



Komplexní / čísla

$$i^2 = -1$$

$$z = x + yi \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\bar{z} = x - yi$$

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

Tvorzení /

$$\textcircled{1} \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$\textcircled{5} \quad z\bar{z} = |z|^2 > 0$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\textcircled{6} \quad |z| = |\bar{z}|$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\textcircled{7} \quad |zw| = |z||w|$$

$$\textcircled{4} \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}; w \neq 0$$

$$\textcircled{8} \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}; w \neq 0$$

Funkce

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y) \quad ; \quad u, v \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(z) &= u \\ \operatorname{Im} f(z) &= v \end{aligned}$$

Limita

f má limitu $\sim L \in \mathbb{C}$, pokud existuje prstencové okolí $P(z_0)$, takové, že se každý bod $z \in P(z_0)$ zobrazí do okolí $U(L)$.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

f je funkce definovaná na okolí $U(z_0)$. f je spojita v z_0 , pokud

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

pak f je spojita na množině $M \subseteq \mathbb{C}$, jestliže je spojita v každém bodě množiny M .

Derivace - velké rozdíl, oproti reálné analýze

pokud existuje vlastní limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

pak její hodnota je derivace $f'(z_0)$ nebo $\frac{df}{dz}(z_0)$,
jestli $f'(z_0)$ existuje, pak je f diferencovatelná v bodě z_0 .

$$f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$$

$$f^{(n)}(z_0) = (f^{(n-1)})'(z_0) \quad ; n \in \mathbb{N}$$

Tvrzení derivace

$$\textcircled{1} (f+g)' = f' + g'$$

$$\textcircled{3} \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\textcircled{2} (fg)' = f'g + fg'$$

$$\textcircled{4} (f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

C-R podmínky

$$f = u(x, y) + i v(x, y) \quad z_0 = x_0 + y_0 i$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Holomorfní funkce

je funkce na $\Omega \subset \mathbb{C}$, pokud je diferencovatelná v každém bodě $z \in \Omega$.
Holomorfní na \mathbb{C} je celistvá.

Harmonická fce

fce je harmonická, pokud má spojité druhé parciální derivace na Ω a $\Delta \varphi = 0$ na Ω .

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Laurentova řada

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Konverguje absolutně!

regulární $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

hlavní $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Konvergence

$$\rho(z_0; r, R) ; r < |z-z_0| < R$$

metrikou \rightarrow



dont $x d$

Tvrzení

① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z-z_0| < R$
diverguje pro $|z-z_0| > R$

② $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z-z_0| < r$
diverguje pro $|z-z_0| > r$

Izolovaná Singulárita

pokud je f holomorfni' na prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu z_0
 a v bode z_0 nemá' derivaci.

Klasifikace

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ má } P(z_0), \quad z_0 \text{ je:}$$

- ① odstranitelná singulárita, jestliže $a_n=0$ pro každé $n < 0$
- ② pol', jestliže $\exists k \in \mathbb{N}, \text{ že } a_{-k} \neq 0 \text{ a } a_n=0 \text{ pro každé } n < -k, k \text{ se nazývá rád polu}$
- ③ podstatná singulárita, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$

Koren nasobnosti

jestliže $f(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \text{ a } f^{(k)}(z_0) \neq 0,$
 pak je z_0 k -nasobný kořen $\left(\text{počet derivací}=0 \Rightarrow k.n.\right)$

$\frac{f}{g}, f(z_0) \text{ má nasobnost } m$
 $g(z_0) \text{ má nasobnost } n$

odstranitelná singulárita: $m \geq n$

pol': $m < n$

Reziduum

Laurentův rozvoj $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, a_{-1} koeficient vle reziduum fce f v bodě z_0 , znází se $\text{res}_{z_0} f$.

Vždy konečné číslo a dobře definované.

$$\text{res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}$$

Dosazovací metoda

pokud má g v z_0 jedno našobný kořen, potom

$$\text{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \quad \begin{array}{l} \text{pro vícenásobný kořen} \\ \text{jmenovatele nelze použít} \end{array}$$

Reziduova věta

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast, C je kl. orientovaná

Jordanova křivka ležící v Ω . f je holomorfní na $\Omega \setminus S$

kde $S = \{z \in \text{Int } C : z \text{ je izol. sing. } f\}$, S je konečná množina

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{w \in S} \underbrace{\text{rezidua}}_{\text{rezidu ležící v } C} f(z)$$

nezávisí na samotné křivce,
ale na singularitách uvnitř

oscilující exponenciálna

① $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$$

② $\alpha < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$$

Fourierova transformace

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt, \quad w \in \mathbb{R}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

$$\lim_{w \rightarrow \pm\infty} |\hat{f}(w)| = 0$$

Tvrzení posun

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{F}[f(t-a)](w) = e^{-iwa} \mathcal{F}[f(t)](w)$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{F}[e^{iat} f(t)](w) = \mathcal{F}[f(t)](w-a)$$

$$\textcircled{3} \quad \mathcal{F}[f(at)](w) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{w}{a}\right)$$

derivace obrazu

$$\mathcal{F}[tf(t)](w) = i \frac{d}{dt} \mathcal{F}[f(t)](w)$$

obraz derivace

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](w) = (iw)^n \mathcal{F}[f(t)](w)$$

Inverzní \mathcal{F} -transformace

$$\check{f}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iwt} dt$$

$$\check{f}(w) = \mathcal{F}^{-1}[f(t)](w)$$

znamíme \hat{f} , pak známe i f a obráceně

$$\mathcal{F}[f(t)](w) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[f(t)](-w)$$

$$Vlta o inverzi: f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(w)](w)$$

Kohodivce

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Obrat konvoluce

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)](w) = \hat{f}(w) \hat{g}(w)$$

ve zkoušce není počítání dle definice!

Laplaceova Transformace

$$\mathcal{L}[f] = F \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{Heavisideova funkce}$$

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Tvrzení /

(1) Pro $a > 0$: $\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right)$

(2) $a \in \mathbb{C}$: $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(s)](s-a)$

posun v zornu

(3) Pro $a > 0$: $\mathcal{L}[f(t-a)\mathbb{1}(t-a)](s) = e^{-as} \mathcal{L}[f(t)](s)$

(4) Pro $a > 0$: $\mathcal{L}[f(t)\mathbb{1}(t-a)](s) = e^{-as} \mathcal{L}[f(t+a)](s)$

Derivace obrazu

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)](s)$$

Obraz derivace

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}[f'''(t)](s) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Laplaceův vzor

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$$

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad \text{je rac. frak., st } Q > \text{st } P \\ z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \quad \text{jedou polý } F(s). \quad \text{Potom}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \sum_{k=1}^n \text{res}_{s=z_k} F(s) e^{st}$$

Hledáme-li vžor k fci $F(s) = G(s) e^{-as}$, kde $a > 0$, nejprve najdeme vžor $g(t)$ k funkci $G(s)$. Hledaný vžor $f(t)$ potom je $f(t) = g(t-a) \mathbb{1}(t-a)$, což platí z pravidla o posunu.

slide
14/20

Konvoluce L-transformace

$$(f * g) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

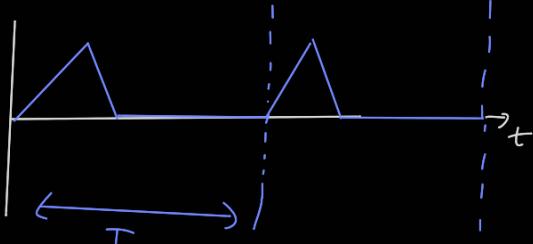
$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = F(s) \cdot G(s)$$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Obraz konvoluce

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s)$$

L-Obraz periodické fce



$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\int_0^T f(t) e^{st} dt}{1 - e^{-sT}}$$

$$f(t) \cdot (\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-T))$$

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{1-e^{st}} \mathcal{L}[f(t)(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-T))](s)$$

$$\underline{\text{Laplaceův vžor}} \quad \frac{P(s)}{Q(s)} \quad \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

St Q > st P ; $\tau_k = \frac{2k\pi i}{T}$; w_1, \dots, w_n jsou kořeny Q, kdežto nejsou mezi τ_k

$$f(t) = \sum_{j=1}^n \text{res}_{s=w_j} F(s) e^{st} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{res}_{s=\tau_k} F(s) e^{st}$$

\mathcal{L} -Transformace

je lineární

\mathcal{L} - spojita' $F(s)$

\mathcal{L} - diskrétní $F(z)$

$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ posloupnost
je nejryše exp. řádu

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \quad ; \quad z \in \cup(\omega)$$

$$\mathcal{L}[a_n](z) = F(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_k}{z^k}$$

pokud $(a_n)_{n=0}^{\infty} \neq (b_n)_{n=0}^{\infty}$, pak jeji \mathcal{L} -transformace jsou také jiné

\mathcal{L} je bezzávisitelná

Inverzní \mathcal{L}

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}[\alpha^n a_n](z) = \mathcal{L}[a_n]\left(\frac{z}{\alpha}\right) \quad \text{škálování' vztahu}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L}[n a_n](z) = -z \frac{d}{dz} \mathcal{L}[a_n](z) \quad \text{derivace obratu}$$

Obráz posunuté' posloupnosti

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[a_{n+k}](z) &= z^k \left(\mathcal{L}[a_n](z) - a_0 - \frac{a_1}{z} - \dots - \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} \right) = \\ &= z^k \mathcal{L}[a_n](z) - a_0 z^k - a_1 z^{k-1} - \dots - a_{k-1} z \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[a_{n+1}](z) = z F(z) - a_0 z$$

$$\mathcal{L}[a_{n+2}](z) = z^2 F(z) - a_0 z^2 - a_1 z$$

$$\mathcal{L}[a_{n+3}](z) = z^3 F(z) - a_0 z^3 - a_1 z^2 - a_2 z$$

takdy byl
konec pořadnísky 19.12.

Inverzní \mathcal{L}

10/16

$F \in H_\infty$ je posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}_0$ takova, že $\mathcal{L}[a_n](z) = F(z)$

znamíme $a_n = \mathcal{L}^{-1}[F(z)](n)$

$$\text{integrální vyjádření'} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} dz ; \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{metoda residui'} \quad a_n = \mathcal{L}^{-1}[F(z)](n) = \sum_{z_j} \text{res}_{z_j} F(z) z^{n-1}$$

z_j jsou izolované sing. funkce $F(z) z^{n-1}$

Convolution \mathcal{L}

$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti
Koeficienty jsou definovány:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Krátkce $c_n = a_n * b_n$

pro každou $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ platí

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} * (1, 0, 0, 0, \dots) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} * (0, 1, 0, 0, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots)$$

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} * (0, 0, 1, 0, \dots) = (0, 0, a_0, a_1, \dots)$$

Obraz konvoluce

$$\mathcal{L}[a_n * b_n](z) = \mathcal{L}[a_n](z) \cdot \mathcal{L}[b_n](z)$$

THE END

may the final be your final final

připomínky / opravy @ Orrí