Deadly QUESTIONS - Komplexná analýza
Nevieš ? ..... Letíš

1.) Množina komplexných čísel

Komplexní čísla

Definice (neformální)

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu dvojčlenů $x + yi$, kde x, y jsou reálná čísla, se kterými počítáme jako s reálnými dvojčleny za využití pravidla $i^2 = -1$.
Množinu komplexních čísel značíme symbolem $\mathbb{C}$.

- Prvek i se nazývá **imaginární jednotka**.
- Terminologie a značení:
  - $z = x + iy$... **algebraický tvar** komplexního čísla z.
  - x... **reálná část** komplexního čísla z. Píšeme $\mathrm{Re}\, z = x$.
  - y... **imaginární část** komplexního čísla z. Píšeme $\mathrm{Im}\, z = y$.
- Ztotožňujeme $x = x + 0i$ a $i = 1i$.

Upozornění

Reálná i imaginární část komplexního čísla jsou reálná čísla!

Definice (formální)

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ vybavenou operacemi

- sčítání: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- násobení: $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

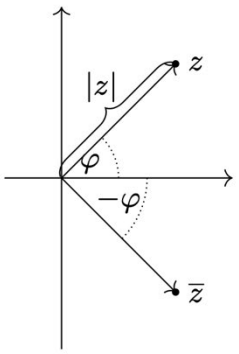
- Ztotožňujeme $x = (x, 0)$ a $i = (0, 1)$.
- Je třeba ověřit, že komplexní čísla mají všechny pěkné vlastnosti jako asociativita a komutativita násobení a sčítání, distributivita atd. a že skutečně rozšiřují při ztotožnění $x = (x, 0)$ operace sčítání a násobení reálných čísel.
- Vztah mezi neformální a formální definicí je $x + yi \cong (x, y)$.

2.) Komplexné združenie a absolútna hodnota komplexného čísla

Komplexní sdružení a absolutní hodnota

Definice

Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}$. **Komplexně sdruženým číslem** k číslu z nazveme číslo $\bar{z} = x - iy$. **Absolutní hodnotou** (nebo také modulem či velikostí) komplexního čísla z rozumíme číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

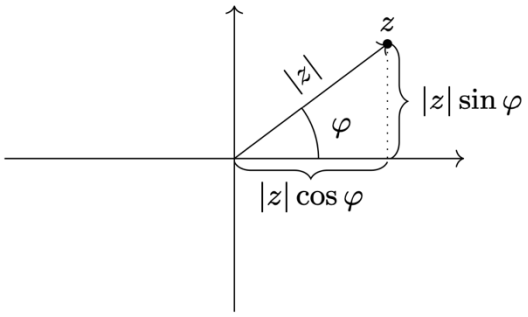


- $z \mapsto \bar{z}$... zrcadlení kolem reálné osy
- $z \mapsto |z|$... vzdálenost od počátku

3.) Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla

Goniometrický tvar komplexního čísla

Nechť z je nenulové komplexní číslo.



Z obrázku vidíme, že

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

což odpovídá bodu $(|z|\cos\varphi, |z|\sin\varphi)$ v rovinně (vzpomeňte si na polární souřadnice).

Pro $z \neq 0$ zavádíme následující terminologii a značení:

- $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$... **goniometrický tvar** komplexního čísla z.
- φ... **argument** komplexního čísla z.
- $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}$... **množina všech argumentů** komplexního čísla z.
- $\varphi \in (\operatorname{Arg} z) \cap (-\pi, \pi]$ se nazývá **hlavní hodnota argumentu** komplexního čísla z a značí se $\arg z$.

Příklad

Ať $z = -1 + i$. Pak $|z| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ a $\arg z = \frac{3\pi}{4}$.

4.) Derivace komplexní funkce

Derivace

Upozornění

Zásadní rozdíly od reálného oboru!

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je komplexní funkce definovaná na okolí $U(z_0)$. Pokud existuje vlastní limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme **derivací** funkce f v bodě z_0. Značíme ji $f'(z_0)$ nebo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$.
Existuje-li $f'(z_0)$, pak říkáme, že f je **diferencovatelná** v bodě z_0.

Vyšší derivace definujeme jako v reálné analýze rekurzivně:

- $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$.
- $f^{(n)}(z_0) = (f^{(n-1)})'(z_0)$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Tvrzení

Jsou-li f a g diferencovatelné v bodě z, potom:

1. $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$;
2. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, kdykoliv je $g(z) \neq 0$.

Je-li g diferencovatelná v bodě z a f diferencovatelná v bodě $g(z)$, pak $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$.

Příklad

Uvažme funkci $f(z) = z^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $z \in \mathbb{C}$ je

$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

Tvrzení

Jestliže f je diferencovatelná v bodě z, pak je v z spojitá.

5.) Holomorfní funkce

Holomorfní funkce

Definice

Komplexní funkce f se nazve **holomorfní** na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, jestliže je diferencovatelná v každém bodě $z \in \Omega$.
Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá **celistvá**.

Příklad

1. Polynom $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, kde $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}_0$, je celistvá funkce.
2. Racionální funkce $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, kde P, Q jsou polynomy a $Q \not\equiv 0$, je holomorfní funkce na svém definičním oboru $D = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.

Cauchyovy-Riemannovy podmínky

Věta (Nutná podmínka diferencovatelnosti)

Nechť $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je komplexní funkce definovaná na nějakém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Je-li f diferencovatelná v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$, potom $u = \operatorname{Re} f$ a $v = \operatorname{Im} f$ mají parciální derivace v bodě (x_0, y_0) a splňují v tomto bodě tzv.
Cauchyovy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Navíc platí, že

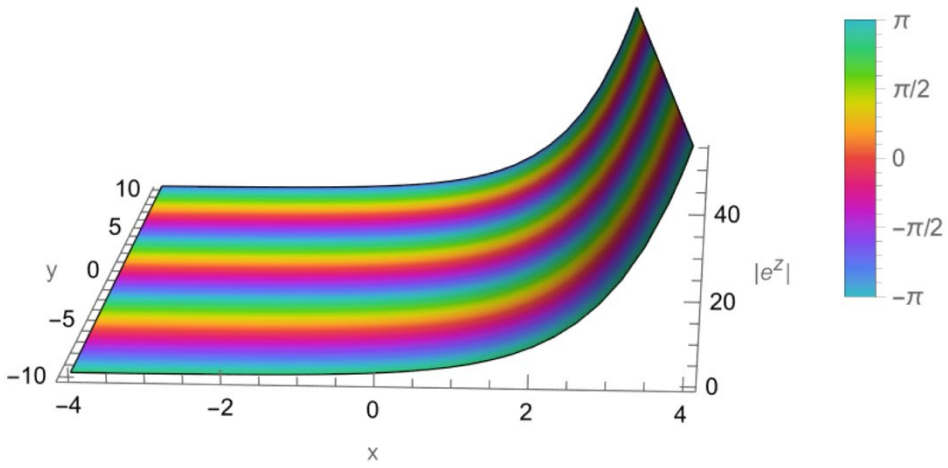
$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

6.) Exponenciální funkce komplexní proměnné

Exponenciála

Definice

Komplexní funkce $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se nazývá **exponenciální funkce** (krátce **exponenciála**).



Tvrzení

Pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$ platí

1. $e^{z+w} = e^z e^w$;
2. $|e^z| = e^x$, kde $x = \operatorname{Re} z$;
3. $e^z \neq 0$;
4. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;
5. Pro $n \in \mathbb{Z}$ platí $(e^z)^n = e^{nz}$;
6. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$;
7. $e^z = e^w$ právě tehdy, když $w = z + 2k\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

Důkaz: Viz cvičení. ■

Upozornění

Na rozdíl od reálného oboru je komplexní exponenciála periodická!

Tvrzení

Exponenciála je celistvá funkce a platí $(e^z)' = e^z$ pro každé $z \in \mathbb{C}$.

7.) Logaritmus komplexní proměnné a jeho hlavní hodnota

Logaritmus

Příklad

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Komplexní číslo w je řešením rovnice $e^w = z$ právě tehdy, když $w = \ln|z| + i\varphi$ pro $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Definice

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

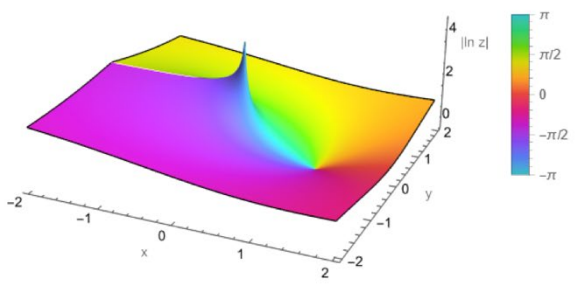
- Komplexní funkci $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ nazýváme **hlavní hodnotou logaritmu**.
- Množinu $\operatorname{Ln} z = \{\ln z + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$ nazýváme **mnohoznačný logaritmus**.

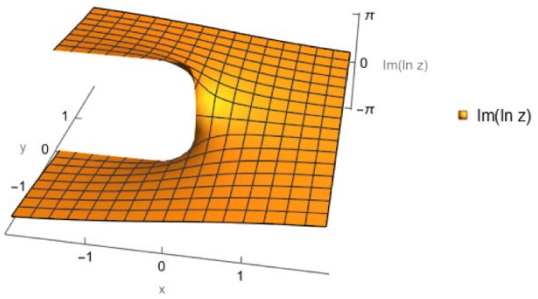
- Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme občas říkat „logaritmus“ místo hlavní hodnoty logaritmu.
- Přiřazení $z \mapsto \operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$, je tzv. „mnohoznačná funkce“.

Příklad

$\ln(1) = 0$, $\ln(-1) = i\pi$, $\ln(i) = i\frac{\pi}{2}$.

- Komplexní funkce $\ln$ není spojitá v žádném bodě množiny $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$.





Tvrzení

Komplexní funkce $\ln z$ je holomorfní na

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$$

a pro každé $z \in \Omega$ platí $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

Upozornění

Obecně neplatí $\ln(zw) = \ln z + \ln w$.

Příklad

Pro $z = w = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ je $\ln(zw) = -\frac{i\pi}{2} \neq \frac{3i\pi}{2} = \ln z + \ln w$.

- Obecně platí pouze $\operatorname{Ln}(zw) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} w$.

Upozornění

Platí $e^{\ln z} = z$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale obecně neplatí $\ln e^z = z$.

Příklad

$\ln\left(e^{2\pi i}\right) = 0 \neq 2\pi i$.

- Obecně platí pouze: je-li $z \neq 0$, $\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]$, pak $\ln e^z = z$.

8.) Krivkový integrál v komplexní rovině

Křivkový integrál v komplexní rovině

Definice

Nechť C je křivka s parametrizací $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ a nechť f je spojitá komplexní funkce na C. Pak **křivkový integrál** funkce f podél křivky C definujeme předpisem

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci. Souhlasné parametrizace křivky dávají stejnou hodnotu integrálu. Neformálně, „souhlasné = stejný směr a stejný počet oběhů“.

Příklad

Nechť $n \in \mathbb{Z}$ a C je kladně orientovaná kružnice se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a poloměrem $R > 0$. Potom

$$\int_C (z-z_0)^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & \text{je-li } n = -1; \\ 0 & \text{je-li } n \neq -1. \end{cases}$$

Křivkový integrál v komplexní rovině

Tvrzení (Základní vlastnosti křivkového integrálu)

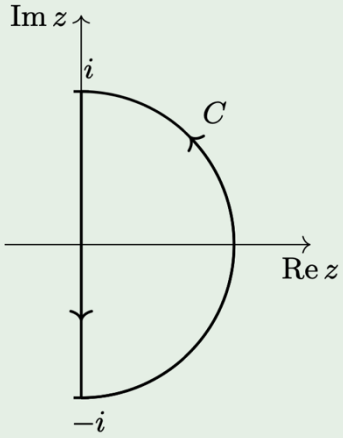
Nechť C je křivka. Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$ a f, g jsou spojité komplexní funkce na C. Potom:

1. $\int_C \alpha f(z) + g(z)\,\mathrm{d}z = \alpha \int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_C g(z)\,\mathrm{d}z$;
2. $\int_{-C} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$;
3. $\int_{C+K} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_K f(z)\,\mathrm{d}z$, kdykoli K je křivka, jejíž počáteční bod je koncovým bodem křivky C, a f je navíc spojitá na $C + K$;
4. $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq L(C) \max_{z\in C} |f(z)|$.

Důkaz: Viz přednáška (pouze 4. bod, zbytek domácí cvičení) ■

Příklad

Nechť C je křivka zadaná následujícím obrázkem:



Pak $\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z = i\pi$.

9.) Mocninná řada a jej polomer konvergence

Mocninné řady – základní definice

Definice

Řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde z je komplexní proměnná, se nazývá **mocninná řada** se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$.

- z_0 ... **střed mocninné řady**
- Pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ řada komplexních čísel.
- Formálně se jedná o nekonečný polynom $a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots$
- Čísla a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, jsou **koeficienty mocninné řady**.

Otázka

Pro jaké $z \in \mathbb{C}$ mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konverguje (absolutně) či diverguje?

Definice

- Říkáme, že mocninná řada **(absolutně) konverguje na** množině $M \subseteq \mathbb{C}$, jestliže (absolutně) konverguje v každém bodě množiny M.
- Jestliže mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konverguje na množině $M \subseteq \mathbb{C}$, pak jejím **součtem na** M rozumíme funkci $f(z)$ definovanou předpisem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in M.$$

- Připomeňme, že $z^0 = 1$ pro každé $z \in \mathbb{C}$. Speciálně $0^0 = 1$.
- Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ vždy absolutně konverguje ve svém středu $z = z_0$.

Příklad (Geometrická řada)

Je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

1. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| < 1$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konverguje absolutně a platí
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$
2. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| \geq 1$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ diverguje.

- Geometrická řada, což je mocninná řada se středem $z_0 = 0$, konverguje absolutně na kruhu. To není náhoda...

Poloměr konvergence a kruh konvergence

Věta (O poloměru konvergence mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ je mocninná řada. Existuje právě jedno $R \in [0, +\infty]$ takové, že současně platí:

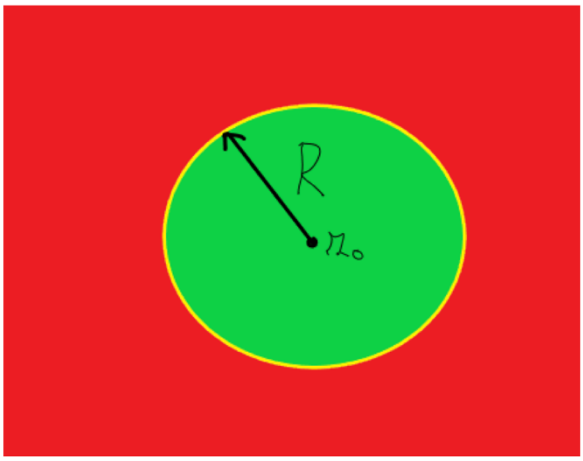
- řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konverguje absolutně na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$;
- řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ diverguje na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$.

- Je-li $R \in (0, \infty)$, mocninná řada konverguje absolutně na kruhu $U(z_0, R)$.
- Je-li $R = +\infty$, mocninná řada konverguje absolutně na $\mathbb{C}$.
- Je-li $R = 0$, mocninná řada diverguje všude na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Definice

Číslo R nazýváme **poloměr konvergence** mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Množinu $U(z_0, R)$ nazýváme **kruh konvergence** mocninné řady.

- Situace, když $R \in (0, \infty)$:



- absolutně konverguje, diverguje, obecně nelze rozhodnout (nebudeme vyšetřovat).
- $R = \infty \ldots$ zelená je celá komplexní rovina
- $R = 0 \ldots$ červené je vše kromě středu z_0

Příklad

1. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ldots R = 1,\ z_0 = 0.$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(z-i)^n \ldots R = 2,\ z_0 = i.$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ldots R = \infty,\ z_0 = 0.$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z+2-i)^n \ldots R = 0,\ z_0 = -2+i.$

- Často potkáváme i mocninné řady v „nekanonickém tvaru“. Např.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (z-5)^{2n} = (z-5)^2 + 4(z-5)^4 + 9(z-5)^6 + \cdots .$$

Tato řada má (rozepsáný) kanonický tvar

$$0+0(z-5)+(z-5)^2+0(z-5)^3+4(z-5)^4+0(z-5)^5+9(z-5)^6+\cdots$$

Otázka

Mocninné řady jsou na svém kruhu konvergence „nekonečné polynomy“. Co vše s nimi můžeme dělat jako s polynomy?

10.) Taylorova řada

Definice

Nechť funkce f má derivace všech řádů v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ se nazývá **Taylorova řada** funkce f o středu z_0.

- Je-li funkce $f(z)$ holomorfní na okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$, potom $f(z)$ se rovná své Taylorově řadě o středu z_0 na tomto okolí.

Tvrzení (Jednoznačnost rozvoje do mocninných řad)

Jestliže platí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ na nějakém okolí $U(z_0)$, pak $a_n = b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad (Metoda neurčitých koeficientů)

Je dána rovnice $f'(z) = 2zf(z)$ a počáteční podmínka $f(0) = 1$. Její řešení ve tvaru mocninné řady je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$.

11.) Laurentova řada a jej HLAVNÁ a REGULÁRNA časť

Laurentovy řady

Definice

- Řada tvaru
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$
kde z je komplexní proměnná, se nazývá **Laurentova řada** se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$.
- Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá **regulární část** Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.
- Řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ se nazývá **hlavní část** Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

- z_0 ... **střed Laurentovy řady**
- a_n ... **koeficienty Laurentovy řady**
- Regulární část Laurentovy řady je mocninná řada. Speciálně, obsahuje pouze nezáporné mocniny $(z-z_0)$.
- Hlavní část Laurentovy řady obsahuje záporné mocniny $(z-z_0)$. Speciálně, není to mocninná řada v proměnné z.

12.) Izolovaná singularita a jej typy

Izolované singularity

Definice

Řekneme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je **izolovaná singularita** funkce f, jestliže f je holomorfní na nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu z_0 a v bodě z_0 nemá derivaci.

Příklad

1. Funkce $\frac{\sin z}{z}$ má izolovanou singularitu v 0.
2. Funkce $\frac{1}{z}$ má izolovanou singularitu v 0.
3. Funkce $\frac{1}{(z-2)^5}$ má izolovanou singularitu v 2.
4. Funkce $e^{\frac{1}{z}}$ má izolovanou singularitu v 0.
5. Funkce $\ln z$ nemá izolovanou singularitu v 0.

Otázka

Lze nějak klasifikovat „jak špatná“ je izolovaná singularita? Je izolovaná singularita funkce $e^{\frac{1}{z}}$ v 0 „horší“ než ta funkce $\frac{1}{z}$?

Klasifikace izolovaných singularit

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ na $P(z_0)$. Řekneme, že z_0 je:

1. **odstranitelná singularita**, jestliže $a_n = 0$ pro každé $n < 0$;
2. **pól**, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -k$. Číslo k se nazývá **řád** (nebo také **násobnost**) pólu;
3. **podstatná singularita**, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných celých čísel n.

- Pól řádu k se také nazývá k-**násobný pól**.
- Pól řádu 1 se také nazývá **jednoduchý pól**.
- Neformálně:
  - odstranitelná singularity. . . singularita je jen zdánlivá, lze ji odstranit;
  - pól řádu k. . . funkce se blízko z_0 chová jako $\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$;
  - podstatná singularita . . . funkce se blízko z_0 chová velmi divoce, vážné problémy

Příklad

1. Funkce $\frac{\sin z}{z}$ má odstranitelnou singularitu v 0.
2. Funkce $\frac{1}{z}$ má jednoduchý pól v 0.
3. Funkce $\frac{1}{(z-2)^5}$ má pól řádu 5 v 2.
4. Funkce $e^{\frac{1}{z}}$ má podstatnou singularitu v 0.

- Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj funkce na prstencovém okolí izolované singularity, snadno ji můžeme klasifikovat.
- V případě odstranitelných singularit a pólů si ukážeme, jak je klasifikovat i bez znalosti rozvoje.
- Funkce $\frac{z^8(z-1)}{z^7(z-1)^3}$ má v bodě:
  - 0 odstranitelnou singularitu. Všimněme si, že 0 je 8 násobný kořen čitatele, 7 násobný kořen jmenovatele a $8 \geq 7$;
  - 1 pól řádu 2. Všimněme si, že 1 je jednoduchý kořen čitatele, 3 násobný kořen jmenovatele, $1 < 3$ a $3 - 1 = 2$.

Póly a odstranitelné singularity

- Uvažme polynom $P(z) = (z - z_0)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. z_0 je kořen násobnosti k a platí $P(z_0) = P'(z_0) = \cdots = P^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $P^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní a ne všude nulová na $U(z_0)$. Řekneme, že f má v z_0 **kořen násobnosti** $k \in \mathbb{N}_0$, jestliže $f(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Také říkáme, že z_0 je k-**násobný kořen**.

- z_0 je k-násobný kořen polynomu $P(z)$ právě tehdy, když $P(z) = (z - z_0)^k Q(z)$, kde $Q(z)$ je polynom takový, že $Q(z_0) \neq 0$.

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní na okolí $U(z_0)$. Pak z_0 je k-násobný kořen právě tehdy, když existuje holomorfní funkce g na $U(z_0)$ taková, že $g(z_0) \neq 0$ a pro všechna $z \in U(z_0)$ platí $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$.

Tvrzení (odstranitelné singularity a póly pomocí násobností kořenů)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní na okolí $U(z_0)$. Jestliže f má v z_0 kořen násobnosti $m \in \mathbb{N}_0$ a g má v z_0 kořen násobnosti $n \in \mathbb{N}$, potom funkce $\frac{f}{g}$ má v bodě z_0

- odstranitelnou singularitu, jestliže $m \geq n$;
- pól řádu $n - m$, jestliže $m < n$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

1. $\frac{\sin z}{z}$ má v 0 odstranitelnou singularitu.
2. $\frac{1-\cos z}{z^8+z^5}$ má v 0 trojnásobný pól.
3. $\frac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}}$ má jednoduché póly v bodech $\frac{1}{2n\pi i}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Bod 0 není izolovanou singularitou funkce $\frac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}}$.

Izolované singularity a limita

Věta (Charakterizace typů izolovaných singularit)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f.

1. Funkce f má v z_0 odstranitelnou singularitu právě tehdy, když $\lim_{z \to z_0} f(z)$ je konečná.
2. Funkce f má v z_0 pól právě tehdy, když $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.
   Funkce f má v z_0 k-násobný pól právě tehdy, když $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ je konečná a nenulová.
3. Funkce f má v z_0 podstatnou singularitu právě tehdy, když $\lim_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje.

Tvrzení (O odstranění odstranitelné singularity)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je odstranitelná singularita funkce f. (Do)/(Pře)definujeme-li funkci f v bodě z_0 hodnotou $\lim_{z \to z_0} f(z)$, pak vzniklá funkce je holomorfní na $U(z_0)$.

Reziduum

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce $f(z)$ a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

na $P(z_0)$. Koeficient a_{-1} se nazývá **reziduum** funkce f v bodě z_0 a značí se $\operatorname{res}_{z_0} f$.

- Budeme-li chtít zdůraznit proměnnou, napíšeme $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$.

Příklad

1. $\operatorname{res}_1 \frac{1}{(z-1)^3} = 0.$
2. $\operatorname{res}_0 \frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{2}.$

- Pokud je $z_0 \in \mathbb{C}$ odstranitelná singularita funkce f, potom $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$. Opačná implikace ale neplatí. Viz 1. příklad výše.

Výpočet rezidua v pólech

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól řádu k funkce f. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Speciálně:
  - je-li z_0 jednoduchý pól, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$;
  - je-li z_0 dvojnásobný pól, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^2 f(z)]'$.

Příklad

Nechť $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)^2}$.

1. $\operatorname{res}_1 f(z) = \frac{1}{4}.$
2. $\operatorname{res}_{-1} f(z) = -\frac{1}{4}.$

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní na $U(z_0)$. Jestliže g má v z_0 jednonásobný kořen, potom $\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.

Příklad

$$\operatorname{res}_{\pi} \frac{\cos(z-\pi)}{1+e^{iz}} = i.$$

Upozornění

Reziduum v izolované singularitě je vždy dobře definováno a je to konečné číslo. Nemůže se stát, že „neexistuje“ nebo že vyjde ∞.

Tvrzení (l'Hospitalovo pravidlo, „$\frac{0}{0}$“)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní na $U(z_0)$, splňují $f(z_0) = g(z_0) = 0$ a g není identicky 0 na $U(z_0)$. Potom

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

14.) Fourierova řada

Fourierovy řady, reálný tvar, opakování

- Mějme funkci $f\colon [a, a+T] \to \mathbb{R}$, kde $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$, která je absolutně integrovatelná na $[a, a+T]$, tj.

$$\int_a^{a+T} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

- Její Fourierova řada (v reálném tvaru) je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\right),$$

kde

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\mathrm{d}t$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

- Toto je tzv. **reálný tvar Fourierovy řady** a čísla a_n, b_n jsou **reálné Fourierovy koeficienty**.

Komplexní tvar Fourierovy řady

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Nechť $f\colon [a, a+T] \to \mathbb{C}$ je absolutně integrovatelná. Její **komplexní Fourierova řada** (nebo také **komplexní tvar Fourierovy řady**) je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}},$$

kde

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}}\,\mathrm{d}t.$$

Čísla c_n se nazývají **komplexní Fourierovy koeficienty** funkce f.

- Řadu chápeme ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty, tj. jako limitu $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$.

Vztahy mezi reálnými a komplexními koeficienty

- Jest

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

a pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},$$
$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

- Naopak

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

- Pokud funkce f nabývá pouze reálných hodnot, potom

$$c_{-n} = \overline{c_n}.$$

V takovém případě tedy

$$a_n = 2\mathrm{Re}\, c_n \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = -2\mathrm{Im}\, c_n \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

15.) Fourierova transformace a inverzní Fourierova transformace

Definice, značení, úvodní poznámky

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. **Fourierova transformace** funkce f je funkce $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t,\ \omega \in \mathbb{R},$$

konverguje-li tento integrál pro každé $\omega \in \mathbb{R}$.
Inverzní Fourierova transformace funkce f je funkce $\check{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t,\ \omega \in \mathbb{R},$$

konverguje-li tento integrál pro každé $\omega \in \mathbb{R}$.

- Integrály chápeme ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Různé zdroje, různé definice.

- Alternativně budeme také značit $\hat{f}(\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$ a $\check{f}(\omega) = \mathscr{F}^{-1}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Z linearity integrálu plyne $\widehat{f+g}(\omega) = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)$ a $\widehat{\alpha f}(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega)$ pro $\alpha \in \mathbb{C}$, existuje-li pravá strana.

Věta (Existence a spojitost Fourierovy transformace)

Je-li funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutně integrovatelná na $\mathbb{R}$, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty,$$

potom $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existuje a je to spojitá funkce na $\mathbb{R}$.

- Množinu všech absolutně integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}$ budeme značit $L^1(\mathbb{R})$.
- Je-li $f \in L^1(\mathbb{R})$, potom platí $\lim_{\omega\to\pm\infty} |\hat{f}(\omega)| = 0$ (tzv. Riemannovo–Lebesgueovo lemma).

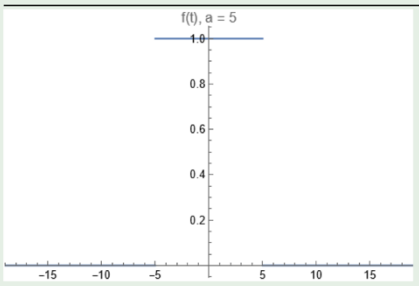
Příklad

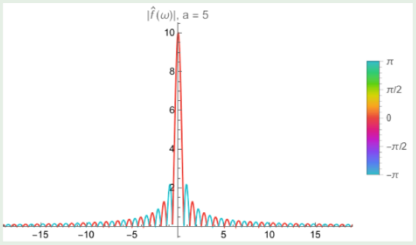
Nechť

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-a, a], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-a, a], \end{cases}$$

kde $a > 0$. Potom

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 2\frac{\sin(a\omega)}{\omega}, & \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 2a, & \omega = 0. \end{cases}$$





Příklad

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Tvrzení

1. $\mathscr{F}[f(t)](\omega) = 2\pi\mathscr{F}^{-1}[f(t)](-\omega)$.
2. Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}[f(t-a)](\omega) = e^{-i\omega a}\mathscr{F}[f(t)](\omega)$.
3. Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathscr{F}\left[e^{iat}f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}[f(t)](\omega - a)$.
4. Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\mathscr{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathscr{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Vše za předpokladu, že existuje Fourierova transformace na pravé straně.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\mathscr{F}\left[\frac{e^{it}}{1+(2t-3)^2}\right](\omega) = \frac{\pi}{2}e^{-\frac{3i(\omega-1)}{2}}e^{-\frac{|\omega-1|}{2}}$$

Z příkladu na 5. slidu víme, že $\mathscr{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$.

16.) Konvoluce funkcí definovaných na R

Konvoluce

Definice

Konvoluce funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkce $f * g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaná pro $t \in \mathbb{R}$ předpisem

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

konverguje-li tento integrál pro každé $t \in \mathbb{R}$.

- Existuje-li konvoluce $f * g$, pak $f * g = g * f$.
- Jsou-li $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, pak také $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.

Věta (O obrazu konvoluce)

Jestliže $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, potom

$$\mathscr{F}\left[(f * g)(t)\right](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

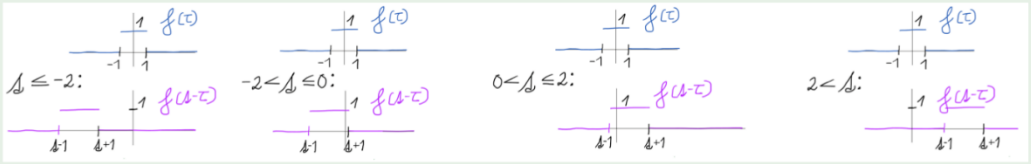
Příklad

Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

1.

$$(f * f)(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, -2] \cup (2, \infty), \\ t + 2, & t \in (-2, 0], \\ 2 - t, & t \in (0, 2]. \end{cases}$$



2.

$$\mathscr{F}\left[(f * f)(t)\right](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 4\frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}, & \omega \neq 0, \\ 4, & \omega = 0. \end{cases}$$

17.) Laplaceova transformace

Definice Laplaceovy transformace

Definice

Laplaceova transformace funkce $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ je funkce $\mathscr{L}[f] = F$ definovaná pro $s \in \mathbb{C}$ předpisem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

konverguje-li tento integrál pro alespoň jedno $s \in \mathbb{C}$.

- $\mathscr{L}[f]$ je komplexní funkce komplexní proměnné.
- Z linearity integrálu plyne $\mathscr{L}[f+g] = \mathscr{L}[f] + \mathscr{L}[g]$ a $\mathscr{L}[\alpha f] = \alpha\mathscr{L}[f]$, kdykoliv existuje pravá strana.

Příklad

1. Nechť $a \in \mathbb{C}$. Potom $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$ pro každé $s \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$.
2. $\mathscr{L}\left[\mathbb{1}\right](s) = \frac{1}{s}$ pro každé $s \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} s > 0$.

18.) Konvoluce funkcí z priestoru L_0

Konvoluce

Definice

Nechť $f, g \in L_0$. **Konvoluce** funkcí f a g je funkce $(f * g)\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

- Jsou-li $f, g \in L_0$, pak také $(f * g) \in L_0$ a $\max\{\alpha, \beta\}$, kde α je index růstu f a β je index růstu g, je index růstu $f * g$.
- Konvoluce je komutativní, tj. $f * g = g * f$.
- Při ztotožnění f a g s $f \cdot \mathbb{1}$, respektive $g \cdot \mathbb{1}$, se jedná konvoluci tak, jak jsme ji viděli u Fourierovy transformace.

Věta (O obrazu konvoluce)

Nechť $f, g \in L_0$. Platí

$$\mathscr{L}\left[(f * g)(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s)\, \mathscr{L}\left[g(t)\right](s).$$

Příklad

Nechť $f(t) = t^n$, kde $n \in \mathbb{N}_0$. Platí

$$(f * \mathbb{1})(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

- Předchozí příklad ukazuje, že $\mathbb{1}$ není jednotkový prvek operátoru konvoluce (žádná taková funkce ani neexistuje).

Příklad

- $\mathscr{L}\left[t * e^t\right](s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$.

Příklad

Nechť $y_0 \in \mathbb{R}$. Uvažme integrodiferenciální rovnici

$$y'(t) = \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau$$

s počáteční podmínkou $y(0) = y_0$. Tato úloha má pro $t \geq 0$ řešení

$$y(t) = y_0 + \frac{y_0}{2} t^2.$$

19.) Z-transformace

Definice Z-transformace

Definice

Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel je funkce $\mathscr{Z}[a_n](z) = F(z)$ definovaná jako

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \ z \in U(\infty),$$

na největším okolí ∞, na kterém Laurentova řada konverguje, pokud řada konverguje na nějakém okolí ∞.

- Z-transformace posloupnosti je komplexní funkce komplexní proměnné definovaná pomocí Laurentovy řady na okolí ∞.
- Z linearity řad okamžitě plyne $\mathscr{Z}[\alpha a_n](z) = \alpha \mathscr{Z}[a_n](z)$ a $\mathscr{Z}[a_n + b_n](z) = \mathscr{Z}[a_n](z) + \mathscr{Z}[b_n](z)$, kdykoliv existuje pravá strana.

Příklad

1. Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ platí
$$\mathscr{Z}[\alpha^n](z) = \frac{z}{z-\alpha}$$
pro $|z| > |\alpha|$. Speciálně:
$$\mathscr{Z}[1](z) = \frac{z}{z-1}$$
pro $|z| > 1$.
2. Pro $\omega \in \mathbb{C}$ platí
$$\mathscr{Z}[\sin(\omega n)](z) = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1},$$
$$\mathscr{Z}[\cos(\omega n)](z) = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1},$$
pro $|z| > e^{|\operatorname{Im}\omega|}$.
3. Jest
$$\mathscr{Z}\left[\frac{1}{n!}\right](z) = e^{\frac{1}{z}}$$
pro $|z| > 0$.

20.) Konvoluce postupnosti z priestoru Z_0

Konvoluce

Definice

Konvoluce posloupností $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, jejíž prvky jsou definovány jako

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0.$$

- Občas budeme nepřesně psát $c_n = a_n * b_n$.
- Jedná se o diskrétní analogii konvoluce, kterou jsme viděli u Laplaceovy transformace. Stačí si místo $\sum_{k=0}^{n}$ představit $\int_0^n$ a místo $a_k b_{n-k}$ si představíme $a(k)b(n-k)$.

Příklad

$$(1)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} = (n+1)_{n=0}^{\infty}$$