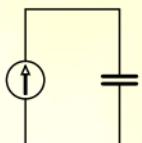


E4 Harmonický ustálený stav. Fázory. Kmitočtové charakteristiky. Rezonance. Analýza přechodných jevů. Lineární obvody v periodickém neharmonickém ustáleném stavu. (Základy elektrických obvodů)

Harmonický Ustálený stav (HUS)

Kapacitor, napájený z harmonického zdroje proudu:



Časový průběh proudu: $i(t) = I_m \sin \omega t$

Náboj, uložený v kapacitoru (SUS): $q = Cu = it$

Zde se proud s časem mění: $dq = Cd u = id t$

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u_c(0) \quad \xrightarrow{\text{d}q = Cd u = id t} i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I_m \sin \omega \tau d\tau + u_c(0) =$$

$$= \frac{I_m}{\omega C} (1 - \cos \omega t) + u_c(0) = \frac{I_m}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{I_m}{\omega C} + u_c(0)$$

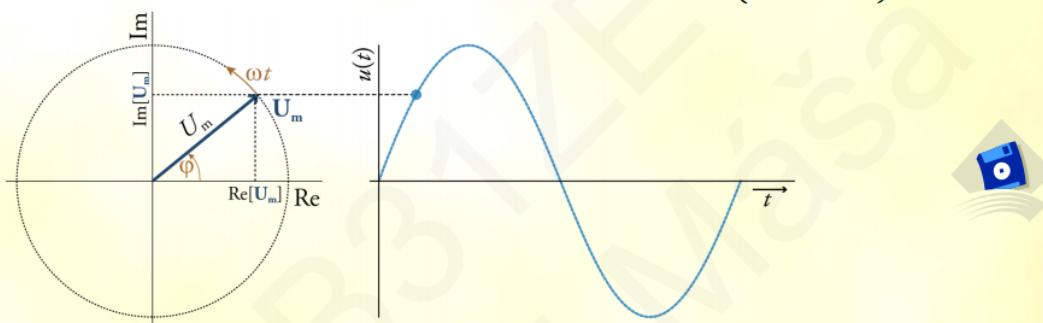
Kapacitor, napájený z harmonického zdroje napětí:

Časový průběh napětí: $u(t) = U_m \sin \omega t$

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_m \sin \omega t) = U_m \omega C \cos \omega t = U_m \omega C \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

V obou případech jsme dostali fázově posunutou funkci sin, její amplituda se změnila úměrně frekvenci a kapacitě – pokud bychom dokázali transformovat funkci sinus obrazem, pak by bylo možné nahradit integrál a derivaci dělením, resp. násobením konstantou

$$U_m \sin(\omega t + \varphi) = \operatorname{Im} \{ U_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \} = \operatorname{Im} \{ U_m e^{j(\omega t + \varphi)} \}$$



- Funkce sinus je transformována komplexním číslem, graficky reprezentovaným vektorem v komplexní rovině o délce U_m , s počátečním úhlem vůči reálné ose φ , který se otáčí kolem počátku úhlovou rychlostí ω .
- Protože vektory, které rotují různou rychlosťí, nelze mezi sebou sčítat / odčítat, ... v různých časových okamžicích, metodu superpozice je možné použít pouze u zdrojů se stejnou frekvencí.
- U lineárních prvků nemůže dojít ke změně frekvence – vektory všech obvodových veličin rotují se stejnou rychlosťí – nemá proto smysl rychlosť rotace opisovat.
- Fázor** napětí je pak definován: $\hat{U}_m = U_m e^{j\varphi}$ Alternativní symboly: $\mathbf{U}_m, \overline{U}_m, \dots$
- V zahraniční literatuře je často používán Steinmetzův polární tvar: $\hat{U}_m = U_m e^{j\varphi} = U_m \angle \varphi$

Fázor může být v měřítku maximálních, nebo efektivních hodnot – má význam při výpočtu výkonu

$$u(t) = 100 \sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\widehat{U}_m = 100 e^{j\frac{\pi}{4}} = 100 \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}\right) = 70.71 + 70.71j$$

$$\widehat{U} = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} = 70.71 \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}\right) = 50 + 50j$$

Impedance a admitance základních obvodových prvků:

Obvodový prvek				
R	odpor	R	vodivost	$G = \frac{1}{R}$
C	impedance	$\frac{1}{j\omega C}$	admitance	$j\omega C$
L	impedance	$j\omega L$	admitance	$\frac{1}{j\omega L}$

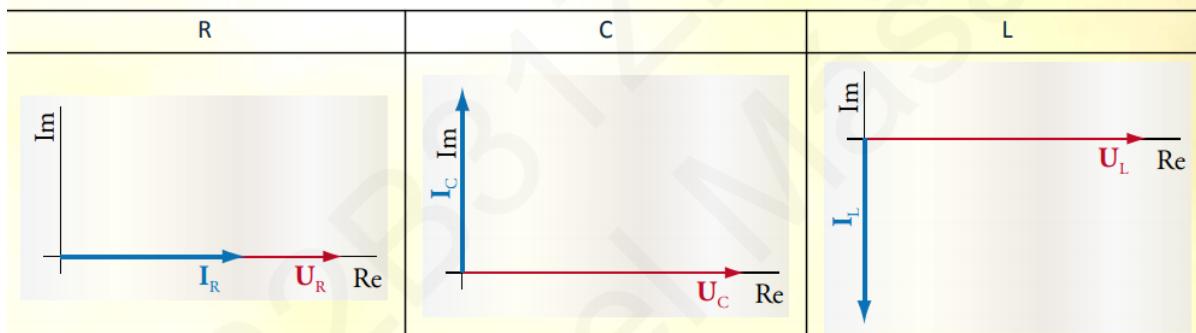
Vztah mezi fázory napětí a proudu na obvodových prvcích:

Obvodový prvek		
R	$\mathbf{U} = R \mathbf{I}$	$\mathbf{I} = G \mathbf{U}$
C	$\mathbf{U} = \frac{1}{j\omega C} \mathbf{I}$	$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{U}$
L	$\mathbf{U} = j\omega L \mathbf{I}$	$\mathbf{I} = \frac{1}{j\omega L} \mathbf{U}$



Fázový posun

- **U kapacitoru** jsme v časové oblasti odvodili, že proud se předbíhá o čtvrtinu periody před napětím
- Obdobně na induktoru se v časové oblasti napětí předbíhá o čtvrtinu periody před proudem
- Ve frekvenční oblasti je tento fázový posun reprezentován imaginární jednotkou j : $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$
- V komplexní rovině je časový (fázový) posun po transformaci reprezentován otočením vektoru proti směru hodinových ručiček, počátkem otáčení (referenční 0) je kladná reálná poloosa.



Výkon v HUS

Rezistor: proud, procházející rezistorem, ho zahřívá, energie, dodaná rezistoru, se tak nevratně mění na teplo

Kapacitor: elektrický proud, protékající obvodem dodává kapacitoru elektrický náboj – kapacitor akumuluje energii (ve formě elektrického pole), pokud obrátíme směr toku elektrického proudu (polaritu zdroje, zapojeného v obvodu), začne se kapacitor vybíjet, dodává energii $W_c = \frac{1}{2}CU^2$

Induktor: akumuluje energii formou magnetického pole $W_L = \frac{1}{2}LI^2$

Jediným obvodovým prvkem, který vykonává užitečnou práci, je rezistor (může to být třeba i model mechanické zátěže motoru), kapacity a induktory si ve střídavých obvodech periodicky vyměňují energii buď se zdroji, nebo mezi sebou navzájem

Okamžitý výkon (obecná definice výkonu): $p(t) = u(t)i(t)$

Na rozdíl od odporového obvodu jsou napětí i proud harmonické funkce, pokud obvod obsahuje kapacity a induktory, může být proud fázově posunut $u(t) = U_m \sin(\omega t)$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Činný výkon

$$P = \frac{1}{2}U_m I_m \cos \varphi = UI \cos \varphi$$

jednotkou je Watt [W]

- Maximální výkon je do obvodu dodán, pokud $\varphi = 0$, tedy napětí a proud jsou ve fázi. Tedy do obvodu, který obsahuje pouze rezistory.
- Pokud je fázový posun mezi napětím a proudem $\pm\frac{\pi}{2}$ je činný výkon, dodaný do obvodu nulový. Žádné teplo, žádné světlo, žádná práce. Je ale zřejmé, že **vodiči teče proud, a na tento proud musí být rozvodná síť dimenzována!!!** Proto je potřeba definovat **zdánlivý výkon**, tedy **celkovou energii, přenesenou za jednotku času oběma směry**. Je dán efektivními hodnotami napětí a proudu

Zdánlivý výkon

$$S = UI = \frac{1}{2}U_m I_m$$

jednotkou je Volt Ampér [VA]

- Výměna energie mezi zdroji, kapacitory a induktory je dána geometrickým rozdílem mezi zdánlivým a činným výkonem, ale pozor, nejdříve se o obyčejné odčítání, protože $1 - \cos^2(\varphi) = \sin^2(\varphi)$

Jalový výkon

$$Q = \frac{1}{2}U_m I_m \sin \varphi = UI \sin \varphi$$

jednotkou je volt ampér reaktanční [var]

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Vyjádřeno z Fázorů

$$\mathbf{S} = \mathbf{UI}^* = \frac{1}{2}\mathbf{U}_m \mathbf{I}_m^* = P + jQ$$

$$P = \operatorname{Re} \{ \mathbf{S} \} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{UI}^* \} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2}\mathbf{U}_m \mathbf{I}_m^* \right\}$$

$$Q = \operatorname{Im} \{ \mathbf{S} \} = \operatorname{Im} \{ \mathbf{UI}^* \} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2}\mathbf{U}_m \mathbf{I}_m^* \right\}$$

$$S = |\mathbf{S}|$$

R – teplo na odporu

$$P_R = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

C – proud se předbíhá o $\frac{\pi}{2}$ před napětím \Rightarrow vždy **záporné znaménko** $\sin(0 - \frac{\pi}{2}) = -1$

$$Q_C = -UI = X_C \cdot I \cdot I = \frac{-1}{\omega C} I^2 = -U^2 \omega C$$

L – proud se zpožďuje o $\frac{\pi}{2}$ za napětím \Rightarrow vždy **kladné znaménko** $\sin(0 - \frac{-\pi}{2}) = 1$

$$Q_L = UI = X_L \cdot I \cdot I = \omega L I^2 = \frac{U^2}{\omega L}$$

Obvod je výkonově přizpůsoben, pokud zdroj dodává do obvodu maximální možný činný výkon.

Kmitočtové Charakteristiky

Z minulých přednášek již víme, že impedance / admittance kapacitoru a induktoru jsou frekvenčně závislé

Nyní se budeme zabývat tím, jak tato frekvenční závislost ovlivní velikost impedance, proudy a napětí v obvodu a především, jak tuto závislost na frekvenci znázornit graficky

Jaký smysl má kreslit frekvenční charakteristiky obvodů?

- ✓ Chceme vybrat vhodné komponenty do nového domácího kina – jakou frekvenční charakteristiku má AV receiver, reproduktory a další komponenty – tedy jak hluboké a jak vysoké tóny je soustava schopna zahrát?
- ✓ Naším úkolem je postavit zesilovač k vychylovacím obvodům osciloskopu – pokud má zesilovač přenést pilovitý signál bez nepřijatelného zkreslení, musí mít správnou frekvenční charakteristiku.
- ✓ Potřebujeme navrhnout filtr, který odstraní síťové rušení – i tady vycházíme ze znalosti frekvenčních charakteristik.
- ✓ Může sběrnice pracovat na určité frekvenci? – i to souvisí s její frekvenční charakteristikou...
- ✓ Pro jaké signály můžeme použít určitý měřící přístroj (voltmetr, ampérmetr, wattmetr)
- ✓ ... a mnoho dalších důvodů...

Postup řešení

- S využitím elementárních (Ohmův zákon, dělič napětí / proudu, metoda postupného zjednodušování, ekvivalence - transformace zdrojů napětí a proudu, ...) nebo obecných (MUN / MSP) metod analýzy vyjádříme přenos obvodu

$$P = \frac{U_2}{U_1} \quad (\text{případně}) \quad P(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$$

- Vypočítáme kořeny polynomů v čitateli a jmenovateli $j\omega$ (případně p)
- Polynomy zapíšeme jako součin kořenových činitelů ve tvaru

$$P(j\omega) = K \frac{\prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - p_k)}$$

- Ze všech závorek čitatele i jmenovatele vytkneme kořeny $-z_k$, resp. $-p_k$ (normujeme), takže dostaneme upravený přenos

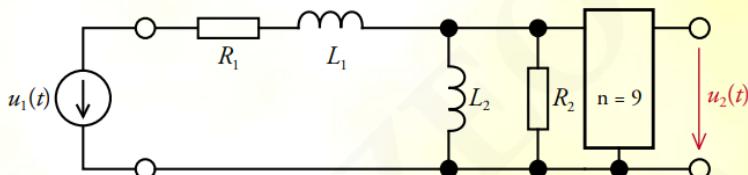
$$P'(j\omega) = K' \frac{\prod_{k=1}^M (j\frac{\omega}{z_k} + 1)}{\prod_{k=1}^N (j\frac{\omega}{p_k} + 1)}$$

- Pro konstantu K' , stejně jako každou závorku v čitateli a jmenovateli nakreslíme příslušné asymptoty a graficky je sečteme

Příklad

Frekvenční charakteristika obvodu 2. řádu - příklad:

Mějme úplný model transformátoru:



Hodnoty obvodových prvků jsou: $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $L_1 = 1.9 \text{ mH}$, $L_2 = 8.1 \text{ mH}$, $R_2 = 8.1 \text{ k}\Omega$
(modelovaný transformátor měl odpor primáru $2 \text{ k}\Omega$, sekundáru 100Ω , indukčnost primáru 10 mH a sekundáru 0.1 mH a koeficient vazby 0.9)

Nás zajímá frekvenční charakteristika tohoto obvodu, musíme proto vyjádřit přenos:

$$\begin{aligned} P = \frac{U_2}{U_1} &= \frac{1}{9} \frac{\frac{j\omega L_2 R_2}{j\omega L_2 + R_2}}{R_1 + j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 R_2}{j\omega L_2 + R_2}} = \frac{1}{9} \frac{j\omega L_2 R_2}{(j\omega)^2 L_1 L_2 + j\omega (L_2 R_1 + L_1 R_2 + L_2 R_2) + R_1 R_2} = \\ &= \frac{1}{9} \frac{j\omega \cdot 65.61}{(j\omega)^2 \cdot 1.539 \cdot 10^{-5} + j\omega \cdot 97.2 + 1.62 \cdot 10^7} \end{aligned}$$

- Oproti elementárním RC / RL obvodům se v tomto přenosu objevily další dva prvky:
 - Násobná konstanta
 - Jmenovatel přenosu je polynom 2. řádu (kvadratická rovnice)
- Frekvenční charakteristiku je samozřejmě možné nakreslit přímo z uvedeného přenosu (Maple, Matlab, ...)
- Jaká bude Bodeho approximace?

Ve jmenovateli musíme najít kořeny kvadratické rovnice a jmenovatel zapsat jako součin kořenových činitelů:

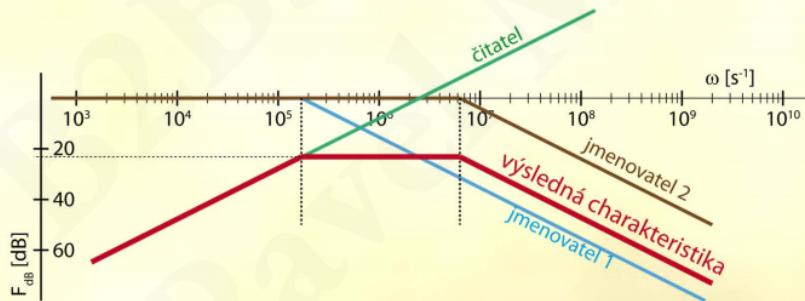
$$P = \frac{1}{9} \frac{j\omega \cdot 65.61}{(j\omega)^2 \cdot 1.539 \cdot 10^{-5} + j\omega \cdot 97.2 + 1.62 \cdot 10^7} = \frac{1}{9} \frac{j\omega \cdot 65.61}{1.539 \cdot 10^{-5} \cdot (j\omega + 1.71 \cdot 10^5)(j\omega + 6.144 \cdot 10^6)}$$

- Nyní již známe zlomové kmitočty – *póly* přenosu $1.71 \cdot 10^5$, resp. $6.144 \cdot 10^6$, neznáme ale ještě amplitudu přenosu – obě závorky ve jmenovateli musíme **normovat**:

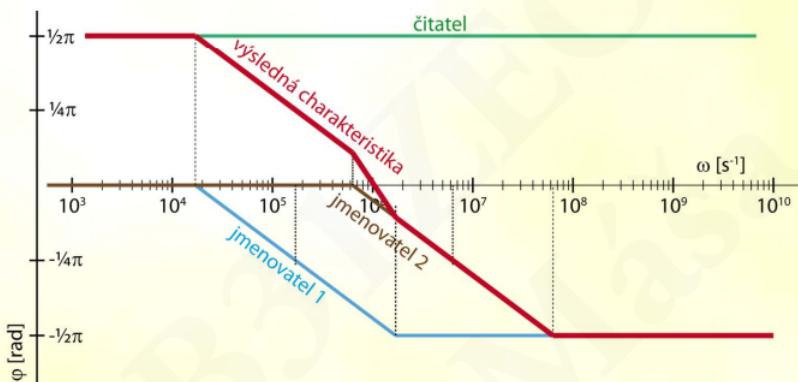
$$P = \frac{1}{9} \frac{j\omega \cdot 65.61}{1.539 \cdot 10^{-5} \cdot 1.71 \cdot 10^5 \cdot 6.144 \cdot 10^6 \cdot (j\frac{\omega}{1.71 \cdot 10^5} + 1)(j\frac{\omega}{6.144 \cdot 10^6} + 1)} =$$

$$= \frac{j\omega \cdot \frac{65.61}{9 \cdot 1.539 \cdot 10^{-5} \cdot 1.71 \cdot 10^5 \cdot 6.144 \cdot 10^6}}{(j\frac{\omega}{1.71 \cdot 10^5} + 1)(j\frac{\omega}{6.144 \cdot 10^6} + 1)} = \frac{j\frac{\omega}{2.22 \cdot 10^6}}{(j\frac{\omega}{1.71 \cdot 10^5} + 1)(j\frac{\omega}{6.144 \cdot 10^6} + 1)}$$

- Amplituda je ukryta v čitateli – tato přímka nám posune celou charakteristiku směrem dolů:



Výsledná fázová charakteristika se skládá ze tří částí – čitatel $j\omega$ posouvá fázi o $\frac{\pi}{2}$, člen $1 + j\omega$ ve jmenovateli má opět dvě zlomové frekvence – na 0.1 a 10-ti násobku zlomové frekvence amplitudové charakteristiky; vzhledem k tomu, že tento výraz je ve jmenovateli, je fázový posun záporný



Rezonance

Nejprve několik fyzikálních analogií úvodem...

- Rezonance je fyzikálním jevem, kdy má systém tendenci kmitat s velkou amplitudou na určité frekvenci, kdy malá budící síla může vyvolat vibrace s velkou amplitudou.
- Důvodem je **akumulace energie**, kdy zdroj postupně dodává další a další energii a **tlumení systému je malé**; ke vzniku kmitů musí být v systému dva různé druhy energie, např. potenciální a kinetická (kyvadlo, houpačka), nebo elektrická a magnetická – v elektrických obvodech.
- Rezonance je podstatou většiny hudebních nástrojů.
- Někdy může mít rezonance destruktivní účinky – známé je rozbití sklenice zvukem určité frekvence.
- Zásadním pojmem je rezonance v architektuře. Nesprávně navržené stavby se mohou zhroutit. Příkladem může být např. Angerský most, který se zhroutil v roce 1850, kdy ho rozkmitali pochodující francouzští vojáci. Jiným příkladem je zhroucení amerického Tacoma Narrows Bridge (1940), kde byl most rozkmitán větrem vanoucím konstantní rychlostí (!!!) – iniciátorem kmitů byly větrné víry (aeroelastický flutter).

Impedance obvodu je:

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Amplituda impedance je:

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

- Pro toto minimum platí podmínka:

$$\mathbf{Z} = R + j \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}_{=0} = R$$

Impedance je na této frekvenci **reálná**

Stupeň 2 z 12

• této podmínky (a nebo derivací impedance podle frekvence) můžeme určit podmínu: **Thomsonův vzorec:**

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Napětí na kapacitoru a na induktoru kmitá v protifázi, takže **se vzájemně odečtou** – napětí na rezistoru je tak stejné, jako napětí zdroje

- Tento typ rezonance se nazývá **napěťová rezonance**
- Amplituda napětí na kapacitoru a induktoru může být mnohonásobně větší, nežli amplituda napětí zdroje
- **Podmínka napěťové rezonance:** $\text{Im}\{\mathbf{Z}\} = 0$
- Aby obvod rezonoval, musí obsahovat alespoň dva reaktanční prvky – ale ne 2 kapacity, nebo 2 induktory; k vzájemné **výměně energie** to musí být **L i C**

Rezonanční křivka

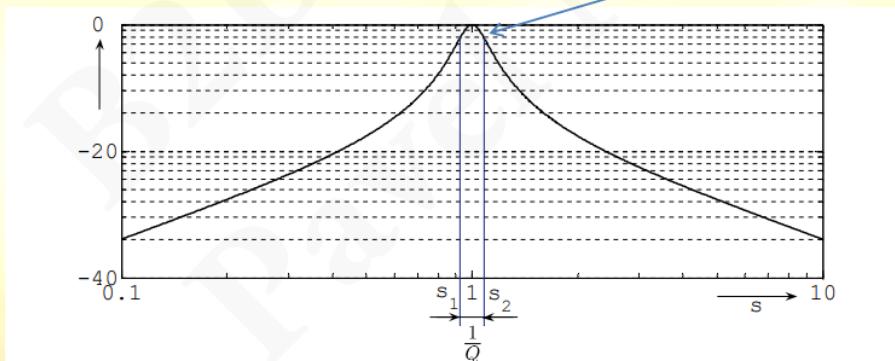
Pokud normalizujeme proud, tekoucí obvodem, bude:

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I}_r} = \frac{\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}}}{\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}_r}} = \frac{\mathbf{Z}_r}{\mathbf{Z}} = \frac{R}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{1}{1 + j \left(\underbrace{\frac{\omega L}{R}}_{=Q|_{\omega=\omega_r}} - \underbrace{\frac{1}{\omega C R}}_{=Q|_{\omega=\omega_r}} \right)}$$

Vzhledem k tomu, že frekvence v rovnici může být libovolná, nejenom rezonanční, zavedeme relativní frekvenci

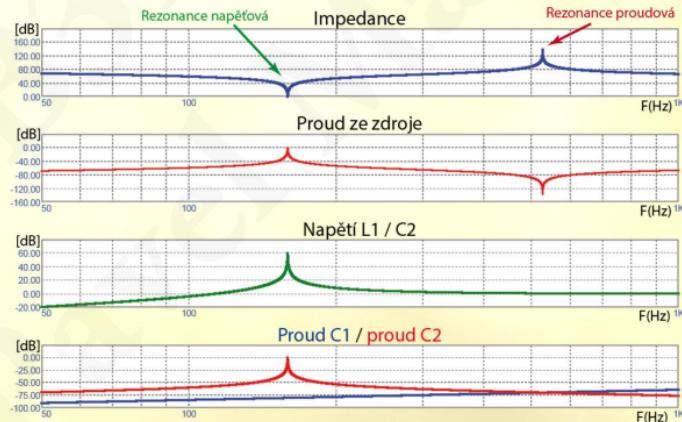
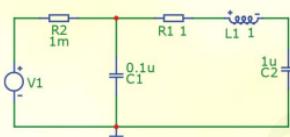
$$s = \frac{\omega}{\omega_r}$$

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I}_r} = \frac{1}{1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_r} \frac{\omega L}{R} - \frac{\omega_r}{\omega} \frac{1}{\omega C R} \right)} = \frac{1}{1 + j Q \left(s - \frac{1}{s} \right)}$$



Vícenásobná rezonance

- V případě, že obvod obsahuje více reaktančních prvků (kapacity, induktory), může mít obvod více rezonančních frekvencí – napěťové i proudové rezonance.
- Frekvence napěťové rezonance určíme z podmínky $\text{Im}\{\mathbf{Z}\} = 0$, frekvence proudové rezonance z podmínky $\text{Im}\{\mathbf{Y}\} = 0$



Periodický neharmonický ustálený stav (PNUS)

Harmonická analýza Libovolný periodický signál lze rozložit na jednotlivé harmonické složky. Harmonická syntéza Kombinací harmonických složek lze vytvořit prakticky libovolný periodický signál.

Fourierovy řady

- **Trigonometrický tvar Fourierových řad**

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

$a_{0/2}$...stejnosměrná složka
a_k, b_k	...koeficienty Fourierovy řady
k	...pořadí harmonické složky

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

Fourierovy řady

- **Amplitudový (spektrální) tvar Fourierových řad**

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

A_k	... amplituda k -té spektrální složky
φ_k	... fáze k -té spektrální složky

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k}$$

Fourierovy řady

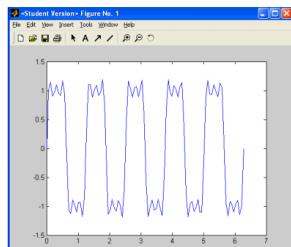
Komplexní (exponenciální) tvar Fourierových řad

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

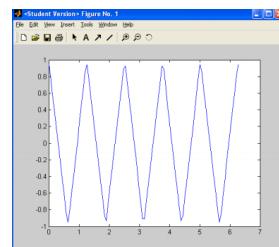
C_k ... komplexní koeficient $C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

$$C_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \quad A_k = 2|C_k|$$

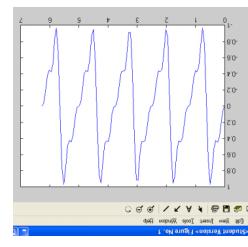
Obdélníkový průběh



Trojúhelníkový průběh



Pilový průběh



Činný výkon

$$p(t) = u(t)i(t)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega_0 t + \psi_k)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega_0 t + \eta_k)$$

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{mk} I_{mk}}{2} \cos(\psi_k - \eta_k) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k \quad [W]$$

Jalový výkon

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k \quad [\text{var}]$$

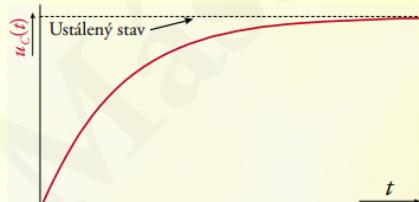
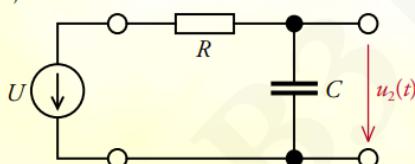
Zdánlivý výkon

$$S = UI = \sqrt{\left(U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2 \right) \left(I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2 \right)} \quad [VA]$$

$$S^2 \neq P^2 + Q^2$$

Analýza přechodných jevů

- Z předchozích přednášek víme, že kapacitor a induktor jsou setrvačné obvodové prvky, které ukládají energii
- Dosud jsme se zabývali ustáleným stavem – předpokládali jsme, že v minulosti byly všechny kapacitory a induktory nabity a v ustáleném stavu *nedochází k toku energie do těchto prvků*
 - jak je to ale v případě harmonického ustáleného stavu (HUS)?
 - Víme, že v HUS *k toku energie z / do akumulačních prvků dochází jalový výkon*, ale – při připojení zdroje nemusí mít obvodové veličiny (napětí / proud) správný fázový posun – v HUS okamžitě po připojení zdroje obvod může, ale nemusí být v ustáleném stavu (v závislosti na fázi připojeného zdroje)
- Po připojení / odpojení zdrojů nebo jiné změně v obvodu (změna odporu, ...) je tedy potřeba vyrovnat energetické poměry v obvodu (nabít / vybit akumulační prvky) – tento proces nazýváme **přechodný děj**
- Uvažujme integrační RC článek, ke kterému připojíme v čase 0 stejnosměrný zdroj napětí; předpokládejme, že kapacitor byl bez náboje



- Intuitivně lze obvod popsat:

- Na počátku byl kapacitor bez náboje – jeho napětí bylo nulové. Celé napětí zdroje proto bylo na rezistoru R, obvodem tekl elektrický proud $I = \frac{U}{R}$
- Za dobu Δt elektrický proud, tekoucí obvodem dodá kapacitoru elektrický náboj $\Delta q = I \Delta t$
- Náboji, uloženém v kapacitoru, je ale úměrné napětí $U_C = \frac{q}{C}$, obvodem poteče menší proud $I = \frac{U - U_C}{R}$
- Za jednotku času tak do kapacitoru přiteče méně náboje a rychlosť nabíjení se zpomalí – nabíjení není lineární
- Odtud dojdeme k diferenciální rovnici $du_C(t) = \frac{dq}{C} = \frac{1}{RC} [U - u_C(t)] dt$
- A jejímu řešení $u_C(t) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$

- Uvedený postup ale není universální a u složitějších obvodů by byl jen obtížně použitelný; jak tedy postupovat?
 Řešením jsou **obvodové rovnice**
 - Nemůžeme samozřejmě použít obvodové rovnice pro odporové obvody (SUS), ani HUS (ty popisují použitý stav po odeznění přechodného děje), ale integrodiferenciální rovnice pro obecné časové průběhy, nebo Laplaceovu transformaci

Obvodové rovnice v časové oblasti

Připomeňme vztah mezi proudem a napětím na základních obvodových prvcích:

$$\text{Rezistor:} \quad u(t) = Ri(t) \quad i(t) = \frac{U(t)}{R}$$

$$\text{Kapacitor: } u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u_c(0) \quad i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$\text{Induktor:} \quad u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau + i_L(0)$$

K sestavení obvodových rovnic můžeme opět použít buď první (proudový) Kirchhoffův zákon (metoda uzlových napětí), nebo druhý (napěťový) – metoda smyčkových proudů.

Oproti ustálenému stavu se zde objevily nové členy u integrálů – **počáteční podmínky**, které reprezentují energii, akumulovanou obvodovým prvkem v čase 0

Počáteční podmínky vypočítáme z ustáleného stavu v obvodu v čase $t < 0$

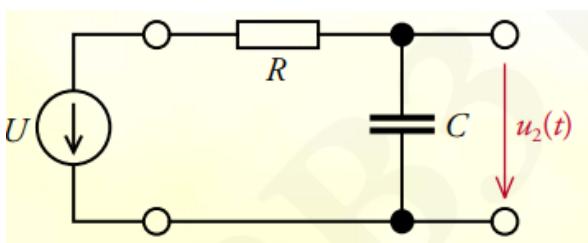
Energetickou veličinou na kapacitoru je napětí (přímo úměrné uloženému náboji), nikoli elektrický proud
⇒ Napětí je spojité, počáteční podmínka, vypočítaná z ustáleného stavu, platí před i po sepnutí spínače
(energetická počáteční podmínka)

⇒ Elektrický proud na kapacitoru není spojitý, je potřeba ho odvodit z napětí (s využitím metod analýzy elektrických obvodů – Ohmův zákon, Kirchhoffovy zákony... - **matematická počáteční podmínka**)

⇒ Doporučený postup pro obvod s kapacitorem je použít metodu uzlových napětí, počáteční podmítku - napětí

	$q = Cu$ $i = \frac{dq}{dt}$ $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$	musí být $u_C(0_-) = u_C(0_+)$ 	může být $i_C(0_-) \neq i_C(0_+)$
	$\Phi_L = Li$ $u(t) = \frac{d\Phi_L}{dt}$ $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$	může být $u_L(0_-) \neq u_L(0_+)$ 	musí být $i_L(0_-) = i_L(0_+)$

Příklad



Partikulární řešení – harmonický ustálený stav:

Porovnejme nyní řešení přechodného děje v RC obvodu $R = 850 \Omega$, $C = 1 \mu F$ se

- a) Stejnosměrným buzením $U = 90 \text{ V}$
- b) Harmonickým buzením $u(t) = 90 \sin(2\pi 5000 t) \text{ V}$

$$\text{Časová konstanta obvodu} \quad \tau = RC = 850 \cdot 10^{-6} = 0.85 \text{ ms} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-1}{0.00085} = -1176.47$$

$$\text{Komplementární řešení} \quad u_c(t) = Ke^{-1176.47t} + u_p(t)$$

$$\text{SUS} \quad u_p(t) = U \quad u_c(t) = \underline{\underline{90(1 - e^{-1176.47t})}} \text{ V}$$

$$\text{HUS} \quad \widehat{\mathbf{U}}_C = \widehat{\mathbf{U}} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \widehat{\mathbf{U}} \frac{1}{1 + j\omega RC} = 90 \frac{1}{1 + j \cdot 2\pi \cdot 5000 \cdot 850 \cdot 10^{-6}} = 3.37 e^{-1.53j}$$

\downarrow
 $u_p(t) = 3.37 \sin(31416t - 1.53) \text{ [V]}$

nyní položíme $t = 0$

$$0 = K + 3.37 \sin(-1.53) \quad \Rightarrow \quad K \doteq 3.37$$

$$u_c(t) = \underline{\underline{3.37e^{-1176.47t} + 3.37 \sin(31416t - 1.53)}} \text{ V}$$

Obecné řešení v RC obvodu

$$u_c(t) = [u_C(0_+) - u_p(0)] e^{\frac{-t}{\tau}} + u_p(t)$$

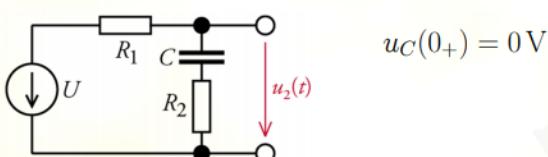
Napětí, na které byl nabit kapacitor před
připojením / odpojením zdroje

Ustálený stav – zde je to
stejnosměrno, sinusovka, nebo 0

Napětí ustáleného stavu na kapacitoru v okamžiku připojení /
odpojení – dáno fázovým posunem zdroje a napětí v obvodu

Příklad - integrační článek 3 – řešení s využitím Laplaceovy transformace:

Obvod podle obrázku je napájen ze skokového zdroje napětí $10 \cdot 1(t) \text{ V}$. Vypočítejte časový průběh napětí $u_2(t)$, pokud $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu F$



Napětí $U_2(p)$ vypočítáme ze vzorce pro dělič napětí:

$$U_2(p) = U(p) \frac{\frac{1}{pC} + R_2}{R_1 + \frac{1}{pC} + R_2} = \frac{U}{p} \frac{1 + pR_2C}{1 + p(R_1 + R_2)C} = \frac{10}{p} \frac{1 + 10^{-2}p}{1 + 2 \cdot 10^{-2}p} = \frac{10}{p} \frac{50 + 0.5p}{50 + p} =$$

$$= \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 50} = \frac{10}{p} + \frac{-5}{p + 50}$$

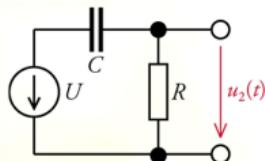
$$A = \left. \frac{500 + 5 \cdot 0}{(p)(p + 50)} \right|_{p=0} = \frac{500}{50} = \underline{\underline{10}}$$

$$u_2(t) = \underline{\underline{10 - 5e^{-50t} \cdot 1(t)}}$$

$$B = \left. \frac{500 + 5 \cdot (-50)}{(-50)(p + 50)} \right|_{p=-50} = \frac{250}{-50} = \underline{\underline{-5}}$$

Příklad – derivační článek – řešení s energetickou počáteční podmínkou:

Obvod podle obrázku je napájen ze skokového zdroje napětí $10 \cdot 1(t)$ V. Vypočítejte časový průběh napětí $u_2(t)$, pokud $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$



$$\begin{aligned} u_C(0_+) &= 0 \text{ V} \\ u_C(\infty) &= u_{pc} = 10 \text{ V} \\ \tau &= RC = 10000 \cdot 10^{-6} = 10 \text{ ms} \end{aligned}$$

$$u_C(t) = [u_C(0_+) - u_{pc}(0)] e^{\frac{-t}{\tau}} + u_{pc}(t) = [0 - 10] e^{-100t} + 10 = \underline{\underline{10(1 - e^{-100t})}}$$

Napětí $u_2(t)$ je na rezistoru R , musíme ho proto spočítat – z proudu, který protéká obvodem:

$$u_2(t) = Ri(t) = RC \frac{du_C(t)}{dt} = 10^4 \cdot 10^{-6} \frac{d}{dt} [10(1 - e^{-100t})] = \underline{\underline{10e^{-100t}}}$$

řešení s využitím Laplaceovy transformace:

Napětí $U_2(p)$ vypočítáme ze vzorce pro dělič napětí:

$$\begin{aligned} U_2(p) &= U(p) \frac{R}{\frac{1}{pC} + R} = \frac{U}{p} \frac{pRC}{1 + pRC} = 10 \cdot \frac{10^{-2}}{1 + 10^{-2}p} = \frac{10}{p + 100} \\ u_2(t) &= \underline{\underline{10e^{-100t} \cdot 1(t)}} \end{aligned}$$

Rekapitulace vztahu mezi napětím a proudem na základních obvodových prvcích:

rezistor	kapacitor	induktor
$u(t) = R i(t)$	$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + \underline{u_c(0)}$	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$
$i(t) = \frac{u(t)}{R}$	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau + \underline{i_L(0)}$

Laplaceova transformace výše uvedených vztahů:

$U(p) = RI(p)$	$U(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_c(0)}{p}$	$U(p) = pLI(p) - \underline{i_L(0)}$
$I(p) = \frac{U(p)}{R}$	$I(p) = pC U(p) - \underline{Cu_c(0)}$	$I(p) = \frac{U(p)}{pL} + \frac{i_L(0)}{p}$

Pro úplnost si připomeňme i vztahy ve frekvenční oblasti s fázory (tedy v HUS) – na rozdíl od předchozích dvou matematických popisů přes zjednodušenou podobnost se jedná o **popis ustáleného stavu**, takže tuto metodu rozloženě nemůžeme použít k řešení přechodných dějů

$\mathbf{U} = R \mathbf{I}$	$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$	$\mathbf{U} = j\omega L \mathbf{I}$
$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{R}$	$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{U}$	$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{j\omega L}$