součet proudů v uzlu – Kirchhoffův zákon. Tento vztah je možné na základě definované divergence popsat i v diferenciálním tvaru:

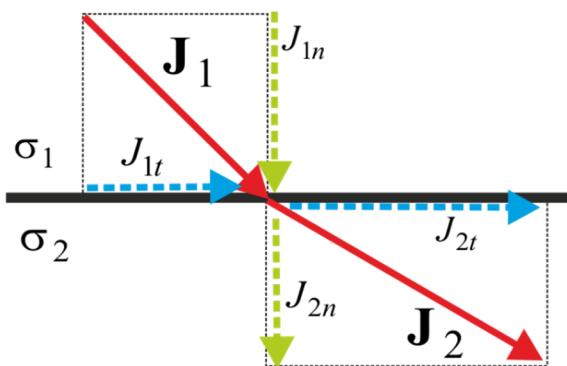
$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$$

(5.30)

5.5 Podmínky na rozhraní v proudovém poli

Na obrázku Obr.60 prochází elektrický proud rozhraním dvou prostředí s měrnými vodivostmi σ_1 a σ_2 . Velikosti a směry vektorů proudové hustoty $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ v určitém bodě na jedné i druhé straně rozhraní jsou navzájem vázány fyzikálními zákony popsanými v předchozím textu..

Vektory proudové hustoty lze rozložit na tečné složky J_{1t}, J_{2t} , které rozhraní obtékají a normálové složky, J_{1n}, J_{2n} , které rozhraním protékají.



Obr.60 Elektrický proud procházející rozhraním dvou prostředí

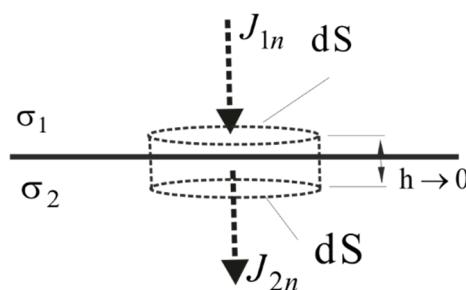
Když obklopíme daný bod na rozhraní elementární uzavřenou plochou například v podobě elementárního válce se stejnými podstavami dS a velmi malou výškou $h \rightarrow 0$ (Obr.61), potom touto uzavřenou plochou prochází pouze normálové složky proudu a na základě principu kontinuity musí platit:

$$\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.31)$$

$$J_{1n} dS = J_{2n} dS$$

Z toho vyplývá, že jsou normálové složky proudové hustoty po obou stranách rozhraní stejně veliké:

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (5.32)$$



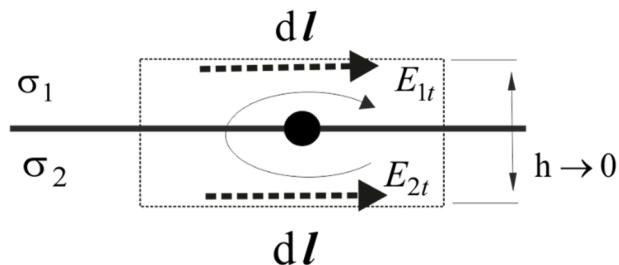
Obr.61 Normálové složky proudové hustoty

Integrál intenzity elektrického pole po uzavřené dráze v proudovém poli je nulový, pokud tato dráha neprochází zdrojem:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (5.33)$$

Když obemkneme daný bod na rozhraní elementární obdélníkovou uzavřenou dráhou o délce spodní a dolní hrany dl , se zanedbatelně vysokou levou a pravou hranou $h \rightarrow 0$ (Obr.62), v integrálu se uplatní pouze tečné složky intenzity elektrického pole podél delších hran:

$$\begin{aligned} E_{1t} dl - E_{2t} dl &= 0 \\ E_{1t} &= E_{2t} \\ \frac{J_{1t}}{\sigma_1} &= \frac{J_{2t}}{\sigma_2} \end{aligned} \quad (5.34)$$



Obr.62 Tečné složky proudové hustoty

Podíl tečných složek proudové hustoty je dán podílem měrných vodivostí:

$$\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (5.35)$$

6 Stacionární magnetické pole

6.1 Biot-Savartův zákon

Biot-Savartův zákon v různých modifikacích umožnuje stanovit magnetickou indukci v magnetickém poli vyvolaném pohybujícími se elektrickými náboji.

Magnetická indukce byla v části (2.2.3) vztahem (2.14) definována jako vektorová veličina, která popisuje sílu působící na náboj pohybující se rychlostí \mathbf{v} v magnetickém poli o dané magnetické indukci \mathbf{B} : $\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Vztahem (2.15) byla stanovena magnetická indukce, kterou kolem sebe vybudí jeden rovnoměrně se pohybující bodový náboj: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0)$. Tento vztah lze chápat jako základní modifikaci

Biot-Savartova zákona. V následujících částech je ukázáno, jak je možné tento vztah rozšířit pro stanovení magnetické indukce tenké proudové smyčky a rovněž vodiče konečných rozměrů s obecně rozloženou proudovou hustotou.

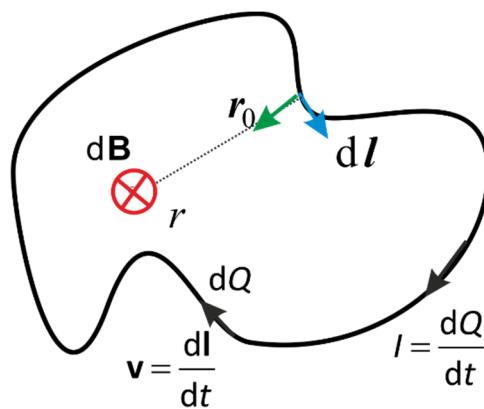
6.1.1 Biot-Savartův zákon pro proudovou smyčku a příklad použití pro dlouhý tenký vodič

6.1.1.a Formulace Biot-Savartova zákona pro tenkou proudovou smyčku

V technické praxi obvykle neuvažujeme jednotlivé izolovaně letící náboje, ale většinou náboje, které se pohybují ve vodiči v podobě elektrického proudu $I = \frac{dQ}{dt}$ (viz definice část 5).

Pokud chceme stanovit magnetickou indukci, kterou vybudí v libovolném bodě proudová smyčka podle obrázku (Obr.63) je možné ve vztahu (2.15) vyjádřit součin rychlosti a velikosti náboje $dQ \cdot v$ následujícím způsobem:

Pokud budeme uvažovat, že se náboje ve vodiči pohybují rychlostí $v = \frac{dl}{dt}$ a vodičem teče elektrický proud o velikosti $I = \frac{dQ}{dt}$, bude platit:



Obr.63 Magnetická indukce tenké proudové smyčky

$$dQ \cdot v = dQ \frac{dl}{dt} = \frac{dQ}{dt} dl = I \cdot dl \quad (6.1)$$

Pro magnetickou indukci buzenou proudovým elementem $I \cdot dl$ v bodě o vzdálenosti r a ve směru daném jednotkovým vektorem \mathbf{r}_0 bude potom platit:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dQ}{r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(dl \times \mathbf{r}_0)}{r^2} \quad (6.2)$$

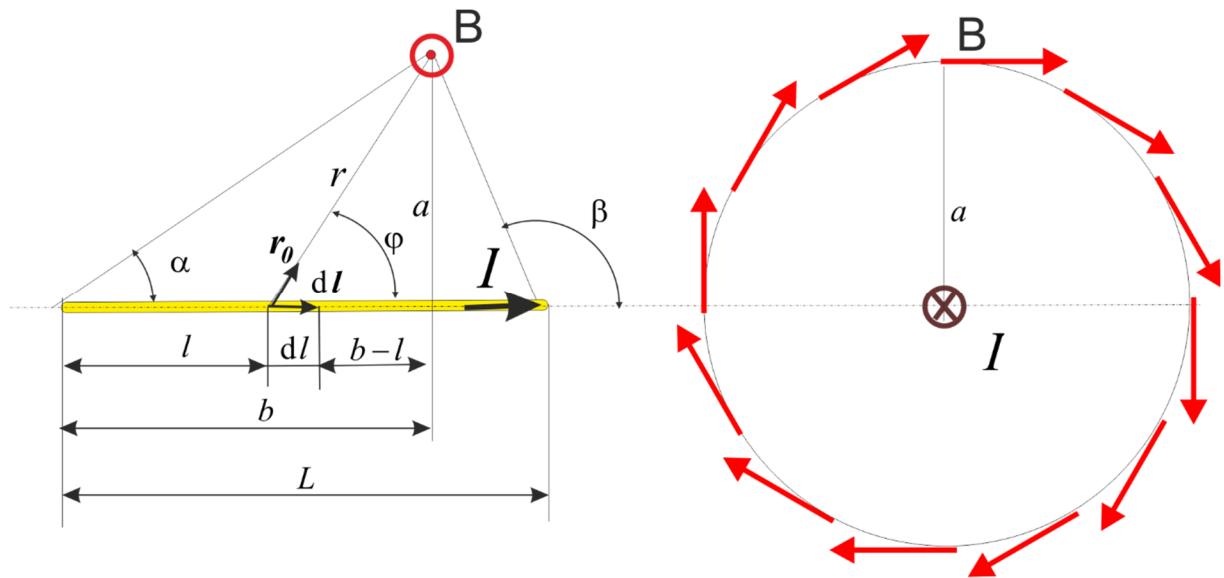
Výslednou magnetickou indukci dostaneme sečtením (integrací) magnetického pole všech proudových elementů smyčky:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{(dl \times \mathbf{r}_0)}{r^2} \quad (6.3)$$

Tento vztah je **Biot-Savartův** zákon aplikovaný pro tenkou proudovou smyčku.

6.1.1.b Příklad výpočtu magnetického pole buzeného přímým úsekem tenkého vodiče

Použití Biotova-Savartova zákona je možné ukázat na výpočtu magnetické indukce buzené ve vzdálenosti a přímým úsekem vodiče o délce L , kterým protéká proud I (Obr.64). Výsledek tohoto výpočtu bude potom možné použít pro ilustraci dalších vlastností stacionárního magnetického pole – platnost Ampérova zákona celkového proudu.



Obr.64 Úsek vodiče protékaný proudem

Ve smyslu zápisu rovnice (6.3) je na vodiči ve vzdálenosti l vytknut element o velikosti dl a je mu přiřazen elementární vektor o délce dl se směrem totožným s vodičem a smyslem daným kladným smyslem protékajícího proudu. Na zadaném místě ve vzdálenosti a vybudí tento element magnetickou indukci:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{r}_0}{r^2} \quad (6.4)$$

Vzdálenost proudového elementu od místa, kde je počítáno pole, je označena r , \mathbf{r}_0 je jednotkový vektor po spojnici od elementu k tomuto místu. Směr vektoru magnetické indukce je dán vektorovým součinem $dl \times \mathbf{r}_0$ a bude vycházet kolmo z nákresny jako na obrázku (pravidlo pravé ruky). V konstantní vzdálenosti od vodiče má tedy magnetická indukce všude tečný směr viz. Obr.64. Magnetické pole má podobu „víru“ kolem proudovodičů a tímto vztahem je to matematicky popsáno.

Absolutní hodnota tohoto vektorového součinu je dána vztahem: $|dl \times \mathbf{r}_0| = |dl| \cdot |\mathbf{r}_0| \cdot \sin(\varphi) = dl \cdot \sin(\varphi)$

Pro část magnetické indukce buzené jedním proudovým elementem bude platit:

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|dl \times \mathbf{r}_0|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin(\varphi)}{r^2} \quad (6.5)$$

Sečtením (integrací) intenzity elektrického pole od všech proudových elementů na vodiči dostaneme výslednou magnetickou indukci podle vztahu:

$$B(a) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{l=0}^{l=L} \frac{\sin(\varphi)}{r^2} dl \quad (6.6)$$

V integrálu jsou tři proměnné veličiny, které jsou navzájem závislé : l, φ, r . Při řešení jen nutné vyjádřit substitucí všechny veličiny pomocí jedné společné, nevhodnější je úhel φ :

$$\tan(\varphi) = \frac{a}{b-l} \quad b-l = a \cdot \cot g(\varphi) \quad dl = \frac{a}{\sin^2 \varphi} d\varphi \quad (6.7)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{a}{r} \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2(\varphi)}{a^2} \quad (6.8)$$

Substituce pro meze integrálu:

$$l=0 \rightarrow \varphi=\alpha \quad l=L \rightarrow \varphi=\beta \quad (6.9)$$

Po provedené substituci je magnetická indukce ve stanoveném bodě:

$$\begin{aligned} B(a) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{l=0}^{l=L} \frac{dl \cdot \sin(\varphi)}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a}{\sin^2 \varphi} \frac{\sin^2(\varphi)}{a^2} \sin(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha}^{\beta} \sin(\varphi) d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha - \cos \beta) \end{aligned} \quad (6.10)$$

6.1.1.c Limitní případ výpočtu magnetického pole buzeného dlouhým tenkým vodičem

V případě, že by se jednalo o dlouhý vodič, bude platit (viz Obr.64): $L \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow \pi$

Magnetická indukce podle vztahu (6.10) potom bude:

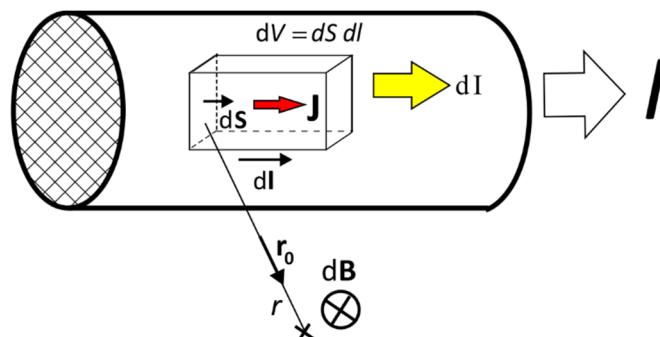
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos 0 - \cos \pi) = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (6.11)$$

V následující části bude ukázáno, že lze pomocí zákona celkového proudu dospět k tomuto výsledku podstatně jednodušším způsobem.

6.1.2 Stacionární magnetické pole buzené proudem s obecně rozloženou proudovou hustotou v objemu vodiče

Pokud je magnetické pole buzené proudem s obecně rozloženou proudovou hustotou ve vodiči (Obr.65), lze podobně jako v (6.1.1) napsat pro objemový element:

$$dQ \mathbf{v} = I dt \mathbf{v} = \mathbf{J} dS dt \frac{dl}{dt} = \mathbf{J} dV \quad (6.12)$$



Obr.65 Objemový proudový element budící magnetické pole

Biot-Savartův zákon pro magnetické pole jednoho objemového proudového elementu bude mít v tomto případě tvar:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dQ}{r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{r}_0)}{r^2} dV$$

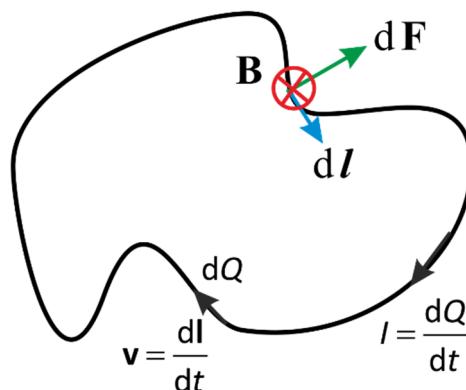
Výsledná magnetická indukce celého objemového tělesa bude mít velikost:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}_0}{r^2} dV$$

6.2 Síla působící vodiče nebo proudovou smyčku v magnetickém poli

Na obrázku Obr.66 je naznačena vodivá smyčka protékaná proudem v naznačeném smyslu, která je vložena do vnějšího magnetického pole s magnetickou indukcí v libovolném místě \mathbf{B} . Na základě definičního vztahu pro magnetickou indukci $\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ a po stejně úpravě jako v části (6.1.1) bude na proudový element smyčky $I.d\mathbf{l}$ působit síla:

$$d\mathbf{F} = dQ(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = dQ\left(\frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{B}\right) = \frac{dQ}{dt}(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (6.13)$$



Obr.66 Síla působící na proudovou smyčku v magnetickém poli

Celková síla působící na proudovou smyčku je dána součtem(integrací) sil na jednotlivé elementy:

$$\mathbf{F} = I \int_l (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (6.14)$$

Poznámka

V předchozí úvaze se jednalo a vnější magnetické pole a vnější sílu, která by mohla smyčkou v magnetickém poli posouvat. Stejným způsobem lze však posuzovat i sílu, která působí na elementy smyčky v jejím vlastním vybuzeném magnetickém poli. V tomto poli by se však smyčka neposouvala, výsledná součetová síla na všechny elementy by byla nulová. Lokální síly by působily deformaci smyčky. Smyčka podle obrázku by se snažila získat kruhový tvar, potom by na všechny strany působily radiální síly, které by se snažily zvětšit její průměr.

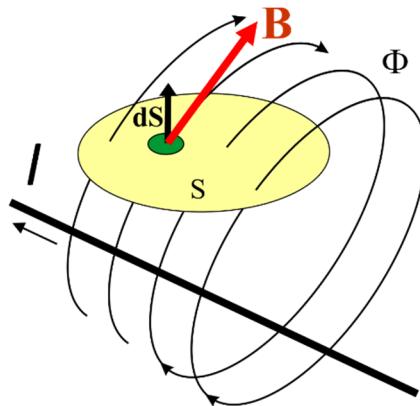
6.3 Magnetický indukční tok (tok vektoru magnetické indukce)

Pro správné pochopení této části je nezbytně nutné prostudovat:

8.5

Tok vektorové veličiny plochou, tok uzavřenou plochou, divergence vektorové funkce

6.3.1 Magnetický indukční tok



Obr.67 Magnetický indukční tok

Bylo ukázáno, že magnetické pole tvoří pomyslné víry kolem vodičů protékaných elektrickým proudem. Pokud magnetické pole popíšeme magnetickou indukcí \mathbf{B} (viz 2.2.3), kterou budeme chápat v tomto případě jako plošnou hustotu pomyslného magnetického indukčního toku Φ , potom bude platit pro velikost toku, který proteče obecnou plochou:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.15)$$

Zcela stejně jako v definici elektrického indukčního toku (3.23) nebo elektrického proudu (5.6) je tvar plochy zohledněn pomocí vektorových elementů plochy $d\mathbf{S}$ a skutečná velikost toku je dána skalárním součinem.

Magnetický indukční tok se často označuje pouze jako **magnetický tok**.

Magnetický tok je v teorii elektromagnetického pole **velice důležitá veličina**. V nestacionárním elektromagnetickém poli totiž **časové změny takto definovaného magnetického indukčního toku** udávají velikost (indukovaného) časově proměnného elektrického pole. Elektrická a magnetická složka je neoddělitelná, tvoří jednotné elektromagnetické pole.

6.3.2 Tok vektoru magnetické indukce uzavřenou plochou

8.5	<i>Tok vektorové veličiny plochou, tok uzavřenou plochou, divergence vektorové funkce</i>
-----	---

Pokud bude plocha, kterou protéká magnetický tok, uzavřená (viz 8.5), proteče touto plochou nulový součtový magnetický tok. Stejně velký tok vteče na jedné straně a vyteče na druhé straně. Magnetické pole je narozdíl od elektrického pole výrové, v uzavřené ploše není zdroj, ze kterého by magnetické pole vytékal.

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6.16)$$

Rovnice (6.16) tedy popisuje charakter magnetického pole a je současně jednou ze sady takzvaných Maxwellových rovnic (viz 7.4). Tuto rovnici lze přepsat do diferenciálního tvaru, ve kterém popisuje magnetické pole bodově:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

(6.17)

6.4 Integrál magnetické indukce po uzavřené dráze – zákon celkového proudu v integrálním a diferenciálním tvaru

Pro správné pochopení této části je nezbytně nutné prostudovat:

8.6

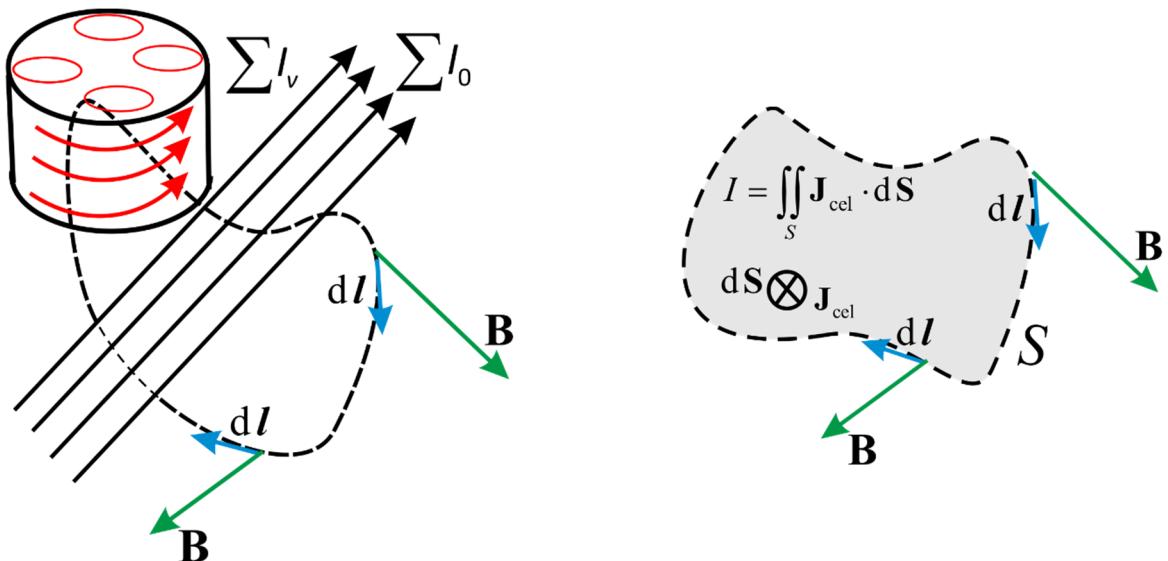
Integrace vektorové funkce po dráze, cirkulace vektorové funkce, rotace, Stokesova věta

6.4.1 Zákon celkového proudu v integrálním tvaru

6.4.1.a Obecné znění zákona celkového proudu v integrálním tvaru

Zdrojem magnetického pole jsou pohybující se náboje, které můžeme ve vodičích sledovat v podobě kondukčních proudů a v magnetiku v podobě vázaných proudů (viz část 1.2.3). Podrobnější rozbor této problematiky je v části 6.5. Vybuzené magnetické pole je se svými zdroji (proudů) vázáno důležitým integrálním vztahem, který se nazývá zákon celkového proudu. Tento vztah má podobný význam jako Gaussova věta v elektrostatickém poli.

Na obrázku Obr.68 je naznačeno magnetické pole vybuzené volnými proudy ve vodiči a vázanými proudy v magnetiku. Pokud v tomto magnetickém poli zvolíme libovolnou myšlenou uzavřenou dráhu (začíná a končí v jednom bodě) a v každém bodě dráhy stanovíme skalární součin vektoru magnetické indukce \mathbf{B} a orientovaného elementu dráhy $d\mathbf{l}$, obdržíme po integraci výsledek, který je vždy roven celkovému proudu (volnému i vázanému), který je uzavřenou dráhou obemknut, vynásobenému permeabilitou vakua. Nezáleží na tom, jestli proud protéká izolovanými tenkými vodiči či jedním masivním vodičem, nezávisí ani na poloze vodičů a tvaru dráhy. Pokud dráha neobemyká žádný proud, bude výsledek nulový, přestože může být hodnota magnetické indukce na uzavřené dráze nenulová. **Podle konvence se po uzavřené dráze obíhá v kladném smyslu (podle pravidla pravé ruky) s ohledem na zvolený kladný smysl protékanýho proudu.**



Obr.68 Zákon celkového proudu

Obr.69 Proud s obecným rozložením proudové hustoty uvnitř oběhové dráhy

Matematicky lze tento vztah formulovat následovně:

$$\oint_l \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{cel}} = \mu_0 \left(\sum I_0 + \sum I_v \right) \quad (6.18)$$

Pokud bude obemknutý proud rozložen po ploše vymezené oběhovou dráhou s obecnou proudovou hustotou \mathbf{J}_{cel} (Obr.69), lze zákon celkového proudu zapsat v alternativní podobě:

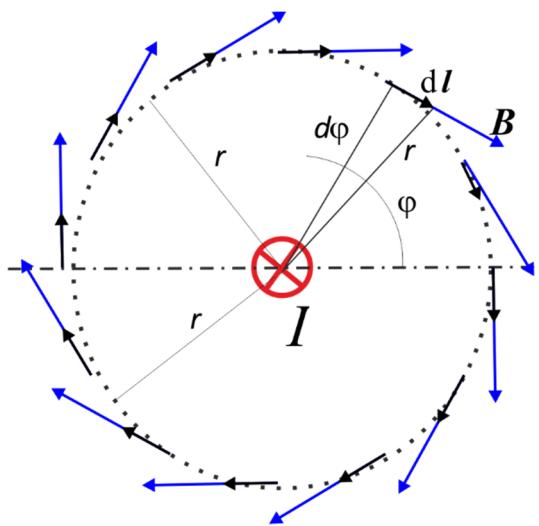
$$\oint_l \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J}_{\text{cel}} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S (\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_v) \cdot d\mathbf{S} \quad (6.19)$$

6.4.1.b Platnost zákona celkového proudu pro dlouhý tenký vodič uprostřed kruhové uzavřené dráhy

Přímý důkaz platnosti zákona celkového proudu je komplikovaný. Jeho platnost se však dá dobře ukázat pro případ magnetického pole buzeného dlouhým tenkým vodičem (viz část **6.1.1.c, 6.1.1.b**). Pokud tento zákon platí pro jeden tenký dlouhý vodič, musí platit i pro libovolný počet dlouhých tenkých vodičů či dlouhý vodič libovolného průřezu.

V části (**6.1.1.c**) bylo pro tenký dlouhý vodič výpočtem pomocí Biot-Savartova zákona ukázáno, že má magnetické pole podobu vírů, silocáry mají tvar koncentrických kružnic, vektory magnetické indukce jsou k siločárám tečné, magnetická indukce je na určitém poloměru konstantní a má velikost. $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Oběhový

integrál (6.18) by měl platit pro libovolnou uzavřenou dráhu. Pokud však za tuto dráhu zvolíme pro první přiblížení siločáru magnetického pole (Obr.70), situace se podstatně zjednoduší:



Obr.70 Oběhový integrál kolem kruhové siločáry dlouhého tenkého vodiče

Vektory \mathbf{B} a $d\mathbf{l}$ jsou v každém místě rovnoběžné a pro skalární součin bude při vyjádření délky elementu dl pomocí elementárního úhlu $d\phi$ ($dl = r d\phi$ (* viz Poznámka dole)) platit:

$$\mathbf{B} d\mathbf{l} = |\mathbf{B}| |d\mathbf{l}| \cos(0) = B(r) \underbrace{r d\phi}_{dl} \quad (6.20)$$

*Poznámka

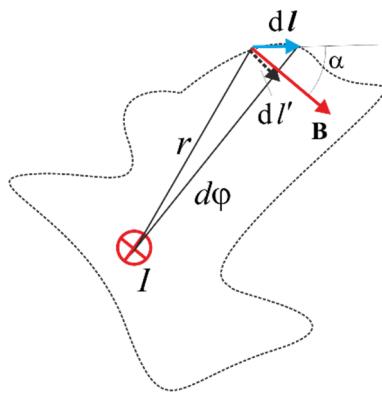
Délka oblouku λ , který vytíná určitý středový úhel α (udaný v obloukové míře) na kružnici o daném poloměru r je dána součinem $\lambda = r \alpha$. Úhel nabývá hodnoty od $\alpha = 0$ po $\alpha = 2\pi$. Pro úhel $\alpha = 2\pi$ je délka oblouku totožná s obvodem kružnice $\lambda = 2\pi r$. Pro elementární úhel $d\phi$ je délka oblouku $dl = r d\phi$.

Magnetická indukce je navíc na siločáre o určitém poloměru všude konstantní: $B(r = \text{konst}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ a při vyčíslení integrálu je možné ji vytknout. Výsledný integrál bude mít hodnotu $\mu_0 I$, což skutečně odpovídá předpokladu rovnice (6.18):

$$\oint_1 \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B(r) \underbrace{r d\phi}_{dl} = B(r) r \int_0^{2\pi} d\phi = B(r) r 2\pi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r 2\pi = \mu_0 I \quad (6.21)$$

6.4.1.c Platnost zákona celkového proudu pro dlouhý tenký vodič uvnitř uzavřené dráhy obecného tvaru

Zcela obdobná situace bude platit, pokud bude mít uzavřená dráha obemykající tenký dlouhý vodič obecný tvar (Obr.71).



Obr.71 Tenký vodič – uzavřená dráha obecného tvaru

Pro skalární součin bude v tomto případě platit:

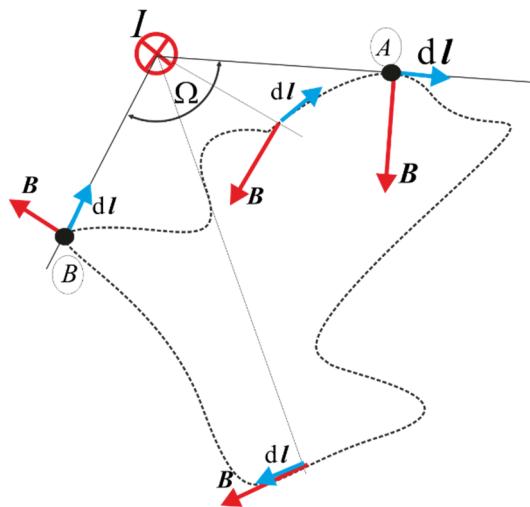
$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{B}| |d\mathbf{l}| \cos(\alpha) = B \cdot d\mathbf{l}' = B(r) r d\varphi \quad (6.22)$$

Po integraci obdržíme stejný výsledek:

$$\oint_1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B(r) r d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I \quad (6.23)$$

6.4.1.d Uzavřená dráha neobemyká vodič protékaný proudem

Pokud bude vodič ležet mimo uzavřenou dráhu (Obr.72), lze dráhu rozdělit na dva úseky viditelné z místa vodiče pod stejným úhlem. Výsledek integrálu bude nulový, přestože je magnetické pole podél uzavřené dráhy zjevně nenulové.

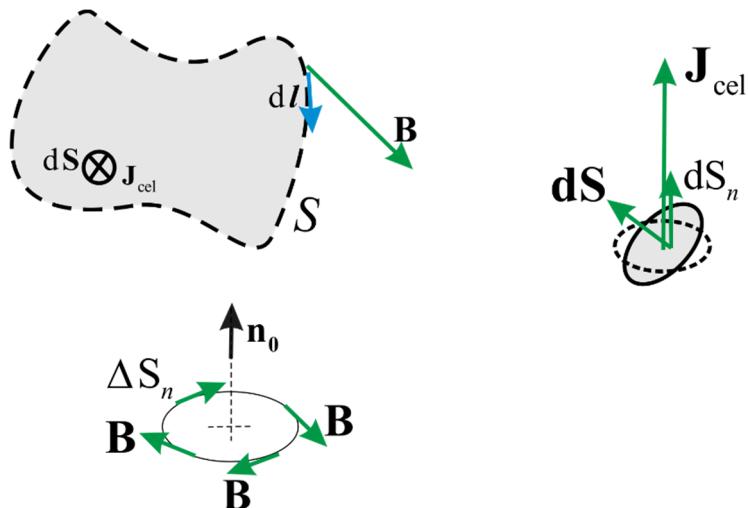


Obr.72 Vodič leží mimo uzavřenou dráhu

$$\oint_1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^\Omega \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\phi + \int_\Omega^0 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\phi = 0 \quad (6.24)$$

6.4.2 Zákon celkového proudu v diferenciálním tvaru

Aby bylo možno lépe popsat vlastnosti magnetického pole s ohledem na jeho zdroje – volné a vázané proudy, je nutné popsat tento problém obecně v každém bodě tím, že se zákon celkového proudu převede z integrálního do diferenciálního tvaru. Aby bylo možné si udělat obrázek, jak tento převod funguje, je bezpodomínečně nutné prostudovat vlastnosti operátoru rotace a Stokesovu větu (viz 8.6).



Obr.73 Rotace magnetické indukce

Pokud máme plochu, která je vymezena uzavřenou křivkou, a touto plochou prochází celkový proud I_{cel} s plošnou hustotou v libovolném místě plochy \mathbf{J}_{cel} , platí s ohledem na (6.18):

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{cel}} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J}_{\text{cel}} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.25)$$

Integrál na levé straně lze pomocí Stokesovy věty přepsat následujícím způsobem:

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J}_{\text{cel}} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.26)$$

Porovnáním levé a pravé strany potom:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{cel}} = \mu_0 (\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_v) \quad (6.27)$$

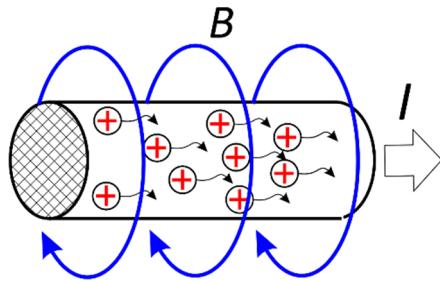
Rovnice popisuje celý problém v jednom bodě, místo celkového proudu se zde vyskytuje celková proudová hustota v daném místě \mathbf{J}_{cel} , která je dána součtem proudové hustoty konduktivního proudu \mathbf{J}_0 a vázaného proudu \mathbf{J}_v .

Pro další posouzení vlivu proudové hustoty volného a vázaného proudu na celkové magnetické pole je toto rozdělení výhodné, protože konduktivní i vázáný proud má poněkud jinou povahu, proudovou hustotu každého z nich bude nutné započítat jiným způsobem.

6.5 Magnetické pole buzené kondukčními proudy ve vodičích a vázanými proudy v magnetiku

6.5.1 Kondukční proud ve vodičích (proud volných částic)

Magnetické pole je buzeno pohybujícími se náboji. **Primárním zdrojem** magnetického pole jsou volné náboje pohybující se ve vodičích v podobě elektrického kondukčního proudu (proudu volných nosičů náboje viz 1.2.3) (Obr.74):



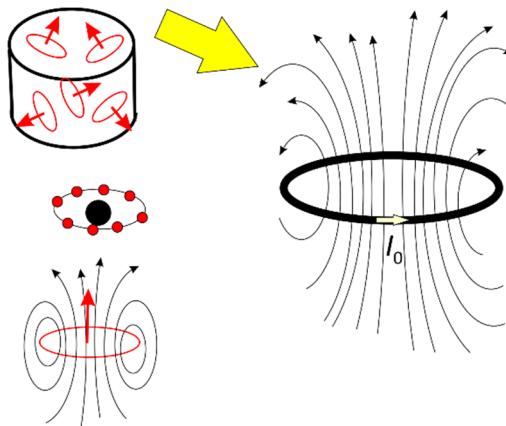
Obr.74 Magnetické pole primárně buzené volnými nosiči náboje – kondukčním proudem

6.5.2 Vázaný proud v magnetiku

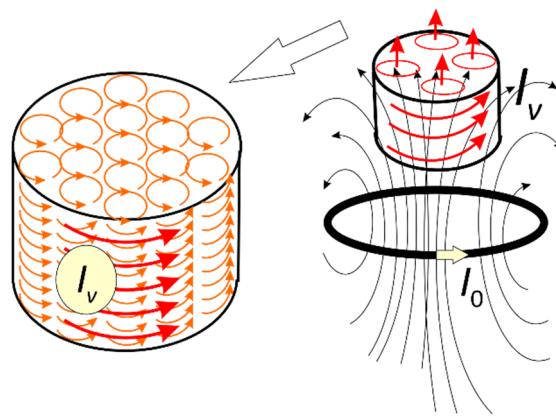
V elektricky nevodivých materiálech se náboje rovněž pohybují a budí ve svém okolí magnetické pole. V jednoduchém modelu hmoty elektrony pomyslně obíhají kolem jader atomů). Dráhy obíhajících elektronů je možné si představit jako elementární proudové smyčky, které rovněž vytvářejí magnetické pole. Elementární smyčky jsou však v materiálu, který se nachází mimo vnější magnetické pole, orientovány tak, že se jejich účinky navzájem ruší (Obr.75). Po vložení materiálu do magnetického pole primárně vybuzeného kondukčními proudy se tyto elementární smyčky natáčejí do směru vnějšího pole a toto pole posilují (Obr.76).

Z intuitivního pohledu by tento mechanizmus mohl nastávat u libovolného materiálu, prakticky se však nejvíce projevuje v materiálech, které se nazývají feromagnetické. Úplný popis jevů ve feromagnetických materiálech je komplikovaný, uvedené zjednodušené skutečnosti slouží pouze pro hrubou představu.

Sečtením proudu elementárních proudových smyček dostáváme celkový proud, který se pomyslně uzavírá v objemu a po povrchu magnetickém materiálu (Obr.76). Tento proud se nazývá vázaný. Vzniká jako sekundární reakce na primární magnetické pole kondukčních proudů.



Obr.75 Feromagnetický materiál – elementární proudové smyčky



Obr.76 Vázaný proud v magnetiku

6.5.3 Součtové magnetické pole konduktivních proudů ve vodičích a vázaných proudů v dielektriku

Na obrázku Obr.76 je pro představu znázorněn materiál vložený do magnetického pole proudové smyčky. Proudová smyčka protékaná volně se pohybujícími náboji v podobě konduktivního proudu vybudí **primární magnetické pole**. Pokud do tohoto pole vložíme magnetikum, dráhy obletujících elektronů (pomyslné elementární proudové smyčky) se natočí do směru primárního pole a toto pole svým vlastním magnetickým polem posílí. Velikost natočení je úměrná výsledné magnetické indukci (intenzitě magnetického pole). Pokud budeme pro jednoduchost předpokládat, že magnetický materiál je homogenní a všechny elementární magnetické smyčky jsou již zcela natočeny do směru vnějšího pole, směřují elementární proudy dílčích smyček uvnitř materiálu proti sobě a navzájem se vyruší. Po povrchu magnetika, kde se dílčí vázané proudy neruší, teče pomyslný výsledný vázaný proud.

Na tomto jednoduchém modelu je možné vysvětlit i mechanizmus „nasycení“ magnetického materiálu a zbytkový magnetismus.

Při určité intenzitě vnějšího magnetického pole jsou již všechny elementární smyčky zcela natočeny do vnějšího magnetického pole. Při zvětšování intenzity primárního magnetického pole se již další natočit nemohou a pole se nebude dále posilovat.

Zbytkový (remanentní) magnetismus lze intuitivně vysvětlit tak, že se elementární smyčky nevrátí po zániku primárního magnetického pole zcela do své výchozí neutrální polohy, zůstanou částečně natočeny a těleso se jeví jako zmagnetované (samo kolem sebe vytváří magnetické pole).

Existuje velká skupina materiálů, které se vyznačují po zmagnetování velkým remanentním magnetizmem. Tyto materiály se používají na výrobu permanentních magnetů.

6.5.4 Superpozice magnetického pole volných i vázaných proudů, vzájemný vztah mezi magnetickou indukcí **B**, intenzitou magnetického pole **H** a magnetizací **M**

V rovnici (6.27), která byla odvozena pro magnetickou indukci buzenou součtovou proudovou hustotou volného a vázaného proudu, je nutné separátně zohlednit proudovou hustotu konduktivního proudu \mathbf{J}_0 a vázaného proudu \mathbf{J}_v :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{cel}} = \mu_0 (\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_v) \quad (6.28)$$

Plošná hustota kondukčního proudu \mathbf{J}_0 , jak je podrobně popsáno v části **6.5.5**, je vyjádřena pomocí vektorové veličiny, která se nazývá **intenzita magnetického pole \mathbf{H}** :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \quad (6.29)$$

Jednotkou intenzity magnetického pole je [A / m]. Intenzita magnetického pole je definována tak, že souvisí pouze s kondukčními proudy. Pokud chápeme kondukční proudy jako primární zdroje magnetického pole (**6.5.1,6.5.2**), intenzitu magnetického pole lze v tomto ohledu chápat jako **primární „zdrojovou“ veličinu magnetického pole**.

Plošná hustota vázaného proudu \mathbf{J}_v , jak je podrobně popsáno v části **6.5.6**, je vyjádřena pomocí vektorové veličiny, která se nazývá **magnetizace \mathbf{M}** :

$$\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{J}_v \quad (6.30)$$

Jednotkou magnetizace je [A / m]. Magnetizace je definována tak, že souvisí pouze s vázanými proudy v magnetiku. Pokud chápeme vázané proudy jako sekundární zdroje magnetického pole (**6.5.1,6.5.2**), magnetizaci lze v tomto ohledu chápat jako **sekundární „zdrojovou“ veličinu**.

Po dosazení do rovnice (6.28) bude platit:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{cel}} = \mu_0 (\text{rot } \mathbf{H} + \text{rot } \mathbf{M}) \quad (6.31)$$

Porovnáním levé a pravé strany vyplýne vztah mezi magnetickou indukcí, intenzitou magnetického pole a magnetizací:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (6.32)$$

Velikost magnetizace (to jak se natočí pomyslné magnetické dipoly) v magnetickém materiálu je úměrná magnetické indukcí (intenzitě magnetického pole viz **6.5.6**). Pokud bychom uvažovali, že je tato závislost lineární, což u magnetických materiálů obecně neplatí, můžeme zavést veličinu, která se nazývá magnetická susceptibilita χ_m . Můžeme ji definovat, podobně jako v elektrickém poli, jako podíl magnetické indukce vybuzené vázanými proudy k magnetické indukcii vybuzené volnými proudy:

$$\chi_m = \frac{\mu_0 \mathbf{M}}{\mu_0 \mathbf{H}} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}} \quad (6.33)$$

Po dosazení :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (\mathbf{H} + \chi_m \cdot \mathbf{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \quad (6.34)$$

Pokud zavedeme novou bezrozměrnou veličinu, která se nazývá relativní permeabilita:

$$\mu_r = (1 + \chi_m) \quad (6.35)$$

Potom bude platit pro vztah mezi magnetickou indukcí a intenzitou magnetického pole:

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} \quad (6.36)$$

Pokud uvážíme, že $\mu_0\mathbf{H}$ je magnetická indukce vybuzená konduktivními proudy ve vzduchu nebo vakuu, potom relativní permeabilita udává, kolikrát by se magnetické pole zesílilo vlivem vázaných proudů v magnetiku, zahrnuje v sobě tedy účinky magnetizace:

$$\mu_r = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mathbf{H}} \quad (6.37)$$

U většiny technicky používaných tzv. feromagnetických materiálů však není závislost mezi magnetickou indukcí \mathbf{B} a intenzitou magnetického pole \mathbf{H} lineární, není ani jednoznačná. Její tvar je dán tzv. hysterezní smyčkou. Tyto materiály nejsou ani izotropní. Relativní permeabilita μ_r není konstantní.

6.5.5 Započítání vlivu proudu volných nosičů náboje (konduktivního proudu), intenzita magnetického pole \mathbf{H}

Na konduktivní proud je možné pohlížet zcela stejně jako na obecný celkový proud, pro který platil zákon celkového proudu formulovaný v (6.18). Vzhledem k tomu, že lze konduktivní proud chápat jako **primární zdroj magnetického pole** (viz 6.5.1, 6.5.2), zavádí se nová „**zdrojová**“ veličina, která souvisí pouze s volnými proudy a jejich prostorovým uspořádáním. Tato veličina se nazývá **intenzita magnetického pole \mathbf{H}** [A/m]. Zákon celkového proudu pro intenzitu magnetického pole má poněkud modifikovaný tvar (pravá strana není násobena permeabilitou vakua μ_0):

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_0 \quad (6.38)$$

Pokud bychom ovšem v problému, kde existuje pouze konduktivní proud, vynásobili intenzitu magnetického pole permeabilitou vakua μ_0 , dostaneme magnetickou indukci buzenou tímto konduktivním proudem ve vzduchu nebo vakuu.

Po převedení do integrálního tvaru bude podle Stokesovy věty platit:

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{J}_0 \cdot d\mathbf{S} \quad (6.39)$$

a déle potom

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \quad (6.40)$$

\mathbf{J}_0 je proudová hustota konduktivního proudu (proudu volných nosičů náboje). Vztah (6.40) je použit pro započtení celkového vlivu volného a vázaného proudu v **6.5.4**.

6.5.6 Započítání vlivu vázaných proudů v magnetiku, vektorová veličina magnetizace \mathbf{M}

Vázané proudy v magnetiku je možné vysvětlit na základě superpozice proudů elementárních magnetických dipólů, malých proudových smyček (viz část **6.5**), které jsou pomyslně tvořeny elektrony obletujícími kolem atomů. Pokud se taková proudová smyčka vloží do vnějšího magnetického pole (viz část **6.5.6.a**), má tendenci se natáčet tak, aby její vlastní magnetické pole působilo souhlasně s vnějším polem. Natočená smyčka vnější magnetické pole posílí.

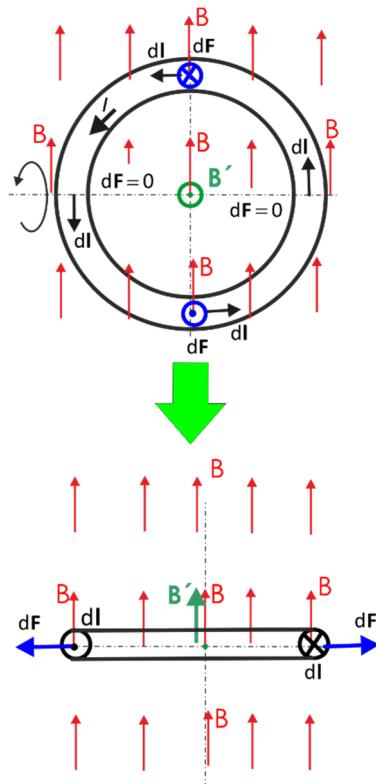
6.5.6.a Síla působící na proudovou smyčku vloženou do magnetického pole

Pro ilustraci je v této části ukázáno, že se proudová smyčka po vložení do vnějšího magnetického pole skutečně stáčí ve směru tohoto pole.

Na obrázku (Obr.77) je znázorněna proudová smyčka s naznačeným smyslem proudu, která je vložena do homogenního magnetického pole s vektory magnetické indukce v rovině smyčky. Na každý element působí síla o velikosti (viz část **6.2**):

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \\ |d\mathbf{F}| &= I|d\mathbf{l}||\mathbf{B}|\sin(\alpha) \end{aligned} \quad (6.41)$$

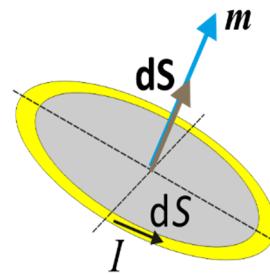
Největší síla působí na horní a dolní straně smyčky, kde délkový element $d\mathbf{l}$ svírá s magnetickou indukcí \mathbf{B} úhel $\pi/2$. Na horní stranu smyčky působí síla do nákresny, na spodní v opačném směru. Na elementy ležící na středové ose nebude působit žádná síla, délkový element svírá s magnetickou indukcí nulový úhel. Smyčka se bude kolem středové osy natáčet v naznačeném smyslu a tak, aby se její vlastní magnetické pole \mathbf{B}' natočilo do směru magnetické indukce vnějšího pole \mathbf{B} . Pokud by na smyčku nepůsobil jiný točivý moment s opačným znaménkem, natočila by se do polohy naznačené na spodní části obrázku. V této pozici by byl točivý moment nulový a na smyčku by působily pouze síly v radiálním směru, které by se snažily zvětšit její průměr.



Obr.77 Proudová smyčka vložená do vnějšího magnetického pole

6.5.6.b Magnetický dipól, dipólový moment a veličina magnetizace

Magnetickým dipólem se obvykle rozumí elementární proudová smyčka jako na obrázku (Obr.78).



Obr.78 Magnetický dipól

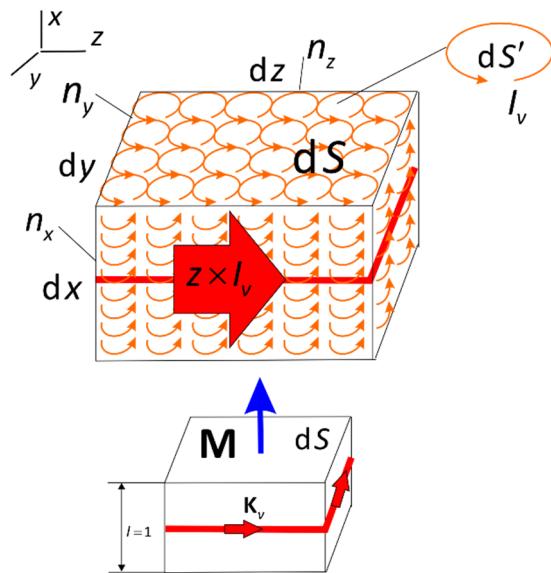
Magnetický dipólový moment je vektorová veličina, která je dána součinem orientované plochy a proudu. Plocha je orientována v kladném směru ve vztahu ke kladnému smyslu proudu (pravidlo pravé ruky):

$$\mathbf{m} = I d\mathbf{S} \quad (6.42)$$

Magnetizace \mathbf{M} je vektorová veličina, která udává objemovou hustotu magnetického dipólového momentu (celkový dipólový moment v jednotce objemu):

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}}{\Delta V} \quad (6.43)$$

Magnetizace souvisí s velikostí vázaného proudu v magnetiku, což je možné ukázat následující jednoduchou úvahou. Na obrázku Obr.79 je vytknutý objemový element o velikosti $dV = dx dy dz$ a budeme předpokládat, že v tomto objemovém elementu je celkem $n = n_x n_y n_z$ dipólů, z toho ve směru x je n_x dipólů, ve směru y je n_y dipólů a ve směru z je n_z dipólů. Pokud budeme uvažovat, že jeden magnetický dipól má dipólový moment $m = I_v dS'$, I_v je proud tekoucí elementárním dipólem, dS' je plocha smyčky elementárního dipólu a dále pro jednoduchost, že jsou všechny dipoly stejně natočeny, bude pro magnetizaci platit:



Obr.79 Magnetizace

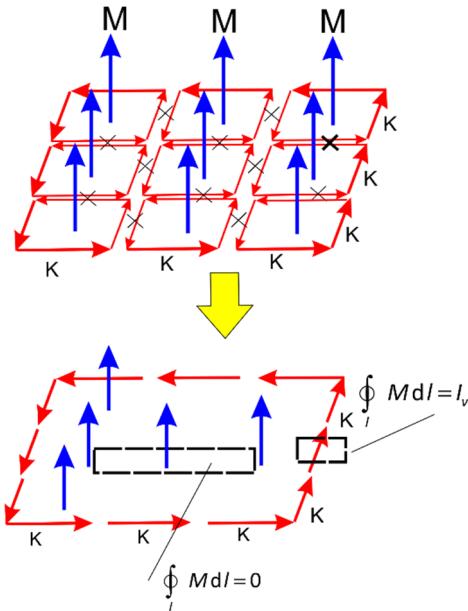
$$M = \frac{\sum m}{\Delta V} = \frac{n_x n_y n_z I_v dS'}{dx dy dz} = \frac{(n_y n_z dS') n_x I_v}{dS dx} = \frac{n_x I_v}{dx} = K \quad (6.44)$$

Magnetizace (orientovaná v tomto případě ve směru x viz Obr.79) udává velikost vázaného proudu na jednotku délky, který obtéká po povrchu elementu ve směru y (případně z). Označuje se jako liniová hustota vázaného proudu K [A/m], je to pomyslně proud, který by tekl po povrchu pásem jednotkové šířky (Obr.79 dole).

6.5.6.c Homogenní magnetikum

Pokud bychom z několika elementů na (Obr.79) sestavili objemové těleso a magnetizace (objemová hustota magnetického dipólového momentu) by byla ve všech elementech stejná, vázané proudy mezi jednotlivými

elementy by se eliminovaly, zbude vázaný proud po povrchu magnetika, jehož liniová hustota K je dána opět velikostí magnetizace, která je v tomto případě všude stejná (viz Obr.80).



Obr.80 Homogenní magnetikum

Pokud vypočítáme v libovolném místě uvnitř magnetika oběhový integrál vektoru magnetizace (viz Obr.80), bude nulový, protože neobemkneme žádný vázaný proud:

$$\oint_l \mathbf{M} d\mathbf{l} = 0 \quad (6.45)$$

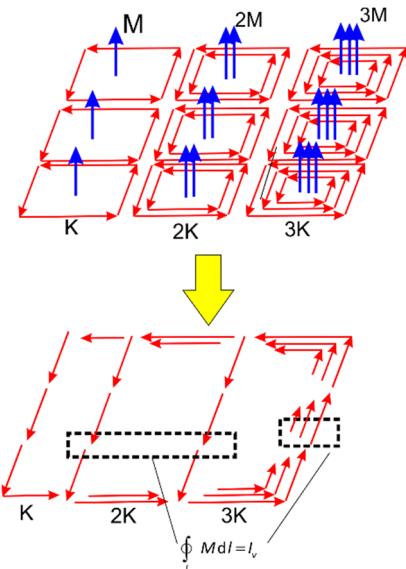
V homogenním magnetiku bude tedy platit v každém bodě uvnitř tělesa:

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0 \quad (6.46)$$

6.5.6.d Nehomogenní magnetikum

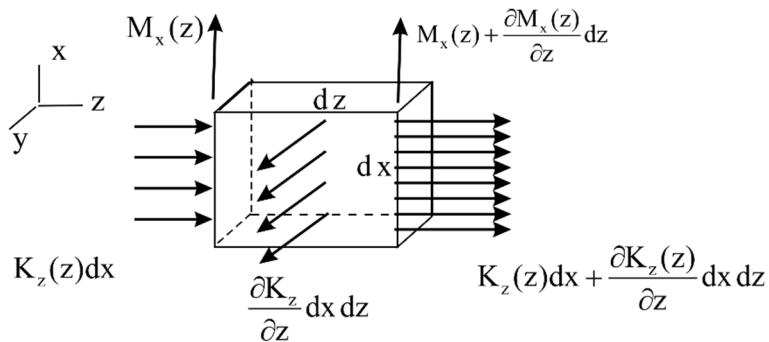
V nehomogenním magnetiku může být obecně objemová hustota magnetických dipólů a potažmo i magnetizace v každém místě jiná.

Pro zjednodušenou představu je možné například předpokládat, že mohou být elementy (Obr.79) uspořádány tak, že magnetizace lineárně stoupá ve směru x. (Obr.81). V tomto případě se vázané proudy jednotlivých sousedních elementů neodečtou, uvnitř magnetika poteče výsledný vázaný proud (Obr.81).



Obr.81 Nehomogenní magnetikum

Velikosti vázaného proudu tekoucího uvnitř magnetika lze v tomto případě stanovit následující úvahou:



Obr.82 Proudový element v nehomogenním magnetiku

Na obrázku (Obr.82) je vytknutý element magnetika, ve kterém má magnetizace pro jednoduchost pouze složku ve směru x a ta se mění pouze ve směru z (je funkcí pouze z). Na levé straně elementu v místě o souřadnici z má magnetizace hodnotu $M_x(z)$, na pravé straně v místě o souřadnici $z + dz$ má hodnotu :

$M_x(z + dz) = M_x(z) + \frac{\partial M_x(z)}{\partial z} dz$. Magnetizace jednoznačně souvisí s liniovou hustotou vázaného proudu po obvodě elementu $|M| = |K|$. Po stěně elementu, která má výšku dx teče zleva vázaný proud $K_z(z) dx$ a z pravé strany odtéká vázaný proud $\left(K_z(z) + \frac{\partial K_z(z)}{\partial z} dz \right) dx$

Čelní plochou elementu protéká tedy ve směru y vázaný proud:

$$K_z(z)dx + \frac{\partial K_z(z)}{\partial z}dxdz - K_z(z)dx = \frac{\partial K_z(z)}{\partial z}dxdz \quad (6.47)$$

Proudová hustota směrem y $J_y(z)$ bude mít v místě o souřadnici z velikost:

$$J_y(z) = \frac{\frac{\partial K_z(z)}{\partial z}dxdz}{dxdz} = \frac{\partial K_z(z)}{\partial z} \quad (6.48)$$

Toto je však v tomto případě složka rotace vektoru magnetizace ve směru osy y (viz **8.6.5**):

$$\text{rot}_y M = \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial M_z}{\partial x}}_0 \right) = \frac{\partial M_x(z)}{\partial z} = \frac{\partial K_z(z)}{\partial z} = J_y(z) \quad (6.49)$$

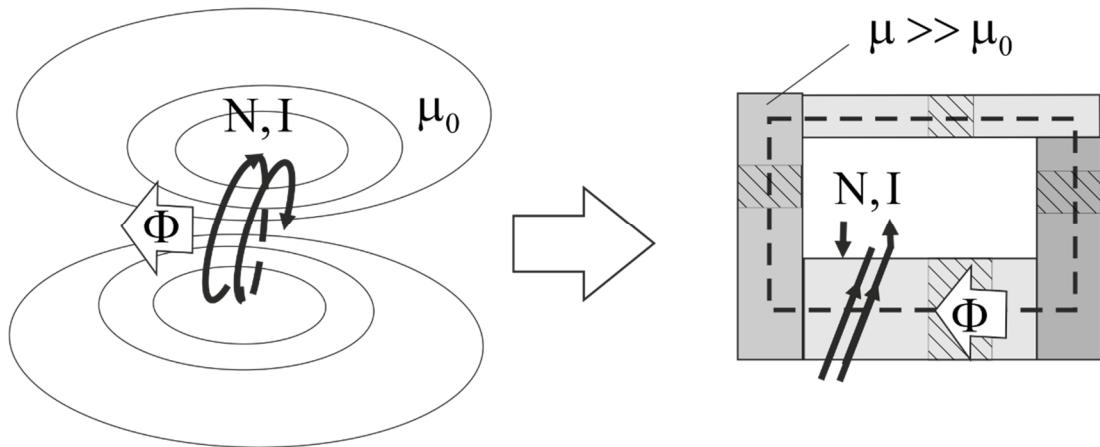
Při libovolném směru a velikosti magnetizace \mathbf{M} obecně platí v každém bodě:

$$\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{J}_v \quad (6.50)$$

Rotace magnetizace v daném místě udává plošnou hustotu vázaného proudu.

6.6 Magnetické pole v „magnetických obvodech“, Hopkinsonův zákon

Na obrázku Obr.83 je znázorněna v levé části cívka protékaná elektrickým proudem, která je umístěna ve vzduchu. Siločáry magnetického pole se uzavírají v širokém okolí cívky, cívkom protéká celkový magnetický tok Φ . Pokud uvnitř cívky a po uzavřené dráze okolo cívky vytvoříme cestu pro magnetický tok z feromagnetického materiálu (tzv. magnetický obvod) o podstatně větší permeabilitě μ , než je permeabilita ve vzduchu μ_0 , převážná část magnetického toku se bude uzavírat tímto magnetickým obvodem. Magnetické pole se vlivem vloženého magnetického obvodu deformuje, pomyslně se do magnetického obvodu vtáhne. Uvnitř magnetického obvodu se magnetická indukce podstatně zvětší.



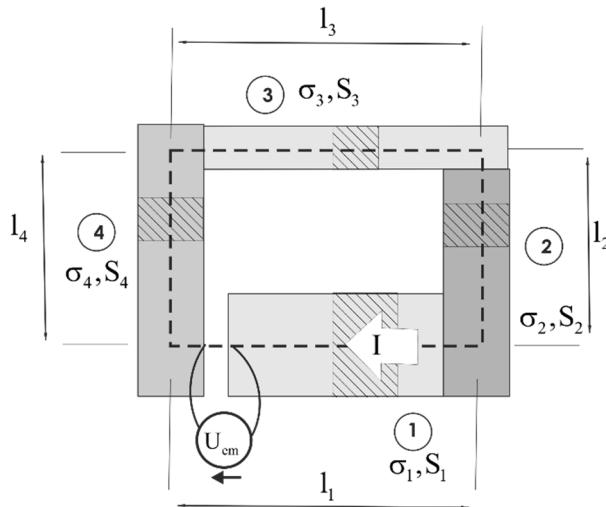
Obr.83 Cívka ve vzduchu a nad feromagnetickým materiálem

Tvar vloženého magnetického obvodu a tedy i tvar magnetického pole může být složitý. Pro praktické výpočty však budeme předpokládat, že je magnetický obvod složený z několika pravidelných částí o daném průřezu, délce a permeabilitě. Dále budeme předpokládat, že jsou splněny tyto důležité podmínky:

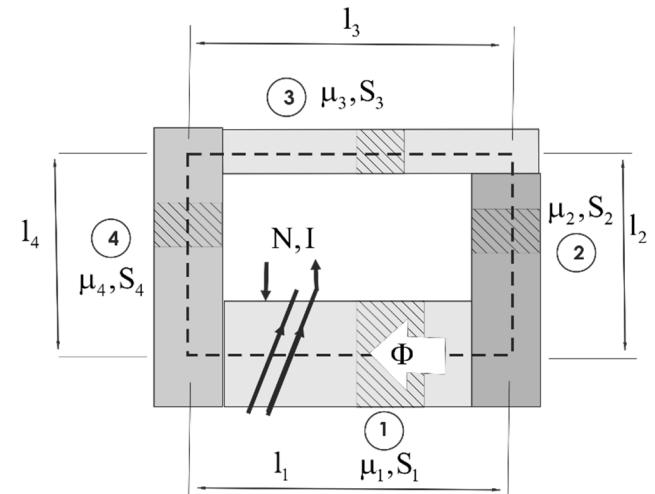
- Magnetický tok je nenulový pouze uvnitř magnetického obvodu, vně je nulový. Aby mohla být tato podmínka splněna, musí být, jak bude ukázáno, „magnetický odpor“ v magnetickém obvodu podstatně menší, než magnetický odpor pro magnetické pole uzavírající se v okolním vzduchu. Permeabilita podstatné části magnetického obvodu musí být tedy o hodně větší, než je permeabilita vakua.
- Magnetický tok je rozložen rovnoměrně v průřezu každého úseku magnetického obvodu (magnetická indukce v libovolném místě průřezu každého úseku je konstantní).
- Za délku každého úseku považujeme při tomto zjednodušení délku pomyslné střední siločary magnetického pole.

Za těchto předpokladů je možné sestavit rovnice, které jsou svoji strukturou velice podobné rovnicím pro případ, kdy by se jednalo o elektrický obvod s podobnou geometrickou strukturou.

Na obrázku Obr.84 je znázorněn magnetický obvod složený ze čtyř částí. každá část má svoji střední délku siločary l, průřez S a permeabilitu μ . Na magnetickém obvodu je umístěna cívka s počtem závitů N protékaná proudem I. Na obrázku Obr.85 je geometricky zcela podobný elektrický obvod sestavený z elektrických vodičů o dané délce a daném průřezu. V každé části je měrná vodivost vodiče σ . Elektrický obvod je napájen z ideálního (s nulovým vnitřním odporem) zdroje napětí o hodnotě elektromotorického napětí U_m .



Obr.84 Ekvivalentní elektrický obvod



Obr.85 Magnetický obvod

V další části jsou ve dvou sloupcích vedle analogicky porovnány vztahy popisující ekvivalentní elektrický a magnetický obvod.

Pro ekvivalentní elektrický obvod platí rovnice:	Pro magnetický obvod platí rovnice:		
Integrál intenzity elektrického pole po uzavřené dráze procházející zdrojem napětí, v tomto případě kolem celého elektrického obvodu, je roven elektromotorickému napětí zdroje viz(5.23)	Integrál intenzity magnetického pole po uzavřené dráze, v tomto případě kolem celého magnetického obvodu, je roven celkovému proudu, který tato dráha obemyká (viz (6.38)). Člen na pravé straně rovnice se analogicky označuje magnetomotorické napětí U_m , jeho jednotkou je [A]. V technické praxi se také pro jednotku často používá název „ampérvávit“.		
$\oint_c E \cdot dI = U_{em}$	$\oint_c E \cdot dI = \sum_c I = N I = U_m$		
Pokud budeme uvažovat, že je intenzita elektrického (magnetického) pole v každém úseku podél vytknuté siločáry konstantní, lze dále psát:			
$E_1 l_1 + E_2 l_2 + E_3 l_3 + E_4 l_4 = U_{em}$	(6.51)	$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4 = U_m$	(6.52)
V stacionárním proudovém poli platí princip kontinuity proudu, který je možné formulovat i v podobě Kirchhoffova zákona jako nulový součet proudů v uzlu elektrického obvodu (viz (5.29))	Podle rovnice popisující magnetické pole procházející uzavřenou plochou, kterou lze v tomto případě analogicky formulovat jako nulový součet magnetických toků v uzlu magnetického obvodu viz (6.16), platí:		

$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \sum I = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \sum \Phi = 0$	
Všemi částmi elektrického obvodu prochází v tomto konkrétním případě stejný elektrický proud, v závislosti na průřezu se mění pouze proudová hustota:	Všemi částmi magnetického obvodu prochází v tomto konkrétním případě stejný magnetický tok, v závislosti na průřezu se mění pouze magnetická indukce jako hustota magnetického toku:	
$I = J_1 S_1 = J_2 S_2 = J_3 S_3 = J_4 S_4$	$\Phi = B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_3 S_3 = B_4 S_4$	
V elektrickém poli platí Ohmův zákon v diferenciálním tvaru (viz (5.13)):	V magnetickém poli platí vztah respektující magnetizaci materiálu (viz (6.37)):	
$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$	
Pokud rovnici (6.51) upravíme tak, že všechny členy na levé straně vynásobíme a vydělíme průřezem a vodivostí v daném úseku, dostaneme:	Pokud rovnici (6.52) upravíme tak, že všechny členy na levé straně vynásobíme a vydělíme průřezem a permeabilitou v daném úseku, dostaneme:	
$U_{em} =$ $E_1 l_1 \frac{\sigma_1 S_1}{\sigma_1 S_1} + E_2 l_2 \frac{\sigma_2 S_2}{\sigma_2 S_2} + E_3 l_3 \frac{\sigma_3 S_3}{\sigma_3 S_3} + E_4 l_4 \frac{\sigma_4 S_4}{\sigma_4 S_4} =$ $J_1 S_1 \frac{l_1}{\sigma_1 S_1} + J_2 S_2 \frac{l_2}{\sigma_2 S_2} + J_3 S_3 \frac{l_3}{\sigma_3 S_3} + J_4 S_4 \frac{l_4}{\sigma_4 S_4} =$ $= I \left(\frac{l_1}{\sigma_1 S_1} + \frac{l_2}{\sigma_2 S_2} + \frac{l_3}{\sigma_3 S_3} + \frac{l_4}{\sigma_4 S_4} \right) =$ $= I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = RI$	$U_m =$ $H_1 l_1 \frac{\mu_1 S_1}{\mu_1 S_1} + H_2 l_2 \frac{\mu_2 S_2}{\mu_2 S_2} + H_3 l_3 \frac{\mu_3 S_3}{\mu_3 S_3} + H_4 l_4 \frac{\mu_4 S_4}{\mu_4 S_4} =$ $B_1 S_1 \frac{l_1}{\mu_1 S_1} + B_2 S_2 \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + B_3 S_3 \frac{l_3}{\mu_3 S_3} + B_4 S_4 \frac{l_4}{\mu_4 S_4} =$ $= \Phi \left(\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + \frac{l_3}{\mu_3 S_3} + \frac{l_4}{\mu_4 S_4} \right) =$ $= \Phi (R_{m1} + R_{m2} + R_{m3} + R_{m4}) = \Phi R_m$	
V elektrickém obvodu platí Ohmův zákon v integrálním tvaru	Pro magnetický obvod platí velmi podobná integrální rovnice, ve které se místo elektrického proudu vyskytuje magnetický tok, místo elektromotorického napětí magnetomotorické napětí a místo elektrického odporu tzv. magnetický odpor – magnetická reluktance. Tento vztah se nazývá Hopkinsonův zákon :	
$I = \frac{U_{em}}{R}$	$\Phi = \frac{U_m}{R_m}$	(6.53)
Pro elektrické odpory jednotlivých částí elektrického obvodu platí:	Pro magnetické odpory (reluktace) jednotlivých částí magnetického obvodu platí analogicky:	

$R_i = \frac{l_i}{\sigma_i S_i}$	$R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_i S_i}$
Elektrický obvod lze pomocí obvodových schématických prvků popsat stejně jako na obrázku Obr.86. Podobně lze popsat ekvivalentním schématickým náhradním obvodem i magnetický obvod (viz obr Obr.87)	
<p>Obr.86 Náhradní elektrický obvod</p>	<p>Obr.87 Ekvivalentní náhradní elektrický obvod</p>

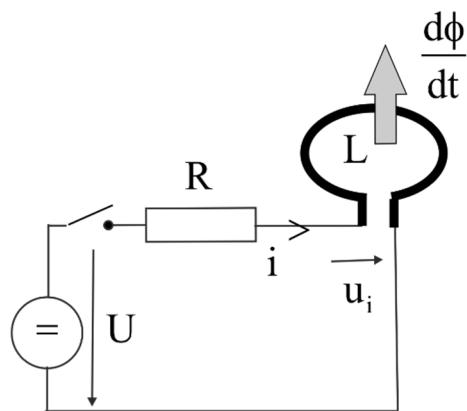
Uvedeným postupem lze popsat i složité soustavy, ve kterých se vyskytuje větší množství nejen sériových, ale i paralelních prvků magnetického obvodu a rovněž větší počet cívek protékajících proudy (zdrojů magnetomotorického napětí). Pro takové magnetické obvody lze sestavit ekvivalentní schématické náhradní obvody a počítat podle zcela stejných pravidel, jako v podobných elektrických obvodech. Vždy však musí být dostatečně splněny předpoklady uvedené na začátku této části.

6.7 Energie v magnetickém poli

6.7.1 Energie magnetického pole vybuzeného proudovou smyčkou

Následujícími úvahami je možné si relativně snadno udělat představu o energetických poměrech v magnetickém poli:

Na obrázku Obr.88 je jednoduchý elektrický obvod se zdrojem stejnosměrného napětí, rezistorem R a proudovou smyčkou. Po připojení zdroje napětí se začne v obvodu postupně zvyšovat elektrický proud. Časová změna proudu vyvolá časové změny magnetického pole, které ve smyčce zpětně indukuje napětí (viz 7.2). Indukované napětí má opačnou polaritu než napětí zdroje a brání zvyšování proudu ve smyčce. Během přechodného děje se proud postupně zvyšuje z nulové hodnoty a ustálí se na hodnotě $I = \frac{U}{R}$. Ve smyčce se během tohoto děje postupně vytváří magnetické pole. Magnetický tok se zvětšuje z nulové hodnoty na ustálenou hodnotu Φ :



Obr.88 Energie magnetického pole v cívce

$$\begin{aligned} i &: 0 \rightarrow I \quad (I = \frac{U}{R}) \\ \phi &: 0 \rightarrow \Phi \quad (\Phi = L I) \end{aligned} \quad (6.54)$$

Velikost energie magnetického pole vybuzeného smyčkou lze stanovit jednoduchou úvahou, při které provedeme bilanci energie dodané zdrojem v průběhu přechodného děje a stanovíme část energie, která se podílí na vytvoření magnetického pole.

Pro přechodový jev platí diferenciální rovnice:

$$U = R i(t) + \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (6.55)$$

Po vynásobení levé i pravé strany rovnice členem $i(t) dt$, lze udělat bilanci energie.

$$\underbrace{U i(t) dt}_{dA} = \underbrace{R i^2(t) dt}_{\text{teplota}} + \underbrace{\frac{d\phi(t)}{dt} i(t) dt}_{dW_m} \quad (6.56)$$

Člen na levé straně představuje práci dA dodanou v libovolném časovém okamžiku zdrojem za čas dt . Tato práce se přemění v rezistoru na teplo (první člen na pravé straně) a na přírůstek energie magnetického pole dW_m (druhý člen na pravé straně). Po vynásobení bude pro přírůstek energie magnetického pole platit:

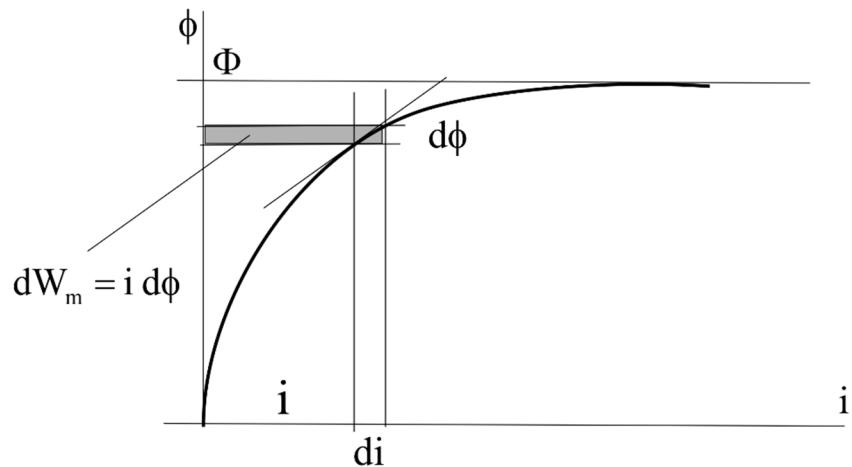
$$dW_m = i d\phi \quad (6.57)$$

Přírůstek energie magnetického pole je dán v každém okamžiku součinem proudu a změny magnetického toku. Člen $i d\phi$ je možné dále rozepsat: $i d\phi = \frac{dQ}{dt} d\phi$ a lze jej intuitivně chápout s ohledem na definici napětí tak, že je to práce potřebná na přenesení náboje o velikosti dQ mezi svorkami smyčky, na kterých se časovou změnou magnetického toku objevilo indukované napětí o velikosti $\frac{d\phi}{dt}$.

Celková energie magnetického pole je dána integrálem:

$$W_m = \int_0^\Phi i d\phi \quad (6.58)$$

Na obrázku Obr.89 je takzvaná **magnetizační charakteristika**, která znázorňuje závislost magnetického toku na proudu $\phi(i)$. Tato charakteristika je obecně nelineární.



Obr.89 Magnetizační charakteristika

Pro správnou interpretaci členu $i d\phi$ s ohledem na magnetizační charakteristiku je možné udělat tuto další úvahu. Změna magnetického toku $d\phi$ v místě charakteristiky s daným proudem i pro změnu proudu di je:

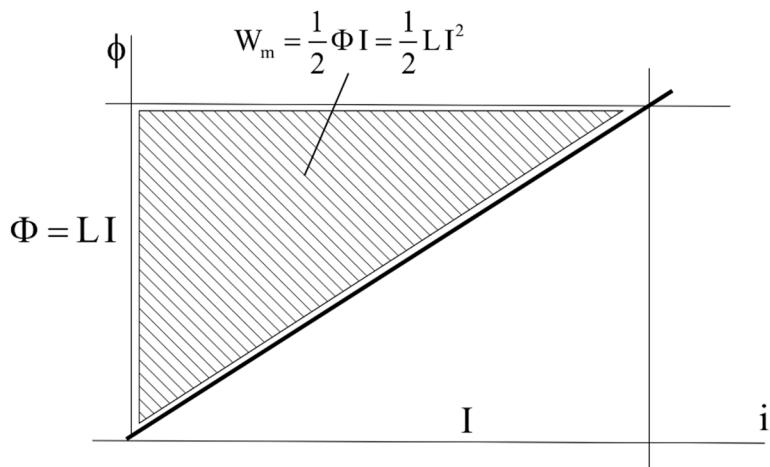
$$d\phi = \frac{d\phi(i)}{di} di \quad (6.59)$$

$\frac{d\phi(i)}{di}$ je derivace a současně tedy směrnice tečny k charakteristice v daném bodě (tangenta úhlu, který svírá tečna s vodorovnou osou).

Z obrázku (Obr.89) je patrné, že součinu $i d\phi$ a tedy přírůstek energie magnetického pole dW_m odpovídá vyšrafováné elementární oblasti nad charakteristikou. Celková energie vybuzeného magnetického pole potom odpovídá celkové ploše nad charakteristikou.

V případě, že bude magnetizační charakteristika lineární (Obr.90), což znamená, že bude platit vztah podle statické definice indukčnosti (viz **6.8.1**), ve kterém bude indukčnost konstantní a nezávislá na proudu: $\phi = L i$ (respektive $d\phi = L di$, $L = \text{konst} \neq f(i)$), potom pro energii magnetického pole v induktoru vyplýne:

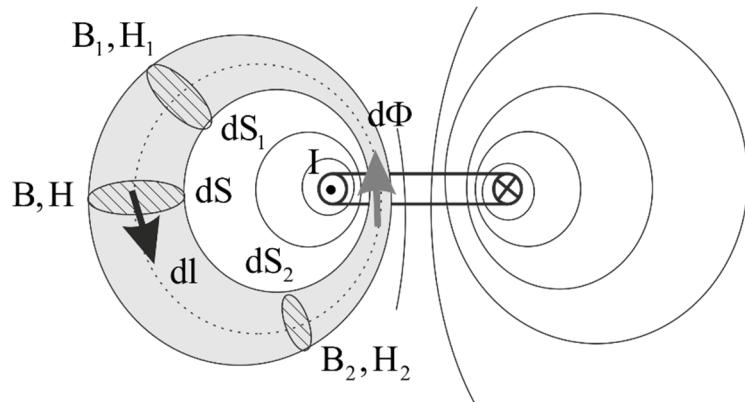
$$W_m = \int_0^\Phi i d\phi = L \int_0^I i di = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \Phi I \quad (6.60)$$



Obr.90 Lineární magnetizační charakteristika

6.7.2 Energie v magnetickém poli zapsaná pomocí vektorových veličin magnetického pole \mathbf{B} a \mathbf{H}

Na obrázku Obr.91 je znázorněno magnetické pole buzené proudovou smyčkou. Na základě jednoduché úvahy lze stanovit, jak souvisí energie magnetického pole s magnetickou indukcí \mathbf{B} a intenzitou magnetického pole \mathbf{H} .

Obr.91 Energie magnetického pole pomocí B a H

Pokud budeme pro jednoduchost uvažovat lineární prostředí, a předpokládat, že v daném okamžiku teče smyčkou proud I , bude celková energie magnetického pole (viz 6.7.1):

$$W_m = \frac{1}{2} \Phi I \quad (6.61)$$

Pokud z celkového magnetického toku Φ vybereme část o velikosti $d\Phi$ a bude to část, která protéká v každém místě pomyslně vytknutou trubicí vedenou ve směru siločáry, bude pro magnetickou indukci v libovolném místě trubice platit:

$$d\Phi = B_1 dS_1 = B_2 dS_2 = BdS \quad (6.62)$$

Ve vytknuté elementární trubici bude energie magnetického pole:

$$dW_m = \frac{1}{2} I d\Phi \quad (6.63)$$

Proudu tekoucí smyčkou musí podle zákona celkového proudu odpovídat integrálu intenzity magnetického pole po libovolné uzavřené dráze kolem vodiče smyčky:

$$\oint H dl = I \quad (6.64)$$

Pokud zvolíme oběhovou uzavřenou dráhu podél siločáry a tedy i vytknuté trubice, bude pro energii magnetického pole v této trubici dále platit:

$$dW_m = \frac{1}{2} d\Phi I = \frac{1}{2} BdS \oint H dl = \frac{1}{2} \oint B H dV \quad (6.65)$$

V objemovém elementu trubice tedy bude energie o velikosti $\frac{1}{2} BH dV$ a objemová hustota energie magnetického pole bude:

$$w_m = \frac{1}{2} B H \quad (6.66)$$

Tento vztah pro hustotu energie magnetického pole platí i obecně, algebraický součin je nahrazen skalárním součinem dvou vektorů:

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (6.67)$$

Pro celkovou energii magnetického pole potom po zpětné integraci platí:

$$W_m = \iiint_V w_m dV \quad (6.68)$$

6.8 Indukčnost – statická, energetická a dynamická definice

6.8.1 Statická definice vlastní indukčnosti

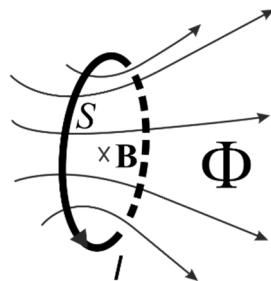
6.8.1.a Definiční vztahy

Na obrázku Obr.92 je znázorněna smyčka protékaná elektrickým proudem I . Protékající proud vybudí v každém místě magnetické pole s magnetickou indukcí \mathbf{B} . Plochou smyčky prochází magnetický tok (viz 6.3.1) o velikosti:

$$\Phi = \iint_{|S|} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.69)$$

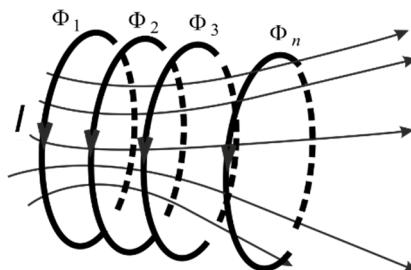
Vlastní indukčnost podle statické definice udává podíl mezi vybuzeným magnetickým tokem a proudem:

$$L_{\text{stat}} = \frac{\Phi}{I} \quad (6.70)$$



Obr.92 Vlastní idukčnost smyčky – statická definice

Pokud se bude jednat o cívku, která má N závitů a každým závitem prochází jiný magnetický tok, vlastní indukčnost je určena tzv. „spřaženým“ magnetickým tokem Φ_{celk} , což je sečtený magnetický tok všemi závity:



Obr.93 Cívka – vlastní indukčnost

$$\Phi_{\text{celk}} = \sum_i \Phi_i \quad (6.71)$$

Pro indukčnost podle statické definice bude potom platí:

$$L_{\text{stat}} = \frac{\Phi_{\text{celk}}}{I} \quad (6.72)$$

Pokud můžeme předpokládat, že všemi závity teče stejný magnetický tok a cívka má N závitů, pro spřažený magnetický tok platí $\Phi_{\text{celk}} = \sum \Phi = N \Phi$ a statická definice indukčnosti bude mít tvar:

$$L_{\text{stat}} = \frac{N \Phi}{I} \quad (6.73)$$

6.8.1.b Význam vlastní indukčnosti podle statické definice

Pokud je závislost $\Phi_{\text{celk}} = L I$ lineární, indukčnost je konstanta nezávislá na velikosti elektrického proudu. Indukčnost podle statické definice potom udává pro libovolně veliký elektrický proud nejen magnetický tok, ale pro libovolné časové změny tohoto proudu i napětí, které by se v cívce indukovalo (viz 7.2):

$$u_i = \frac{d\Phi_{\text{celk}}}{dt} = N \frac{d\Phi}{dt} = L_{\text{stat}} \frac{di}{dt} \quad (6.74)$$

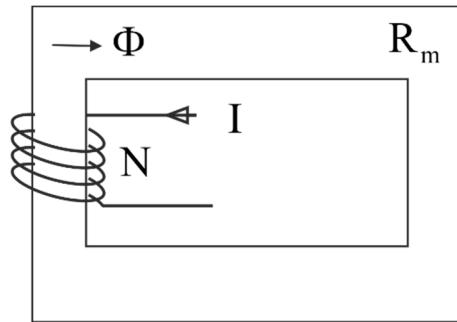
Indukčnost udává pro libovolnou hodnotu elektrického proudu rovněž energii magnetického pole, která je nahromaděna v induktoru (viz 6.7):

$$W_m = \frac{1}{2} L_{\text{stat}} I^2 \quad (6.75)$$

V případě nelineární závislosti $\Phi(I)$ však vztah pro indukované napětí a energii magnetického pole v závislosti na indukčnosti podle statické definice obecně neplatí. Zavádí se zvláště pojem **dynamické** a **energetické** definice indukčnosti (viz 6.8.3, 6.8.4). Hodnoty indukčnosti podle statické, dynamické a energetické definice jsou obecně rozdílné.

6.8.1.c Vlastní indukčnost cívky na magnetickém obvodu zapsaná pomocí reluktance

Pokud bude cívka umístěna na magnetickém obvodu (viz část 6.6), lze velikost vlastní indukčnosti snadno vyjádřit pomocí celkové reluktance (magnetického odporu) obvodu.



Obr.94 Vlastní indukčnost cívky na magnetickém obvodu

Pokud ve vztahu pro statickou definici indukčnosti vyjádříme magnetický tok pomocí Hopkinsonova zákona (6.53): $\Phi = \frac{NI}{R_m}$ bude pro vlastní indukčnost platit:

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N \frac{NI}{R_m}}{I} = \frac{N^2}{R_m} \quad (6.76)$$

Vztah (6.76) je bez omezení použitelný pouze za předpokladu, kdy je možné magnetický odpor a potažmo permeabilitu považovat za konstantní nezávislé na velikosti proudu. U feromagnetických materiálů tato

podmínka splněná není. Hodnoty permeability, magnetického odporu a tedy i indukčnosti je proto nutné stanovit pro určitý pracovní bod daný konkrétní velikostí proudu.

6.8.2 Statická definice vzájemné indukčnosti

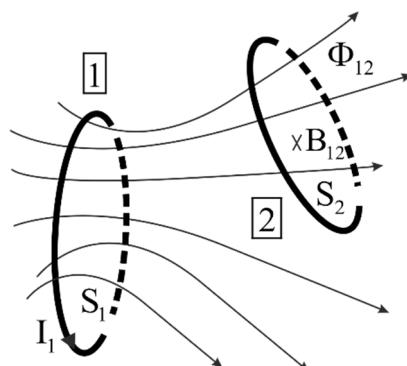
6.8.2.a Definiční vztahy

Na obrázku Obr.95 jsou dvě smyčky označené jako [1] a [2]. Pokud prochází první smyčkou elektrický proud I_1 , vybudí tato smyčka magnetické pole, které zasáhne i do druhé smyčky (magnetická indukce B_{12}). Magnetický tok, který bude protékat druhou smyčkou, bude :

$$\Phi_{12} = \iint_{S_2} \mathbf{B}_{12} \cdot d\mathbf{S}_2 \quad (6.77)$$

Vzájemná indukčnost podle statické definice udává podíl společného magnetického toku Φ_{12} a proudu první smyčkou I_1 :

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} \quad (6.78)$$



Obr.95 Vzájemná indukčnost dvou smyček – statická definice

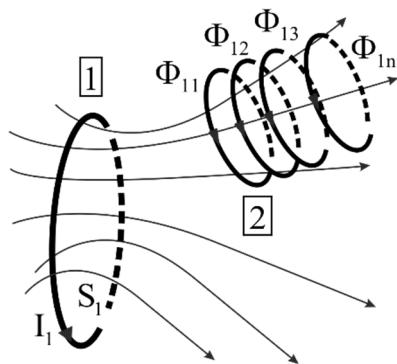
Smyčkou [2] neteče v tomto případě žádný proud. Kdyby byl proud první smyčkou časově proměnný, do druhé smyčky by se indukovalo napětí $u_{12} = M_{12} \frac{di_1}{dt}$.

Stejnou úvahu lze však provést i pro případ, kdy je naopak napájena smyčka [2] proudem I_2 a do smyčky [1] zasahuje magnetický tok o velikosti Φ_{21} . Potom by platilo

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} \quad (6.79)$$

Je možné obecně dokázat, že hodnota vzájemné indukčnosti musí být v obou případech stejně veliká:

$$M_{21} = M_{12} \quad (6.80)$$



Obr.96 Vzájemná indukčnost smyčka cívka

Pokud bude místo druhé smyčky cívka s počtem závitů N_2 (Obr.96), figuruje v definici takzvaný spřažený magnetický tok, což je sečtený magnetický tok ve všech závitech.

$$M_{12} = \frac{\sum \Phi_{12}}{I_1} \quad (6.81)$$

Pokud bude všemi závity procházet stejný magnetický tok, lze vztah zapsat v podobě:

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \quad (6.82)$$

6.8.2.b Význam statické definice vzájemné indukčnosti

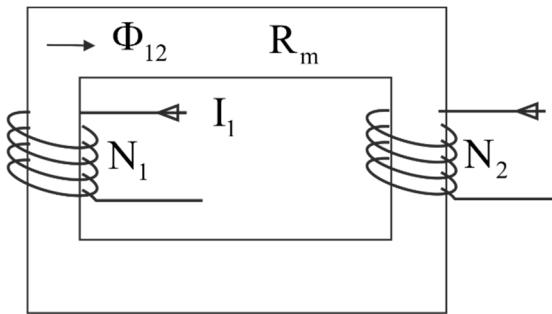
Pokud je závislost $M_{12} I_1 = N_2 \Phi_{12}$ lineární, vzájemná indukčnost M_{12} je konstanta nezávislá na proudu. Vzájemná indukčnost podle statické definice potom udává pro libovolně veliký elektrický proud v první cívce nejen společný magnetický tok, ale pro libovolné časové změny tohoto proudu i napětí, které by se indukovalo v druhé cívce

$$u_{i2} = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_1}{dt} \quad (6.83)$$

V případě nelineární závislosti $\Phi_{12}(I_1)$ však vztah pro indukované napětí v závislosti na indukčnosti podle statické definice neplatí. Zavádí se zvláště pojem dynamické definice vzájemné indukčnosti. Hodnoty vzájemné indukčnosti podle statické a dynamické definice jsou obecně rozdílné.

6.8.2.c Vzájemná indukčnost cívek na magnetickém obvodu zapsaná pomocí reluktance

Pokud budou cívky umístěny na magnetickém obvodu Obr.97 (viz část 6.6), lze velikost vzájemné indukčnosti snadno vyjádřit pomocí celkové reluktance (magnetického odporu) obvodu.



Obr.97 Vzájemná indukčnost cívek na magnetickém obvodu

Pokud ve vztahu pro statickou definici indukčnosti vyjádříme společný magnetický tok pomocí Hopkinsonova zákona (6.53): $\Phi_{12} = \frac{N_1 I_1}{R_m}$ bude pro vlastní indukčnost platit:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \frac{N_2 \frac{N_1 I_1}{R_m}}{I_1} = \frac{N_1 N_2}{R_m} \quad (6.84)$$

Vztah (6.84) je možné bez omezení použít pouze za předpokladu, kdy je možné magnetický odpor a potažmo permeabilitu považovat za konstantní nezávislou na velikosti proudu. U feromagnetických materiálů tato podmínka splněná není. Hodnoty permeability, magnetického odporu a tedy i vzájemné indukčnosti je proto nutné stanovit pro určitý pracovní bod daný konkrétní velikostí proudu.

6.8.3 Dynamická definice vlastní a vzájemné indukčnosti

Vlastní indukčnost definovaná podle dynamické definice udává směrnici tečny k magnetizační charakteristice v daném pracovním bodě (viz Obr.98) a potažmo i indukované napětí při relativně malých změnách proudu v okolí pracovního bodu:

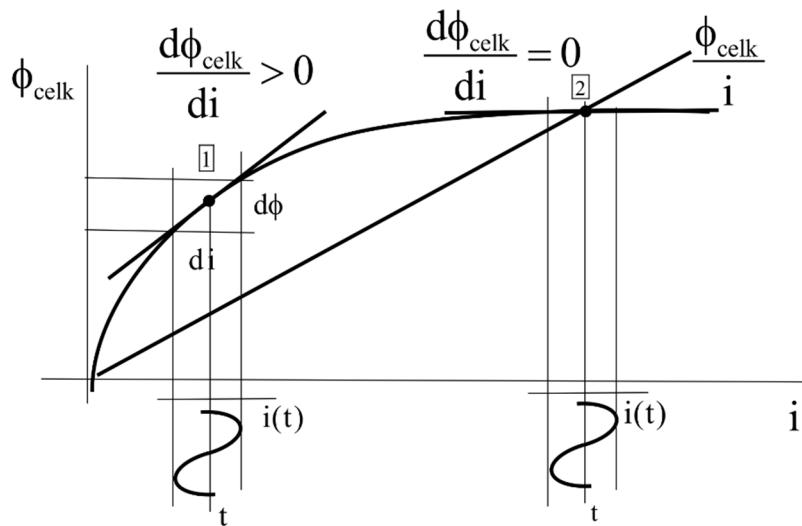
$$u_i(t) = \frac{d\phi_{celk}(t)}{dt} = L_{dyn} \frac{di(t)}{dt}$$

$$L_{dyn} = \frac{d\phi_{celk}}{di} \quad (6.85)$$

Statická definice udává rozdíl od dynamické v každém pracovním bodě podíl $L_{stat} = \frac{\Phi_{celk}}{i}$ a potažmo směrnici sečny magnetizační charakteristiky v každém pracovním bodě (viz Obr.98).

V pracovním bodě [2] na viz Obr.98 tak bude dynamická indukčnost prakticky nulová, časové změny proudu nebudu vyvolávat změny magnetického toku a tudíž se nebude indukovat žádné napětí. Indukčnost podle statické definice, která bude určovat v pracovním bodě celkový magnetický tok, však nulová nebude.

V případě lineární magnetizační charakteristiky bude směrnice sečny i tečny totožná a indukčnosti podle statické i dynamické definice budou stejné.



Obr.98 Porovnání statické a dynamické definice indukčnosti

6.8.4 Energetická definice vlastní indukčnosti

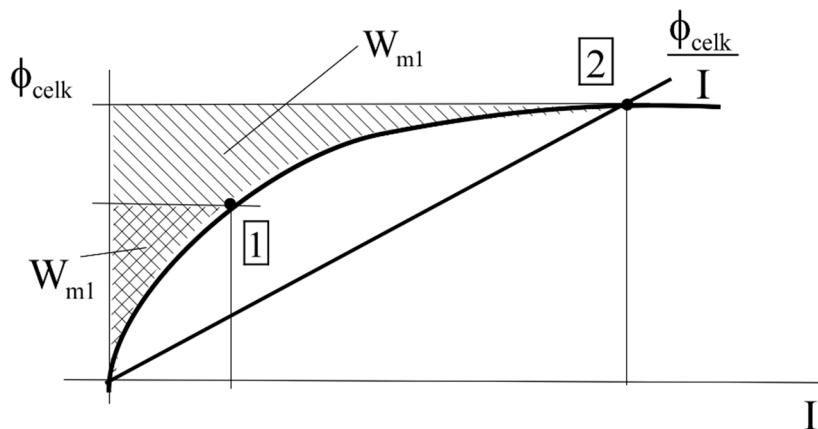
Vlastní indukčnost podle energetické definice udává pro určitý proud (v určitém pracovním bodě) skutečnou hodnotu energie magnetického pole, která je v cívce akumulována (viz Obr.99, Obr.100):

$$W_m = \frac{1}{2} L_{en} I^2 \quad (6.86)$$

$$L_{en} = \frac{2W_m}{I^2}$$

Skutečná energie magnetického pole odpovídá ploše nad magnetizační charakteristikou (viz 6.7):

$$W_m = \int_0^{\Phi_{celk}} i d\phi \quad (6.87)$$



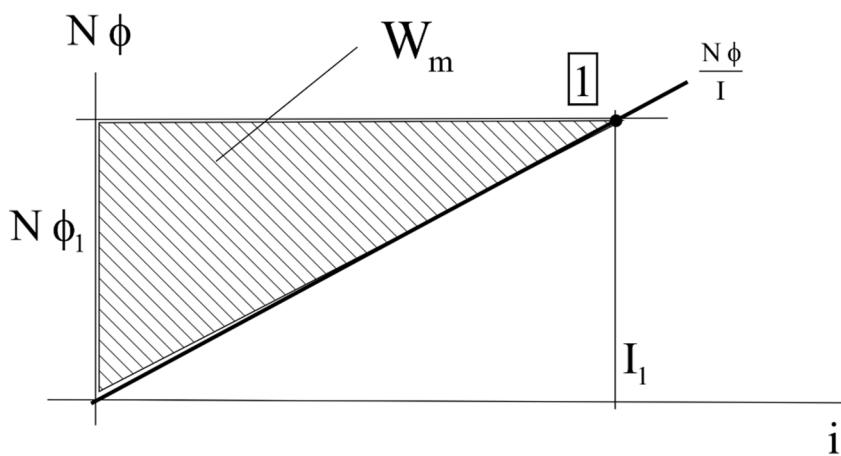
Obr.99 Energetická definice indukčnosti

Pokud je magnetizační charakteristika lineární (Obr.100), bude platit pro energii magnetického pole v cívce pro libovolný proud I :

$$W_m = \frac{1}{2} \Phi_{cel} I \quad (6.88)$$

Indukčnosti podle energetické definice bude v tomto případě stejná, jako podle statické definice:

$$L_{en} = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{2 \frac{1}{2} \Phi_{cel} I}{I^2} = \frac{N\Phi}{I} = L_{stat} \quad (6.89)$$



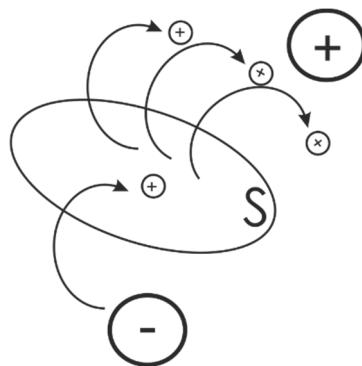
Obr.100 Lineární magnetizační charakteristika

7 Nestacionární elektromagnetické pole - základní zákonitosti

7.1 Princip kontinuity proudu v nestacionárním poli

<i>Pro správné pochopení této části je nezbytně nutné prostudovat:</i>	
5.1.1, 5.1.2	<i>Elektrický konduktivní proud, Proudová hustota</i>
5.4	<i>Princip kontinuity elektrického proudu ve stacionárním proudovém poli</i>

Narozdíl od stacionárního proudového pole může obecně nastat případ, kdy jiný náboj do objemu ohraničeného uzavřenou plochou za čas vstoupí a jiný vystoupí. To se projeví v daném časovém intervalu přírůstem nebo úbytkem náboje v objemu (viz (7.1)). Znaménko mínus vyplývá ze znaménkové konvence a orientace elementu plochy ve směru vnější normály. Pokud bude integrál na levé straně rovnice kladný, vystoupí za čas větší náboj než vstoupí, to se projeví úbytkem náboje v objemu.



Obr.101 Princip kontinuity proudu v nestacionárním proudovém poli

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (7.1)$$

V diferenciálním tvaru potom:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{d\rho}{dt} \quad (7.2)$$

7.2 Faradayův indukční zákon, zobecnění tohoto zákona v podobě Maxwellovy rovnice

Pro správné pochopení této části je nezbytně nutné prostudovat:

5.3	<i>Elektromotorické napětí zdroje, svorkové napětí</i>
6.3	<i>Magnetický indukční tok (tok vektoru magnetické indukce)</i>

7.2.1 Faradayův indukční zákon, Lenzovo pravidlo

7.2.1.a Základní formulace indukčního zákona

Faradayův indukční zákon udává elektromotorické napětí indukované v uzavřené vodivé smyčce, která je umístěna v časově proměnném magnetickém poli. Okamžitá hodnota elektromotorického napětí je v daném okamžiku rovna záporně brané časové změně magnetického toku, který plochou smyčky prochází:

$$u_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.3)$$

Pokud by se nejednalo o prostou smyčku, ale cívku, která má počet závitů N , je nutno kalkulovat se sumárním magnetickým tokem Φ_{cel} ve všech závitech. Tím obdržíme rovněž součet indukovaných napětí ve všech závitech a tedy i v celé cívce:

$$u_{em} = -\frac{d\Phi_{cel}}{dt} \quad (7.4)$$

Sumární magnetický tok Φ_{cel} , který se někdy nazývá „spřažený magnetický tok“, je tedy:

$$\Phi_{cel} = \sum_{i=1}^N \Phi_i \quad (7.5)$$

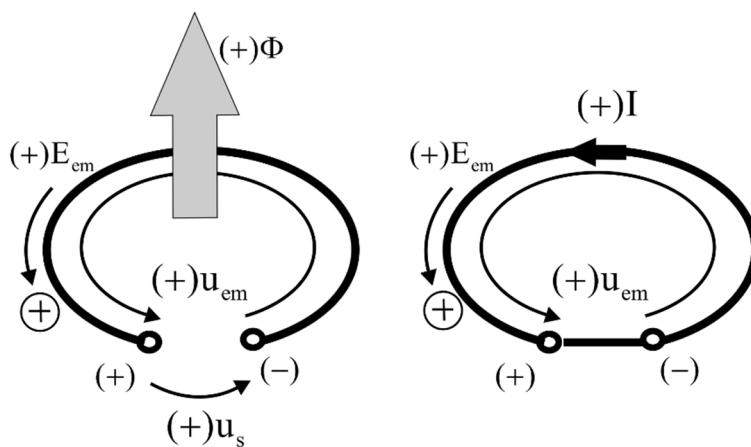
Pokud leží všechny závity cívky v přibližně stejném magnetickém poli a platí $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \dots = \Phi_n$ (závity navinuté těsně na sobě), je možné pro sumární tok napsat $\Phi_{cel} = N\Phi$ a pro indukované napětí:

$$u_{em} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.6)$$

7.2.1.b Význam indukčního zákona, kladný smysl magnetického toku, elektromotorické sily a elektromotorického napětí

Vzhledem k tomu, že se jedná o nestacionární (časově proměnný) děj a všechny veličiny mohou v závislosti na čase měnit svou velikost i směr (smysl), je nutné pro stanovení jejich vzájemných vztahů nejprve zvolit jejich kladný smysl.

Kladný smysl magnetického toku je například zvolen podle obrázku Obr.102. Elektromotorická síla $(+)\mathbf{E}_{em}$, která by se vy smyčce objevila, má kladný smysl zvolený s ohledem na magnetický tok (podle pravidla pravé ruky ve vztahu k magnetickému toku). Elektromotorická síla by „rozdělila“ náboje ve vodiči smyčky tak, že by hypotetické kladné náboje přesunula na svorku $(+)$. Na svorce $(-)$ by zbyly záporné náboje. Elektromotorická síla by vykonalala práci, která je popsána elektromotorickým napětím s vyznačeným kladným smyslem $(+)\mathbf{u}_m$. Je to práce na přenesení jednotkového kladného náboje od svorky $(-)$ ke svorce $(+)$. Pokud by se svorky zkratovaly, začal by smyčkou protékat elektrický proud s kladným smyslem $(+)\mathbf{I}$ od svorky plus ke svorce minus. Smysl proudu by byl shodný se směrem elektromotorické síly.

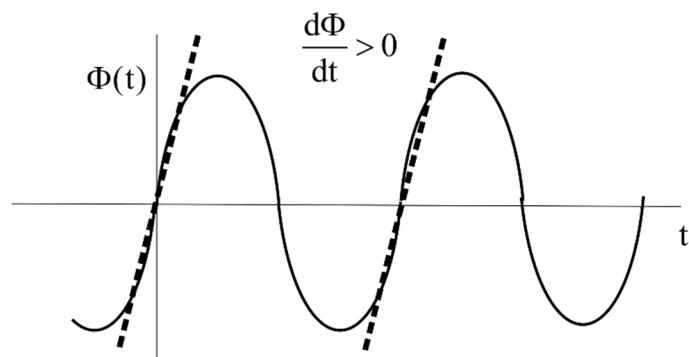


Obr.102 Indukované napětí, volba kladných smyslů

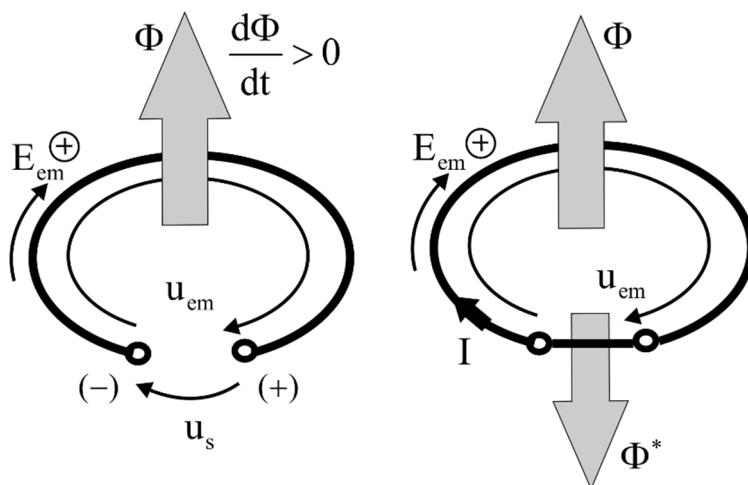
7.2.1.c Skutečný smysl elektromotorické sily a elektromotorického napětí při zvětšujícím se magnetickém toku, Lenzovo pravidlo

Pokud budeme předpokládat, že se magnetický tok procházející plochou smyčky v závislosti na čase mění (například harmonicky jako na obrázku Obr.103) a nacházíme se v časovém okamžiku, kdy magnetický tok zvětšuje svoji velikost $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ (viz vyznačené úseky na Obr.103), potom po dosazení do (7.3) je s ohledem na znaménko míinus ve vztahu skutečný směr všech vyznačených veličin právě opačný (viz levá část Obr.104), než kladně zvolené smysly podle Obr.102.

Pokud propojíme svorky smyčky vodičem, smyčkou začne procházet ve směru elektromotorické síly elektrický proud (viz pravá část Obr.104). Elektrický proud ve smyčce vybudí vlastní magnetický tok smyčky Φ^* , který působí proti časové změně vnějšího toku – v tomto případě vnější tok oslabuje. **Tato důležitá skutečnost je formulována v podobě takzvaného Lenzova pravidla. Do proudové smyčky se indukuje napětí a prochází proud v takovém směru, aby bránil časovým změnám vnějšího magnetického pole, které proud vyvolalo.**



Obr.103 Magnetický tok se v závislosti na čase zvětšuje

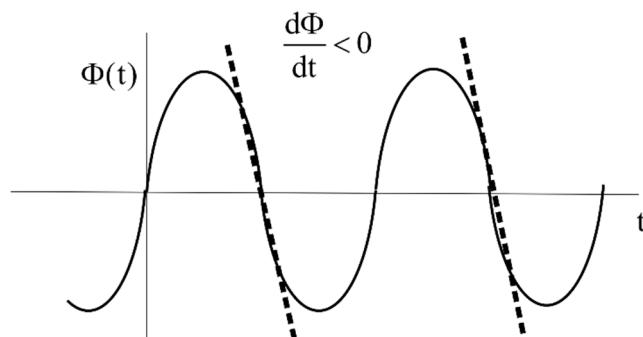


Obr.104 Skutečný smysl elektromotorické sily a elektromotorického napětí při zvětšujícím se magnetickém toku

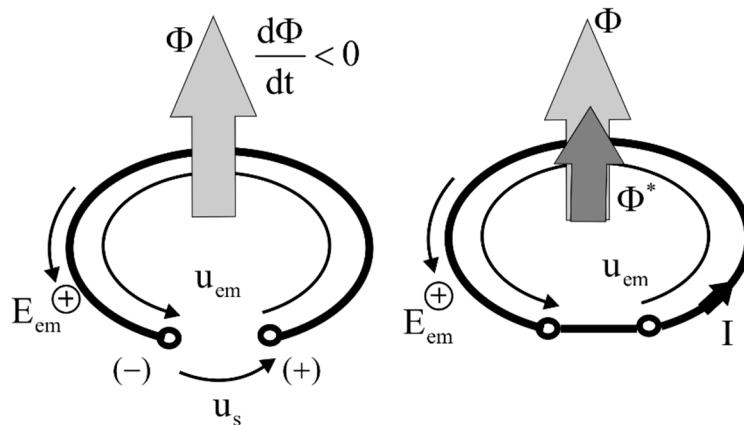
7.2.1.d Skutečný smysl elektromotorické sily a elektromotorického napětí při zmenšujícím se magnetickém toku, Lenzovo pravidlo

Pokud budeme předpokládat, že se magnetický tok procházející plochou smyčky v závislosti na čase mění (například harmonicky jako na obrázku Obr.105) a nacházíme se v časovém okamžiku, kdy magnetický tok zmenšuje svoji velikost $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ (viz vyznačené úseky na Obr.105), potom po dosazení do (7.3) je s ohledem na znaménko mínus ve vztahu skutečný směr všech vyznačených veličin stejný (viz levá část na Obr.106), jako kladně zvolené smysly podle Obr.102.

Pokud propojíme svorky smyčky vodičem, smyčkou začne procházet ve směru elektromotorické sily elektrický proud(viz pravá část Obr.106). Elektrický proud ve smyčce vybudí vlastní magnetický tok smyčky Φ^* , který působí proti časové změně vnějšího toku – v tomto případě vnější tok posiluje. **Zde se opět podle Lenzova pravidla do proudové smyčky indukuje napětí a prochází proud v takovém směru, aby bránil časovým změnám vnějšího magnetického pole, které proud vyvolalo.**



Obr.105 Magnetický tok se v závislosti na čase zmenšuje

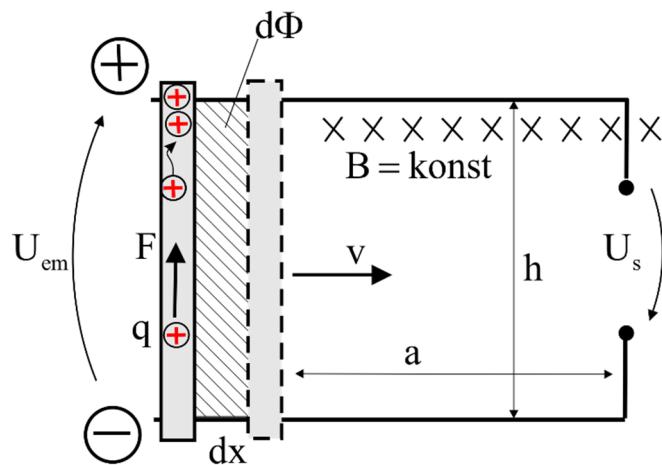


Obr.106 Skutečný smysl elektromotorické sily a elektromotorického napětí při zmenšujícím se magnetickém toku

7.2.1.e Napětí indukované ve vodiči, který se pohybuje v homogenním magnetickém poli

Faradayův zákon popsaný vztahem (7.3) není možné přímo dokázat. Lze však ukázat na zdánlivě jiném případu smyčky, která mění své rozměry v homogenním magnetickém poli, že je indukované (elektromotorické) napětí i zde dáno časovou změnou magnetického toku.

Na obrázku Obr.107 je znázorněn vodič, který se pohybuje zleva doprava rychlostí v . Vodič se pohybuje v homogenním magnetickém poli s magnetickou indukcí $B = \text{konst}$, která je orientována kolmo do nákresny. Napětí na vodiči je snímáno a měřeno pomocí sběrnic, po kterých se vodič pohybuje. Vodič společně se sběrnicemi tvoří obdélníkovou smyčku, která takto zmenšuje své rozměry.



Obr.107 Napětí indukované ve vodiči, který se pohybuje v homogenním magnetickém poli

Podle definice magnetické indukce (2.14) bude na hypotetické volné kladné náboje q ve vodiči působit síla o velikosti (viz definice magnetické indukce):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.7)$$

Tato síla přesune náboje v naznačeném smyslu, na horním konci vodiče se vytvoří celkový kladný náboj $+Q$, dole náboj $-Q$. Situace je ekvivalentní, jako by uvnitř vodiče působila elektromotorická síla \mathbf{E}_{em} , která tyto náboje přesunula (rozdělila):

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}_{\text{em}} \quad (7.8)$$

Po porovnání (7.7),(7.8) je patrné, že bude mít elektromotorická síla velikost:

$$\mathbf{E}_{\text{em}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.9)$$

a vykoná přenesením jednotkového kladného náboje od jednoho konce vodiče ke druhému práci, která je totožná s elektromotorickým napětím:

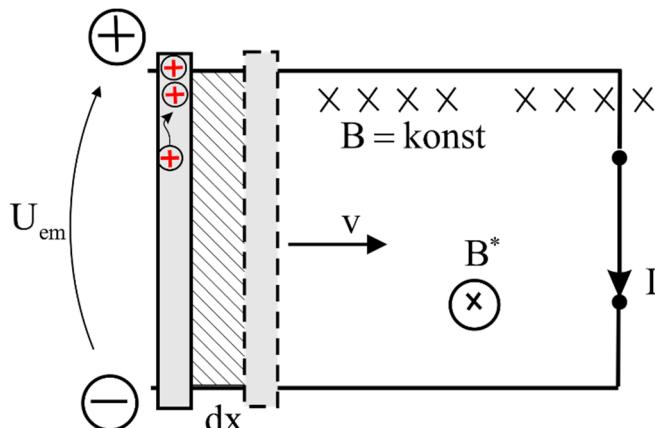
$$U_{\text{em}} = \int_1 \mathbf{E}_{\text{em}} \cdot d\mathbf{l} = \int_1 (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (7.10)$$

Pokud budeme uvažovat, že vektory v, B, dl jsou na sebe navzájem kolmé a navíc je magnetická indukce všude po délce vodiče h konstantní, bude pro elektromotorické napětí platit:

$$U_{\text{em}} = B v h \quad (7.11)$$

Následně lze jednoduše ukázat, že i v tomto případě je velikost elektromotorického (indukovaného) napětí rovna časové změně magnetického toku. Pokud se vodič pohybuje rychlostí v , tak urazí za čas $d t$ vzdálenost $d x$: $v = \frac{d x}{d t}$. Plocha smyčky se za tento čas zmenší o $d S = h d x$, magnetický tok plochou smyčky se zmenší o $d \Phi = B d S = B h d x$. Pro indukované (elektromotorické) napětí bude podle (7.11) platit:

$$U_{em} = B v h = B \frac{d x}{d t} h = B \frac{d S}{d t} = \frac{d \Phi}{d t} \quad (7.12)$$



Obr.108 Proud protékající obdélníkovou smyčkou

Indukované napětí je i zde dáno časovou změnou magnetického toku. Platí rovněž Lenzovo pravidlo. Magnetický tok se zmenšuje. Při spojení svorek smyčky podle obrázku Obr.108 nakrátko začne procházet proud ve směru elektromotorické síly od kladné k záporné svorce. Vlastní magnetické pole obdélníkové smyčky půjde podle pravidla pravé ruky ve směru do nákresny, bude mít souhlasný směr s vnějším homogenním magnetickým polem, bude se snažit zabránit zmenšování magnetického toku ve smyčce.

7.2.1.f Zobecnění Faradayova indukčního zákona

Faradayův indukční zákon je nutné chápát jako obecný vztah mezi elektrickým polem a časově proměnným magnetickým polem bez ohledu na to, jestli do časově proměnného magnetického pole vložíme vodivou smyčku, na které posuzujeme velikost indukovaného napětí, nebo nevložíme. Tato skutečnost byla teoreticky formulována Maxwellem a posléze i experimentálně potvrzena Hertzem prokázáním existence elektromagnetické vlny,

Pokud existuje časově proměnné magnetické pole, existuje i časově proměnné elektrické pole. Jsou to navzájem neoddělitelné složky společného elektromagnetického pole.

Pokud si v časově proměnném magnetickém poli vytýčíme libovolnou myšlenou uzavřenou dráhu a určíme časové změny magnetického toku procházejícího plochou, kterou dráha vymezuje, bude výsledek roven integrálu intenzity elektrického pole po této uzavřené dráze:

$$\oint_1 E \cdot dI = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.13)$$

Po převedení do diferenciálního tvaru pomocí Stokesovy věty bude platit:

$$\oint_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.14)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.15)$$

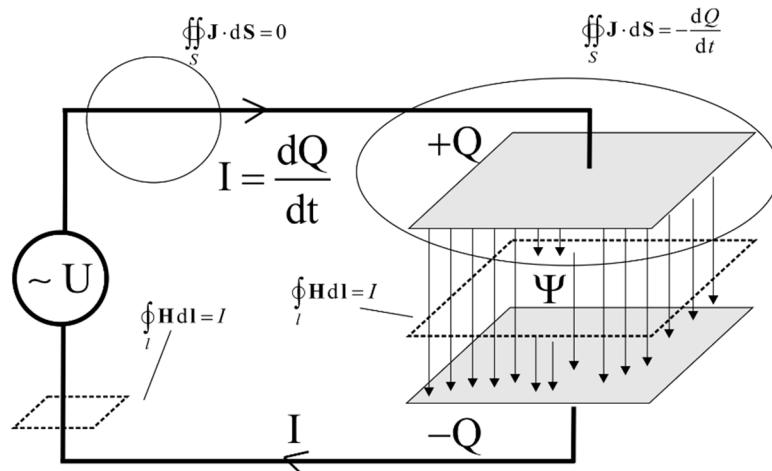
V časově proměnném magnetickém poli vznikají víry elektrického pole. K zobecněnému indukčnímu zákonu platí duálně zobecněný zákon celkového proudu viz **7.3**.

Poznámka

Nestacionární elektrické pole není potenciállové. Neplatí zde podmínka $\oint_1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ (resp. $\text{rot } \mathbf{E} = 0$). Jinými slovy: Práce vykonaná přenesením jednotkového kladného náboje po uzavřené dráze není nulová. Do soustavy pomyslně „vkládá“ svojí práci časově proměnné magnetické pole.

7.3 Zobecněný zákon celkového proudu, Maxwellův posuvný proud

Zákon celkového proudu, formulovaný Ampérem pro stacionární proudové pole, skrývá v sobě v nestacionárním případě určité rozporu.



Obr. 109 Maxwellův posuvný proud

Z matematického hlediska platí obecně podle principu kontinuity proudu (viz **7.1**):

$$\text{div } \mathbf{J} = -\frac{d\rho_0}{dt} \quad (7.16)$$

To je však v rozporu s výsledkem, který dostaneme, když aplikujeme operátor divergence na zákon celkového proudu $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ve stacionární podobě (viz **6.5.5**), neboť divergence rotace je vždy nulová:

$$\text{div } \mathbf{J} = \text{div} (\text{rot } \mathbf{H}) = 0 \quad (7.17)$$

Pokud se však zákon celkového proudu doplní o další člen:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.18)$$

Bude skutečně platit s použitím Gaussovy věty $\text{div } \mathbf{D} = \rho_0$:

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.19)$$

$$\text{div } \mathbf{J} = \text{div } \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} = -\frac{\partial \rho_0}{\partial t} \quad (7.20)$$

Pomocí Stokesovy věty je možné rovnici (7.19) převést do integrálního tvaru:

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{H} dS = \iint_S \mathbf{J} dS + \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} dS \quad (7.21)$$

$$\oint_L \mathbf{H} dl = I + \frac{d\Psi}{dt} \quad (7.22)$$

Člen $\frac{d\Psi}{dt}$, který stojí v rovnici vedle kondukčního proudu, představuje tzv. **Maxwellův posuvný proud** a člen $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ jeho plošnou hustotu. Pokud elektrickou indukci zapišeme zpětně pomocí intenzity elektrického pole a polarizace, bude platit

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (7.23)$$

Člen $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ představuje skutečně plošnou hustotu proudu, neboť polarizace značí náboj, co projde jednotkou plochy při polarizaci, ve vakuu či ve vzduchu je tento člen nulový. Člen $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ představuje časové změny elektrického pole a je nenulový i ve vakuu či ve vzduchu.

Pro ilustraci uvedeného jevu slouží i obrázek Obr.109, na kterém je kondenzátor napájen ze střídavého zdroje napětí. Náboj na deskách kondenzátoru se cyklicky zvětšuje, zmenšuje a mění svou polaritu. Aplikací principu kontinuity pro uzavřenou plochu v místě vodiče mimo desky kondenzátoru bude sumární procházející proud nulový, stejný proud bude vtékat i vytékat. Pokud se ale uzavře do plochy jedna desková elektroda a část vodiče, bude výsledek nenulový rovný vtékajícímu proudu $I = \frac{dQ}{dt}$ a současně i časové změně náboje na desce. Pokud se však ke kondukčnímu proudu přiřadí i Maxwellův posuvný proud, což je časová změna elektrického indukčního toku vytékajícího z nahromaděného náboje $\frac{d\Psi}{dt} = \frac{dQ}{dt}$, bude princip kontinuity zachován ve všech

místech ve stejné podobě. Na deskové elektrodě na jedné straně vtéká konduční proud a na druhé straně vytéká ekvivalentně stejně veliký posuvný proud.

7.4 Maxwellovy rovnice

Základní zákonitosti v nestacionárním elektromagnetickém poli, které byly podrobně popsány v předchozím textu, se často souhrnně prezentují v podobě sady rovnic, které se nazývají Maxwellovy:

	Integrální tvar	Číslo rovnice v textu	Diferenciální tvar	Číslo rovnice v textu
Zobecněný indukční zákon	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$	(7.13)	$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(7.15)
Zobecněný zákon celkového proudu	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d\Psi}{dt}$	(7.22)	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	(7.18)
Charakter elektrického pole s ohledem na jeho zdroje	$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_0$	(3.22)	$\text{div } \mathbf{D} = \rho_0$	(3.24)
Charakter magnetického pole s ohledem na jeho zdroje	$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	(6.16)	$\text{div } \mathbf{B} = 0$	(6.17)
Maxwellovy rovnice se často doplňují o princip kontinuity proudu				
Princip kontinuity elektrického proudu	$\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt}$	(7.1)	$\text{div } \mathbf{J} = -\frac{d\rho}{dt}$	(7.2)
V lineárním prostředí se sada Maxwellových rovnic často ještě doplňuje o tzv. materiálové vztahy:				
Polarizace dielektrika	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	(3.20)		
Magnetizace magnetika	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$	(6.36)		
Ohmův zákon	$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	(5.13)		

7.5 Obecné podmínky na rozhraní ve stacionárním i nestacionárním elektrickém a magnetickém poli

Pokud prochází nestacionární (ale i stacionární) elektromagnetické pole rozhraním dvou prostředí, která mají různé fyzikální parametry (permitivitu, permeabilitu, vodivost), lze na základě fyzikálních zákonitostí popsaných Maxwellovými rovnicemi stanovit vztah mezi vektorovými veličinami po jedné a druhé straně rozhraní.

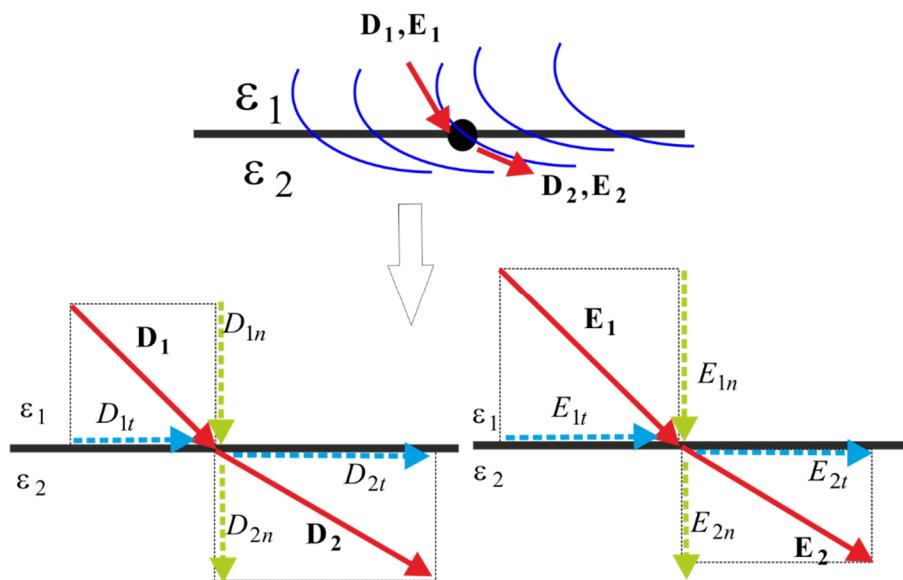
Stanovení podmínek na rozhraní pro elektrické i magnetické pole je velice podobné.

Pro stanovení vzájemného vztahu normálových složek elektrické a magnetické indukce se posuzují toky, které procházejí rozhraním (viz rovnice (3.22), (6.16)). V magnetickém poli stejný magnetický tok do rozhraní vstoupí a na druhé straně vystoupí. Elektrický indukční tok může mít navíc na rozhraní další zdroje v podobě volných nábojů.

Pro stanovení vzájemného vztahu tečných složek intenzity elektrického a magnetického pole jsou ekvivalentně použity oběhové integrály (viz (7.13), (7.22)).

7.5.1 Podmínky na rozhraní ve stacionárním i nestacionárním elektrickém poli

Na obrázku Obr.110 prochází elektrické pole rozhraním dvou prostředí s permitivitami ϵ_1 a ϵ_2 . Velikosti a směry vektorů intenzity elektrického pole $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ a elektrické indukce $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ na jedné i druhé straně rozhraní jsou v určitém bodě na rozhraní navzájem vázány fyzikálními zákony popsanými v předchozím textu. Vektory intenzity elektrického pole i elektrické indukce lze rozložit na tečné a normálové složky.



Obr.110 Elektrické pole prochází rozhraním dvou prostředí

7.5.1.a Podmínky na rozhraní pro normálové složky elektrické indukce D a intenzity elektrického pole E

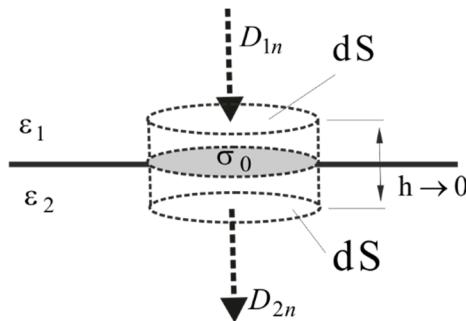
Když obklopíme daný bod na rozhraní elementární uzavřenou plochou například v podobě elementárního válce se stejnými podstavami dS a velmi malou výškou $h \rightarrow 0$ (Obr.111), potom touto uzavřenou plochou prochází pouze normálové složky elektrické indukce a na základě Gaussovy věty musí platit:

$$\iint_S D \cdot dS = Q_0 \quad (7.24)$$

$$D_{2n} dS - D_{1n} dS = \sigma_0 dS$$

Z toho vyplývá, že rozdíl normálových složek elektrické indukce po obou stranách rozhraní je roven plošné hustotě volného náboje na rozhraní:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0 \quad (7.25)$$



Obr.111 Normálové složky elektrické indukce

Pokud se na rozhraní nebude nacházet volný náboj $\sigma_0 = 0$, budou normálové složky elektrické indukce stejně veliké:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (7.26)$$

Pro normálové složky intenzity elektrického pole bude potom platí:

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \quad (7.27)$$

Poměr normálových složek je nepřímo úměrný poměru permitivit:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (7.28)$$

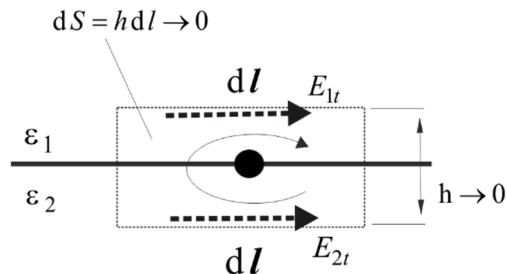
7.5.1.b Podmínky na rozhraní pro tečné složky intenzity elektrického pole E a elektrické indukce D

Integrál intenzity elektrického pole po uzavřené dráze v nestacionárním elektromagnetickém poli je obecně roven časové změně magnetického indukčního toku procházejícího plochou omezenou touto dráhou (viz 7.2):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.29)$$

Když obemkneme daný bod na rozhraní elementární obdélníkovou uzavřenou dráhou o délce spodní a dolní hrany dl , se zanedbatelně vysokou levou a pravou hranou $h \rightarrow 0$ (Obr.112), bude velikost plochy omezené uzavřenou dráhou limitovat k nule a stejně i magnetický tok touto plochou. Integrál intenzity elektrického pole bude v tomto případě nulový $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Nulový bude ovšem i v elektrostatickém poli, kde k časovým změnám magnetického pole vůbec nedochází. V integrálu se uplatní pouze tečné složky intenzity elektrického pole podél delších hran:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ E_{1t} dl - E_{2t} dl &= 0 \end{aligned} \quad (7.30)$$



Obr.112 Tečné složky intenzity elektrického pole

Tečné složky intenzity elektrického pole po obou stranách rozhraní jsou stejné.

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (7.31)$$

Pro tečné složky elektrické indukce bude následně platit:

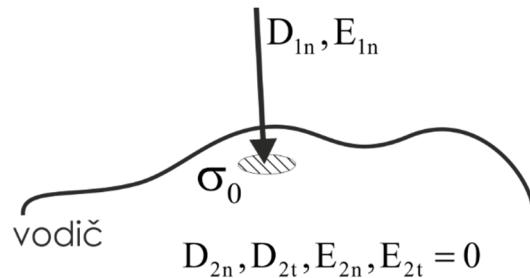
$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} &= \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} \end{aligned} \quad (7.32)$$

Podíl tečných složek elektrické indukce je přímo úměrný podílu permitivit

$$\frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (7.33)$$

7.5.1.c Podmínky pro složky elektrického pole D a E na rozhraní dielektrika s dobrým elektrickým vodičem

Na obrázku Obr.113 je znázorněno rozhraní mezi dielektrickým materiálem a dobrým elektrickým vodičem. V elektrickém vodiči je elektrostatické pole nulové a je možné to vysvětlit jednoduchým způsobem (viz 3.2.1). Tato skutečnost však platí i u dobrého vodiče v nestacionárním případě. Vysvětlení se opírá o dopad, odraz a prostop elektromagnetické vlny rozhraním. Pokud budeme v souladu s částí 7.5.1.a, 7.5.1.b předpokládat, že druhým prostředím je vodič, bude tedy platit:



Obr.113 Rozhraní dielektrika s dobrým elektrickým vodičem

$$\mathbf{D}_2, \mathbf{E}_2 = \mathbf{0} \quad (D_{2t}, D_{2n}, E_{2t}, E_{2n} = 0) \quad (7.34)$$

Z rovnice $E_{1t} = E_{2t}$ potom vyplýne, že musí být nulová i tečná složka intenzity elektrického pole v prvním prostředí $E_{1t} = 0$ a potažmo i tečná složka elektrické indukce v prvním prostředí $D_{1t} = 0$.

$$\begin{aligned} E_{1t} &= 0 \\ D_{1t} &= 0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

Z rovnice $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$ vyplýne, že normálová složka elektrické indukce v určitém místě prvního prostředí je rovna plošné hustotě volného náboje na vodiči v tomto místě: $D_{1n} = -\sigma_0$. Znaménko míinus vyplývá v tomto případě z volby smyslů v 7.5.1.a, 7.5.1.b, při které vektory z prvního prostředí vstupovaly do rozhraní. To by platilo v případě, kdyby byl na vodiči záporný náboj. Intenzita elektrického pole bude záviset na permitivitě prvního prostředí a bude mít také pouze normálovou složku: $E_{1n} = \frac{D_{1n}}{\epsilon_1}$.

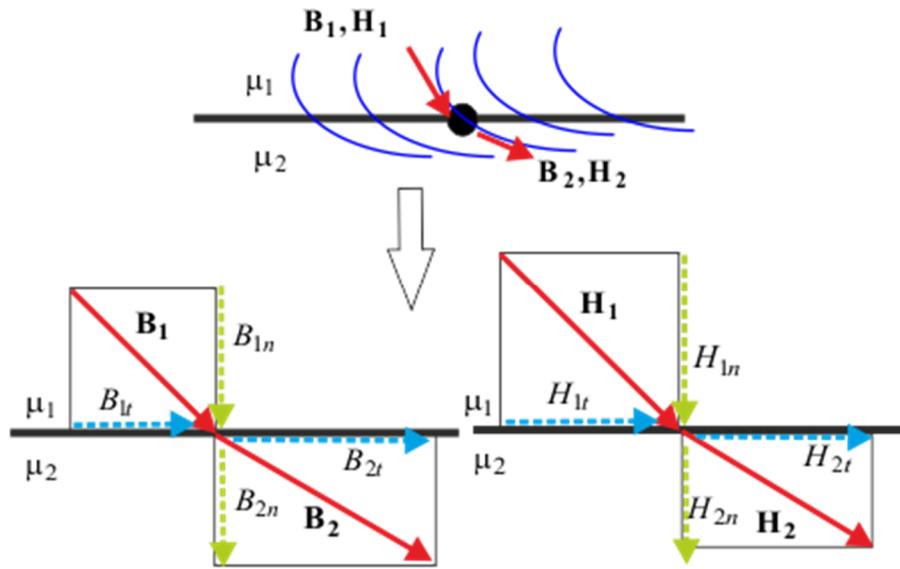
$$\begin{aligned} |D_{1n}| &= \sigma_0 \\ E_{1n} &= \frac{D_{1n}}{\epsilon_1} \end{aligned}$$

Vektory elektrické pole vstupují do dobrého vodiče kolmo.

7.5.2 Podmínky na rozhraní ve stacionárním i nestacionárním magnetickém poli

Na obrázku Obr.114 prochází magnetické pole rozhraním dvou prostředí s permeabilitami μ_1 a μ_2 . Velikosti a směry vektorů intenzity magnetického pole $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ a magnetické indukce $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ na jedné i druhé straně rozhraní jsou v určitém bodě na rozhraní navzájem vázány fyzikálními zákony popsanými Maxwellovými

rovnicemi (viz 7.4). Vektory intenzity magnetického pole i magnetické indukce lze rozložit na tečné a normálové složky.



Obr.114 Magnetické pole prochází rozhraním dvou prostředí

7.5.2.a Podmínky na rozhraní pro normálové složky magnetické indukce \mathbf{B} a intenzity magnetického pole \mathbf{H}

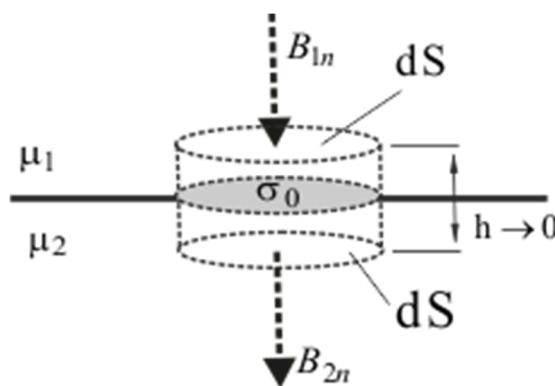
Když obklopíme daný bod na rozhraní elementární uzavřenou plochou například v podobě elementárního válce se stejnými podstavami dS a velmi malou výškou $h \rightarrow 0$ (Obr.115), budou touto uzavřenou plochou procházet pouze normálové složky magnetické indukce a na základě vztahu (6.16) bude platit:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (7.36)$$

$$B_{2n} dS - B_{1n} dS = 0$$

Z toho vyplývá, že normálové složky magnetické indukce jsou po obou stranách rozhraní stejně velké:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (7.37)$$



Obr.115 Normálové složky magnetické indukce

Pro normálové složky intenzity magnetického pole potom platí:

$$\begin{aligned} B_{1n} &= B_{2n} \\ \mu_1 H_{1n} &= \mu_2 H_{2n} \end{aligned} \quad (7.38)$$

Poměr normálových složek intenzity magnetického pole je nepřímo úměrný poměru permeabilit:

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (7.39)$$

7.5.2.b Podmínky na rozhraní pro tečné složky intenzity magnetického pole H a magnetické indukce B

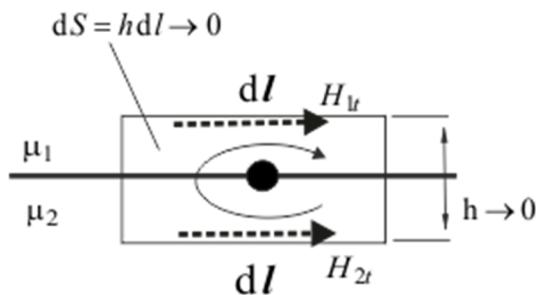
Integrál intenzity magnetického pole po uzavřené dráze v nestacionárním elektromagnetickém poli je obecně roven součtu elektrického proudu a časové změny elektrického indukčního toku procházejícího plochou omezenou touto dráhou (viz 7.2):

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d\Psi}{dt} \quad (7.40)$$

Když obemkneme daný bod na rozhraní elementární obdélníkovou uzavřenou dráhou o délce spodní a dolní hrany dl , se zanedbatelně vysokou levou a pravou hranou $h \rightarrow 0$ (Obr.116), bude velikost plochy omezené uzavřenou dráhou limitovat k nule a stejně bude k nule limitovat i elektrický proud a elektrický indukční tok procházející touto plochou. Integrál intenzity magnetického pole bude v tomto případě nulový $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

Nulový bude ovšem i ve stacionárním magnetickém poli, kde k časovým změnám elektrického indukčního toku vůbec nedochází. V integrálu se uplatní pouze tečné složky intenzity magnetického pole podél delších hran:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ H_{1t} dl - H_{2t} dl &= 0 \end{aligned} \quad (7.41)$$



Obr.116 Tečné složky intenzity magnetického pole

Tečné složky intenzity magnetického pole po obou stranách rozhraní jsou stejné.

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (7.42)$$

Pro tečné složky magnetické indukce bude následně platit:

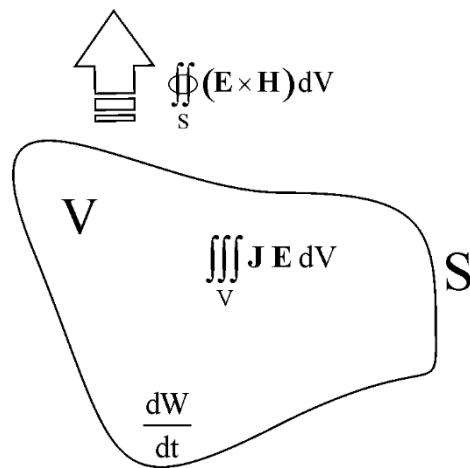
$$\begin{aligned} H_{1t} &= H_{2t} \\ \frac{B_{1t}}{\mu_1} &= \frac{B_{2t}}{\mu_2} \end{aligned} \quad (7.43)$$

Podíl tečných složek magnetické indukce je přímo úměrný podílu permeabilit:

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (7.44)$$

7.6 Poyntingův teorém – obecná bilance energie v časově proměnném elektromagnetickém poli

V prostoru s časově proměnným elektromagnetickým polem vymezíme objem V , který je z vnějšku ohraničen uzavřenou plochou S . Budeme uvažovat, že v tomto objemu dochází ke změně energie elektromagnetického pole. K tomu může dojít tím, že část energie přechází do okolí, nebo naopak do daného objemu z okolí vstupuje. Část energie elektromagnetického pole v tomto objemu se rovněž může změnit na jiný druh energie. Na základě obecně platných vztahů vycházejících z Maxwellových rovnic lze formulovat vztah, který obecně popisuje bilanci energie.



Obr.117 Bilance energie elektromagnetického pole ve vymezeném objemu V

V určitém místě daného objemu bude mít elektromagnetické pole hustotou energie elektrické složky: $w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ a hustotou energie magnetické složky $w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$. Celková hustota energie elektromagnetického pole bude mít velikost:

$$w = w_m + w_m = w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (7.45)$$

Pokud budeme uvažovat lineární prostředí, budou platit materiálové vztahy:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \quad (7.46)$$

Pro hustotu energie elektromagnetického pole lze potom psát:

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (7.47)$$

Pro časovou změnu hustoty energie elektromagnetického pole v daném objemu bude platit:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (w_m + w_m) = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot 2\mathbf{E} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot 2\mathbf{H} = \mathbf{E} \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (7.48)$$

Pomocí Maxwellových rovnic lze dále psát:

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{J} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\text{rot } \mathbf{E} \end{aligned} \quad (7.49)$$

Po dosazení plyne:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (w_m + w_m) = \mathbf{E} \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{E} (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{J}) - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{J} \mathbf{E} \quad (7.50)$$

S použitím ekvivalence $\mathbf{A} \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{rot } \mathbf{A} = -\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, jejíž platnost je ukázána v části 8.8.4 bude:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{J} \mathbf{E} = -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{J} \mathbf{E} \quad (7.51)$$

Po přeskládání členů, převedení do integrálního tvaru a použití Gaussovy věty

$$\begin{aligned} -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{J} \mathbf{E} + \frac{\partial w}{\partial t} \\ -\iiint_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV &= \iiint_V \mathbf{J} \mathbf{E} dV + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w dV \end{aligned} \quad (7.52)$$

bude platit obecný vztah pro časovou změnu energie elektromagnetického pole v daném objemu, který se nazývá Poyntingův teorém:

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{dW}{dt} \quad (7.53)$$

Výraz $\frac{dW}{dt}$ na pravé straně odpovídá časové změně energie elektromagnetického pole v daném objemu a tedy i výkonu, který se v daném časovém okamžiku na této změně podílel.

Výraz $\iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV$ představuje výkon, který se v daném objemu změnil na teplo. Je to výkon odpovídající přeměně energie elektromagnetického pole na jiný druh energie.

Výraz : $-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S}$ na levé straně má význam výkonu, který do daného objemu vstupuje uzavřenou plochou, která tento objem obklopuje. Znaménko mínus je důsledkem znaménkové konvence, která je dána orientací vektorového elementu plochy $d\mathbf{S}$ ve směru vnější normály. Podle této konvence je výkon vstupující do uzavřené plochy záporný a vystupující kladný.

Pokud tedy do uzavřeného objemu více výkonu vstoupí, než vystoupí, bude hodnota výrazu $-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S}$ záporná a se znaménkem mínus před integrálem dá celkovou kladnou hodnotu výkonu, který se v objemu dílem přemění na teplo a dílem zvýší energii elektromagnetického pole.

Vektorová veličina $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ má s ohledem na odvozenou podobu vztahů význam plošné hustoty výkonu a označuje se jako Poyntingův vektor (\mathbf{S}):

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (7.54)$$

Poyntingův vektor \mathbf{S} v daném místě představuje svojí absolutní hodnotou plošnou hustotu výkonu přenášeného elektromagnetickým polem, svým směrem směr toku výkonu (energie) v daném místě.

7.7 Elektromagnetické vlny

V nestacionárním případě, ve kterém veličiny elektromagnetického pole mění v závislosti na čase svoji velikost a případně i směr, existuje vždy současně elektrická a magnetická složka jednotného elektromagnetického pole. Tyto složky jsou od sebe navzájem neoddělitelné. Jejich vzájemný vztah je vyjádřen dvojicí Maxvellových rovnic, které jsou svým formálním obsahem podobné.

První rovnice je **zobecněný Ampérův zákon celkového proudu v diferenciálním tvaru (7.55)**. Na levé straně vystupuje rotace vektorové funkce pro intenzitu magnetického pole \mathbf{H} . Ve vztahu pro rotaci jsou obsaženy druhé parciální derivace složek této funkce podle prostorových souřadnic (viz 8.6.3). Operátor rotace se tedy přímo nevztahuje k časovým změnám dané vektorové veličiny, ale je závislý na prostorovém rozložení této veličiny v určitém časovém okamžiku. Na pravé straně jsou veličiny elektrického pole: Proudová hustota proudu volných částic (konduktivního proudu) a hustota takzvaného posuvného proudu, která je dána časovou změnou elektrické indukce \mathbf{D} . Tento zákon vyjadřuje důležitou skutečnost, že **časové a prostorové změny magnetické složky elektromagnetického pole jsou vázány s časovými změnami elektrické složky pole** (viz (7.22)).

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.55)$$

Druhou symetricky podobnou rovnici představuje **Faradayův indukční zákon v diferenciálním tvaru**, který má na levé straně rotaci vektorové funkce pro intenzitu elektrického pole \mathbf{E} a na pravé straně časovou změnu veličiny magnetického pole – magnetickou indukci \mathbf{B} . Tato rovnice vyjadřuje skutečnost, že **časové a prostorové změny elektrické složky elektromagnetického pole jsou vázány s časovými změnami magnetické složky pole** (viz (7.15)):

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.56)$$

Z matematického hlediska tvoří uvedené rovnice soustavu **dvojí parciálních diferenciálních rovnic**, ve kterých se vyskytuje pět neznámých veličin. Tři veličiny popisující rozložení elektrického pole: **Intenzita elektrického pole \mathbf{E} , elektrická indukce \mathbf{D} a proudová hustota \mathbf{J}** . Dvě veličiny popisují rozložení magnetického pole: **Intenzita magnetického pole \mathbf{H} a magnetická indukce \mathbf{B}** . Veličiny elektrického a magnetického pole však nejsou navzájem nezávislé. V lineárních případech jsou vázány jednoduchými **materiálovými rovnicemi** (viz (3.20), (6.36)):

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \quad (7.57)$$

Poznámka:

V předešlých rovnicích je potřebné si uvědomit, že symboly $\mathbf{J}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ představují obecné vektorové funkce (viz 8.2.2), které popisují bez bližší specifikace souřadné soustavy příslušnou veličinu v prostoru a čase. Pokud by se například jednalo o kartézskou souřadnou soustavu, budou proměnné parametry vektorové funkce $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ v případě intenzity elektrického pole udávat, že každému bodu $[x, y, z]$ a každému časovému okamžiku „ t “ přísluší jedna hodnota vektoru intenzity elektrického pole $\mathbf{E}(x, y, z, t)$. Pokud vektorovou veličinu rozdělíme na složky ve směru souřadných os, je možné vektorovou funkci zapsat v podobě součtu skalárních funkcí. Každá skalární funkce popisuje velikost příslušné složky vektoru v prostoru a čase.

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{x}_0 E_x(x, y, z, t) + \mathbf{y}_0 E_y(x, y, z, t) + \mathbf{z}_0 E_z(x, y, z, t)$$

Matematický operátor rotace aplikovaný na vektorovou funkci opět dává vektorovou funkci. Obsahuje pouze parciální derivace podle souřadnic v prostoru a ne časové derivace. Pro intenzitu elektrického pole v kartézské soustavě to bude například:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \\ \mathbf{x}_0 &\left(\frac{\partial E_z(x, y, z, t)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + \\ + \mathbf{y}_0 &\left(\frac{\partial E_x(x, y, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(x, y, z, t)}{\partial x} \right) + \\ + \mathbf{z}_0 &\left(\frac{\partial E_y(x, y, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y, z, t)}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

(7.58)

Pokud si v rovnicích (7.55), (7.56) zvolíme jednu veličinu popisující magnetické pole (například intenzitu magnetického \mathbf{H}) a jednu veličinu popisující elektrické pole (například intenzitu elektrického pole \mathbf{E}), lze rovnice (7.55), (7.56) s použitím rovnic (7.57) skutečně přepsat do podoby soustavy dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{7.59}$$

Jedná se však o komplikovanou soustavu parciálních diferenciálních rovnic. V každé z nich je na levé straně aplikován operátor rotace na vektorovou funkci, na druhé straně je derivace vektorové funkce podle času. Rotace obsahuje parciální derivace vektorové funkce podle souřadnic v prostoru (viz (7.58)).

Při řešení této soustavy a hledání rovnice pro jednu veličinu je nutné druhou veličinu ze soustavy eliminovat. To se podaří například tím, když na první rovnici aplikujeme ještě jednou operátor rotace:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H}\tag{7.60}$$

Za člen $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ je možné dosadit z druhé rovnice. Po provedení naznačené derivace bude platit:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0\tag{7.61}$$

Dostali jsme tak parciální diferenciální rovnici pro intenzitu elektrického pole: V části **8.8.3** je ukázáno, že lze dvakrát aplikovaný operátor rotace zapsat pomocí dalších matematických operátorů:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}\tag{7.62}$$

Gradient a divergence jsou operátory popsané v textu na jiných místech.

Operátor ∇^2 se v kartézské soustavě někdy označuje jako Laplaceův operátor Δ a má tuto podobu:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E} = \mathbf{x}_0 \left\{ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right\} + \mathbf{y}_0 \left\{ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right\} + \mathbf{z}_0 \left\{ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right\}\tag{7.63}$$

Obecnou rovnici pro intenzitu elektrického pole nestacionárního elektromagnetického problému lze přepsat do podoby:

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (7.64)$$

Následným zkoumáním se ukáže, že tato rovnice popisuje elektromagnetickou vlnu, nazývá se vlnová. Člen $\text{grad div } \mathbf{E}$ představuje zdroj elektromagnetického vlnění, obsahuje hustotu elektrického náboje měnící se v prostoru a čase (viz Gaussova věta elektrostatiky : $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$). Pokud budeme zkoumat elektromagnetický problém **mimo oblast zdrojů**, lze tento člen vypustit a vlnová rovnice nabude tvaru:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (7.65)$$

Tato obecná parciální diferenciální rovnice obsahuje parciální derivace hledané vektorové funkce podle prostorových souřadnic i podle času a není v této podobě jednoznačně řešitelná, má nekonečně mnoho různých řešení.

7.7.1 Harmonická elektromagnetická vlna

Pokud se omezíme na veličiny elektromagnetického pole, jejichž závislost na čase je popsána harmonickými funkcemi ($\sin(\omega t), \cos(\omega t)$) a pokud budeme uvažovat ustálené stavy, je možné místo okamžitých hodnot veličin zavést tzv „fázory“, což jsou obrazy harmonicky časově proměnných veličin v komplexní rovině. Fázory, jako komplexní hodnoty, v sobě obsahují amplitudu a fázový posun. Tímto postupem se z rovnic odstraní závislost na čase. (viz část 8.8.5 Harmonické časové průběhy veličin, fázory).

Ve vektorových funkcích již nebudou vystupovat vektory okamžitých hodnot veličin, ale jejich fázory (interpretace veličin v komplexní rovině) – nazývají se fázory vektorů. Složkami fázoru vektorů budou fázory složek v daném místě.

$$\bar{\mathbf{E}}(x, y, z) = \mathbf{x}_0 \bar{E}_x(x, y, z) + \mathbf{y}_0 \bar{E}_y(x, y, z) + \mathbf{z}_0 \bar{E}_z(x, y, z)$$

První časové derivace jsou nahrazeny násobkem $j\omega$, kde ω je úhlový kmitočet daného harmonického průběhu, druhé časové derivace násobkem $(j\omega)^2 = -\omega^2$. Operátory rotace i operátor ∇^2 (případně Δ) zůstanou formálně stejné, časové derivace se zde nevyskytují.

Rovnice (7.59) přejdou do tvaru:

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{\mathbf{H}} &= \sigma \bar{\mathbf{E}} + j\omega\epsilon \bar{\mathbf{E}} = (j\omega\epsilon + \sigma) \bar{\mathbf{E}} \\ \text{rot } \bar{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu \bar{\mathbf{H}} \end{aligned} \quad (7.66)$$

Vlnová rovnice (7.65) přejde do tvaru:

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} - j\omega\mu\sigma \bar{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu\epsilon \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad (7.67)$$

Po úpravě

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} - j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)\bar{\mathbf{E}} = 0 \quad (7.68)$$

Pokud dále použijeme označení:

$$\bar{k}^2 = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma) \quad (7.69)$$

a nově zavedenou komplexní konstantu \bar{k} nazveme „konstanta šíření“:

$$\bar{k} = \sqrt{-j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)} = \beta - j\alpha \quad (7.70)$$

přejde s použitím této konstanty rovnice (7.68) do podoby, kterou je možno označit jako vlnovou rovnici pro harmonický ustálený stav bez přítomnosti zdrojů:

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} + \bar{k}^2 \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad (7.71)$$

Později bude ukázáno, že **reálná část** takto zapsané konstanty šíření β souvisí s fázovým posuvem veličin, nazývá se proto **fázová konstanta** a **imaginární část** α souvisí s útlumem amplitud veličin, nazývá se **měrný útlum**.

7.7.2 Rovinná harmonická elektromagnetická vlna

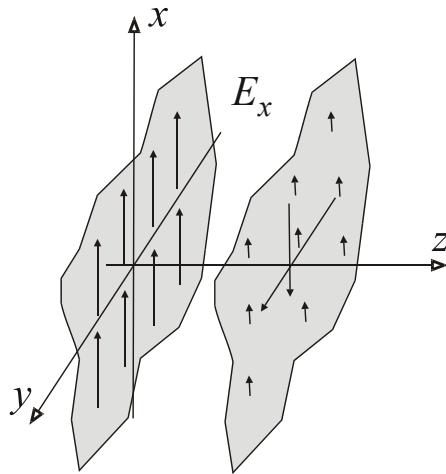
Rovnice (7.71) je stále parciální diferenciální rovnice s nekonečným počtem řešení, počet proměnných veličin hledané funkce se však o jednu snížil (čas), omezil se pouze na prostorové souřadnice.

Za určitých zjednodušujících předpokladů lze získat jedno z možných řešení této rovnice, které popisuje důležitý problém nazývaný: **Rovinná harmonická elektromagnetická vlna**. Až ze samotných závěrů a interpretace výsledků tohoto řešení bude patrné, že se skutečně jedná o jev, který má vlnovou povahu.

Pojem **rovinná harmonická elektromagnetická vlna** vyplýne ze základního předpokladu, že nebudeme zkoumat obecné elektromagnetické pole, ale pole, které má elektrickou nebo magnetickou složku orientovanou pouze v jednom směru. Například intenzitu elektrického pole orientovanou v kladném směru osy x . Velikost této složky se navíc nebude měnit v prostoru obecně, v našem případě bude funkci pouze souřadnice z .

$$\bar{\mathbf{E}}(x, y, z) = \mathbf{x}_0 \bar{E}_x(x, y, z) + \underbrace{\mathbf{y}_0 \bar{E}_y(x, y, z)}_0 + \underbrace{\mathbf{z}_0 \bar{E}_z(x, y, z)}_0 \quad (7.72)$$

Velikost elektromagnetického pole bude konstantní v rovinách $z = \text{konst}$ a z dalšího textu vyplýne, že se bude jednat o pomyslné „vlnoplochy“ elektromagnetické vlny, které se budou šířit ve směru osy z (viz Obr.118).



Obr.118 Vlnoplochy elektromagnetického pole

Z Laplaceova operátoru na levé straně vlnové rovnice, zůstane pouze jeden nenulový člen:

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{x}_0 \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial z^2}}_0 \right) + \mathbf{y}_0 \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial z^2}}_0 \right) + \mathbf{z}_0 \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_z}{\partial z^2}}_0 \right) = \mathbf{x}_0 \frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial z^2} \quad (7.73)$$

Vlnová diferenciální rovnice pro fázor x-ové složky intenzity magnetického pole přejde do tvaru:

$$\frac{d^2 \bar{E}_x(z)}{dz^2} + \bar{k}^2 \bar{E}_x(z) = 0 \quad (7.74)$$

Jedná se o obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Její řešení, které lze snadno nalézt, má jednoduchý tvar:

$$\bar{E}_x(z) = \underbrace{\bar{C}_1 e^{j\bar{k}z}}_{-z} + \underbrace{\bar{C}_2 e^{-j\bar{k}z}}_{+z} \quad (7.75)$$

Výsledkem je tedy rovnice pro fázor intenzity elektrického pole $\bar{E}_x(z)$, \bar{C}_1, \bar{C}_2 jsou obecné komplexní konstanty, jejichž velikost se určí z okrajových podmínek. Pravý člen rovnice představuje vlnu šířící se v kladném směru osy z , levý člen vlnu šířící se v záporném směru osy z . Na základě uvedených poznatků však vůbec ještě není patrné, že se jedná o elektromagnetickou vlnu, natož v jakém směru by se měla šířit. O tom, že to tak skutečně je, bude možné se přesvědčit později. Pro jednoduchost lze předpokládat, že existuje pouze vlna šířící se v kladném směru osy z , které nestojí nic v cestě a nevznikne vlna odražená:

$$\bar{E}_x(z) = \bar{C}_2 e^{-j\bar{k}z} \quad (7.76)$$

Komplexní konstanta \bar{C}_2 má význam fázoru intenzity elektrického pole v bodě $z=0$, a udává velikost amplitudy intenzity elektrického pole E_m a její fáze ϕ_0 v tomto bodě:

$$\bar{E}_x(z=0) = \bar{C}_2 = \bar{E}_0 = E_m e^{j\phi_0} \quad (7.77)$$

Pro **fázor intenzity elektrického pole** platí po dosazením všech parametrů konečný vztah

$$\bar{E}_x(z) = \bar{E}_0 e^{-j\bar{k}z} = \underbrace{E_m e^{j\phi_0}}_{\bar{E}_0} e^{-j\sqrt{\frac{\bar{k}}{(\beta-j\alpha)}}z} \quad (7.78)$$

Po zpětné transformaci z fázorové do časové roviny bude platit pro okamžitou hodnotu intenzity elektrického pole v libovolném místě z a čase t finální vztah:

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= \text{Im}[E_x(z)e^{j\omega t}] = \text{Im}[E_m e^{j\phi_0} e^{-j(\beta-j\alpha)z} e^{j\omega t}] = E_m e^{-\alpha z} \text{Im}[e^{j(\omega t - \beta z + \phi_0)}] = \\ &= E_m e^{-\alpha z} \text{Im}[\cos(\omega t - \beta z + \phi_0) + j \sin(\omega t - \beta z + \phi_0)] = E_m e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \phi_0) \end{aligned} \quad (7.79)$$

Význam jednotlivých členů vlnové rovnice bude dobře patrný, když si zobrazíme funkci pro okamžitou hodnotu intenzity elektrického pole ve dvou rovinách procházejících různými body na ose z . Takové časové průběhy by viděli pozorovatelé, kteří by se nacházeli kdekoliv na těchto rovinách v elektromagnetickém poli postupující vlny, pokud by měli možnost snímat intenzitu elektrického pole. Zobrazíme-li tuto funkci nejprve v počátku pro $z=0$ viz obrázek Obr.119, jedná se o obyčejný harmonický průběh veličiny s amplitudou E_m .

$$E_x(z=0, t) = E_m \sin(\omega t + \phi_0) \quad (7.80)$$

Úhel ϕ_0 představuje „referenční“ fázový posuv, určuje okamžitou hodnotu intenzity elektrického pole v bodě $z=0$ a čase $t=0$:

$$E_x(z=0, t=0) = E_m \sin(\phi_0) \quad (7.81)$$

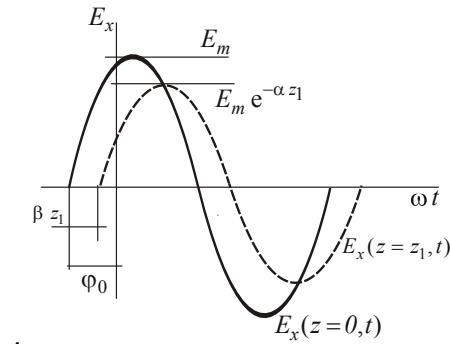
Postoupíme-li dále po ose z do bodu $z=z_1$, bude mít časový průběh popisující intenzitu elektrického pole tvar:

$$E_x(z=z_1, t) = E_m e^{-\alpha \cdot z_1} \sin(\omega t - \beta z_1 + \phi_0) \quad (7.82)$$

Srovnáme-li oba časové průběhy, zjistíme, že se intenzita elektrického pole při postupu z bodu $z=0$ do bodu $z=z_1$ utlumila, zmenšila svojí amplitudu $e^{-\alpha \cdot z_1} \times$. Je tedy vidět, že konstanta α v exponenciálním členu určuje po vynásobení vzdáleností velikost tlumení amplitudy elektrického pole ve směru osy z , nazývá se proto **měrný útlum**. Ze znaménka mínus v exponentu je dále vidět, že se musí jednat o vlnu postupující v kladném směru osy z . Jak se zvětšuje vzdálenost, zvětšuje se i záporný člen v exponentu, vlna se tlumí. V opačném případě by to znamenalo, že vlna při postupu v kladném směru osy z svojí amplitudu zvětšuje, což není možné.

Časový průběh intenzity elektrického pole se navíc při postupu do bodu $z=z_1$ fázově posune o úhel $\beta \cdot z_1$. Znaménko mínus znamená, že se veličina o tento úhel **zpozdí**. Konstanta β tedy určuje fázový posuv veličin, je to v podstatě fázový posuv na jednotku délky a nazývá se **fázová konstanta**. Celý jev můžeme zjednodušeně

interpretovat tak, že elektromagnetická vlna, která postupuje v kladném směru osy z , se postupně tlumí a časový průběh se fázově zpožďuje. Nejprve vlna dospěje do bodu $z=0$, potom s určitým zpožděním do bodu $z=z_1$, navíc ale ještě s poněkud menší amplitudou. Oba časové průběhy jsou porovnány na obrázku **Obr.119**.



Obr.119 Časové průběhy intenzity elektrického pole veličin rovinné harmonické elektromagnetické vlny

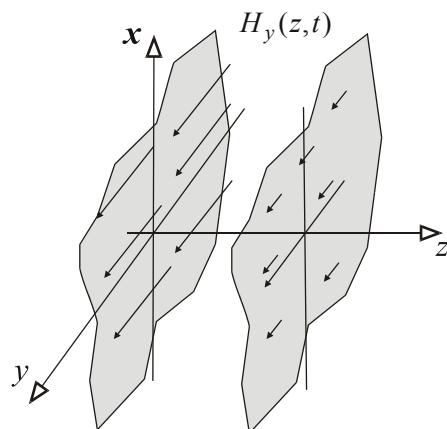
Intenzitu magnetického pole jako druhou neznámou veličinu v soustavě rovnic (viz (7.66)) lze získat zpětným dosazením pomocí fázoru intenzity elektrického pole (viz (7.78)).

$$\text{rot } \bar{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\bar{\mathbf{H}} \quad (7.83)$$

Rotaci na levé straně lze vyčíslit takto

$$\text{rot } \bar{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \bar{E}_x & \underbrace{\bar{E}_y}_0 & \underbrace{\bar{E}_z}_0 \end{vmatrix} = \mathbf{y}_0 \frac{\partial \bar{E}_x(z)}{\partial z} = \mathbf{y}_0 (-jk \bar{E}_x(z)) \quad (7.84)$$

Rotace intenzity elektrického pole má pouze složku ve směru osy y . Srovnáním levé a pravé strany rovnice (7.83) je vidět, že původně obecný vektor intenzity magnetického pole musí mít také pouze jednu složku, a to ve směru osy y . Ostatní složky jsou nulové $\bar{H}_x, \bar{H}_z = 0$ (viz Obr.120).



Obr.120 Vektory intenzity magnetického pole na vlnoplochách rovinné harmonické elektromagnetické vlny

$$\mathbf{y}_0(-jkz\bar{E}_x(z)) = -j\omega\mu(\underbrace{\mathbf{x}_0\bar{H}_x(z)}_0 + \underbrace{\mathbf{y}_0\bar{H}_y(z)}_0 + \underbrace{\mathbf{z}_0\bar{H}_z(z)}_0) \quad (7.85)$$

Pro fázor intenzity magnetického pole bude platit:

$$\bar{H}_y(z) = \frac{\bar{k}}{\omega\mu} \bar{E}_x(z) = \frac{\bar{E}_x(z)}{\bar{Z}} \quad (7.86)$$

V rovnici (7.86) je zavedena nová komplexní veličina, která se nazývá vlnová impedance $\bar{Z}[\Omega]$.

$$\bar{Z} = \frac{\bar{E}_x(z)}{\bar{H}_y(z)} = \frac{\omega\mu}{\bar{k}} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{-j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}} \quad (7.87)$$

Vlnovou impedanci, podobně jako libovolnou komplexní veličinu, lze zapsat v polárním tvaru pomocí absolutní hodnoty $|\bar{Z}|$ a φ_z . Z dalšího textu vyplyně specifický význam těchto částí:

$$\bar{Z} = |\bar{Z}| e^{j\varphi_z} \quad (7.88)$$

Pro fázor intenzity magnetického pole bude platit:

$$\bar{H}_y(z) = \frac{\bar{E}_x(z)}{\bar{Z}} = \frac{\bar{E}_0 e^{-j\bar{k}z}}{|\bar{Z}| e^{j\varphi_z}} = \underbrace{\frac{E_m}{|\bar{Z}|} e^{j(\varphi_0 - \varphi_z)}}_{\bar{H}_m} e^{-j\bar{k}z} = \bar{H}_0 e^{-j\bar{k}z} = \bar{H}_0 e^{-j\overline{\frac{\bar{k}}{\beta - j\alpha}}z} \quad (7.89)$$

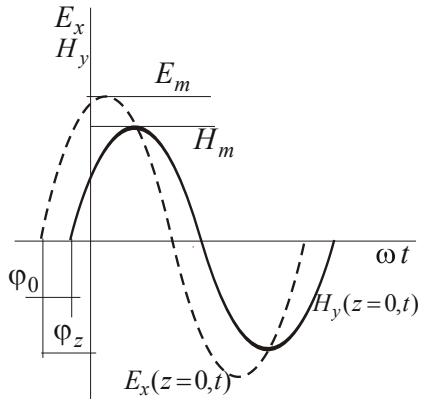
\bar{H}_0 je fázor intenzity magnetického pole v bodě $z=0$, H_m je amplituda intenzity magnetického pole.

$$\bar{H}_0 = \bar{H}(z=0) = H_m e^{j(\varphi_0 - \varphi_z)} \quad (7.90)$$

Absolutní hodnota vlnové impedance udává podíl amplitud intenzity elektrického a magnetického pole: $|\bar{Z}| = \frac{E_m}{H_m}$. Argument vlnové impedance φ_z udává fázové „zpoždění“ intenzity magnetického pole za intenzitou elektrického pole.

Podobně jako pro intenzitu elektrického pole, obdržíme vztah pro okamžitou hodnotu intenzity magnetického pole transformací fázoru z komplexní do časové roviny:

$$H_y(z, t) = \text{Im}(\bar{H}_y(z) e^{j\omega t}) = H_m e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z - \varphi_z + \varphi_0) \quad (7.91)$$



Obr.121 Časový průběh intenzity elektrického a magnetického pole v bodě $z = 0$

Časový průběh intenzity magnetického pole je v každém bodě, i v bodě $z = 0$ jako na obrázku Obr.121, zpožděn za časovým průběhem intenzity elektrického pole o fázový úhel ϕ_z , který je argumentem vlnové impedance \bar{Z} . Jedná se o velmi podobnou situaci jako v časovém průběhu napětí a proudu na induktoru, kde je časový průběh proudu rovněž zpožděn za časovým průběhem napětí o úhel daný argumentem impedance v obvodu (viz 8.8.5.)

7.7.3 Vlnová délka a fázová rychlosť

Vlnová délka je nejmenší vzdálenost dvou míst, ve kterých jsou veličiny elektromagnetického pole ve fázi, což znamená, že ve stejný časových okamžicích je v těchto místech například maximum harmonického průběhu, nulová hodnota, nebo minimum. Budeme předpokládat, že je s ohledem na předchozí text dán časový průběh intenzity elektrického pole v referenčním bodě $z = 0$ rovnicí:

$$E_x(z = 0, t) = E_m \sin(\omega t + \phi_0) \quad (7.92)$$

a v bodě $z = z_1$ rovnicí

$$E_x(z = z_1, t) = E_m e^{-\alpha \cdot z_1} \sin(\omega t - \beta z_1 + \phi_0) \quad (7.93)$$

Pokud by měla být vzdálenost z_1 rovna vlnové délce, musí v rovnici (7.93) platit:

$$\beta z_1 = 2\pi$$

pro vlnovou délku, která se obvykle označuje písmenem λ potom platí:

$$\lambda = z_1 = \frac{2\pi}{\beta} \quad (7.94)$$

Vlnová délka nesouvisí s amplitudou veličin v daných místech. Pokud se vlna ve ztrátovém prostředí tlumí, je ve vzdálenosti λ amplituda $e^{-\alpha \cdot \lambda} \times$ menší.

Místa s konstantní fází (vlnoplochy) elektromagnetické vlny postupují v prostoru rychlostí, která se nazývá fázová rychlosť. Pokud mají být v místech vzdálených o vlnovou délku λ veličiny elektromagnetického pole ve fázi, musí platit v rovnici pro časový průběh veličin - například intenzity elektrického pole:

$$E_x(z = z_1, t) = E_m e^{-\alpha \cdot z_1} \sin(\omega t - \beta z_1 + \varphi_0) \quad (7.95)$$

$$\text{že za čas } t = \frac{2\pi}{\omega} \text{ urazí vlnoplocha vzdálenost } \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Pro fázovou rychlosť potom vyplývá vztah:

$$v_f = \frac{\lambda}{t} = \frac{\frac{2\pi}{\beta}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{\beta} \quad (7.96)$$

Poznámka:

Složitějšími úvahami se dá ukázat, že fázová rychlosť je rovna rychlosti přenosu energie pouze v případě, kdy se jedná o dielektrické bezeztrátové prostředí.

V obecném případě se energie přenáší tzv. **skupinovou rychlosťí**, jejíž velikost se stanoví podle vztahu:

$$v_s = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (7.97)$$

V bezeztrátovém prostředí je fázová i skupinová rychlosť stejná.

7.7.4 Konstanta šíření v elektricky dobře vodivém a nevodivém prostředí

Pro konstantu šíření, která obsahuje měrný útlum a fázovou konstantu, platí obecný vztah:

$$\mathbf{k} = \sqrt{-j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)} = \beta - j\alpha \quad (7.98)$$

Tato rovnice je analyticky řešitelná. Srovnáním reálných a imaginárních částí v definičním vztahu vyplýne pro činitel útlumu a fázovou konstantu vztah:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} \right]} \quad (7.99)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} \right]} \quad (7.100)$$

Pro studium rovinné elektromagnetické vlny je však užitečné posuzovat vlastnosti konstanty šíření přímo z definičního vztahu. Chování elektromagnetické vlny zásadně ovlivňuje vzájemný vztah mezi měrnou vodivostí σ a členem $\omega\epsilon$, který se vyskytuje ve zobecněném Ampérově zákoně celkového proudu na stejně pozici jako vodivost (viz (7.66)). Představuje pomyslnou vodivost pro takzvaný posuvný proud. S ohledem na vzájemnou relaci uvedených vodivostí je možné vysledovat dva extrémní případy pro prostředí, ve kterém se elektromagnetická vlna šíří.

Elektricky nevodivé prostředí

Platí-li:
 $\omega\epsilon \gg \sigma$

Potom se prostředí chová z hlediska šíření elektromagnetické vlny jako **nevodivé**. Říkáme, že se vlna šíří v **nevodiči – dielektriku**

Pro konstantu šíření bude v těchto speciálních případech platit

$$k = \sqrt{-j\omega\mu(j\omega\epsilon + \sigma)} \xrightarrow{\rightarrow 0} \beta - j\alpha$$

Konstanta šíření má pouze reálnou část, z toho vyplývá, že měrný útlum je nulový, vlna se netlumí

$$\alpha = 0$$

Pro fázovou konstantu platí jednoduchý vztah

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\epsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}$$

do kterého je doplněna další konstanta, kterou je rychlosť světla

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 3.10^8 \text{ m/s}$$

Pro elektromagnetickou vlnu ve vzduchu nebo vakuuu platí

$$\epsilon_r = 1$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$$

Elektricky dobré vodivé prostředí

Platí-li:
 $\omega\epsilon \ll \sigma$

Potom se prostředí chová z hlediska šíření elektromagnetické vlny jako **dobré vodiče**, říkáme, že se vlna šíří ve **vodiči**

Pro konstantu šíření bude v těchto speciálních případech platit

$$k = \sqrt{-j\omega\mu(j\omega\epsilon + \sigma)} \xrightarrow{\rightarrow 0} \beta - j\alpha$$

$$k = \frac{1-j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \beta - j\alpha$$

Pro konstantu šíření v dobrém vodiči platí, že má stejně velikou reálnou a imaginární část.

Měrný útlum a konstanta šíření je stejně veliká.

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

7.7.5 Vlnová impedance v elektricky dobré vodivém a nevodivém prostředí

Vlnová impedance je veličina, která udává vzájemný vztah mezi fázorem intenzity elektrického a magnetického pole. Absolutní hodnota vlnové impedance udává podíl amplitud intenzit, argument vlnové impedance představuje fázový posun mezi vektorem intenzity elektrického a magnetického pole.

Vlnová impedance je závislá na parametrech prostředí a platí pro ní vztah, který vyplýne při odvození

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{H}_y} = \frac{\omega\mu}{k}$$

Po dosazení za konstantu šíření platí vztah

$$\mathbf{Z} = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu}{-\mathrm{j}\omega\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma)} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma}}$$

Podle stejných předpokladů jako v 7.7.4 lze klasifikovat prostředí z hlediska vzájemného poměru vodivosti σ a členu $\omega\varepsilon$ na dobré vodivé a nevodivé.

Elektricky nevodivé prostředí $\omega\varepsilon \gg \sigma$

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| e^{\mathrm{j}\varphi_z} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Vlnová impedance je reálná, pro absolutní hodnotu vlnové impedance platí vztah

$$|\mathbf{Z}| = \frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

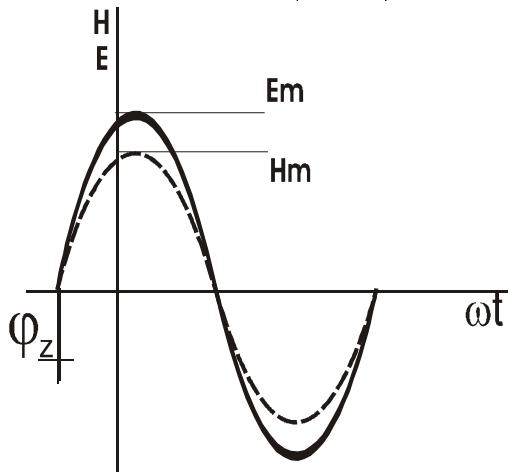
Fázový posun mezi E a H je nulový, intenzita elektrického a magnetického pole je ve fázi

$$\varphi_z = 0$$

Pro vlnovou impedanci ve vzduchu nebo dielektriku je možné vztah ještě upravit

$$\varepsilon_r = 1$$

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$



Obr.122 Časový průběh intenzity elektrického a magnetického pole v nevodivém prostředí

Elektricky dobré vodivé prostředí $\omega\varepsilon \ll \sigma$

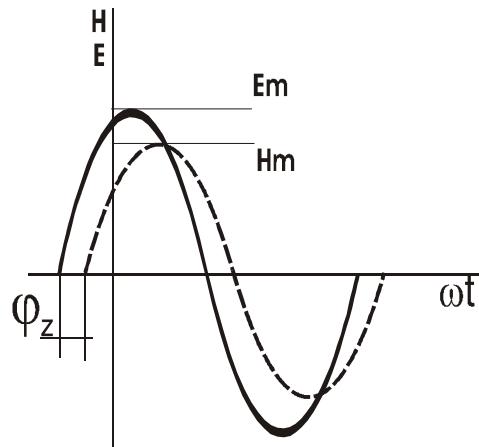
$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| e^{\mathrm{j}\varphi_z} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma}} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

Pro absolutní hodnotu vlnové impedance platí vztah

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

Fázový posun mezi E a H je $\pi/4$, intenzita elektrického pole E tedy předbíhá intenzitu magnetického pole o 45° .

$$\varphi_z = \frac{\pi}{4}$$



Obr.123 Časový průběh intenzity elektrického a magnetického pole v dobrém vodivém prostředí

7.7.6 Vlnová délka a fázová rychlosť v elektricky nevodivém prostredí

Pokud do obecného vzťahu pro vlnovou délku (7.94) dosadíme hodnotu fázové konstanty v elektricky nevodivém prostredí, bude platit:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}}$$

Dostávame tak známý vzťah pro vlnovou délku v elektricky nevodivém prostredí:

$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\epsilon_r}}$$

Ve vzduchu nebo ve vakuu pro $\epsilon_r = 1$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Pokud do obecného vzťahu pro fázovou rychlosť ((7.96)) dosadíme hodnotu fázové konstanty v elektricky nevodivém prostredí, bude platit:

$$v_f = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Elektromagnetická vlna tedy postupuje ve vzduchu nebo vakuu rychlosťí světla.

7.7.7 Výkon přenášený elektromagnetickou vlnou, Poyntingův vektor, střední hodnota Poyntingova vektoru

Přenášený výkon je popsán vektorovou veličinou, která se nazývá **Poyntingův vektor** a představuje v určitém místě plošnou hustotu výkonu, který projde plochou kolmou na směr šíření. Poyntingův vektor je obecně definován vztahem

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Celkový výkon, který projde určitou plochou, se dá potom stanovit podle vztahu

$$\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S}$$

V případě rovinné vlny má intenzita elektrického pole pouze složku ve směru osy x

$$E_x(z, t)$$

a intenzita magnetického pole pouze složku ve směru y

$$H_y(z = 0, t)$$

Vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} jsou na sebe kolmé, výsledný vektor z vektorového součinu bude současně kolmý na oba tyto vektory, půjde tedy ve směru osy \mathbf{z} . Výkon se bude tedy šířit pouze ve směru osy \mathbf{z} , což je logické, neboť to je směr, ve kterém se šíří elektromagnetická vlna. Plošná hustota výkonu bude mít okamžitou hodnotu

$$S_z(z, t) = E_x(z, t) \cdot H_y(z, t)$$

Okamžitý výkon nemá moc velký význam, pro další úvahy je lepší jej rozdělit na část, která má střední hodnotu (činný výkon), ta je ekvivalentní s činným výkonem v elektrických obvodech, podílí se i na krytí ztrát. Druhá část, která střední hodnotu nemá, je ekvivalentní jalovému výkonu v elektrických obvodech, podílí se na časových změnách energie elektrického a magnetického pole.

Zapíšeme-li vztah pro okamžitý výkon například v bodě $z=0$ a pro jednoduchost budeme předpokládat nulovou velikost počátečního fázového posunu, který udává úhel φ_0 , bude pro okamžitou hodnotu výkonu platit

$$\begin{aligned} S_z(z=0, t) &= E_x(z=0, t) \cdot H_y(z=0, t) \\ S_z(z=0, t) &= E_m H_m \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi_z) = E_m H_m (\sin^2(\omega t) \cos(\varphi_z) + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\varphi_z)) = \\ &= E_m H_m \left[\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \cos(\varphi_z) + \frac{\sin(2\omega t)}{2} \sin(\varphi_z) \right] \end{aligned}$$

Vypočteme-li střední hodnotu tohoto výkonu, bude platit

$$\begin{aligned} S_{stř}(z=0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_z(z=0, t) dt = \frac{E_m H_m}{2} \cos(\varphi_z). \\ S_{stř}(z) &= \frac{1}{2} E_m e^{-\alpha z} H_m e^{-\alpha z} \cos(\varphi_z) = \frac{1}{2} E_m H_m e^{-2\alpha z} \cos(\varphi_z) \end{aligned}$$

Zcela analogicky jako v elektrických obvodech, kde je možné velikost činného i jalového výkonu vyjádřit ekvivalentním vztahem pomocí fázorů, je toto možné i u rovinné vlny. Pro správný fyzikální význam tohoto součinu musí být jedna z veličin komplexně sdružená.

$$S_{stř}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_x(z) \cdot \mathbf{H}_y(z)^*]$$

O tom, že se jedná skutečně o ekvivalentní vztah, je možné se snadno přesvědčit po dosazení

$$\begin{aligned} S_{stř}(z) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_x(z) \cdot \mathbf{H}_y(z)^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[E_m e^{j\varphi_0} e^{j(\beta-j\alpha)z} \left(H_m e^{j(\varphi_0-\varphi_z)} e^{j(\beta-j\alpha)z} \right)^* \right] = \\ &= \frac{1}{2} E_m H_m e^{-2\alpha z} \cdot \operatorname{Re}[e^{j\varphi_z}] = \frac{1}{2} E_m H_m e^{-2\alpha z} \cos(\varphi_z) \end{aligned}$$

7.7.8 Výkon přeměněný v jednotce objemu na teplo

Prochází-li rovinná elektromagnetická vlna vodivým prostředím, vyvolá nenulová hodnota intenzity elektrického pole elektrický proud ve stejném směru jako je intenzita elektrického pole, v našem případě ve směru osy \mathbf{x} . Proudová hustota bude podle Ohmova zákona

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$$

Podle Jouleova zákona je výkon, který se v jednotce objemu přeměňuje v teplo, dán vztahem

$$\Delta p_g = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma \cdot \mathbf{E}^2$$

Tento vztah by doslova platil pro stejnosměrné nebo efektivní hodnoty veličin. V případě rovinné vlny jsou všechny veličiny vyjádřeny pomocí amplitud a platí:

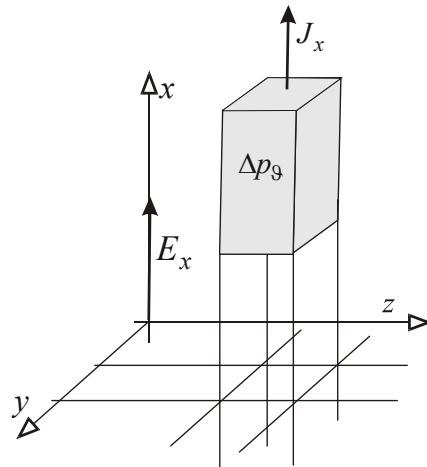
$$\Delta p_g = \sigma E_{ef}^2 = \frac{1}{2} \sigma E_m^2$$

Amplituda veličin se navíc tlumí při postupu ve směru osy \mathbf{z} s členem:

$$e^{-\alpha z}$$

předchozí vztah tedy platí pouze pro bod $z=0$, v obecném bodě by platilo s ohledem na druhou mocninu intenzity elektrického pole:

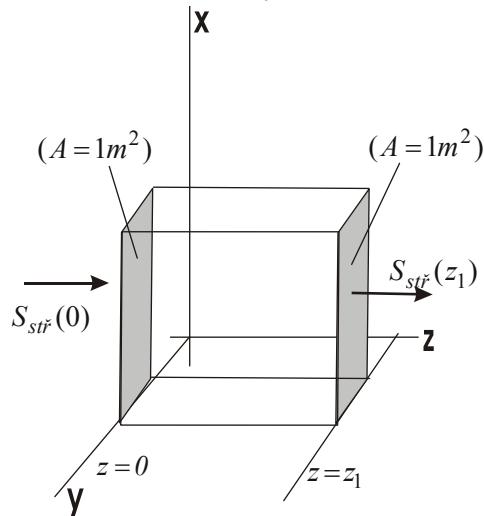
$$\Delta p_g(z) = \frac{1}{2} \sigma E_m^2 e^{-2\alpha z}$$



Obr.124 Ztráty v jednotce objemu

7.7.9 Bilance činného výkonu rovinné harmonické elektromagnetické vlny

Zvolíme uzavřený prostor vymezený hranolem podle obrázku (Obr.125) tak, že budou jeho čelní stěny v rovinách rovnoběžných s osou x a y a budou mít jednotkovou plochu. Levá stěna je na souřadnici $z=0$. Pravá stěna je na souřadnici $z=z_1$. Boční stěny jsou rovnoběžné s osou z .



Obr.125 Bilance energie v prostoru s postupující rovinnou harmonickou elektromagnetickou vlnou

Výkon může vstoupit a vystoupit do tohoto prostoru s ohledem na směr šíření pouze čelními stěnami. Vlevo vstoupí výkon se střední hodnotou

$$S_{stř}(z=0) = \frac{1}{2} E_m H_m \cos(\varphi_z)$$

na druhé straně vystoupí výkon se střední hodnotou:

$$S_{stř}(z=z_1) = \frac{1}{2} E_m H_m e^{-2\alpha z_1} \cos(\varphi_z)$$

Mělo by platit, že rozdíl středních hodnot Poyntingových vektorů

$$S_{stř}(z=0) - S_{stř}(z=z_1) = \frac{1}{2} E_m H_m (1 - e^{-2\alpha z_1}) \cos(\varphi_z) = \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{|\mathbf{Z}|} (1 - e^{-2\alpha z_1}) \cos(\varphi_z)$$

je právě roven výkonu v objemu vytýčeného kvádru, který se přemění v teplo.

Ke stejnemu ztrátovému výkonu musíme dospět integrací objemové hustoty ztrát v kvádru

$$\Delta P_g = \iiint_V \Delta p_g \, dV = (A = 1m^2) \cdot \int_{z=0}^{z_1} \Delta p_g(z) \, dz = \frac{1}{2} \int_{z=0}^{z_1} \sigma \cdot E_m^2 e^{-2\alpha z} \, dz = \frac{\sigma E_m^2}{4\alpha} [1 - e^{-2\alpha z_1}]$$

Srovnáním rovnic vyplýne, že musí platit

$$\frac{\sigma}{4\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\cos(\varphi_z)}{|\mathbf{Z}|}$$

Z úpravy pravé strany vyplýne, že tato ekvivalence skutečně platí:

$$\frac{1}{2} \frac{\cos(\varphi_z)}{|\mathbf{Z}|} = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\omega\mu} = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega\mu} = \frac{\sigma}{4\alpha}$$

Do vztahu bylo dosazeno pomocí této ekvivalentní rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^2 &= -j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma) = (\beta - j\alpha)^2 = \beta^2 - \alpha^2 - 2j\alpha\beta \\ \omega\mu\sigma &= 2\alpha\beta \end{aligned}$$

8 **Matematické znalosti potřebné pro studium základních vlastností elektromagnetického pole**

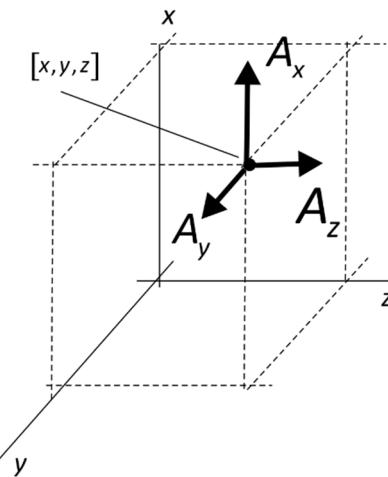
Pro pochopení matematického popisu základních zákonitostí elektromagnetického pole je bezpodmínečně nutné se alespoň částečně seznámit se základním matematickým aparátem, který se k tomuto popisu používá. Tento aparát je stručně popsán v následující části s důrazem na pochopení principu a s odhlédnutím od matematické preciznosti.

8.1 Ortogonální soustavy souřadnic

V následující části je stručný popis kartézské, cylindrické (válcové) a kulové (sférické) soustavy souřadnic. V každé z těchto soustav je popsán bod v prostoru pomocí trojice specifických parametrů a vektor je tvoren trojicí specificky uspořádaných ortogonálních složek. Při použití vhodného typu souřadnic pro určitý typ úlohy se může podstatně zjednodušit její řešení.

8.1.1 Kartézská soustava

V kartézské soustavě souřadnic (Obr.126) je poloha každého bodu v prostoru popsána trojicí souřadnic $[x, y, z]$. Vektor popsaný v této soustavě má obecně složky ve směru souřadnicových os $[A_x, A_y, A_z]$.

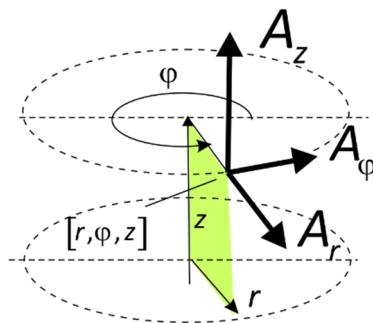


Obr.126 Kartézská soustava souřadnic

V kartézské soustavě souřadnic je výhodné popisovat úlohy s rovinnou symetrií. V našem případě je to například elektrické pole rovinných rovnoměrně nabitých deskových elektrod. Rovinná harmonická elektromagnetická vlna je rovněž popsána v kartézských souřadnicích.

8.1.2 Válcová soustava souřadnic

Ve válcové soustavě souřadnic (Obr.127) je poloha každého bodu v prostoru popsána trojicí souřadnic $[r, \varphi, z]$. Souřadnice φ nemá délkový rozměr, je to úhel v obloukové míře vedený po obvodu pomyslné kružnice o poloměru r . Vektor popsaný v této soustavě má obecně složky $[A_r, A_\varphi, A_z]$. Složka A_φ má v daném místě $[r, \varphi, z]$ tečný směr ke kružnici vedené po obvodu válce.



Obr.127 Válcová soustava souřadnic

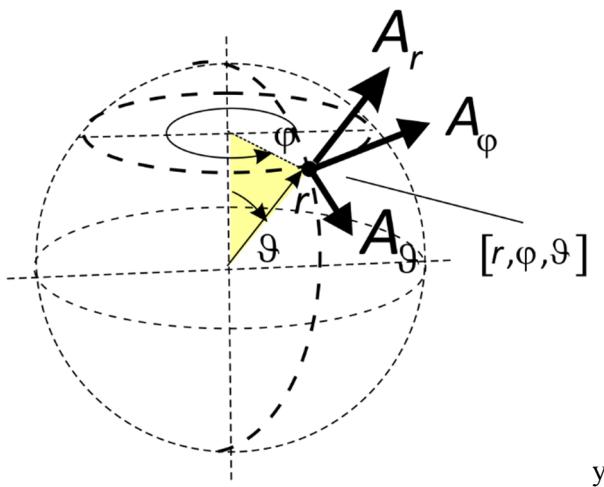
Ve válcové soustavě je velmi výhodné popisovat válcově symetrické úlohy.

V elektrickém poli se jedná například o elektrické pole dlouhého tenkého či válcového vodiče. V tomto případě má vektor intenzity elektrické pole všude pouze radiální složku a ta je pouze funkcí poloměru $E_r(r)$. Pro zadanou hodnotu poloměru velikost intenzity na souřadnicích φ, z nezávisí. V kartézské soustavě by měl stejný vektor tři složky a jejich velikost by byla složitou funkcí souřadnic x, y, z .

Popis magnetického pole dlouhého tenkého nebo válcového vodiče je ve válcové soustavě rovněž velmi jednoduchý. Vektor intenzity magnetického pole má pouze tangenciální složku, která je funkcí poloměru: $H_\varphi(r)$. Pro zadaný poloměr velikost této složky nezávisí na souřadnicích φ, z .

8.1.3 Sférická soustava souřadnic

Ve sférické soustavě souřadnic (Obr.128) je poloha každého bodu v prostoru popsána trojicí souřadnic $[r, \varphi, \vartheta]$. Souřadnice φ, ϑ nemají délkový rozměr, jsou to úhly v obloukové míře specifikující polohu příslušných kružnic o daném poloměru r . Vektor popsaný v této soustavě má obecně složky $[A_r, A_\varphi, A_\vartheta]$. Složky A_φ, A_ϑ mají tečný směr ke jmenovaným kružnicím (Obr.128) .



Obr.128 Sférická soustava souřadnic

Pokud popíšeme ve sférické soustavě sféricky symetrickou úlohu, jako je v našem případě například výpočet elektrického pole rovnoměrně nabité kulové elektrody, problém se velice zjednoduší. Vektor intenzity elektrického pole bude mít pouze radiální složku a ta bude pouze funkcí poloměru. V kartézské soustavě by měl stejný vektor tři složky a jejich velikost by byla složitou funkcí souřadnic x,y,z.

8.2 Skalární a vektorová funkce

8.2.1 Skalární funkce

Skalární funkce popsaná v kartézské (sférické, cylindrické) soustavě souřadnic udává pro každý bod ve vymezeném prostoru jednu skalární (číselnou) hodnotu.

V našem případě to může být například funkce popisující rozložení měrné hustoty náboje v objemovém tělese $\rho(x, y, z)$. Integrací uvedené skalární funkce přes určitý objem dostaneme celkové množství náboje v tomto objemu: $Q = \iiint_V \rho(x, y, z) dV$.

Funkce popisující rozložení potenciálu (potenciální energie jednotkového kladného náboje $\varphi(x, y, z)$) je rovněž skalární.

8.2.2 Vektorová funkce

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{x}_0 F_x(x, y, z) + \mathbf{y}_0 F_y(x, y, z) + \mathbf{z}_0 F_z(x, y, z) \quad (8.1)$$

Vektorová funkce popsaná v kartézské (sférické, cylindrické) soustavě souřadnic přiřazuje každému bodu ve vymezeném prostoru jednu vektorovou hodnotu $\mathbf{F}(x, y, z)$. Vektorovou funkci lze rozepsat jako součet skalárních funkcí $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$, $F_z(x, y, z)$, které popisují velikost příslušné složky dané vektorové veličiny v uvedeném bodě.

Příklad:

V Gaussově větě elektrostatiky v diferenciálním tvaru (viz 3.1):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_0$$

Například představuje \mathbf{D} vektorovou funkci, která popisuje prostorové rozložení vektoru elektrické indukce. Veličina ρ_0 reprezentuje skalární funkci, která přiřazuje každému bodu v příslušné oblasti objemovou hustotu volného náboje. V této obecné podobě není blíže specifikována soustava souřadnic, ve které jsou tyto funkce popsány.

V kartézské soustavě souřadnic by to bylo $\mathbf{D}(x, y, z)$ a $\rho_0(x, y, z)$.

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}(x, y, z)) = \rho_0(x, y, z) \quad (8.2)$$

Operátor divergence (viz 8.5.3) aplikovaný na vektorovou funkci v kartézské soustavě dává jako výsledek skalární funkci tím, že jsou v každém bodě parciálně derivovány a sečteny skalární funkce, popisující jednotlivé složky elektrické indukce.

$$\frac{\partial D_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial D_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial D_z(x, y, z)}{\partial z} = \rho_0(x, y, z) \quad (8.3)$$

8.3 Skalární a vektorový součin

8.3.1 Skalární součin dvou vektorů

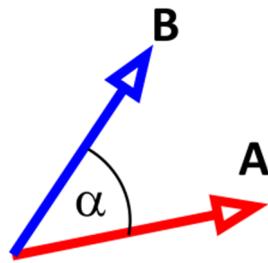
Skalární součin se zapisuje:

$$\mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (8.4)$$

a čte „ c rovná se A skalárně B “.

Výsledkem skalárního součinu dvou vektorů pole obrázku (Obr.129) je číselná hodnota (skalár), definovaná takto:

$$c = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos(\alpha) \quad (8.5)$$



Obr.129 Skalární součin

8.3.1.a Poznámka

Skalární součin se vyskytuje všude tam, kde je potřebné vypočítat součin absolutní hodnoty vektoru, který je orientován v určitém směru, a průmětu jiného vektoru do stejného směru. Výsledkem je skalární veličina. V popisu elektromagnetického pole najdeme skalární součin ve velkém počtu matematických vztahů. Například:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l}, U = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

Práce (napětí), jako skalární veličina, je dána integrací síly (intenzity elektrického pole) po dráze. Pro každý element dráhy se integrací sčítají součiny elementu dráhy a průmětu síly do směru dráhy (viz 8.6.1).

$$\Psi = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}, \Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

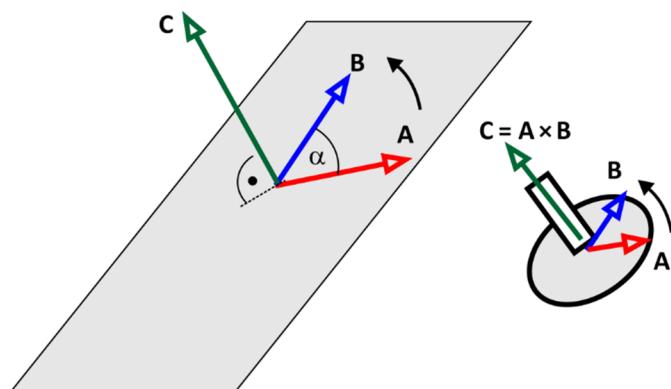
Elektrický indukční tok tekoucí určitou plochou (popřípadě magnetický indukční tok), jako skalární veličina, je dán integrací vektoru elektrické indukce (magnetické indukce) po dané ploše. Pro každý element plochy se integrací posčítávají součiny elementu plochy a průmětu vektoru indukce do směru kolmého na plochu (viz 8.5.1).

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Elektrický proud tekoucí určitou plochou, jako skalární veličina, je dán integrací vektoru proudové hustoty po dané ploše. Pro každý element plochy se integrací posčítávají součiny elementu plochy a průmětu vektoru indukce do směru kolmého na plochu (viz 8.5.1).

8.3.2 Vektorový součin

Vektorový součin se pro popis zákonitostí v elektromagnetickém poli velice často používá. Výsledkem vektorového součinu dvou vektorových veličin je opět vektorová veličina.



Obr.130 Vektorový součin

Podle obrázku Obr.130 je výsledkem vektorového součinu vektorů **A** a **B** vektor **C**. Vektorový součin se zapisuje:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (8.6)$$

a čte se „C rovná se A vektorově B“.

Výsledný vektor **C** má velikost (absolutní hodnotu):

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin(\alpha) \quad (8.7)$$

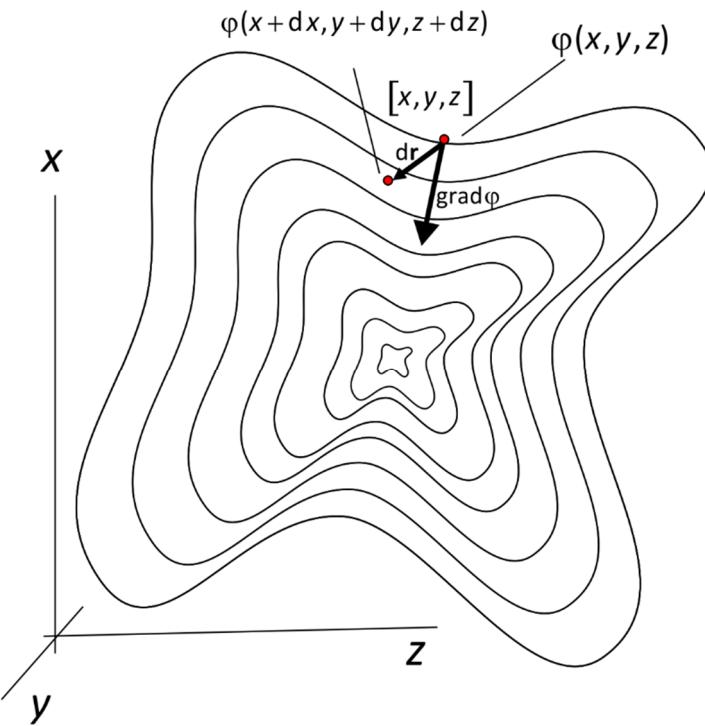
Směr vektoru **C** je kolmý na rovinu, ve které leží oba vektory **A** i **B**. Výsledný vektor **C** tvoří s vektory **A** a **B** pravotočivou soustavu. Pokud hledíme proti výslednému vektoru **C**, musíme kratší cestou postupovat od vektoru **A** k vektoru **B** v kladném smyslu, což je proti směru hodinových ručiček.

Na stanovení orientace výsledného vektoru se používají různé mnemotechnické pomůcky. Jednou z nich je **pravotočivý šroub**, jako na obrázku Obr.130. Pokud pomyslně umístíme na hlavu pravotočivého šroubu oba vektory v součinu a otáčíme šroubem ve směru od prvního k druhému vektoru po kratší spojnici, směr vektoru **C** je určen tím, zda by se pomyslný pravotočivý šroub zašroubovával nebo vyšroubovával.

8.4 Gradient skalární funkce

8.4.1 Definice gradientu skalární funkce

Gradient skalární funkce je operátor, který převádí skalární funkci $\varphi(x, y, z)$ na vektorovou. Takto definovaná vektorová veličina $\text{grad } \varphi(x, y, z)$ udává potom v každém bodě definované oblasti svým směrem směr největšího přírůstku skalární funkce a svojí absolutní hodnotou velikost změny skalární funkce na jednotku délky při postupu ve směru definovaném gradientem.



Obr.131 Gradient skalární funkce

Význam gradientu je možné vidět na obrázku Obr.131, kde je pomocí parametrických ploch konstantních funkčních hodnot zobrazena skalární funkce $\varphi(x, y, z)$. Ve dvojdimenzionálním provedení bychom si mohli grafické znázornění takové skalární funkce představit jako mapu s vyznačenými vrstevnicemi – místy s konstantní nadmořskou výškou.

Gradient skalární funkce v určitém bodě je vektor orientovaný kolmo na tyto plochy.

Pokud známe hodnotu funkce v bodě $[x, y, z]$ a chtěli bychom vědět, o kolik se změní funkční hodnota při posunu o diferenční element $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$, který udává směr a velikost posunu v daném bodě, do jiného bodu o souřadnicích $[x + dx, y + dy, z + dz]$, lze změnu funkční hodnoty zapsat jako skalární součin gradientu funkce $\text{grad}\varphi(x, y, z)$ a vektoru $d\mathbf{r}$,

$$d\varphi = \varphi(x + dx, y + dy, z + dz) - \varphi(x, y, z) = \text{grad}\varphi(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} \quad (8.8)$$

Po vyčíslení skalárního součinu ve vztahu (8.8) je patrné, že maximální změna funkce nastane, pokud vektory $d\mathbf{r}$ a $\text{grad}\varphi(x, y, z)$ budou rovnoběžné. Gradient tedy skutečně ukazuje směr největší změny skalární funkce:

$$d\varphi_{\max} = |\text{grad}\varphi(x, y, z)| |d\mathbf{r}| \cos(0) = |\text{grad}\varphi(x, y, z)| |d\mathbf{r}| \quad (8.9)$$

Postoupíme-li ve směru kolmém na gradient, bude přírůstek funkce nulový:

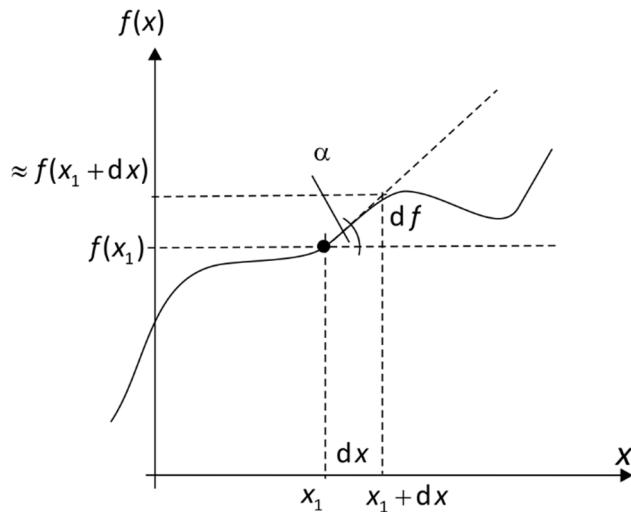
$$d\varphi = |\text{grad}\varphi(x, y, z)| |d\mathbf{r}| \cos(\pi/2) = 0 \quad (8.10)$$

Gradient je tedy skutečně kolmý na plochy konstantní hodnoty funkce (v elektrickém poli ekvipotenciály, na mapě vrstevnice).

Pokud postoupíme ve směru největšího přírůstku (8.9) o jednotkovou vzdálenost, je patrné, že absolutní hodnota gradientu udává spád (změnu funkce na jednotku délky):

$$d\varphi = |\mathbf{grad}\varphi(x, y, z)| |d\mathbf{r}| = |\mathbf{grad}\varphi(x, y, z)| |1| = |\mathbf{grad}\varphi(x, y, z)| \quad (8.11)$$

8.4.2 Konkrétní výpočet gradientu skalární funkce v kartézské soustavě



Obr.132 Funkce jedné proměnné

Pokud si pro jednoduchost nejprve představíme funkci jedné proměnné $f(x)$ podle obrázku Obr.132, platí pro změnu funkce (viz diferenciál funkce) při postupu z bodu x_1 o velmi malou vzdálenost dx do bodu $x_1 + dx$

$$df = f(x_1 + dx) - f(x_1) = \tan(\alpha) dx = \left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_1} dx \quad (8.12)$$

Pokud by se v kartézské soustavě souřadnic jednalo o obecnou skalární funkci $f(x, y, z)$, platily by pro změnu funkce v ostatních směrech identické vztahy jako (8.12). Celková změna funkce při postupu z daného bodu $[x_1, y_1, z_1]$ o $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ by potom byla:

$$df = f(x_1 + dx, y_1 + dy, z_1 + dz) - f(x_1, y_1, z_1) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_1} dx + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_1} dy + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=z_1} dz \quad (8.13)$$

a v libovolném bodě by obecně platilo

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (8.14)$$

Vztah (8.14) lze zapsat v podobě skalárního součinu dvou vektorů

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \cdot [dx, dy, dz] = \text{grad } f(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} \quad (8.15)$$

Elementární vektor $d\mathbf{r}$ má v sobě velikost a směr posunu z výchozího bodu:

$$d\mathbf{r} = [dx, dy, dz]$$

Operátor **grad** v kartézské soustavě bude mít tvar:

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \quad (8.16)$$

Ve válcové či sférické soustavě souřadnic je třeba uvážit, že některé souřadnicové hodnoty nemají charakter délkových vzdáleností ale úhlů. Gradient skalární funkce bude mít odlišný tvar.

Ve válcové soustavě souřadnic (viz **8.1.2**):

$$\text{grad } f(r, \varphi, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (8.17)$$

Ve sférické soustavě souřadnic (vi**8.1.3**)

$$\text{grad } f(r, \varphi, \theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (8.18)$$

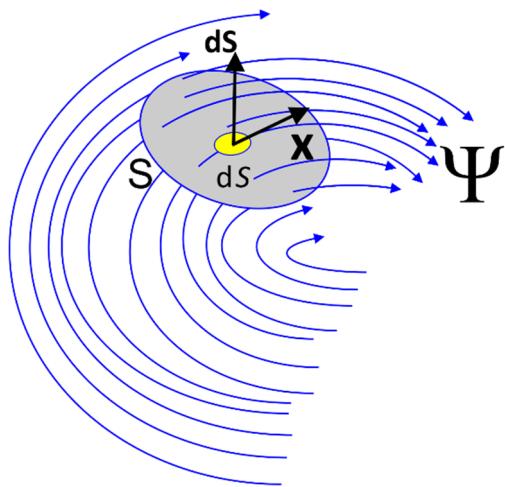
8.5 Tok vektorové veličiny plochou, tok uzavřenou plochou, divergence vektorové funkce

8.5.1 Tok vektorové veličiny plochou

Elektromagnetické pole se svými vlastnostmi chová podobně, jako by se jednalo o proudění určitého „neviditelného“ média. Tomuto myšlenkovému modelu totiž odpovídají matematické vztahy, které vlastnosti elektromagnetického pole popisují. Elektrické pole pomyslně vytéká z kladných nábojů a vtéká do záporných. Magnetické pole má podobu výří, které obtékají kolem pohybujících se nábojů. Tomuto abstraktnímu modelu odpovídají i používané veličiny, které toto chování popisují a které se nazývají „toky“. Tok popisuje množství tohoto pomyslného média protékajícího určitou plochou. Je to zejména elektrický indukční tok Ψ a magnetický indukční tok Φ .

Popis elektrického a magnetického pole pomocí takto definovaných toků není samoúčelný. Tyto toky představují v integrální podobě důležitou „spojnicu“ mezi elektrickou a magnetickou složkou obecného nestacionárního elektromagnetického pole. Bude ukázáno, že časová změna magnetického toku souvisí s vybuzeným elektrickým polem a zcela symetricky časová změna elektrického toku s vybuzeným magnetickým polem.

Ve vztazích se vyskytují rovněž vektorové veličiny, které mají význam plošné hustoty protékajícího média. Je to tok, které proteče v daném místě jednotkou plochy, která je natočena tak, aby bylo toto množství maximální možné – tedy kolmo na směr protékajícího média v daném místě. Při popisu elektrického pole je touto plošnou hustotou elektrická indukce \mathbf{D} , která je v zahraniční literatuře někdy označována jako „hustota elektrického toku“. Při popisu magnetického pole je to magnetická indukce \mathbf{B} , která je označována jako „hustota magnetického toku“.



Obr.133 Protékající médium

Na obrázku Obr.133 je symbolicky pomocí linií proudění znázorněno protékající médium. Pro jasnejší představu je možné jej chápat jako proudění kapaliny. Úkolem je nyní obecně matematicky popsat, jak velké množství media Ψ (viz Obr.133) protéká zcela libovolně velikou a libovolně natočenou plochou S .

Aby bylo možné tuto úlohu vyřešit, musí být „proudové“ pole zmapováno, musíme znát v každém místě množství protékajícího média a jeho směr. K tomu poslouží vektorová veličina, která bude mít význam **plošné hustoty** daného média. Tato veličina udává, kolik media by proteklo jednotkou plochy v daném místě, pokud by byla tato plocha natočena kolmo na směr proudění (viz elementární plocha dS_n na Obr.134). Na obrázcích je tato veličina označena jako \mathbf{X} . Takovou elementární plochou dS_n by tekl dílčí „tok“ proudící kapaliny:

$$d\Psi = |\mathbf{X}| dS_n \quad (8.19)$$

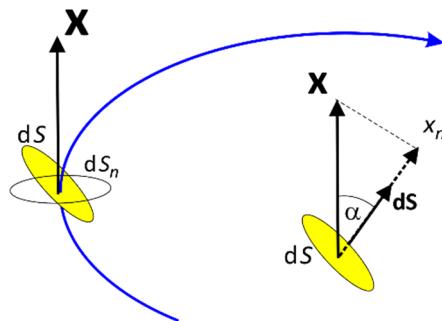
Pokud však bude elementární plocha (viz dS na Obr.134,Obr.135) v daném místě natočena vůči vektoru plošné hustoty \mathbf{X} obecně o úhel α a ne $\pi/2$, je pro stanovení protékajícího množství potřeba udělat průmět vektoru plošné hustoty \mathbf{X} kolmo do skutečné plochy:

$$d\Psi = X_n dS = |\mathbf{X}| dS \cos(\alpha) \quad (8.20)$$

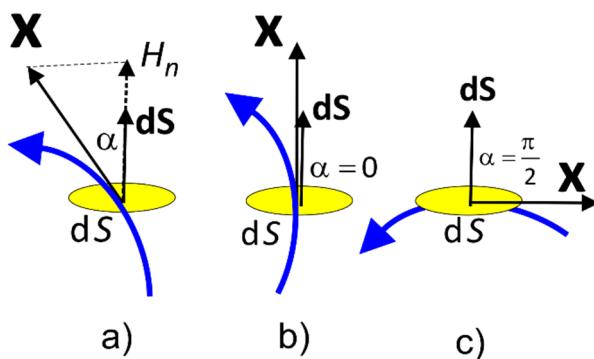
Tuto skutečnost je možné zapsat pomocí skalárního součinu dvou vektorů (8.3.1), když definujeme vektor \mathbf{dS} tak, že bude v daném místě kolmý na skutečnou plochu a jeho absolutní hodnota bude rovna velikosti vytknuté elementární plochy $|dS|$. Pro tok elementární plochou bude potom opravdu platit:

$$d\Psi = \mathbf{X} \cdot \mathbf{dS} = |\mathbf{X}| |dS| \cos(\alpha) \quad (8.21)$$

Pro úhel $\alpha = 0$ je $\cos(\alpha) = 1$ a proteče maximální možné množství (Obr.134 b). Pro úhel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je $\cos(\alpha) = 0$, médium takto natočenou plochu obtéká a neproteče nic (Obr.134 c).



Obr.134 Tok elementární plochou



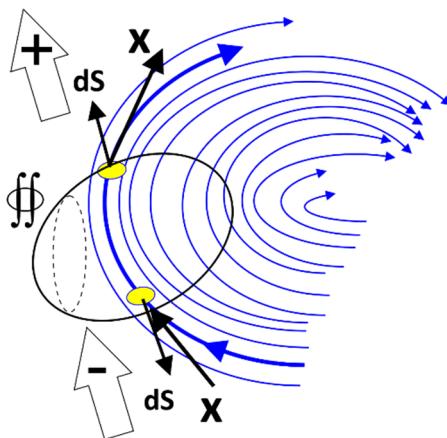
Obr.135 Různě natočená elementární plocha

Celkový tok procházející plochou S na obrázku Obr.133 je potom možné získat sečtením (integrací) všech dílčích toků protékajících elementárními částmi celé plochy.

$$\Psi = \iint_S \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} \quad (8.22)$$

8.5.2 Tok vektorové veličiny uzavřenou plochou (obecné úvahy)

Specifický význam při posuzování vlastností elektromagnetického pole má tok vektorové veličiny (plošné hustoty protékajícího média) uzavřenou plochou Obr.136. Uzavřená plocha je prostorový útvar. Je to plocha, která vznikne jako obal (plocha na povrchu) objemového tělesa. V případě koule se například jedná o sférickou plochu o celkové velikosti $S = 4\pi r^2$. Integrace po uzavřené ploše se označuje symbolem \iint_S . Vektorové elementy plochy $d\mathbf{S}$ jsou na základě konvence orientovány ve směru vnější normály, směřují z uzavřené plochy ven (Obr.136). Z toho vyplývá, že má s ohledem na vlastnosti skalárního součinu vtékající médium záporné znaménko (úhel mezi \mathbf{X} a $d\mathbf{S}$ je $\geq \frac{\pi}{2}$, kosinus úhlu je záporný) a vytékající médium kladné znaménko (úhel mezi \mathbf{X} a $d\mathbf{S}$ je $\leq \frac{\pi}{2}$, kosinus úhlu je kladný).



Obr.136 Tok uzavřenou plochou

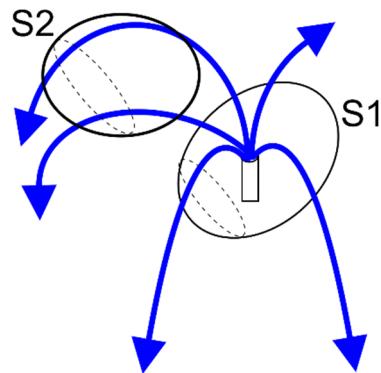
Pokud by se jednalo o médium, které by vycházelo ze zdroje v konstantním množství a směru nezávisle na čase (stacionární případ, nikde se nic nehromadí), dají se pro výsledný tok uzavřenou plochou vysledovat dva případy.

Pokud se zdroj nachází uvnitř uzavřené plochy, celkové množství, které plochou proteče, musí být vždy rovné množství, které vytéklo ze zdroje. Bude-li tímto médiem například voda a bude vytékat ze zdroje o celkovém množství **VODA** $\left[\text{m}^3 / \text{s} \right]$ (viz Obr.137), může být množství vody **X** (plošná hustota) protékající jednotkou uzavřené obklopující plochy v každém jejím místě obecně různě veliké a může mít jiný směr, při celkovém součtu však bez ohledu na tvar uzavřené plochy a polohu zdroje uvnitř plochy vždy platí:

$$\mathbf{VODA} = \iint_S \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} \quad (8.23)$$

Pokud se však zdroj nachází vně uzavřené plochy, bude celkový tok protékající plochou nulový. Stejně množství, co do plochy vtéká se znaménkem mínus, na jiném místě vytéká se znaménkem plus.

$$\iint_S \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = 0$$



Obr.137 Zdroj vytékajícího média uvnitř a vně uzavřené plochy.

Zcela stejně se chová elektrické pole, které pomyslně vytéká z elektrických nábojů.

Pokud bychom pro příklad uvažovali bodový zdroj, ze kterého médium vytéká rovnoměrně na všechny strany a je to opět zdroj vytékající vody Obr.138, bude plošná hustota protékající vody v určité vzdálenosti na poloměru r z důvodu symetrie všude konstantní. Její velikost bude:

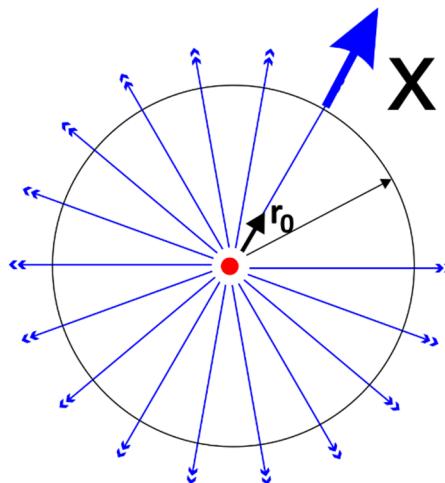
$$|\mathbf{X}(r)| = \frac{\mathbf{VODA}}{4\pi r^2} \quad (8.24)$$

$4\pi r^2$ je pomyslná sférická plocha, kterou by všechna voda na daném poloměru musela potéct. Voda by vytékala v radiálním směru, směr hustoty \mathbf{X} by tedy byl dán v každém místě směrovým vektorem \mathbf{r}_0 (Obr.138)

. Vztah pro intenzitu elektrického pole bodového náboje (viz (2.11) $\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{r} \mathbf{r}_0$) je formálně zcela stejný, pouze místo celkového vytékajícího množství vody **VODA** zde figuruje člen $\frac{Q}{\epsilon_0}$.

Pozn.:

Analogický model s vodou jako protékajícím médiem lze chápat pouze jako pokus o přibližnou ilustraci daného problému. V tomto speciálním případě je nutné odhlédnout od působení jiných fyzikálních procesů jako je gravitace, nestlačitelnost kapalin a podobně. K podobnému vysvětlení by se dobře hodilo stacionární proudové pole s elektrickým proudem a proudovou hustotou, tak jak je popsáno v kapitole 5.



Obr.138 Bodový zdroj vytékajícího média

8.5.3 Divergence vektorové funkce, Gaussova věta

Pokud budeme posuzovat v souladu s částí (8.5.2) výsledek integrace vektorové funkce po uzavřené ploše $\oint_S \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}$ jako sumární tok, tedy celkového množství určitého média, které protéká touto plochou a vektorovou funkcí \mathbf{X} budeme chápát jako plošnou hustotu protékajícího média (množství, které proteče v daném místě jednotkou plochy v daném směru), bude, jak již bylo řečeno, tento integrál nenulový pouze v případě, pokud se v uzavřené ploše nachází zdroj protékajícího média a nulový v opačném případě.

Stejná úvaha musí platit pro libovolný objem, tedy i pro relativně malý objem ΔV . Pokud tento výsledný tok dělíme velikostí objemu a objem přitom necháme limitovat k nule, dostáváme veličinu, která se nazývá

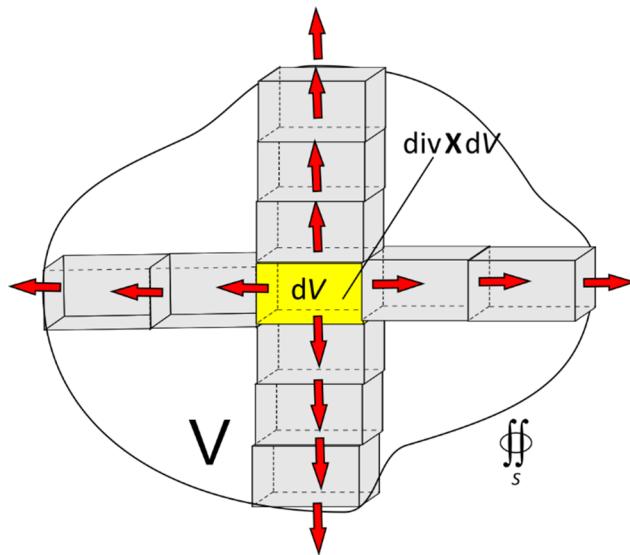
divergence vektorové funkce. Divergenci je možné slovně popsat jako „**objemovou hustotu výtoku**“, je to část celkového toku, který vytéká z jednotky objemu:

$$\operatorname{div} \mathbf{X} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (8.25)$$

Fyzikální interpretaci nalezneme zpětnou úvahou: Pokud z jednotky objemu vytéká množství $\operatorname{div} \mathbf{X}$, potom z elementárního objemu dV bude vytékat množství: $\operatorname{div} \mathbf{X} dV$ a z celého objemu po integraci množství: $\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{X} dV$. Toto množství musí následně protéci obalovou plochou. Zpětnou integrací pro konečný objem V obklopený uzavřenou plochou S musí tedy platit:

$$\iint_S \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{X} dV \quad (8.26)$$

Vztah (8.26) se nazývá Gauss-Ostrogradského věta a geometricky ji lze interpretovat pomocí obrázku (Obr.139). Pokud je divergence v daném elementu nenulová, je zde přítomen zdroj, a z tohoto elementu vytče množství $\operatorname{div} \mathbf{X} dV$. Toto množství proteče sousedními elementy, do každého z nich vstoupí se záporným znaménkem a vystoupí s kladným, k dílčímu toku daného elementu nic dalšího nepřipočítá. Následně dílčí tok proteče vnější plochou. Pokud se takto sečtou všechny elementy v objemu, dostáváme výsledek rovný celkovému toku, který proteče uzavřenou plochou kolem tohoto objemu.

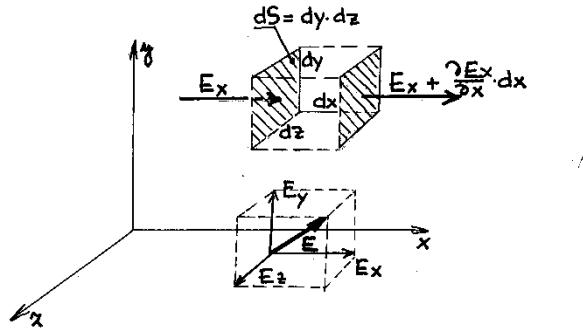


Obr.139 Gauss-Ostrogradského věta

8.5.4 Divergence vektorové funkce v kartézské soustavě

Pokud je zkoumanou vektorovou funkcí například funkce pro intenzitu elektrického pole \mathbf{E} , která je popsána v kartézské soustavě, je možné s ohledem na definici divergence (3.10), zvolit jako elementární objem dV krychli s rozměry hran dx, dy, dz . Uvedená vektorová funkce přiřazuje každému bodu v definovaném prostoru

vektor intenzity elektrického pole $\mathbf{E}(x,y,z)$ se složkami ve směru jednotlivých souřadnicových os:
 $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_x + \mathbf{y}_0 E_y + \mathbf{z}_0 E_z$.



Obr.140 Divergence vektorové funkce

Levou a pravou stranou elementární krychle o ploše $dS = dy dz$ bude procházet pouze tok x-ové složky vektoru E. Je-li na levé straně intenzita elektrického pole E_x , bude na pravé straně elementární krychle, která je vzdáleno o dx , intenzita $E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$ (první diferenciál funkce).

Tok levou stranou elementární krychle bude :

$$E_x dS = E_x dy dz$$

a tok pravou stranou elementární krychle bude:

$$\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dS = \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

S ohledem na smluvná znaménka potom platí pro celkový tok ve směru osy x :

$$\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dy dz - E_x dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz \quad (8.27)$$

Znaménka jsou volena podle dohodnuté konvence, podle které tok vstupující do uzavřené plochy je záporný a vystupující tok kladný. Když podobně připočteme toky horní a dolní, přední a zadní stranou uzavřeného objemu, dostaneme:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (8.28)$$

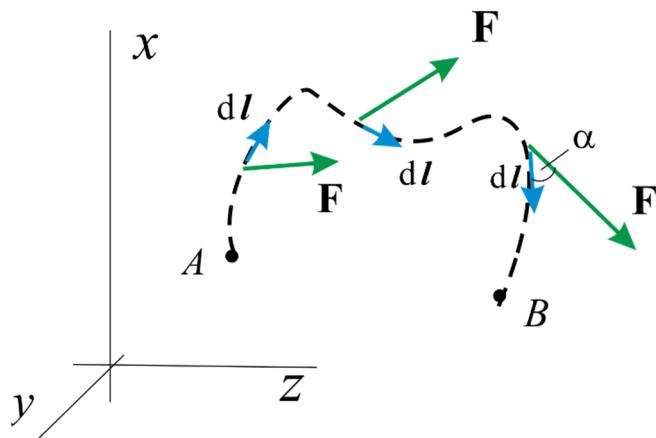
Podle definice tedy pro divergenci v kartézské soustavě platí:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}}{\Delta V} = \frac{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz}{dx dy dz} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \quad (8.29)$$

8.6 Integrace vektorové funkce po dráze, cirkulace vektorové funkce, rotace, Stokesova věta

8.6.1 Integrace vektorové funkce po dráze

Pokud je dána vektorová funkce $\mathbf{F}(x, y, z)$ (viz 8.2.2), která je popsaná například v kartézské soustavě (viz Obr.126), nazývá se integrálem této funkce po určité dráze vztah $\int \mathbf{F} d\mathbf{l}$ (Obr.141). V tomto integrálu je dráha rozdělena na dílčí vektorové elementy $d\mathbf{l}$, jejichž směr je v každém místě tečný k dráze a velikost souhlasí s vytknutou délkou elementu dráhy $|d\mathbf{l}| = dl$. V každém místě je element dráhy skalárně vynásoben vektorovou veličinou $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$. Tento součin má největší hodnotu, pokud je vektor \mathbf{F} v daném místě rovnoběžný s dráhou:



Obr.141 Integrace vektorové funkce po dráze

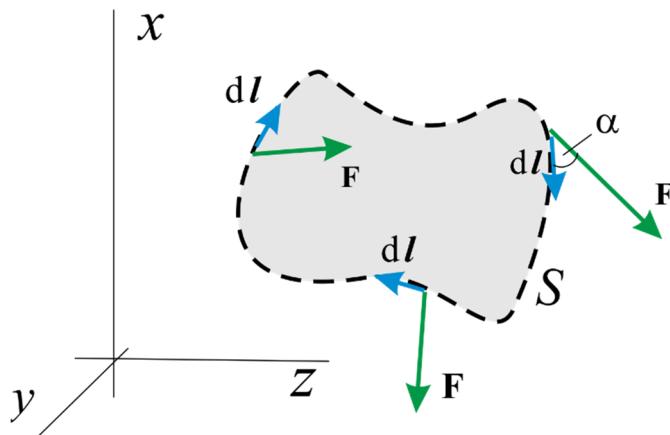
$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{F}| |d\mathbf{l}| \cos(0) = \mathbf{F} dl$$

nulovou hodnotu, pokud je vektor \mathbf{X} na dráhu kolmý:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{F}| |d\mathbf{l}| \cos(\pi/2) = 0$$

8.6.2 Integrace po uzavřené dráze – cirkulace vektorové funkce

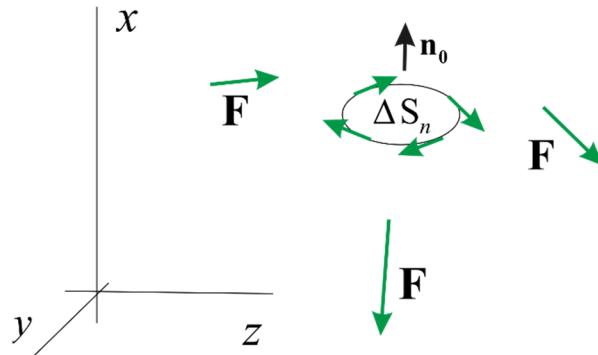
Pokud je dána vektorová funkce $\mathbf{F}(x, y, z)$ (viz 8.2.2), která je popsaná například v kartézské soustavě, nazývá se cirkulací tento funkce integrál po uzavřené dráze: $\oint \mathbf{F} d\mathbf{l}$ (Obr.142). Uzavřená dráha začíná a končí v jednom bodě. Na značce integrálu je uzavřená dráha symbolicky vyznačena kolečkem.



Obr.142 Cirkulace vektorové funkce

8.6.3 Rotace vektorové funkce

Operátor **rotace** se aplikuje na vektorovou funkci a výsledkem je opět **vektorová funkce**. Absolutní hodnotou výsledného vektoru rotace v daném bodě je cirkulace po uzavřené dráze, která je vedena po obvodě elementární plochy v daném místě, dělená velikostí této plochy. Elementární plocha je přitom natočena do směru \mathbf{n}_0 , ve kterém je cirkulace maximální možná. Směr výsledného vektoru rotace tedy souhlasí se zmíněným směrem natočení plochy \mathbf{n}_0 . Rotaci lze intuitivně chápout jako „**plošnou hustotu cirkulace**“.

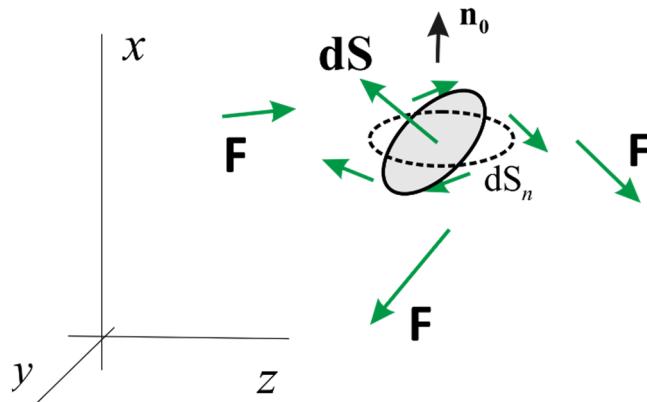


Obr.143 Rotace vektorové funkce

Matematicky je rotace dána následujícím limitním vztahem (8.30):

$$\text{rot } \mathbf{F} = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{F} d\mathbf{l}}{\Delta S_n} \mathbf{n}_0 \quad (8.30)$$

Cirkulace (oběhový integrál) kolem libovolně natočené elementární plochy má potom hodnotu danou skalárním součinem: $\text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, tato cirkulace je skutečně největší, pokud je vektorový element $d\mathbf{S}$ rovnoběžný s vektorem rotace \mathbf{n}_0 (plocha $d\mathbf{S}$ kolmo na směr \mathbf{n}_0), nulová pokud je vektorový element $d\mathbf{S}$ kolmý na \mathbf{n}_0 .



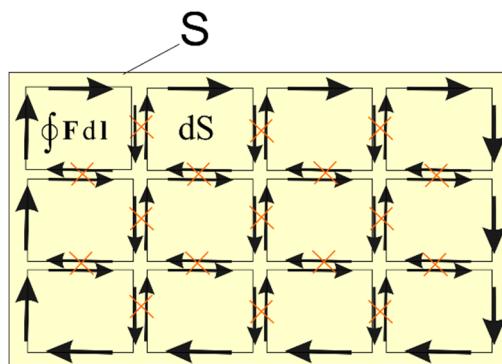
Obr.144 Cirkulace kolem obecně natočené elementární plochy

8.6.4 Stokesova věta

Cirkulaci vektorové funkce po uzavřené dráze vedené po obvodě libovolné plochy lze přepsat pomocí rotace:

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{F} d\mathbf{l}$$

Tento výraz se nazývá Stokesova věta a její exaktní důkaz je komplikovaný. Na obrázku Obr.145 je však možné význam rotace jednoduše ukázat. Rotaci lze chápout jako „plošnou hustotu cirkulace“. Vynásobením rotace velkostí elementární plochy v určitém místě dostaneme cirkulaci kolem této elementární plochy (oběhový integrál). Pokud integrací sečteme všechny elementární plochy na celkové ploše S, dostaneme sumární cirkulaci kolem všech elementárních ploch. Hodnoty příspěvku k cirkulaci se však na sousedních hranách elementárních ploch odečtou, výsledná hodnota je skutečně rovna cirkulaci po obvodě celé plochy.



Obr.145 Stokesova věta

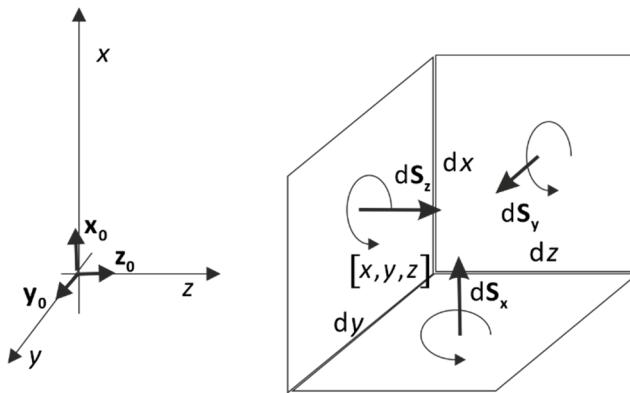
8.6.5 Rotace vektorové funkce v kartézské soustavě

Konkrétní vztahy pro výpočet rotace v kartézské soustavě lze získat tak, že aplikujeme definiční vztah (8.30) v určitém bodě $[x, y, z]$ postupně pro elementární plochy natočené do směru osy x: $d\mathbf{S}_x = dy dz \mathbf{x}_0$, do osy y: $d\mathbf{S}_y = dx dz \mathbf{y}_0$ a do osy z: $d\mathbf{S}_z = dx dy \mathbf{z}_0$ (viz Obr.146). Výsledky dílčích integrací potom dávají jednotlivé složky vektoru rotace a jejich sečtením výsledný vektor rotace:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{(\Delta S_x)}{\Delta S_x} \mathbf{x}_0 + \lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{(\Delta S_y)}{\Delta S_y} \mathbf{y}_0 + \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{(\Delta S_z)}{\Delta S_z} \mathbf{z}_0 \quad (8.31)$$

Pro vytknuté elementární plochy přejde tento vztah přímo do podoby:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{(dS_x)}{dy dz} \mathbf{x}_0 + \frac{(dS_y)}{dx dz} \mathbf{y}_0 + \frac{(dS_z)}{dx dy} \mathbf{z}_0 \quad (8.32)$$



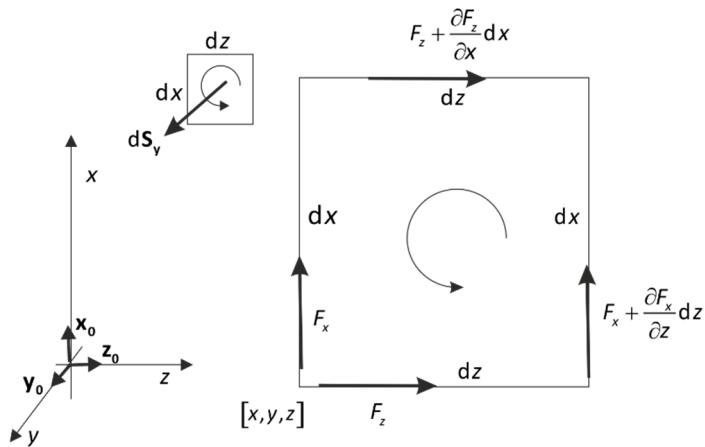
Obr.146 Rotace v kartézské soustavě

Například pro oběhový integrál kolem elementární plochy $dS_y = dx dz \mathbf{y}_0$, jsou pomocí prvního diferenciálu funkce stanoveny hodnoty příslušných skalárních funkcí pro složky na jednotlivých hranách elementu. Hodnoty funkce na levé a spodní hraně jsou (Obr.147,Obr.148):

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{aligned} \quad (8.33)$$

Hodnoty funkce na pravé a horní hraně elementu jsou(Obr.147,Obr.148):

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z + dz) &= F_x(x, y, z) + \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial z} dz \\ F_z(x + dx, y, z) &= F_z(x, y, z) + \frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (8.34)$$



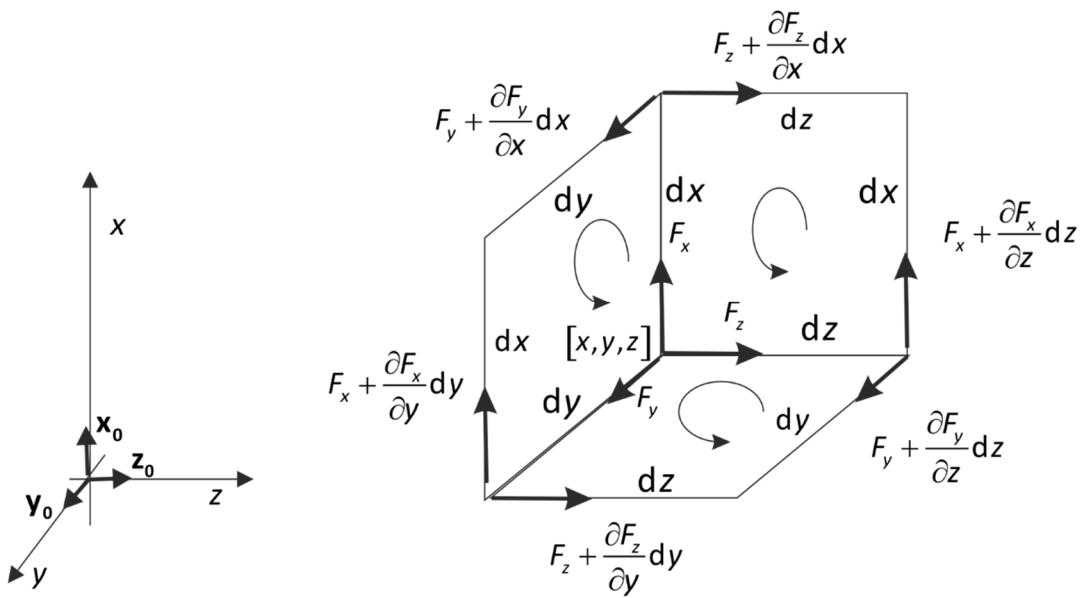
Obr.147 Složka rotace ve směru osy y

Při výpočtu oběhového integrálu se obíhá kolem elementární plochy v kladném smyslu (podle pravidla pravé ruky s ohledem na směr osy y). Složka rotace ve směru y po vydělení velikostí plochy podle definice je potom:

$$\begin{aligned} \text{rot}_y \mathbf{F} &= \\ &= \lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{\oint_{(\Delta S_y)} \mathbf{F} d\mathbf{l}}{\Delta S_y} \mathbf{y}_0 = \frac{\left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial z} dz \right) dx - \left(F_z + \frac{\partial F_z}{\partial x} dx \right) dz - F_x dx + F_z dz}{dx dz} \mathbf{y}_0 = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

Poznámka:

Při těchto typech výpočtu se neuvažuje, že by se například na levé hraně elementu $dS_y = dx dz$ hodnota funkce změnila při postupu z bodu $[x, y, z]$ kde má velikost F_x po hraně do bodu $[x + dx, y, z]$, kde by měla hodnotu $\left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right)$ a celková střední hodnota na hraně by byla $F_x + \frac{1}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} dx$. Po integraci by to vedlo na vztah $F_x dx + \frac{1}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} dx^2$, ve kterém je druhý člen vůči prvnímu zanedbatelný.



Obr.148 Soustava elementů pro výpočet rotace v kartézské soustavě

Pro zbylé dvě složky rotace podle (Obr.148) bude platit obdobně:

$$\text{rot}_x \mathbf{F} =$$

$$= \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S_x} \mathbf{F} d\mathbf{l}}{\Delta S_x} \mathbf{x}_0 = \frac{\left(F_z + \frac{\partial F_z}{\partial y} dy \right) dz - \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial z} dz \right) dy - F_z dz + F_y dy}{dy dz} \mathbf{x}_0 = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{x}_0$$
(8.35)

$$\text{rot}_z \mathbf{F} =$$

$$= \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S_z} \mathbf{F} d\mathbf{l}}{\Delta S_z} \mathbf{z}_0 = \frac{\left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial x} dx \right) dy - \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial y} dy \right) dx - F_y dy + F_x dx}{dx dy} \mathbf{z}_0 = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{z}_0$$
(8.36)

8.7 Zápis gradientu, divergence a rotace pomocí symbolického operátoru „nabla“

Operátorem nazývaným „nabla“ se rozumí v kartézské soustavě symbolický vektor:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (8.37)$$

Pomocí tohoto operátoru je možné jednoduše zapsat v kartézské soustavě operátory : gradient, divergence i rotace.

Gradient je možné zapsat jako skalární násobek skalární funkce, výsledkem je vektorová funkce, jak bylo ukázáno v 8.4.1,8.4.2 :

$$\begin{aligned}\text{grad } \varphi &= \nabla \varphi \\ \text{grad } \varphi &= \nabla \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (8.38)$$

Divergenci vektorové funkce \mathbf{F} lze zapsat jako skalární součin a výsledkem je skalární funkce:

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\end{aligned}\quad (8.39)$$

Rotaci vektorové funkce \mathbf{F} lze zapsat jako vektorový součin a výsledkem je vektorová funkce:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ \text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{y}_0 \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \mathbf{z}_0 \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (8.40)$$

V technické literatuře se tento symbolický zápis velice často používá obecně pro označení gradientu $\nabla \varphi$, divergence $\nabla \cdot \mathbf{F}$ i rotace $\nabla \times \mathbf{F}$ bez ohledu na souřadnou soustavu. Naznačené konkrétní vyčíslení platí ovšem pouze v kartézské soustavě.

8.8 Použité operátorové identity

8.8.1 Divergence rotace

Divergence rotace je vždy nulová

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$$

Platnost lze ověřit například na operátorech v kartézské soustavě

$$\begin{aligned}\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} = 0\end{aligned}$$

8.8.2 Gradient divergence v kartézské soustavě

$$\begin{aligned}\text{grad div } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) = \\ &= \mathbf{x}_0 \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z} \right) + \\ &\quad + \mathbf{y}_0 \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial z} \right) + \\ &\quad + \mathbf{z}_0 \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

8.8.3 Rotace rotace v kartézské soustavě

$$\text{rot rot } \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \text{grad div } \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned}
\text{rot rot } \mathbf{F} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} & \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{array} \right| = \\
&= \mathbf{x}_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \right\} + \\
&\quad + \mathbf{y}_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \right\} + \\
&\quad + \mathbf{z}_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \right\} = \\
&= \mathbf{x}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right\} + \\
&\quad + \mathbf{y}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right\} + \\
&\quad + \mathbf{z}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \right\} = \\
&= \mathbf{x}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z} \right\} - \mathbf{x}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right\} \\
&\quad + \mathbf{y}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial z} \right\} - \mathbf{y}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right\} \\
&\quad + \mathbf{z}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y \partial z} \right\} - \mathbf{z}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \right\} = \\
&= \mathbf{x}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z} \right\} + \mathbf{y}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial z} \right\} + \mathbf{z}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y \partial z} \right\} - \\
&\quad - \left\{ \mathbf{x}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right\} + \mathbf{y}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right\} + \mathbf{z}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \right\} \right\} \\
&= \text{grad div } \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \mathbf{x}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right\} + \mathbf{y}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right\} + \mathbf{z}_0 \left\{ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \right\}$$

8.8.4 Vektorový výraz $\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mathbf{A} (\nabla \times \mathbf{B}) = (A_x, A_y, A_z) \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \\ &= A_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + A_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + A_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \\ &= A_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + A_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + A_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\ &\quad - B_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - B_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - B_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{x}_0 (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{y}_0 (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{z}_0 (A_x B_y - A_y B_x)\end{aligned}$$

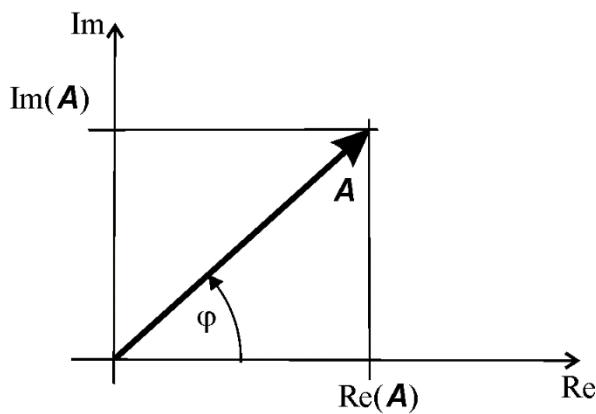
$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \frac{\partial}{\partial x}(A_y B_z - A_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_z B_x - A_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_x B_y - A_y B_x) \\
&= \left(A_y \frac{\partial B_z}{\partial x} + B_z \frac{\partial A_y}{\partial x} - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \\
&\quad + \left(A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_x \frac{\partial A_z}{\partial y} - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} - B_z \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \\
&\quad + \left(A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial z} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = \\
&= A_x \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) + A_y \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + A_z \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) - \\
&\quad - B_x \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - B_y \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) - B_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

8.8.5 Harmonické časové průběhy veličin, fázory

Harmonicky časově proměnnou veličinu lze jednoznačně popsat pomocí komplexní veličiny, která se nazývá fázor. Fázor veličiny je komplexní číslo vyjádřené v polárním tvaru, které má jako absolutní hodnotu velikost amplitudy veličiny a jako argument úhel fázového posunu této veličiny vůči referenční hodnotě (nule).

Komplexní číslo \mathbf{A} je pomyslné „dvojčíslo“, které je určeno dvojicí reálných čísel. V kartézském tvaru se tyto číselné hodnoty nazývají reálná část $\operatorname{Re}(\mathbf{A})$ a imaginární část $\operatorname{Im}(\mathbf{A})$, v polárním tvaru absolutní hodnota komplexního čísla $|\mathbf{A}|$ a argument(úhel) φ .

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}(\mathbf{A}) + j \operatorname{Im}(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| \cos(\varphi) + j |\mathbf{A}| \sin(\varphi) \quad (8.41)$$



Pokud se členy $\cos(\varphi), \sin(\varphi)$ v rovnici (8.41) rozvinou do Taylorovy řady pomocí formulí:

$$e^{jx} = 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \frac{(jx)^5}{5!} + \dots = 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

dostaneme známý tvar zápisu komplexního čísla v polárním tvaru:

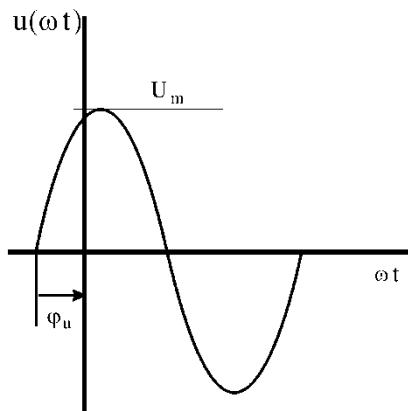
$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}(\mathbf{A}) + j \operatorname{Im}(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| \cos(\varphi) + j |\mathbf{A}| \sin(\varphi) = |\mathbf{A}| e^{j\varphi}$$

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| e^{j\varphi}$$

Například pro harmonický časový průběh napětí, který je popsán rovnicí:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

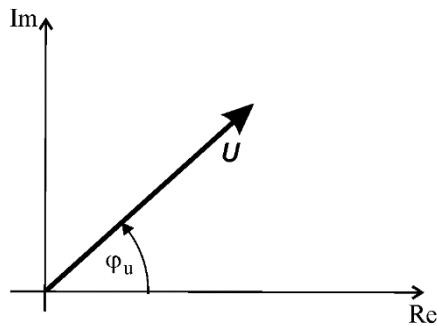
a graficky znázorněn na obrázku



je fázor napětí definován komplexním číslem \mathbf{U} v polárním tvaru, které nese informaci o amplitudě a fázi napětí:

$$\mathbf{U} = U_m e^{j\varphi_0}$$

Znázornění fázoru napětí v komplexní rovině je:



Vzájemný vztah mezi okamžitou hodnotou harmonické veličiny a fázorem je popsán rovnicí:

$$u(t) = \text{Im}(\mathbf{U} e^{j\omega t})$$

Symbol Im značí imaginární část komplexního výrazu a výraz v závorce $\mathbf{U} e^{j\omega t} = U_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega t} = \mathbf{U}_{\text{rot}}(\omega t)$ se někdy označuje jako rotující fázor.

Tato rovnice zřejmě platí, neboť

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \sin(\omega t + \varphi_0) = \text{IM}(\mathbf{U} e^{j\omega t}) = \text{IM}(U_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega t}) = U_m \text{IM}(e^{j(\omega t + \varphi_0)}) = \\ &= U_m \text{IM}(\cos(\omega t + \varphi_0) + j \sin(\omega t + \varphi_0)) = U_m \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Pro první derivaci napětí podle času s ohledem na fázorovou interpretaci bude platí:

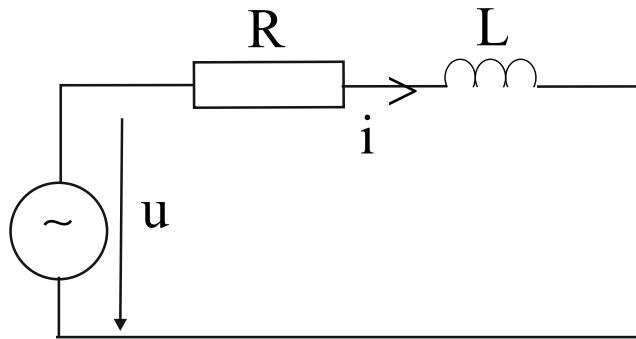
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= \frac{d}{dt} \text{Im}(\mathbf{U}_{\text{rot}}) = \frac{d}{dt} \text{Im}(\mathbf{U} e^{j\omega t}) = \text{Im}\left(\mathbf{U} \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\right) = \text{Im}(j\omega \mathbf{U} e^{j\omega t}) = \text{Im}(j\omega \mathbf{U}_{\text{rot}}) \\ \frac{d}{dt} u(t) &= \text{Im}(j\omega \mathbf{U}_{\text{rot}}) \end{aligned}$$

Pro druhou derivaci napětí podle času:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} u(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \text{Im}(\mathbf{U}_{\text{rot}}) = \frac{d^2}{dt^2} \text{Im}(\mathbf{U} e^{j\omega t}) = \text{Im}\left(\mathbf{U} \frac{d^2}{dt^2} e^{j\omega t}\right) = \text{Im}(-\omega^2 \mathbf{U} e^{j\omega t}) \\ \frac{d^2}{dt^2} u(t) &= \text{Im}(-\omega^2 \mathbf{U}_{\text{rot}}) \end{aligned}$$

Výhoda použití fázorového popisu je dobře patrná při analýze ustáleného stavu obvodu sestávajícího z sériově spojeného rezistoru a induktoru (Obr.149), který je napájen ze zdroje harmonického napětí.

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$



Obr.149 Sériový RL obvod napájený ze zdroje střídavého napětí

Obecně lze chování takového obvodu při popsat obyčejnou diferenciální rovnicí, která udává vzájemnou závislost mezi napětím a proudem v obvodu:

$$U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = R i(t) + L \frac{d i(t)}{dt}$$

U takto jednoduchého obvodu je diferenciální rovnice poměrně snadno řešitelná, při použití fázorů se však situace ještě více zjednoduší.

Pokud budeme uvažovat, že napětí v obvodu a rovněž proud, jehož velikost ještě neznáme, popišeme pomocí fázorů:

$$\mathbf{U} = U_m e^{j\varphi_u}, \quad \mathbf{I} = I_m e^{j\varphi_i}$$

Pro levou i pravou stranu diferenciální rovnice je možné psát pomocí ekvivalentní záměny:

$$\text{Im}(\mathbf{U} e^{j\omega t}) = R \text{Im}(\mathbf{I} e^{j\omega t}) + j\omega L \text{Im}(\mathbf{I} e^{j\omega t})$$

Porovnáním levé a pravé strany přejde původní rovnice do fázorového tvaru, ve kterém namísto časově proměnných vystupují jejich fázory.

$$\mathbf{U} = (R + j\omega L)\mathbf{I}$$

Diferenciální rovnice se takto převede na jednoduchou algebraickou rovnici. Odstraní se tak závislost na čase. Tento postup platí pouze pro ustálený harmonický stav, není možné jej použít pro analýzu přechodových dějů. Z této rovnice je možné vypočítat pro zadaný fázor napětí fázor hledaného proudu

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{(R + j\omega L)} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}}$$

Pro tyto aplikace se definiuje komplexní obvodová veličina \mathbf{Z} , která se nazývá impedance a je dána podílem fázoru napětí a proudu:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}}$$

V uvedeném konkrétním případě má impedance v kartézském tvaru velikost:

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L$$

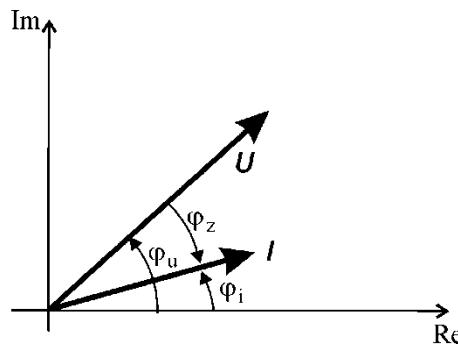
Při zápisu impedance v polárním tvaru bude platit

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{I} = |\mathbf{Z}| e^{j\varphi_z} \quad |\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \varphi_z = \text{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Fázor proudu vypočtený z fázorové rovnice bude mít velikost:

$$I = I_m e^{j\varphi_i} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{U}_m e^{j\varphi_0}}{|\mathbf{Z}| e^{j\varphi_z}} = \frac{\mathbf{U}_m}{|\mathbf{Z}|} e^{j(\varphi_0 - \varphi_z)}$$

Grafické znázornění fázoru proudu ve srovnání s fázorem napětí bude:



Absolutní hodnota impedance tedy udává podíl amplitudy napětí a proudu. Pro amplitudu proudu bude platit:

$$I_m = \frac{\mathbf{U}_m}{|\mathbf{Z}|}$$

Argument impedance udává fázový posun mezi napětím a proudem, pro argument fázoru proudu (fázový posun proudu vůči nule) bude platit:

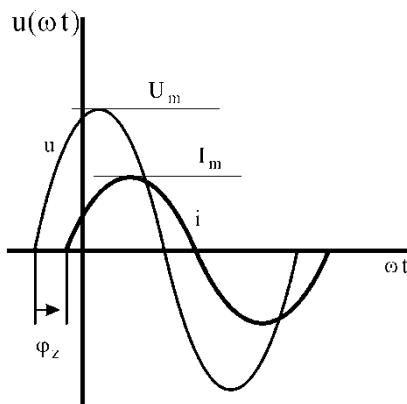
$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi_z$$

Proud je tedy fázově posunut (zpožděn) za napětím o úhel φ_z daný impedancí.

Pro časový průběh proudu bude po transformaci do časové oblasti platit:

$$i(t) = \text{Im}(\mathbf{I} e^{j\omega t}) = \frac{\mathbf{U}_m}{|\mathbf{Z}|} \text{Im}(e^{j(\omega t + \varphi_u - \varphi_z)}) = \frac{\mathbf{U}_m}{|\mathbf{Z}|} \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi_z) = I_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi_z)$$

Graficky znázorněný časový průběh napětí a proudu bude:



9 Příklady pro ilustraci

9.1 Elektrické pole v deskovém kondenzátoru – ověření vztahů, intenzita elektrického pole, elektrická indukce, polarizace, velikost volného a vázaného náboje, kapacita, potenciál, síly

Soustava dvou rovnoběžných rovinných elektrod (deskový kondenzátor) je pro jednoduchý tvar elektrického pole a jeho konstantní velikost vhodná pro demonstraci zavedených veličin a odvozených zákonitostí.

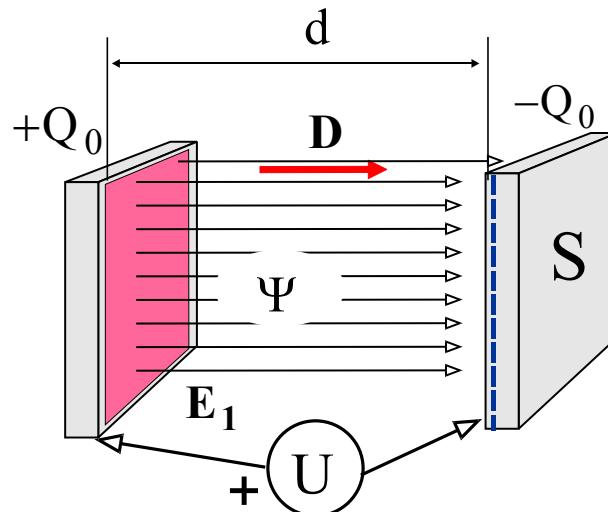
Na obrázku Obr.150 je naznačen vzduchový deskový kondenzátor s plochou desek S a vzdáleností mezi deskami d .

9.1.1 Deskový kondenzátor se „vzduchovým“ dielektrikem

9.1.1.a Pojem „nabití“ elektrod kondenzátoru volným elektrickým nábojem

Po připojení zdroje napětí s hodnotou napětí na svorkách U přejde část elektronů (volných nábojů) z jedné desky kondenzátoru na druhou. Mechanismus tohoto jevu je popsán v části 5.3. Ve zdroji napětí působí síla, která rozděluje kladné volné náboje na kladnou svorku zdroje a záporné volné náboje na zápornou. Síle tohoto typu, která je vztážena na jednotkový kladný náboj, přisuzujeme význam intenzity elektrického pole a nazýváme ji elektromotorická síla. Přemístění nábojů na svorkách zdroje vykoná tato síla práci, která je pro jednotkový kladný náboj popsána jako elektromotorické napětí. Mezi svorkami zdroje udržuje tato síla potenciálový rozdíl. Po připojení zdroje napětí ke kondenzátoru se začnou přemísťovat náboje i na jeho deskách a to tak dlouho, dokud se intenzita elektrického pole vytvořená nábojem nahromaděným na deskách kondenzátoru nevyrovná s elektromotorickou silou zdroje.

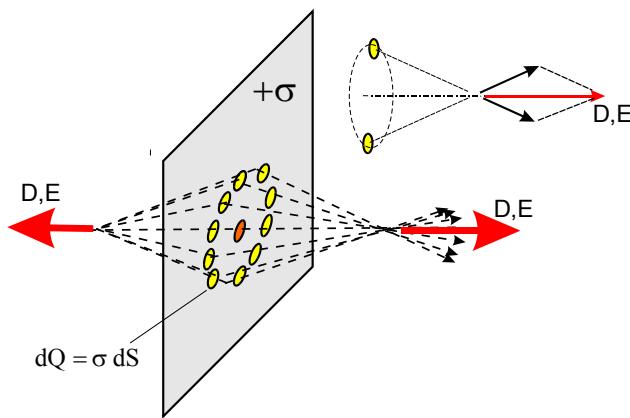
S ohledem na polaritu zdroje se například levá deska nabije celkovým „volným“ nábojem $+Q_0$ a pravá deska celkovým volným nábojem $-Q_0$ (viz Obr.150).



Obr.150 Nabité deskový kondenzátor

9.1.1.b Tvar elektrického pole, Gaussova věta elektrostatiky

Elektrické pole je homogenní, siločáry elektrického pole vycházejí kolmo z kladného náboje levé elektrody a vstupují do záporného náboje pravé elektrody (viz Obr.150). Že to tak opravdu je, je možné se přesvědčit na základě úvahy vyplývající ze superpozice elektrického pole pomyslných bodových nábojů, na které je možné nabízenou rovinu rozdělit (viz Obr.151). V každém bodě je výsledná intenzita elektrického pole (popřípadě elektrická indukce) dána vektorovým součtem intenzity od všech dílčích elementů. Ke každému elementu však v případě rozlehlé roviny existuje symetrický protilehlý element (Obr.151). Při vektorovém součtu se uplatní pouze složky intenzity elektrického pole, které mají kolmý směr na rovinu.



Obr.151 Tvar elektrického pole rovnoměrně nabité rozlehlé elektrody

Velikost elektrické indukce lze stanovit jednoduchou úvahou na základě Gaussovy věty elektrostatiky. Z volných nábojů o určité velikosti vychází celkový elektrický indukční tok Ψ_{cel} , který je roven velikosti těchto nábojů. Pokud jsou tyto náboje obklopeny pomyslnou uzavřenou plochou, musí celý indukční tok touto plochou prostoupit a elektrická indukce \mathbf{D} je plošná hustota tohoto toku:

$$\Psi_{\text{cel}} = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_0 \quad (9.1)$$

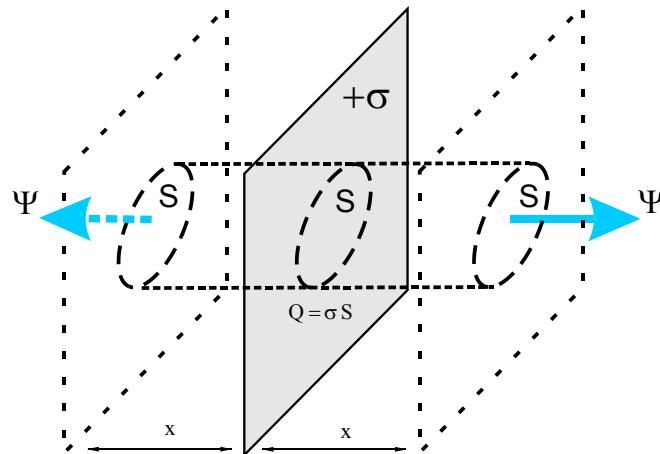
Pokud budeme počítat elektrickou indukci ve vzdálenosti x na levé i pravé straně od nabité roviny (viz Obr.152), můžeme s výhodou zvolit uzavřenou plochu jako povrch pomyslného válce s podstavami o ploše S , které leží na rovnoběžných rovinách ve vzdálenosti x . Na nabité rovině vytíná tento válec rovněž plochu o velikosti S s nábojem: $Q_0 = \sigma_0 S$. Elektrický tok z nabité roviny vytéká na obě strany pouze ve směru kolmém a protéká podstavami válcové uzavřené plochy. Na základě znaménkové konvence (vytékající z uzavřené plochy ven) je kladný. Z hlediska symetrie a kauzality není jediný důvod, aby jeho plošná hustota (elektrická indukce) nebyla v různých bodech na vytýčených rovinách s konstantní vzdáleností od nabité roviny x konstantní. Integrál Gaussovy věty potom přejde do velice jednoduchého tvaru:

$$\Psi_{\text{cel}} = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Psi + \Psi = D S + D S = \sigma_0 S \quad (9.2)$$

Elektrická indukce \mathbf{D} jako plošná hustota elektrického toku má potom směr kolmý na vodivou rovinu a velikost:

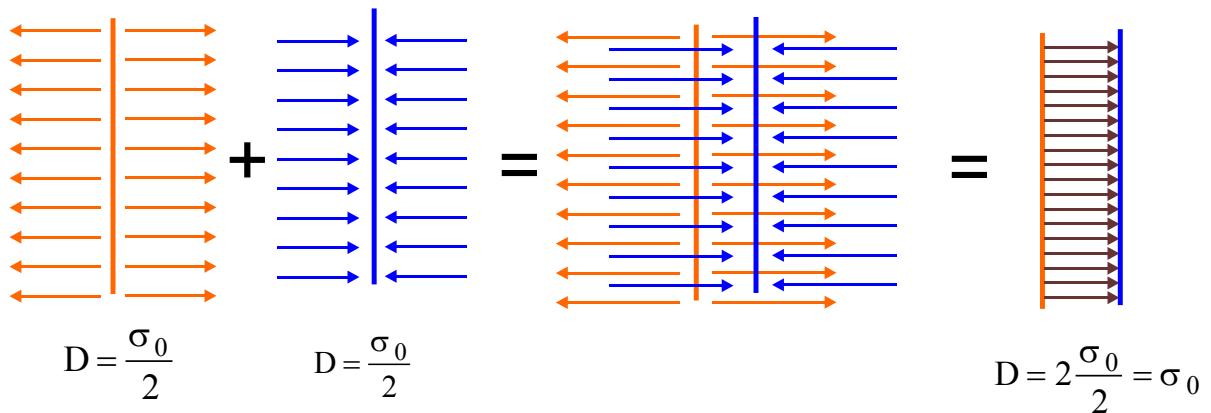
$$D = \frac{\sigma_0}{2} \quad (9.3)$$

Velikost elektrické indukce je konstantní, zcela nezávislá na vzdálenosti od nabité roviny. Indukční tok z libovolné vymezené části prochází v každém místě stejnou plochou, jeho plošná hustota musí zůstat stejná.



Obr.152 Aplikace Gaussovy věty elektrostatiky pro vodivou rovnoměrně nabitou rovinu

Velikost a tvar elektrického pole dvojice opačně nabitých rovinných elektrod lze určit úvahou, která opět vyplývá ze superpozice elektrického pole dílčích nabitých elektrod (viz Obr.153). Elektrické pole záporně a kladně nabité elektrody má stejný tvar i velikost. Z kladné elektrody elektrické pole vystupuje, do záporné elektrody vstupuje. V případě dvou paralelních elektrod se elektrické pole vně elektrod vyruší a uvnitř mezi elektrodami se čte. Elektrický indukční tok se tedy uzavírá pouze uvnitř mezi elektrodami, velikost elektrické indukce je dvojnásobná než u jedné dílčí roviny.



Obr.153 Výsledné elektrické pole dvou opačně nabitých rovinných elektrod

9.1.1.c Elektrický indukční tok, elektrická indukce a intenzita elektrického pole

Jak bylo ukázáno v předchozí části, z kladně nabité desky pomyslně „vytéká“ celkový elektrický indukční tok Ψ_{cel} , který je rovný volnému náboji na desce Q_0 , protéká v každém místě mezi elektrodami plochou stejné velikosti S a celý vstupuje do záporně nabité desky (viz Obr.150). Gaussova věta pro elektrickou indukci (3.22) má v tomto případě velmi jednoduchou interpretaci:

$$\Psi_{\text{cel}} = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_0 = DS \quad (9.4)$$

Elektrická indukce, jako plošná hustota elektrického indukčního toku, má v každém místě mezi elektrodami i na elektrodách stejnou velikost:

$$D = |\mathbf{D}| = \frac{\Psi_{\text{cel}}}{S} = \frac{Q_0}{S} = \sigma_0 \quad (9.5)$$

Ze vztahu je patrné, že na elektrodách je elektrická indukce rovna plošné hustotě volného náboje. Tato skutečnost platí obecně (viz část 7.5).

Intenzita elektrického pole je dána superpozicí elektrického pole volných nábojů na elektrodách i vázaných nábojů v dielektriku mezi elektrodami. Účinek volných nábojů na elektrodách je zohledněn elektrickou indukcí \mathbf{D} , vázané náboje v dielektriku jsou zohledněny polarizací \mathbf{P} . V případě lineárních dielektrik lze účinky polarizace (viz 3.2.2) respektovat konstantami, které se nazývají elektrická susceptibilita χ_e a relativní permitivitou $\epsilon_r = 1 + \chi_e$:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\epsilon_0} = \frac{\mathbf{D} - \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}}{\epsilon_0} \quad (9.6)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\chi_e + 1) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Pokud je mezi deskami vzduch (vakuum), vázané náboje v podobě elektrických dipólů nevzniknou, polarizace a elektrická susceptibilita bude nulová, relativní permitivita jednotková:

$$\mathbf{P} = 0, \quad \chi_e = 0, \quad \epsilon_r = 1$$

Pro velikost intenzity elektrického pole bude platit:

$$E = |\mathbf{E}| = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} \quad (9.7)$$

9.1.1.d Kapacita

Zpětnou integrací intenzity elektrického pole dospějeme k napětí mezi svorkami kondenzátoru, které je dáno nahromaděnými náboji na elektrodách. Toto napětí je rovné elektromotorickému napětí zdroje.

$$U = \int_{x=0}^{x=d} E dx = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} d \quad (9.8)$$

Skutečná velikost volného náboje Q_0 , který se na deskách nahromadí po přivedení napětí U , tedy bude:

$$Q_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} U = C U \quad (9.9)$$

Konstanta úměrnosti se mezi nábojem a napětím se nazývá kapacita (viz 4.4).

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (9.10)$$

Jednotkou kapacity je Farad a nositelem jednotky ve vztahu je permitivita vakua $\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F/m}$.

9.1.1.e Intenzita elektrického pole v závislosti na napětí

Skutečná velikost intenzity elektrického pole jako funkce přiloženého napětí U bude po zpětném dosazení:

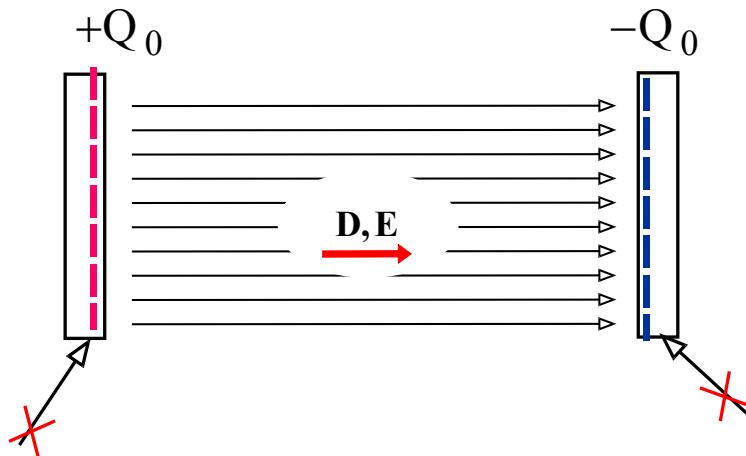
$$E = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} = \frac{C U}{\epsilon_0 S} = \frac{\frac{\epsilon_0 S}{d} U}{\epsilon_0 S} = \frac{U}{d} = \text{konst} \quad (9.11)$$

V deskovém kondenzátoru je homogenní elektrické pole, v každém místě má stejný směr i velikost.

9.1.2 Kondenzátor s vloženým dielektrikem

9.1.2.a Nabity kondenzátor odpojený od zdroje napětí

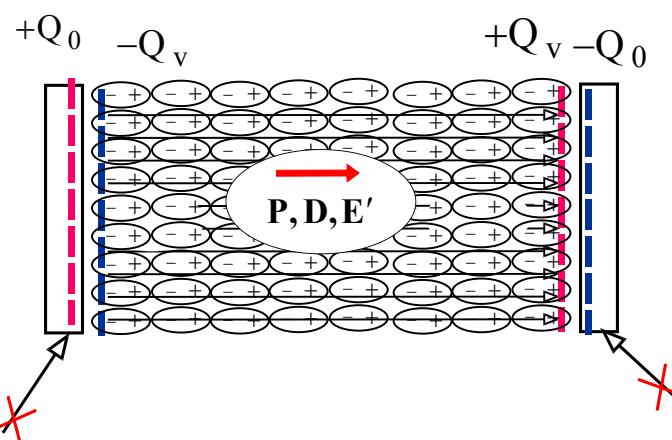
Pokud vzduchový kondenzátor z předchozí části odpojíme od zdroje napětí, na deskách zůstane stejně velký volný náboj Q_0 , mezi deskami poteče stejně velký indukční tok i ostatní veličiny se nijak nezmění (viz Obr.154).



Obr.154 Deskový kondenzátor odpojený od zdroje napětí

Pokud se následně do části prostoru mezi elektrodami vloží dielektrikum (viz Obr.155), dielektrikum se polarizuje. Elektrický indukční tok Ψ_{cel} i elektrická indukce souvisí podle definice pouze s volným nábojem Q_0 a nemůže se ani v tomto případě změnit:

$$D = |\mathbf{D}| = \frac{\Psi_{cel}}{S} = \frac{Q_0}{S} = \sigma_0 \quad (9.12)$$



Obr.155 Deskový kondenzátor s vloženým dielektrikem

Na povrchu dielektrika se však objeví vázaný náboj Q_v , který vybudí svoje elektrické pole orientované proti poli volných nábojů. Výchozí elektrické pole vzduchového kondenzátoru se oslabí. S ohledem na fyzikální

význam relativní permitivity, což bude ukázáno v dalším textu, se intenzita elektrického pole v dielektriku zmenší ϵ_r -krát.:

$$E' = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \quad (9.13)$$

Polarizace v dielektriku je popsána pomocí vektoru polarizace \mathbf{P} . V tomto speciálním případě mají vektorové veličiny $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{P}$ stejný směr a lze s nimi provádět prosté algebraické operace. Z rovnice vyjadřující vzájemný vztah veličin (3.18) lze najít velikost polarizace:

$$\begin{aligned} D &= \epsilon_0 E' + P \\ P &= D - \epsilon_0 E' = \frac{Q_0}{S} - \epsilon_0 \frac{Q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{Q_0}{S} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) = \sigma_v \end{aligned} \quad (9.14)$$

Polarizace bude mít všude konstantní hodnotu, která současně představuje plošnou hustotu vázaného náboje σ_v na povrchu dielektrika. Na povrchu dielektrika se objeví vázaný náboj o velikosti:

$$Q_v = P S = Q_0 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad (9.15)$$

Po kontrolním zpětném dosazení do výchozí rovnice pro intenzitu elektrického pole skutečně platí:

$$E' = \frac{D - P}{\epsilon_0} = \frac{\frac{Q_0}{S} - \frac{Q_v}{S}}{\epsilon_0} = \frac{\frac{Q_0}{S} - \frac{Q_0}{S} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \quad (9.16)$$

Dalším dosazením lze z alternativního pohledu posoudit fyzikální význam elektrické susceptibility a relativní permitivity.

Elektrická susceptibilita je rovna podílu elektrického pole vyvolaného vázanými náboji ku elektrickému poli vyvolanému celkovým nábojem (volným i vázaným).

$$\chi_e = \frac{P / \epsilon_0}{E'} = \frac{\epsilon_0}{\frac{Q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r S}} = \epsilon_r - 1 \quad (9.17)$$

Relativní permitivita je dána podílem elektrického pole vyvolaného volnými náboji ku elektrickému poli vyvolanému celkovým nábojem (volným i vázaným).

$$\varepsilon_r = \frac{D / \varepsilon_0}{E'} = \frac{\frac{Q_0}{S}}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}} \quad (9.18)$$

Vlivem vázaných nábojů poklesne napětí mezi deskami odpojeného kondenzátoru ε_r -krát:

$$U' = \int_0^d E' dx = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} d \quad (9.19)$$

$$\frac{U}{U'} = \varepsilon_r \quad (9.20)$$

Kapacita kondenzátoru se zvětší ε_r -krát:

$$C' = \frac{Q_0}{U'} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \quad (9.21)$$

$$\frac{C'}{C} = \varepsilon_r \quad (9.22)$$

9.1.2.b Kondenzátor s dielektrikem připojený trvale ke zdroji napětí

Pokud bude kondenzátor s vloženým dielektrikem trvale připojen ke zdroji konstantního napětí, intenzita elektrického pole se ve srovnání se vzduchovým kondenzátorem nemůže změnit a zůstane konstantní:

$$U = \int E dx = \text{konst} \quad (9.23)$$

$$E = \text{konst} = \frac{U}{d} \quad (9.24)$$

Na elektrodách se s ohledem na změněnou kapacitu zvětší volný náboj ε_r -krát a stejně se změní elektrický indukční tok i elektrická indukce:

$$Q_0' = C' U = \varepsilon_r Q_0 \quad (9.25)$$

$$D' = \frac{Q_0'}{S} = \varepsilon_r \frac{Q_0}{S} = \varepsilon_r D \quad (9.26)$$

Vázaný náboj a polarizace se rovněž zvýší ε_r -krát:

$$Q_v' = \epsilon_r Q_v = \epsilon_r Q_0 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad (9.27)$$

$$P' = \epsilon_r P = \epsilon_r \frac{Q_0}{S} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad (9.28)$$

Intenzita elektrického pole skutečně zůstane na původní velikosti jako u vzduchového kondenzátoru:

$$E = \frac{D' - P'}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_r \frac{Q_0}{S} - \epsilon_r \frac{Q_0}{S} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} \quad (9.29)$$

Z fyzikálního hlediska v tomto případě došlo na elektrody ze zdroje další volný náboj, aby kompenzoval velikost elektrického pole vázaných nábojů. Intenzita elektrického pole tak zůstala na své původní hodnotě.

9.1.3 Potenciál v deskovém kondenzátoru, Laplaceova rovnice

Pro případ deskového kondenzátoru nepřinese použití potenciálu žádné usnadnění výpočtu, následující text slouží spíše pro ilustraci.

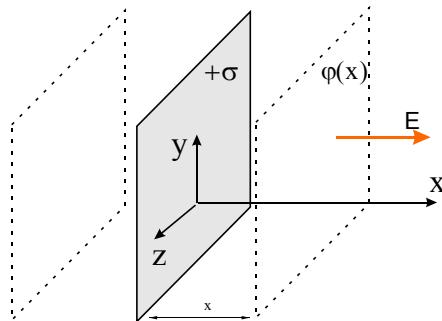
9.1.3.a Potenciál kladně nabité vodivé elektrody

Obecný vztah mezi intenzitou elektrického pole a potenciálem je (viz 4.2.1):

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (9.30)$$

Konkrétní vztah pro výpočet gradientu v kartézské soustavě je:

$$\operatorname{grad} \varphi(x, y, z) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \quad (9.31)$$



Obr.156 Potenciál rovinné rovnoměrně nabité elektrody

Při natočení soustavy souřadnic podle obrázku (Obr.156) má intenzita elektrického pole nabité rovinné elektrody pouze složku ve směru x a ta je konstantní. Potenciál bude proto také pouze funkcí x a bude platit pro kladné hodnoty x (vpravo od roviny) :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (9.32)$$

$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} = \text{konst}$$

Potenciál kladně nabité roviny:

$$\varphi(x) = - \int E dx = -\frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} x + K \quad (9.33)$$

Pro záporné hodnoty x (nalevo od roviny) by platil s uvážením, že zde bude intenzita elektrického pole natočená v opačném směru, obdobný vztah s opačným znaménkem. Pokud budeme hodnotu x považovat za „absolutní“ vzdálenost od roviny bez ohledu na směr, bude platit vztah (9.33) obecně.

Potenciál je nejednoznačný (viz 4.2) a může se lišit o libovolnou aditivní konstantu K, která určuje konkrétní hodnotu potenciálu v určitém bodě. Je-li například v bodě $x = x_0$ potenciál φ_0 , bude pro konstantu platit:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi(x = x_0) = -\frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} x_0 + K \\ K &= \varphi_0 + \frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} x_0 \\ \varphi(x) &= \frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} (x_0 - x) + \varphi_0 \end{aligned} \quad (9.34)$$

Absolutní hodnota potenciálu však obvykle nemá praktický význam, používá se rozdíl potenciálů mezi dvěma body pro stanovení napětí (integrálu intenzity elektrického pole mezi těmito body). Konstanta potom může být zcela libovolná a pro jednoduchost i nulová:

$$\varphi(x) = -\frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} x \quad (9.35)$$

Potenciál v určitém bodě v elektrickém poli daného nabitého objektu (zde rovinné kladně nabité elektrody) skutečně představuje potenciální energii, kterou by v tomto bodě měl jednotkový kladný náboj ve srovnání s referenční hodnotou v referenčním bodě. Pokud zvolíme konstantu K ve vztahu (9.33) nulovou, položili jsme nulovou hodnotu potenciálu pro body ležící na dané kladně nabité rovině. Kladný jednotkový náboj by byl od kladně nabité roviny odpuzován konstantní silou danou velikostí intenzity elektrického pole, pohyboval by se ve směru klesající potenciální energie, potenciál by lineárně klesal do záporných hodnot.

9.1.3.b Napětí mezi elektrodami stanovené pomocí potenciálů

Při výpočtu napětí mezi deskami kondenzátoru s užitím potenciálu lze postupovat v souladu s částí 4.2.4 a stanovit jeho velikost rozdílem potenciálů na deskách.

Na levé desce kondenzátoru bude nulový příspěvek od vlastní kladně nabité desky, na které je definovaná nulová hodnota potenciálu (má k danému místu nulovou vzdálenost x) a příspěvek od záporně nabité desky, která je ve vzdálenosti d :

$$\varphi_L = 0 + -\frac{-\sigma_0}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} d = \frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} d \quad (9.36)$$

Na pravé desce kondenzátoru bude nulový příspěvek od vlastní záporně nabité desky a příspěvek od kladně nabité desky, která je ve vzdálenosti d :

$$\varphi_P = -\frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} d + 0 = -\frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} d \quad (9.37)$$

Napětí mezi deskami jako rozdíl potenciálů:

$$U = \varphi_L - \varphi_P = 2 \frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} d = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} d = \frac{Q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r S} d \quad (9.38)$$

Výsledek je zcela stejný, jako byl vypočten v části **9.1.1.d** integrací intenzity elektrického pole. Užití potenciálů má v tomto případě pouze ilustrativní význam.

9.1.3.c Laplaceova rovnice – výpočet elektrického pole v deskovém kondenzátoru

V následující části je pro porovnání ukázáno použití Laplaceovy rovnice pro výpočet elektrického pole v deskovém kondenzátoru. Z řešení této rovnice vycházejí numerické metody pro výpočet elektrických polí při složitém tvaru elektrod.

Elektrické pole je v tomto případě rovinné, potenciál se mění pouze v jednom směru (směr kolmo na elektrody). V prostoru mezi deskami není žádný volný náboj a objemová hustota vázaného náboje je za předpokladu homogenního dielektrika také nulová. Kondenzátor umístíme do kartézské soustavy souřadnice a uvažujeme změnu potenciálu pouze ve směru osy x , levou desku je na souřadnici $x = 0$, pravou desku $x = d$. Postupnými integracemi potenciálu dostaváme:

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + K_1 = 0$$

$$\varphi(x) = K_1 x + K_2$$

Položíme-li nulovou hodnotu potenciálu na pravé desce $\varphi(x = d) = 0$ a hodnotu U na levé desce $\varphi(x = 0) = U$, bude pro integrační konstanty platit:

$$\varphi(x = 0) = K_2 = U$$

$$\varphi(x = d) = 0 = K_1 d + U$$

$$K_1 = -\frac{U}{d}$$

Výsledná rovnice pro hodnotu potenciálu v libovolném místě mezi deskami bude:

$$\varphi(x) = -\frac{U}{d}x + U$$

Pro intenzitu elektrického pole musí platit již dříve odvozený vztah:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

$$E(x) = -\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{U}{d}$$

9.1.4 Energie elektrického pole v deskovém kondenzátoru, souvislost s intenzitou elektrického pole a elektrickou indukcí

Bylo odvozeno, že v deskovém kondenzátoru je konstantní intenzita elektrického pole i elektrická indukce

$$E = \frac{U}{d} = \text{konst} \quad D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U}{d} = \text{konst}$$

Objemová hustota energie elektrického pole je (viz 4.6) :

$$w_e = \frac{1}{2} D E$$

Výsledná energie elektrického pole v deskovém kondenzátoru s konstantními hodnotami elektrického pole v celém objemu:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V D E dV = \frac{1}{2} D E V = \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon_0 \epsilon_r}_{D} \underbrace{\frac{U}{d}}_{E} \underbrace{\frac{U}{d} S d}_{V} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} U^2$$

Pro výslednou energii skutečně platí v tomto případě i zcela obecně:

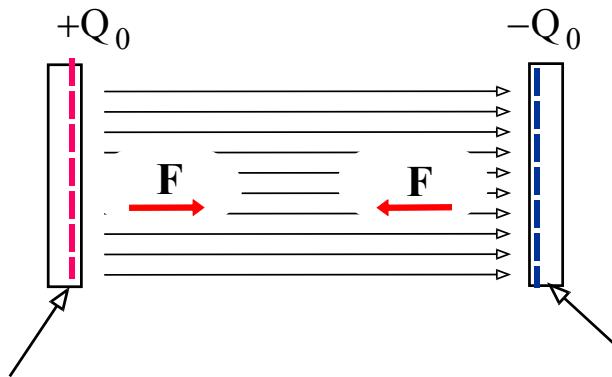
$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V D E dV = \frac{1}{2} C U^2$$

9.1.5 Síla působící na desky nabitého deskového kondenzátoru

9.1.5.a Výpočet síly z definičního vztahu pro intenzitu elektrického pole

Desky kondenzátoru nabité stejně velkými náboji s opačnými znaménky na sebe budou působit přitažlivou silou. V souladu s částí 4.7.1 lze v tomto případě velikost síly stanovit z definiční rovnice pro intenzitu elektrického pole:

$$\mathbf{F} = Q \cdot \mathbf{E}$$



Obr.157 Síla působící kolmo na desky deskového kondenzátoru

Při výpočtu velikosti síly působící například na pravou desku v elektrickém poli E' levé desky bude platit (viz (9.3)):

$$\mathbf{F} = Q \cdot \mathbf{E}'$$

Pro intenzitu elektrického pole levé desky v místě pravé desky (viz (9.3)):

$$E' = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{Q}{2S\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{CU}{2S\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\frac{S\epsilon_0\epsilon_r}{d}U}{2S\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{U}{2d}$$

Pro náboj na deskách kondenzátoru:

$$Q = C U = \frac{S\epsilon_0\epsilon_r}{d} U$$

Pro působící sílu:

$$F = Q \cdot E' = \frac{S\epsilon_0\epsilon_r}{d} U \frac{U}{2d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r S \left(\frac{U}{d} \right)^2$$

Po vyjádření pomocí intenzity výsledného elektrického pole a elektrické indukce:

$$E = \frac{U}{d} \quad D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U}{d}$$

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r S \left(\frac{U}{d} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r S E^2 = \frac{1}{2} D E S$$

9.1.5.b Výpočet síly pomocí principu virtuálních prací

Energie elektrického pole akumulovaná v nabitém kondenzátoru je:

$$W = \frac{1}{2} Q U$$

přičemž platí:

$$Q = C U$$

Podle principu virtuálních prací je síla působící kolmo na desky kondenzátoru:

$$|F| = \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} Q \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} Q \frac{d}{dx} \frac{Q}{C} = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx}$$

Po dosazení za derivaci kapacity

$$\left| \frac{d}{dx} C(x) \right|_{x=d} = \left| \frac{d}{dx} \frac{S \epsilon_0 \epsilon_r}{x} \right|_{x=d} = -S \epsilon_0 \epsilon_r \frac{1}{d^2}$$

Platí pro sílu vztah:

$$|F| = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U^2}{d^2} S = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 S = \frac{1}{2} D E S$$

OBSAH

1 PODSTATA ELEKTROMAGNETICKÝCH JEVŮ	2
1.1 Elektromagnetické jevy, elektromagnetické sily	2
1.2 Elektrický náboj	3
1.2.1 Pojem elektrického náboje	3
1.2.2 Vlastnosti elektrického náboje	4
1.2.3 Volné a vázané náboje, volný a vázaný elektrický proud	4
1.2.4 Elektricky nabité těleso, bodový náboj	7
1.3 Nestacionární elektromagnetické pole, elektrostatické pole a stacionární magnetické pole	8
2 ZÁKLADNÍ POPIS ELEKTRICKÉHO A MAGNETICKÉHO POLE Z HLEDISKA SILOVÉHO PŮSOBENÍ	9
2.1 Výchozí vztahy pro elektrostatické pole, síla v elektrickém poli, definice intenzity elektrického pole	9
2.1.1 Vymezení pojmu elektrostatického pole	9
2.1.2 Síla mezi náboji v elektrickém poli - Coulombův zákon	9
2.1.3 Definice intenzity elektrického pole	11
2.1.4 Siločáry elektrického pole	11
2.1.5 Intenzita elektrického pole v okolí bodového náboje	12
2.1.6 Siločáry elektrického pole kladného a záporného bodového náboje	13
2.2 Výchozí vztahy pro stacionární magnetické pole, síla v magnetickém poli, definice magnetické indukce	13
2.2.1 Vymezení pojmu stacionární magnetické pole	14
2.2.2 Síla v magnetickém poli mezi rovnoměrně se pohybujícími náboji	14
2.2.3 Definice magnetické indukce	16
2.2.4 Magnetická indukce rovnoměrně se pohybujícího bodového náboje	17
2.3 Lorenzova síla	18
3 OBECNÉ VLASTNOSTI ELEKTROSTATICKÉHO POLE	18
3.1 Gaussova věta elektrostatiky, divergence vektorové funkce	18

3.1.1	Gaussova věta elektrostatiky	19
3.1.2	Elektrické pole v bodě, divergence vektorové funkce, Gaussova věta elektrostatiky v diferenciálním tvaru	24
3.2	Elektrické pole v materiálech s různými vlastnostmi	25
3.2.1	Elektrické pole volných nábojů ve vodičích	25
3.2.2	Elektrické pole v dielektriku	27
3.2.3	Sumární elektrické pole volných nábojů ve vodičích a vázaných nábojů v dielektrických materiálech	28
3.2.4	Superpozice elektrického pole volných a vázaných nábojů, vztah mezi intenzitou elektrického pole E , elektrickou indukcí D a polarizací P	29
3.2.5	Započítání elektrického pole volných nábojů – elektrická indukce \mathbf{D} , elektrický indukční tok Ψ , Gaussova věta pro elektrickou indukci	31
3.2.6	Započítání elektrického pole vázaných nábojů – vektor polarizace \mathbf{P}	33
4	PRÁCE A ENERGIE V ELEKTRICKÉM POLI, NAPĚTÍ, POTENCIÁL, KAPACITA	36
4.1	Práce v elektrickém poli, pojem napětí a potenciálu	36
4.1.1	Práce v elektrickém poli – napětí	36
4.1.2	Napětí mezi dvěma body v elektrickém poli bodového náboje	37
4.2	Potenciál v elektrickém poli	39
4.2.1	Obecný vztah mezi intenzitou elektrického pole a skalárním potenciálem ve stacionárním elektrickém poli	39
4.2.2	Příklad výpočtu potenciálu - potenciál elektrického pole buzeného bodovým nábojem	40
4.2.3	Ekvipotenciály	41
4.2.4	Princip použití potenciálů v elektrickém poli	42
4.3	Poissonova a Laplaceova rovnice pro potenciál v elektrickém poli	43
4.3.1	Poissonova rovnice	43
4.3.2	Laplaceova rovnice	44
4.4	Kapacita	44
4.4.1	Definice kapacity	44
4.4.2	Kondenzátory spojené paralelně	45
4.4.3	Kondenzátory spojené do série	45
4.5	Metoda zrcadlení v elektrickém poli	46
4.6	Energie v elektrickém poli	48
4.6.1	Energie soustavy bodových nábojů	48
4.6.2	Energie elektrického pole v nabitém kapacitoru	51
4.6.3	Energie v elektrickém poli obecně vyjádřená pomocí vektorových veličin D a E	54
4.7	Síly působící v elektrickém poli, princip virtuálních prací	55
4.7.1	Určení síly působící na náboj v elektrickém poli o určité intenzitě	55
4.7.2	Princip virtuálních prací	56
5	STACIONÁRNÍ PROUDOVÉ POLE	57
5.1	Elektrický proud a proudová hustota	57
5.1.1	Elektrický kondukční proud	57
5.1.2	Proudová hustota	58
5.2	Základní zákony ve stacionárním proudovém poli	58
5.2.1	Ohmův zákon (elektrický proud ve vodiči – kondukční proud)	58
5.2.2	Elektrický odpor	60

5.2.3 Jouleův zákon	60
5.3 Elektromotorické napětí zdroje, svorkové napětí	61
5.4 Princip kontinuity elektrického proudu ve stacionárním proudovém poli	63
5.5 Podmínky na rozhraní v proudovém poli	64
6 STACIONÁRNÍ MAGNETICKÉ POLE	66
6.1 Biot-Savartův zákon	66
6.1.1 Biot-Savartův zákon pro proudovou smyčku a příklad použití pro dlouhý tenký vodič	66
6.1.2 Stacionární magnetické pole buzené proudem s obecně rozloženou proudovou hustotou v objemu vodiče	69
6.2 Síla působící vodiče nebo proudovou smyčku v magnetickém poli	70
6.3 Magnetický indukční tok (tok vektoru magnetické indukce)	70
6.3.1 Magnetický indukční tok	71
6.3.2 Tok vektoru magnetické indukce uzavřenou plochou	71
6.4 Integrál magnetické indukce po uzavřené dráze – zákon celkového proudu v integrálním a diferenciálním tvaru	72
6.4.1 Zákon celkového proudu v integrálním tvaru	72
6.4.2 Zákon celkového proudu v diferenciálním tvaru	75
6.5 Magnetické pole buzené kondukčními proudy ve vodičích a vázanými proudy v magnetiku	77
6.5.1 Kondukční proud ve vodičích (proud volných částic)	77
6.5.2 Vázaný proud v magnetiku	77
6.5.3 Součtové magnetické pole kondukčních proudů ve vodičích a vázaných proudů v dielektriku	78
6.5.4 Superpozice magnetického pole volných i vázaných proudů, vzájemný vztah mezi magnetickou indukcí B , intenzitou magnetického pole H a magnetizací M	78
6.5.5 Započítání vlivu proudu volných nosičů náboje (kondukčního proudu), intenzita magnetického pole H	80
6.5.6 Započítání vlivu vázaných proudů v magnetiku, vektorová veličina magnetizace M	81
6.6 Magnetické pole v „magnetických obvodech“, Hopkinsonův zákon	86
6.7 Energie v magnetickém poli	90
6.7.1 Energie magnetického pole vybuzeného proudovou smyčkou	90
6.7.2 Energie v magnetickém poli zapsaná pomocí vektorových veličin magnetického pole B a H	93
6.8 Indukčnost – statická, energetická a dynamická definice	94
6.8.1 Statická definice vlastní indukčnosti	94
6.8.2 Statická definice vzájemné indukčnosti	97
6.8.3 Dynamická definice vlastní a vzájemné indukčnosti	99
6.8.4 Energetická definice vlastní indukčnosti	100
7 NESTACIONÁRNÍ ELEKTROMAGNETICKÉ POLE - ZÁKLADNÍ ZÁKONITOSTI	101
7.1 Princip kontinuity proudu v nestacionárním poli	101
7.2 Faradayův indukční zákon, zobecnění tohoto zákona v podobě Maxwellovy rovnice	102
7.2.1 Faradayův indukční zákon, Lenzovo pravidlo	102
7.3 Zobecněný zákon celkového proudu, Maxwellův posuvný proud	108

7.4	Maxwellovy rovnice	110
7.5	Obecné podmínky na rozhraní ve stacionárním i nestacionárním elektrickém a magnetickém poli	111
7.5.1	Podmínky na rozhraní ve stacionárním i nestacionárním elektrickém poli	111
7.5.2	Podmínky na rozhraní ve stacionárním i nestacionárním magnetickém poli	114
7.6	Poyntingův teorém – obecná bilance energie v časově proměnném elektromagnetickém poli	117
7.7	Elektromagnetické vlny	119
7.7.1	Harmonická elektromagnetická vlna	122
7.7.2	Rovinná harmonická elektromagnetická vlna	123
7.7.3	Vlnová délka a fázová rychlosť	128
7.7.4	Konstanta šíření v elektricky dobře vodivém a nevodivém prostředí	129
7.7.5	Vlnová impedance v elektricky dobře vodivém a nevodivém prostředí	130
7.7.6	Vlnová délka a fázová rychlosť v elektricky nevodivém prostředí	132
7.7.7	Výkon přenášený elektromagnetickou vlnou, Poyntingův vektor, střední hodnota Poyntingova vektoru	132
7.7.8	Výkon přeměněný v jednotce objemu na teplo	133
7.7.9	Bilance činného výkonu rovinné harmonické elektromagnetické vlny	134
8	MATEMATICKÉ ZNALOSTI POTŘEBNÉ PRO STUDIUM ZÁKLADNÍCH VLASTNOSTÍ ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE	135
8.1	Ortogonalní soustavy souřadnic	135
8.1.1	Kartézská soustava	135
8.1.2	Válcová soustava souřadnic	136
8.1.3	Sférická soustava souřadnic	137
8.2	Skalární a vektorová funkce	137
8.2.1	Skalární funkce	137
8.2.2	Vektorová funkce	138
8.3	Skalární a vektorový součin	138
8.3.1	Skalární součin dvou vektorů	138
8.3.2	Vektorový součin	139
8.4	Gradient skalární funkce	140
8.4.1	Definice gradientu skalární funkce	140
8.4.2	Konkrétní výpočet gradientu skalární funkce v kartézské soustavě	142
8.5	Tok vektorové veličiny plochou, tok uzavřenou plochou, divergence vektorové funkce	143
8.5.1	Tok vektorové veličiny plochou	143
8.5.2	Tok vektorové veličiny uzavřenou plochou (obecné úvahy)	145
8.5.3	Divergence vektorové funkce, Gaussova věta	147
8.5.4	Divergence vektorové funkce v kartézské soustavě	148
8.6	Integrace vektorové funkce po dráze, cirkulace vektorové funkce, rotace, Stokesova věta	150
8.6.1	Integrace vektorové funkce po dráze	150
8.6.2	Integrace po uzavřené dráze – cirkulace vektorové funkce	150
8.6.3	Rotace vektorové funkce	151
8.6.4	Stokesova věta	152
8.6.5	Rotace vektorové funkce v kartézské soustavě	152
8.7	Zápis gradientu, divergence a rotace pomocí symbolického operátoru „nabla“	155
8.8	Použité operátorové identity	156
8.8.1	Divergence rotace	156
8.8.2	Gradient divergence v kartézské soustavě	157

8.8.3	Rotace rotace v kartézské soustavě	157
8.8.4	Vektorový výraz $\mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{A} = -\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$	159
8.8.5	Harmonické časové průběhy veličin, fázory	160

9 PŘÍKLADY PRO ILUSTRACI 165

9.1 Elektrické pole v deskovém kondenzátoru – ověření vztahů, intenzita elektrického pole, elektrická indukce, polarizace, velikost volného a vázaného náboje, kapacita, potenciál, sily	165
9.1.1 Deskový kondenzátor se „vzduchovým“ dielektrikem	165
9.1.2 Kondenzátor s vloženým dielektrikem	170
9.1.3 Potenciál v deskovém kondenzátoru, Laplaceova rovnice	173
9.1.4 Energie elektrického pole v deskovém kondenzátoru, souvislost s intenzitou elektrického pole a elektrickou indukcí	176
9.1.5 Síla působící na desky nabitého deskového kondenzátoru	177