

E3 – Základní zákony a teorémy. Kirchhoffovy zákony. Nortonův a Theveninův teorém. Elementární a obecné metody analýzy obvodů, metoda uzlových napětí a smyčkových proudů. (Základy elektrických obvodů)

Kirchhoffovy zákony

- **1. KZ**

- o Algebraický součet proudů v libovolném uzlu elektrického obvodu je roven nule.

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

- o Zákon je důsledkem zákona zachování náboje – částice s nábojem se nemohou v uzlu hromadit, vznikat ani zanikat

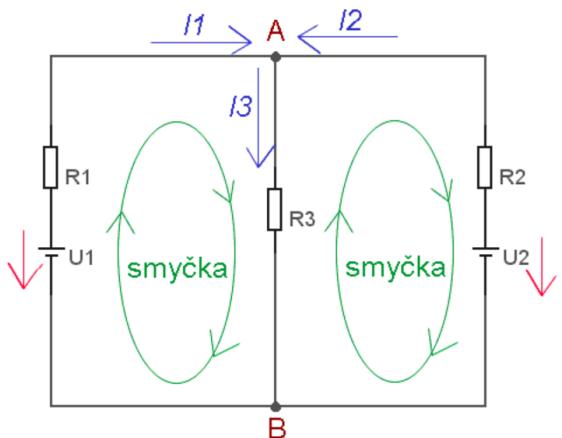
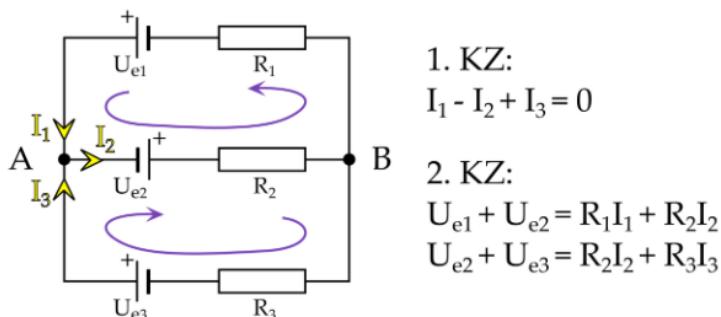
- **2. KZ**

- o V libovolném uzavřeném obvodu, který je částí elektrické sítě, je algebraický součet elektromotorických napětí U_{ej} zdrojů zapojených v obvodu roven algebraickému součtu úbytků napětí $R_k I_k$ na jednotlivých rezistorech.

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k = \sum_{j=1}^m U_{ej}$$

- o Jinak: Součet napětí na všech prvcích (aktivních i pasivních) podél uzavřené smyčky je v každém okamžiku roven nule.

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$



2. Napišeme první Kirchhoffův zákon např. pro uzel A: Proud I_1 a I_2 vtékají do uzlu (tedy kladné znaménko), proud I_3 z uzlu vytéká (tedy záporné znaménko).

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

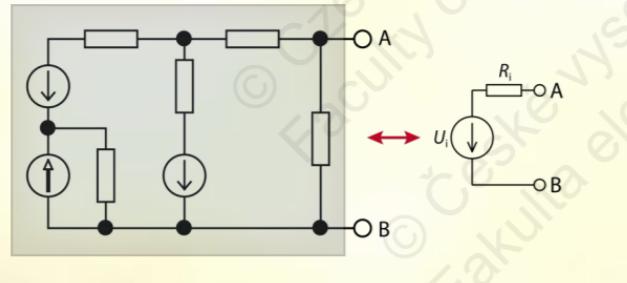
3. Napišeme druhý Kirchhoffův zákon pro obě smyčky:

levá smyčka: $R_1 I_1 + R_3 I_3 - U_1 = 0$

pravá smyčka: $-R_2 I_2 - R_3 I_3 + U_2 = 0$

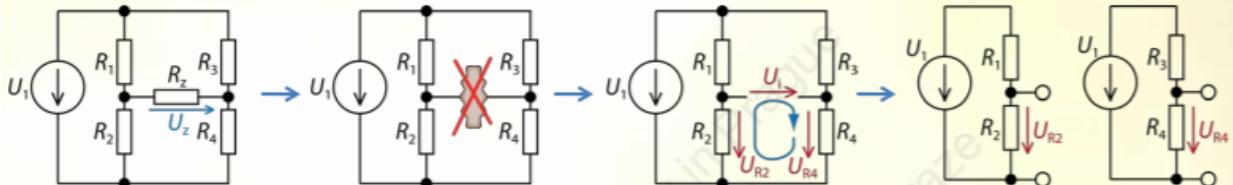
Théveninův teorém

- Théveninův teorém o náhradním zdroji napětí tvrdí, že lze libovolně složitý lineární obvod nahradit obvodem skutečného zdroje napětí, připojeným k libovolným dvěma svorkám. Tento postup se dá aplikovat v obvodech, kde je třeba spočítat pouze proud v jedné větvi obvodu.
- Na obvod se můžeme dívat jako na černou skříňku se dvěma svorkami, u které můžeme změřit právě jen napětí na prázdroj a vnitřní odpor a která se tak chová jako jediný zdroj napětí s jediným v sérii zapojeným rezistorem.



- Omezení
 - Pouze pro lineární obvody
 - Celkový výkon dodaný zdroji původního obvodu a Théveninův náhradní zdroj U_i obecně nejsou stejné – respektive výkon spotřebovaný R_i není stejný jako výkon, spotřebovaný rezistory původního obvodu
 - Náhrada je platná pouze z pohledu svorek A, B
- Pravidla o vyjmutí zdrojů
 - Ideální zdroj napětí nahrazuje ZKRATEM
 - Ideální zdroj proudu nahrazuje ROZPOJENÝMI SVORKAMI
 - Obecně není možné vyjmout řízené zdroje
- Příklad

Théveninův náhradní obvod – příklad použití 2



Úkolem je vypočítat napětí na diagonále Wheatstona můstku (*používá se pro kompenzační měření kapacity, indukčnosti, ale také např. v silničních vahách pro kontrolu přetížení nákladních vozů*)

První možností, jak vyřešit tento problém, je použití Théveninova náhradního obvodu

- Nejprve vyjmeme rezistor R_z – výpočet napětí Théveninova náhradního zdroje **z pohledu svorek rezistoru R_z** se zjednoduší na řešení dvou děličů napětí

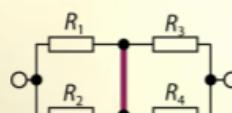
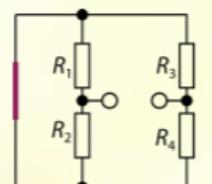
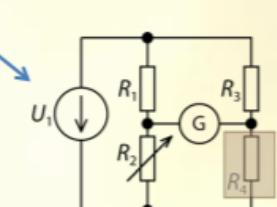
$$U_{R_2} = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad U_{R_4} = U \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

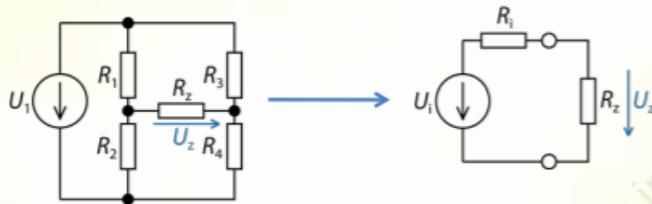
- A samozřejmě použití 2. Kirchhoffova zákona:

$$U_i + U_{R_4} - U_{R_2} = 0 \quad \rightarrow \quad U_i = U \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

- Nyní musíme vypočítat vnitřní odpor náhradního Théveninova obvodu

$$R_i = R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$





Výpočet napětí na diagonále Wheatstoneova můstku se tak zjednodušil na výpočet děliče napětí.

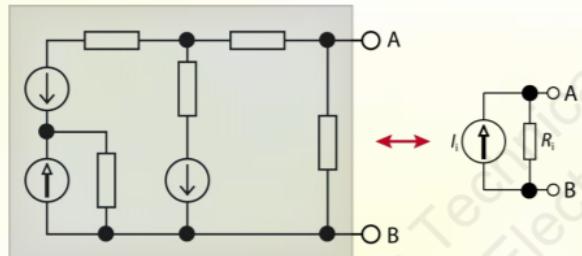
Parametry Théveninova náhradního obvodu jsou tedy:

$$A \text{ konečně, } U_i = U \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right), \quad R_i = R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4$$

$$U_z = U_i \frac{R_z}{R_i + R_z}$$

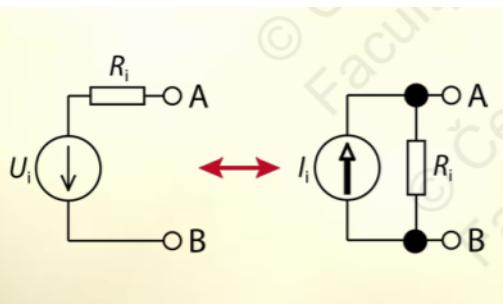
Nortonův teorém

- Nortonův teorém pro elektrické obvody říká, že libovolná soustava lineárních zdrojů napětí, zdrojů proudu a rezistorů se dvěma svorkami je elektricky ekvivalentní k ideálnímu zdroji proudu s paralelně zapojeným ideálním rezistorem.
- Na obvod se můžeme dívat jako na černou skříňku se dvěma svorkami, u které můžeme změřit právě jen napětí na prázdroje a vnitřní odpor a která se tak chová jako jediný zdroj proudu s jediným paralelně zapojeným rezistorem.

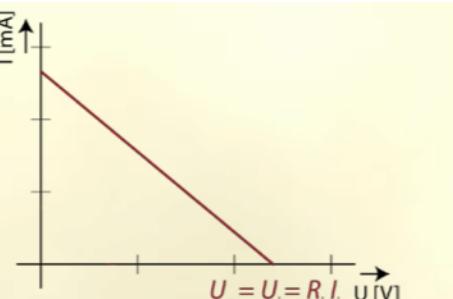


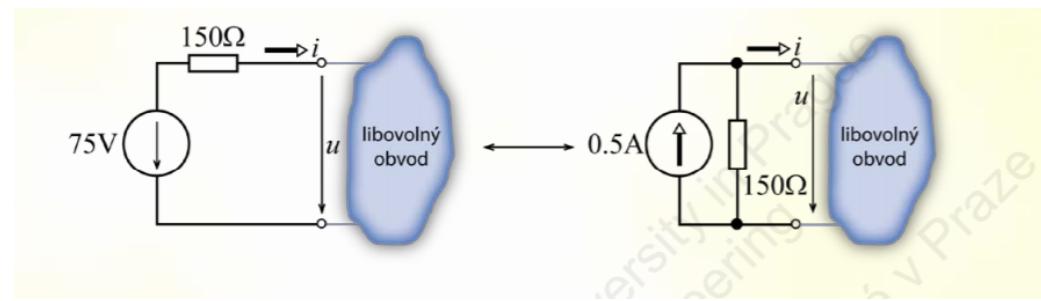
- Omezení
 - Pouze pro lineární obvody
 - Celkový výkon spotřebovaný rezistory původního obvodu a Nortonovým náhradním rezistorem obecně nejsou stejné
 - Náhrada je platná pouze z pohledu svorek A, B

Ekvivalence obou teorémů



$$I_k = I_i = \frac{U_i}{R_i}$$





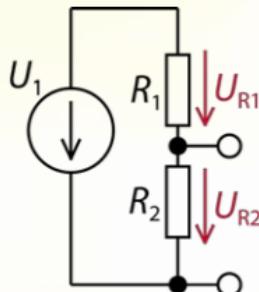
Dělič napětí

- Pro 2 rezistory

$$U_2 = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- Obecně pro N rezistorů

$$U_j = U_1 \frac{\frac{R_j}{N}}{\sum_{i=1}^N R_i}$$



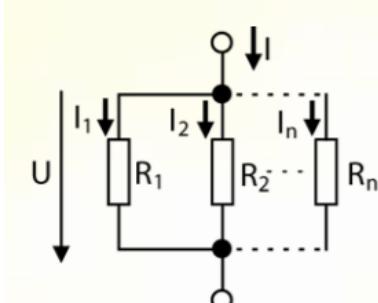
Dělič proudu

- Pro 2 rezistory

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

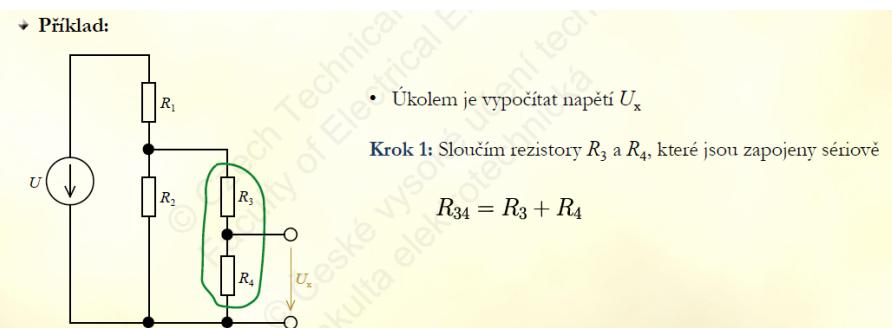
- Obecně pro N rezistorů

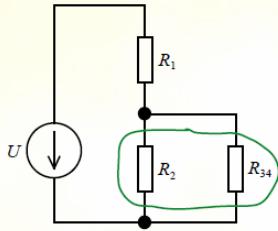
$$I_j = I \frac{\frac{G_j}{N}}{\sum_{i=1}^N G_i}$$



Metoda postupného zjednodušování

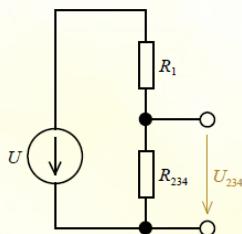
- V obvodu hledám sériové a paralelní kombinace pasivních prvků, které mohu nahradit celkovou impedancí □ Postupně tak dostávám ze složitějšího stále jednodušší obvod, až po elementární obvod, u kterého mohu pomocí elementárních metod (Ohmův zákon, dělič napětí/proudu) vypočítat napětí a proudy na zbývajících prvcích





Krok 2: Sloučím rezistory R_2 a R_{34} , které jsou zapojeny paralelně

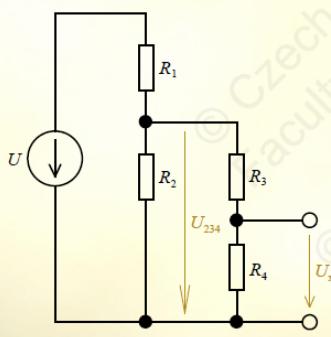
$$R_{234} = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}}$$



Krok 3: rezistory R_1 a R_{234} , jsou elementárním děličem napětí

$$U_{234} = U_1 \frac{R_{234}}{R_1 + R_{234}}$$

Nyní se budu vracet zpět k původnímu obvodu – v našem případě stačí rozdělit napětí U_{234} mezi rezistory R_3 a R_4

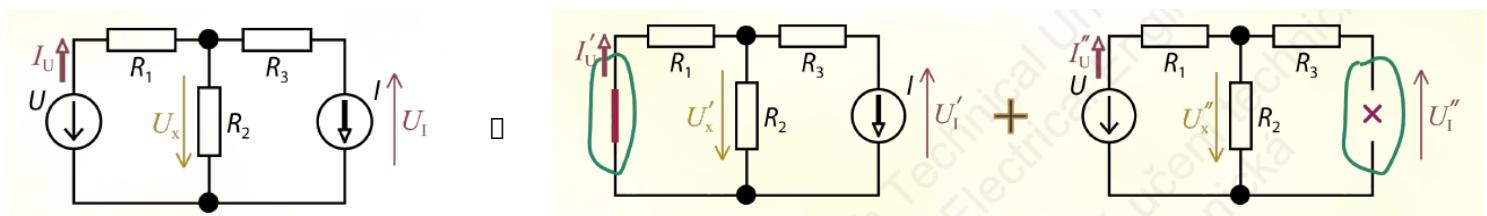


$$U_x = U_{234} \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

Pavel Mařka - Základy elektrických obvodů - 2011

Princip superpozice

- V případě, že lineární obvod obsahuje více nezávislých zdrojů, je možné vypočítat jednotlivé obvodové veličiny superpozicí příspěvků od jednotlivých zdrojů
- Pokud obvod obsahuje N nezávislých zdrojů, rozdělíme analýzu na N nezávislých kroků □ v každém z nich vyjmeme z obvodu vždy N – 1 nezávislých zdrojů
- Příklad



- o V uvedeném příkladu obvod obsahuje 2 nezávislé zdroje – řešení rozdělíme na 2 kroky
- o Výpočet napětí na R_2

$$U'_x = -I \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad U''_x = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad U_x = U'_x + U''_x$$

- o Výkon na R_2
 - Pro výkony obecně princip superpozice neplatí!! – není to lineární veličina

proto $P \neq P' + P''$

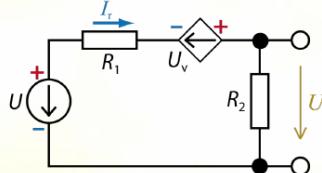
ale samozřejmě stále platí $P_{R_2} = R_2 \cdot I_{R_2}^2 = \frac{U_x^2}{R_2}$

- o Výkony, dodané jednotlivými zdroji do obvodu je opět nutné počítat superpozicí – každý zdroj v superpozici dodává výkon do obvodu, ale současně mohou odebírat výkon z ostatních zdrojů
 - V případě zdroje napětí musíme vypočítat proud, vytékající z jeho kladné svorky
 - V případě zdroje proudu musíme vypočítat napětí na jeho svorkách, orientované od svorky, ze které proud vytéká ke svorce, do které proud vtéká

$$I'_U = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad I''_U = \frac{U}{R_1 + R_2}, \quad I_U = I'_U + I''_U, \quad P_U = U \cdot I_U$$

$$U'_I = -U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad U''_I = I \cdot \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right), \quad U_I = U'_I + U''_I, \quad P_I = I \cdot U_I$$

- Řízené zdroje nelze vyjmout!!! – většinou nutné použít Kirchhoffovy zákony



$$U_v = R I_r$$

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 2 \text{ k}\Omega, \quad R = 1500, \quad U = 12 \text{ V}$$

1. K řešení použijeme napěťový Kirchhoffův zákon:

$$-U + R_1 I_r - U_v + R_2 I_r = 0 \rightarrow -U + R_1 I_r - R I_r + R_2 I_r = 0 \rightarrow I_r (R_1 + R_2 - R) = U$$

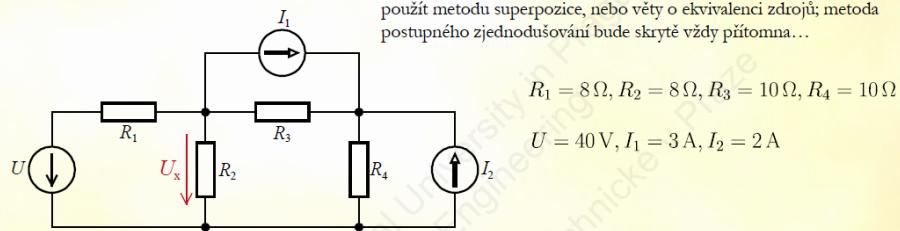
$$I_r = \frac{U}{R_1 + R_2 - R} = \frac{12}{1000 + 2000 - 1500} = 8 \text{ mA}$$

$$U_x = R_2 I_r = 2000 \cdot 0.008 = 16 \text{ V}$$

Využití ekvivalence zdrojů

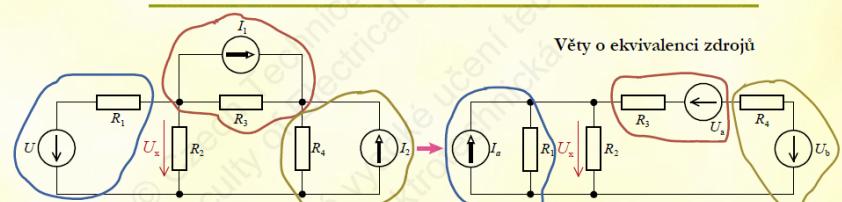
Příklad: V obvodu podle obrázku máme určit napětí U_x

Z dosud studovaných metod analýzy elektrických obvodů můžeme použít metodu superpozice, nebo věty o ekvivalenci zdrojů; metoda postupného zjednodušování bude skryta vždy přítomna...



$$R_1 = 8 \Omega, R_2 = 8 \Omega, R_3 = 10 \Omega, R_4 = 10 \Omega$$

$$U = 40 \text{ V}, I_1 = 3 \text{ A}, I_2 = 2 \text{ A}$$



$$I_a = \frac{U}{R_1} = \frac{40}{8} = 5 \text{ A} \quad U_a = I_a R_3 = 3 \cdot 10 = 30 \text{ V} \quad U_b = I_2 R_4 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ V}$$

$$I_b = \frac{U_b - U_a}{R_3 + R_4} = \frac{20 - 30}{20} = -0.5 \text{ A} \quad I = I_a + I_b = 4.5 \text{ A} \quad R = R_1 \parallel R_2 \parallel (R_3 + R_4) = 3.33 \Omega$$

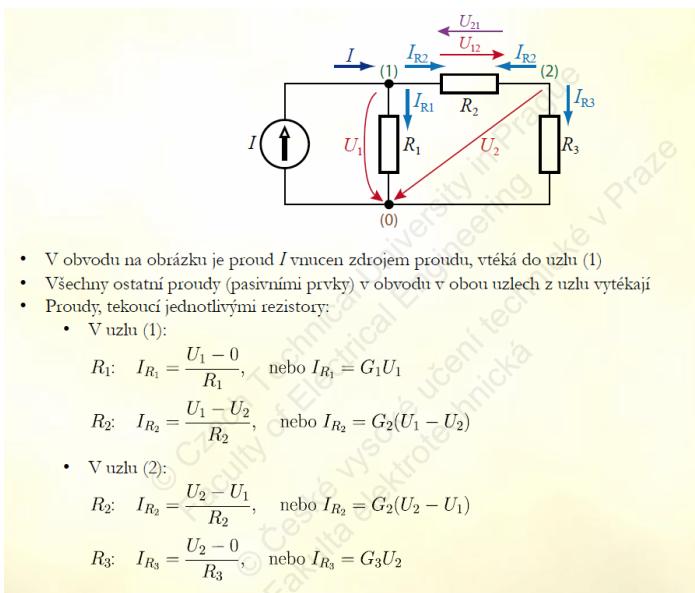
$$U_x = R \cdot I = 3.33 \cdot 4.5 = 15 \text{ V}$$

Metoda uzlových napětí

- Zobecnění 1. KZ
- Postup

1. Jeden z uzlů obvodu zvolíme jako referenční (zem, s nulovým potenciálem).
Nebudeme se nyní zabývat tzv. zobecněnou metodou uzlových napětí, kde je referenční uzel volen mimo obvod.
2. Napětí v $n - 1$ zbyvajících uzlech označíme U_1, U_2, \dots, U_{n-1} (U_A, U_B, \dots , nebo jiným jednoznačným způsobem). Napětí v každém z těchto $n - 1$ uzlů je vztahem k referenčnímu uzlu.
3. V každém z $n - 1$ uzlů napíšeme rovnici podle prvního Kirchhoffova zákona. Proud, tekoucí jednotlivými obvodovými prvky, vyjadřujeme podle Ohmova zákona z napětí na těchto prvcích. Tak dostaneme soustavu $n - 1$ rovnic o $n - 1$ neznámých.
4. Některou z metod lineární algebry (Gaussova eliminace, Cramerovo pravidlo, inverzní matice), vypočítáme hodnotu všech proměnných: $n - 1$ uzlových napětí.

- Počet rovnic = počet uzlů – počet zdrojů napětí – 1 (referenční uzel)
- Příklad



- V obvodu na obrázku je proud I vnučen zdrojem proudu, vtéká do uzlu (1)
- Všechny ostatní proudy (pasivní prvky) v obvodu v obou uzlech z uzlu vytékají
- Právdy, tekoucí jednotlivými rezistory:
 - V uzlu (1):

$$R_1: \quad I_{R_1} = \frac{U_1 - 0}{R_1}, \text{ nebo } I_{R_1} = G_1 U_1$$
 - V uzlu (2):

$$R_2: \quad I_{R_2} = \frac{U_1 - U_2}{R_2}, \text{ nebo } I_{R_2} = G_2(U_1 - U_2)$$
 - V uzlu (2):

$$R_3: \quad I_{R_3} = \frac{U_2 - 0}{R_3}, \text{ nebo } I_{R_3} = G_3 U_2$$

Výsledná soustava rovnic:

$$-I + \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_2} = 0$$

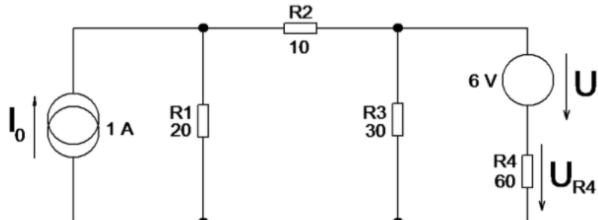
$$\frac{U_2 - U_1}{R_2} + \frac{U_2}{R_3} = 0$$

- Soustavu rovnic můžeme zapsat v maticovém tvaru:

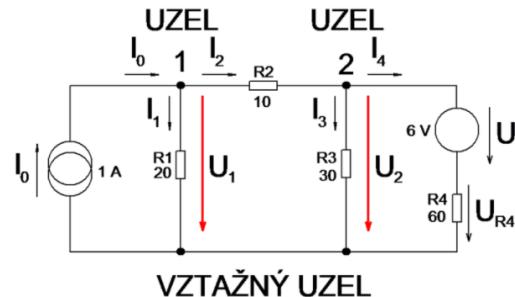
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{resp. } \mathbf{GU} = \mathbf{I}$$

- Řešení např.: $\mathbf{U} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{I}$

- Příklad – Určete velikost napětí U_{R4}



Obr. 1: Zapojení obvodu pro řešení metodou uzlových napětí



Obr. 2: Upravené zapojení obvodu pro řešení metodou uzlových napětí

- o Zápis rovnic

$$I_0 = I_1 + I_2 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_2}$$

$$I_2 = I_3 + I_4 = \frac{U_2}{R_3} + \frac{U_2 - U}{R_4}$$

- o Upravení – dosazení

$$1 = \frac{U_1}{20} + \frac{U_1 - U_2}{10} | \cdot 20$$

$$\frac{U_1 - U_2}{10} = \frac{U_2}{30} + \frac{U_2 - 6}{60} | \cdot 60$$

$$20 = U_1 + 2U_1 - 2U_2$$

$$6U_1 - 6U_2 = 2U_2 + U_2 - 6$$

$$20 = 3U_1 - 2U_2 | \cdot 2$$

$$6 = -6U_1 + 9U_2$$

$$40 = 6U_1 - 4U_2$$

$$6 = -6U_1 + 9U_2$$

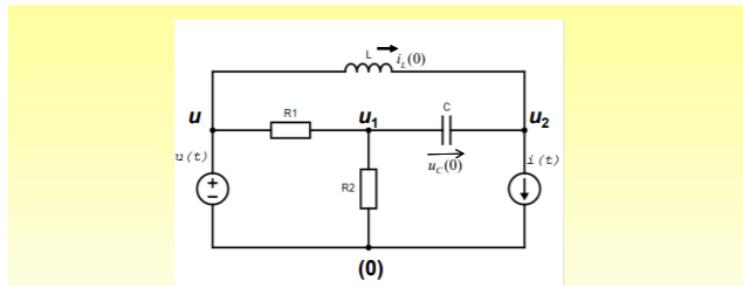
Sečtení obou rovnic – výsledek

$$46 = 5U_2$$

$$U_2 = 9,2V$$

$$U_1 = 12,8V \quad U_{R4} = U_2 - U = 9,2 - 6 = 3,2V$$

- Příklad



$$u_1 : \frac{u_1 - u}{R_1} + \frac{u_1}{R_2} + C \frac{d(u_1 - u_2)}{dt} = 0$$

$$u_2 : \frac{1}{L} \int_0^t (u_2 - u) d\tau - i_L(0) + C \frac{d(u_2 - u_1)}{dt} + i = 0$$

Metoda smyčkových proudů

- Zobecnění 2. KZ
- Postup

- Identifikujeme všechny nezávislé smyčky v obvodu. Proud v těchto n smyčkách označíme I_1, I_2, \dots, I_n (I_A, I_B, \dots , nebo jiným jednoznačným způsobem).
- V každé z těchto n smyček napišeme rovnici podle druhého Kirchhoffova zákona. Napětí na jednotlivých obvodových prvcích vyjadřujeme podle Ohmova zákona z proudů, které tečou těmito obvodovými prvky. Tak dostaneme soustavu n rovnic o n neznámých.
- Některou z metod lineární algebry (Gaussova eliminace, Cramerovo pravidlo, inverzní matice), vypočítáme hodnotu všech proměnných: n smyčkových proudů.

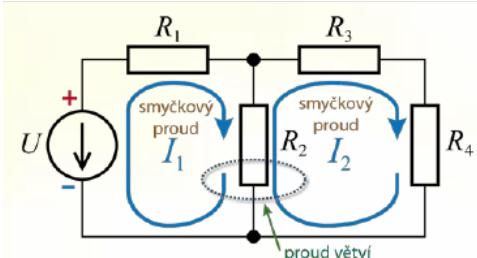
- Počet rovnic = počet nezávislých smyček – počet zdrojů proudu**

- Počet nezávislých smyček = počet větví – počet uzlů + 1

- Konvence

- V každé smyčce předpokládáme kladnou orientaci toho smyčkového proudu, pro který právě příšeme danou rovnici
- Zdroj napětí má záporné znaménko v případě, kdy smyčka vstupuje do jeho záporné svorky a kladné v případě, kdy vstupuje do jeho kladné svorky

- Příklad

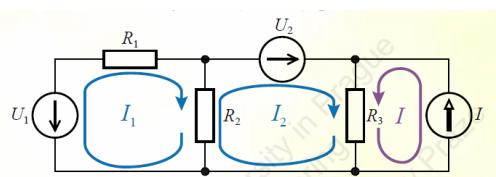


$$(1): R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) - U = 0$$

$$(2): R_2 (I_2 - I_1) + R_3 I_2 + R_4 I_2 = 0$$

- Obvody obsahující zdroje proudu

- Zdrojem proudu nesmí procházet smyčka, pro kterou sestavujeme rovnici – neznáme a neumíme vyjádřit napětí na svorkách proudového zdroje
- Proud zdroje musí být ale započítán, a to v uzavřené smyčce

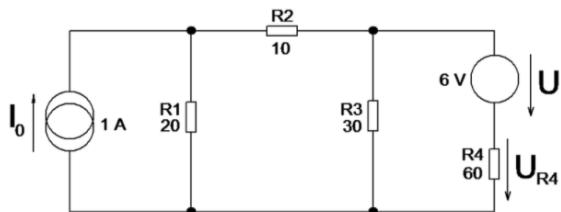


$$(1): R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) - U_1 = 0$$

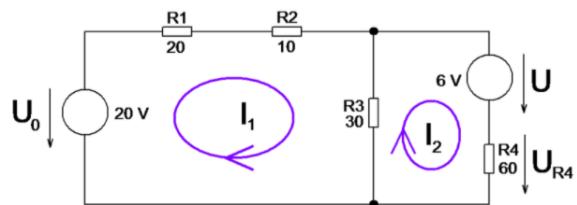
$$(2): R_2 (I_2 - I_1) + U_2 + R_3 (I_2 + I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ -U_2 - R_3 I \end{bmatrix}$$

- Orientace smyček pro zápis rovnic můžeme volit libovolně – orientace smyčky, ve které započítáváme proud proudového zdroje je ale vnučena zdrojem a musíme respektovat jeho orientaci
- Příklad – Určete velikost napětí U_{R4}



Obr. 1: Zapojení obvodu pro řešení metodou smyčkových proudů



Obr. 2: Upravené zapojení obvodu pro řešení metodou smyčkových proudů

o Zápis rovnic

$$-U_0 + R_1 I_1 + R_2 I_1 + R_3 (I_1 - I_2) = 0$$

$$R_3 (I_2 - I_1) + U + R_4 I_2 = 0$$

o Upravení – dosazení

$$-20 + 20I_1 + 10I_1 + 30(I_1 - I_2) = 0$$

Sečtení obou rovnic – výsledek

$$30(I_2 - I_1) + 6 + 60I_2 = 0$$

$$150I_2 = 8$$

$$-20 + 60I_1 - 30I_2 = 0$$

$$I_2 = \frac{8}{150} = 0,053A$$

$$90I_2 - 30I_1 + 6 = 0$$

$$U_{R4} = R_4 I_2 = 60 \cdot 0,053 = 3,2V$$

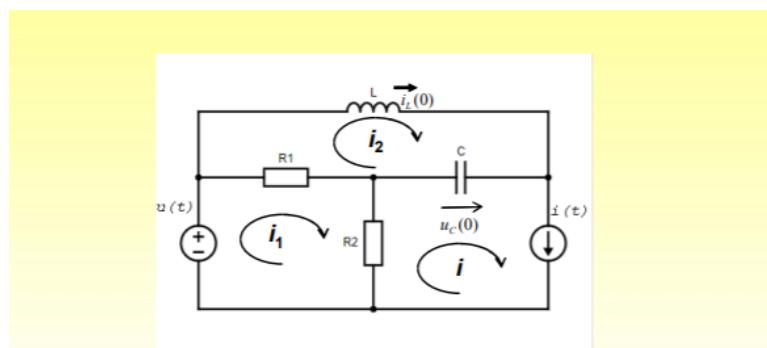
$$60I_1 - 30I_2 = 20$$

$$-30I_1 + 90I_2 = -6 \mid \cdot 2$$

$$60I_1 - 30I_2 = 20$$

$$-60I_1 + 180I_2 = -12$$

• Příklad



$$i_1 : -u + R_1(i_1 - i_2) + R_2(i_1 - i) = 0$$

$$i_2 : L \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t (i_2 - i) d\tau - u_C(0) + R_1(i_2 - i_1) = 0$$

Rekapitulace - stanovení počtu rovnic a nezávislé smyčky

Poznali jsme, že pro stanovení nutného počtu rovnic musíme určit:

- Počet uzlů v obvodu: u
- Počet větví: v
- Počet zdrojů napětí: N_u
- Počet zdrojů proudu: N_i
- Počet separátních částí obvodu $c - v$ metodě uzlových napětí jsme zvolili jeden z uzlů jako referenční, s nulovým potenciálem; pro tento uzel nebyla sestavena žádná rovnice; v obecném případě si představme obvod, který obsahuje např. transformátor s galvanicky odděleným primárním a sekundárním vinutím – v takovém obvodu budou dva referenční uzly, galvanicky oddělené části obvodu se nazývají separátní části

V kapitole o smyčkových proudech byla explicitně dosazena hodnota 1

- Počet rovnic:
 - Metoda uzlových napětí: $X_u = u - 1 - N_u$, resp. $X_u = u - c - N_u$
 - Metoda smyčkových proudů: $X_i = v - u + 1 - N_i$, resp. $X_i = v - u + c - N_i$

V případě metody uzlových napětí je výběr uzlů jednoznačný, v případě jednoduchých obvodů není problémem ani výběr smyček – jak je tomu v případě složitějších obvodů?

V tom případě bychom museli zavést dva nové pojmy – graf obvodu a strom (*tyto pojmy jsou uvedeny pouze pro úplnost, v obvodech, řešených v tomto předmětu / i v následných/ lze obvodové rovnice sestavit i bez této analýzy*)