

Příklad A (35 bodů):

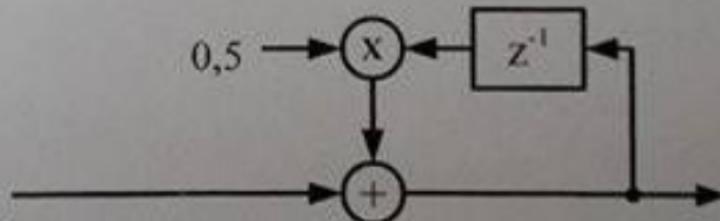
Spektrum $X(\Omega)$ signálu diskrétního v čase je dán vztahem

$$X(\Omega) = 2\cos(2\Omega) - 2\cos(\Omega) + 1$$

1. Určete a nakreslete **časový průběh** signálu $x[k]$. (6 bodů)
2. Určete **energiu** signálu $x[k]$. (4 body)
3. Určete a nakreslete **autokorelační funkci** $R[m]$ signálu $x[k]$. (6 bodů)
4. Signál prochází soustavou s impulsovou odezvou $h[k] = \delta[k+1] + \delta[k-1]$. Určete a nakreslete **přenosovou funkci** $H(\Omega)$ soustavy. (6 bodů)
5. Určete **spektrum** $Y(\Omega)$ výstupního signálu, který vznikne příchodem signálu $x[k]$ soustavou s impulsovou odezvou $h[k]$. (6 bodů)
6. Určete a nakreslete **časový průběh** signálu $y[k]$. (7 bodů)

Příklad B (35 bodů):

Soustava v diskrétním čase je definovaná blokovým schématem



1. Určete **impulsovou odezvu** $h[k]$ soustavy. (7 bodů)
2. Určete **systémovou funkci** $H[z]$ soustavy. (4 body)
3. Určete zda je soustava **kauzální**, tvrzení zdůvodněte. (4 body)
4. Určete zda je soustava **stabilní**, tvrzení zdůvodněte. (4 body)

Na vstup soustavy s touto impulsovou odezvou $h[k]$ je přiveden diskrétní neperiodický signál $x[k]$, který je vyjádřen následujícím vztahem:

$$x[k] = \delta[k] - \delta[k-1]$$

5. Určete **časový průběh signálu** $y[k]$, který získáme, když necháme projít signál $x[k]$ soustavou s impulsovou odezvou $h[k]$. (6 bodů)
6. Určete **spektrum** $Y(\Omega)$ signálu $y[k]$ na výstupu soustavy. (5 bodů)
7. Určete **energiu** tohoto nově vzniklého signálu $y[k]$. (5 bodů)

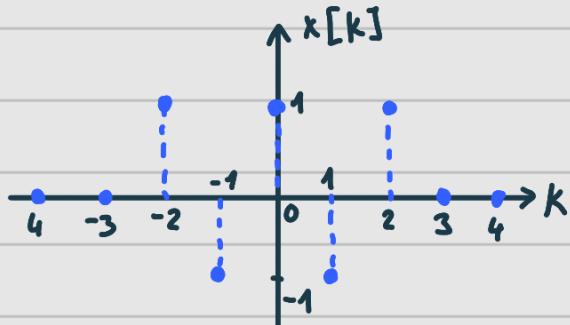
A) $X(\Omega) = 2\cos(2\Omega) - 2\cos(\Omega) + 1$

1) DFT

$$X(\Omega) = e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega} - e^{j\Omega} - e^{-j\Omega} + 1$$

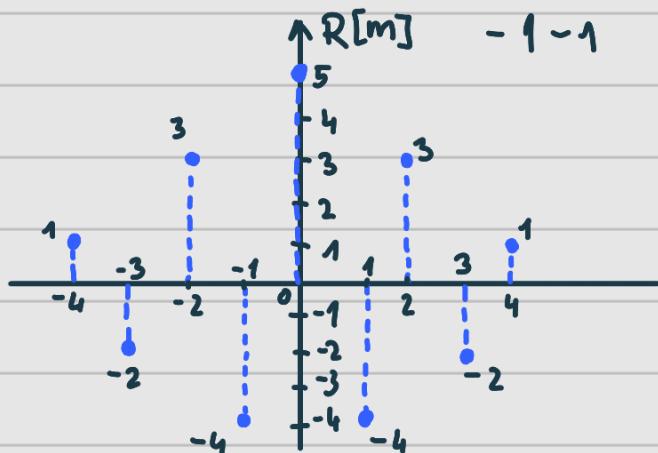
$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\Omega}$$

$$x[k] = \delta[k] - \delta[k+1] - \delta[k-1] + \delta[k+2] + \delta[k-2]$$



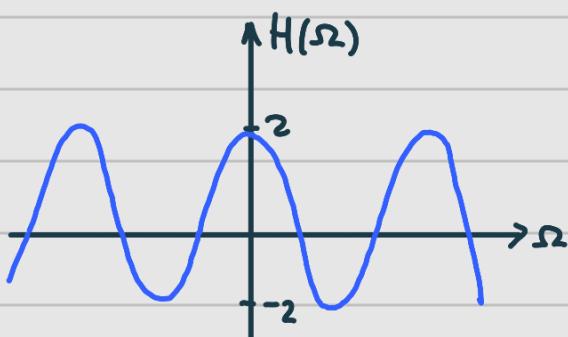
2) $E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 5$

3)



4) $h[k] = \delta[k+1] + \delta[k-1]$

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-jk\Omega} = e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} = 2\cos(\Omega)$$



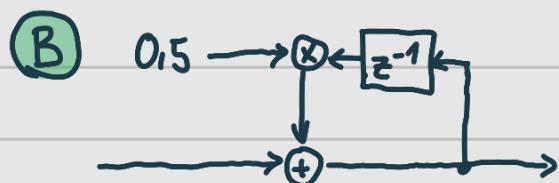
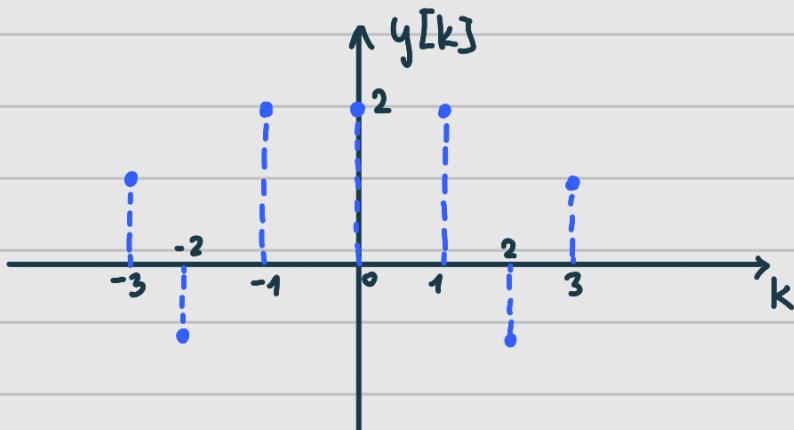
$$\begin{aligned}
 5) \quad Y(\Omega) &= H(\Omega) \cdot X(\Omega) = 2\cos(\Omega) \cdot (2\cos(2\Omega) - 2\cos(\Omega) + 1) = \\
 &= e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} (e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega} - e^{j\Omega} - e^{-j\Omega} + 1) = \\
 &= e^{3j\Omega} + e^{-3j\Omega} - e^{2j\Omega} - e^0 + e^{j2\Omega} + e^{j\Omega} + e^{-3j\Omega} - e^0 - e^{-2j\Omega} + e^{-j\Omega} \\
 &= e^{3j\Omega} + e^{-3j\Omega} + 2(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}) - (e^{2j\Omega} + e^{-2j\Omega}) - 2 \\
 &= 2\cos(3\Omega) - 2\cos(2\Omega) + 4\cos(j\Omega) - 2
 \end{aligned}$$

6) DtFT

$$Y(\Omega) = e^{3j\Omega} + e^{-3j\Omega} + 2e^{j\Omega} + 2e^{-j\Omega} - e^{2j\Omega} - e^{-2j\Omega} - 2$$

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] e^{-j\Omega k}$$

$$y[k] = 2\delta[k] + 2\delta[k-1] + 2\delta[k+1] - \delta[k-2] - \delta[k+2] + \delta[k-3] + \delta[k+3]$$



$$\begin{aligned}
 1) \quad y[k] &= x[k] + 0,5 \cdot y[k-1] \\
 h[k] &= \delta[k] + 0,5 h[k-1]
 \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad \left(\frac{z}{z-a} \rightarrow a^k \right)$$

$$h[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^k \pi[k]$$

$$2) H(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} H(z)$$

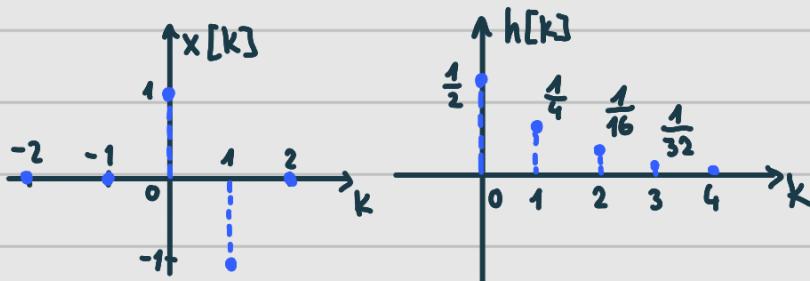
$$H(z) - \frac{1}{2} z^{-1} H(z) = 1$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$3) \text{ je kauza'lni': } h[k] = 0 \quad \text{pro } k < 0$$

$$4) \text{ je stabilni': } |P_0| = \frac{1}{2} \quad \left| \frac{1}{2} \right| < 1$$

$$5) x[k] = \delta[k] - \delta[k-1]$$



$$y[0] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y[1] = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$y[2] = \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

:

$$y[k] = \frac{1}{2^{k+2}} \cdot 1[k]$$

$$6) Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] e^{-j\Omega k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2}} e^{-j\Omega k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j\Omega} \right)^k = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{4 - 2e^{-j\Omega}}$$

$$7) E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |y[k]|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+2}} \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+4}} = \frac{1}{2^4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{\frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$E = \frac{1}{32 - 16} = \frac{1}{16}$$

Jméno, příjmení, fakultní e-mail

Paralelka, nebo termín cvičení

150609

Příklad A (35 bodů):

Spektrum $S(\Omega)$ diskrétního signálu $s[k]$ je dán vztahem:

$$S(\Omega) = 2\cos^2(\Omega) - 1$$

Určete a nakreslete:

- průběh signálu $s[k]$ (10 bodů)
- Výkonové spektrum signálu $C(\Omega)$ (5 bodů)
- autokorelační funkci $R[m]$ signálu $s[k]$ ze znalosti výkonového spektra signálu (10 bodů)
- autokorelační funkci $R[m]$ signálu $s[k]$ dle definice v čase (obrázek) (5 bodů)
- energii signálu v čase i ve frekvenci, z korelační funkce (5 bodů)

Příklad B (35 bodů):

Soustava v diskrétním čase je definovaná přenosovou funkcí

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} + e^{j2\Omega} + e^{j\Omega}$$

1. Určete impulsovou odezvu $h[k]$, nakreslete její časový průběh. (10 bodů)
2. Určete, zda je soustava kauzální, zdůvodněte. (3 body)
3. Určete, zda je soustava stabilní, zdůvodněte. (3 body)

Na vstup soustavy s touto impulsovou odezvou $h[k]$ je přiveden diskrétní neperiodický signál $s[k]$:

$$x[k] = \delta[k+1] + \delta[k-1]$$

4. Určete časový průběh signálu $y[k]$, který získáme, když necháme projít signál $s[k]$ soustavou s impulsovou odezvou $h[k]$ (14 bodů)
5. Určete energii tohoto nově vzniklého signálu $y[k]$. (5 bodů)

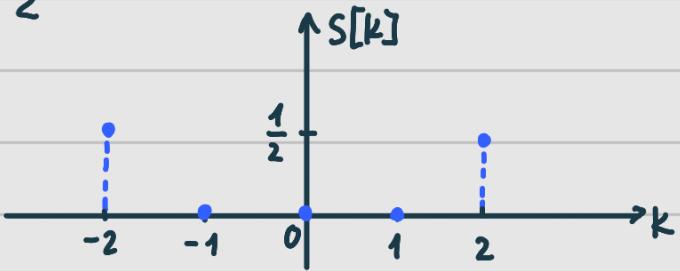
(A)

$$S(\Omega) = 2\cos^2(\Omega) - 1$$

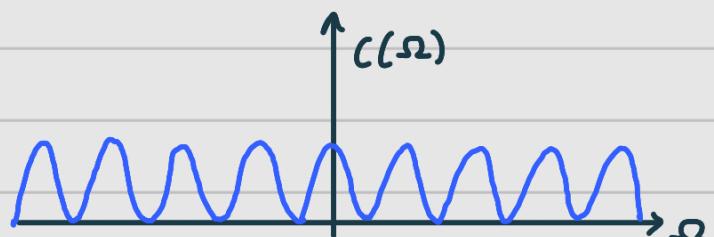
1) $S(\Omega) = 1 + \cos(2\Omega) - 1 = \cos(2\Omega)$

$$S(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] e^{-j\Omega k} = \frac{1}{2}e^{2j\Omega} + \frac{1}{2}e^{-2j\Omega}$$

$$s[k] = \frac{1}{2}\delta[k-2] + \frac{1}{2}\delta[k+2]$$



2) $C(\Omega) = |S(\Omega)|^2 = \cos^2(2\Omega)$

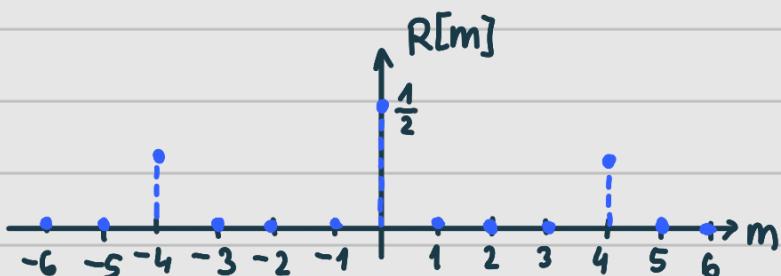


$$\cos^2(2\Omega) = \frac{1}{2}(1 + \cos(4\Omega))$$

3) $C(\Omega) = \cos^2(2\Omega) = \frac{1}{2}(1 + \cos(4\Omega)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{-j4\Omega} + e^{j4\Omega}) =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j4\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j4\Omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m] e^{-j\Omega m}$$

$$R[m] = \frac{1}{2}\delta[m] + \frac{1}{4}\delta[m-4] + \frac{1}{4}\delta[m+4]$$



4) $R[0] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$$R[1] = 0$$

$$R[2] = 0$$

$$R[3] = 0$$

$$R[4] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \text{Symmetrie: } R[-4] = \frac{1}{4}$$

$$R[m] = \frac{1}{2}\delta[m] + \frac{1}{4}\delta[m-4] + \frac{1}{4}\delta[m+4]$$

5) $E = R[0] = \frac{1}{2}$

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |s[k]| = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

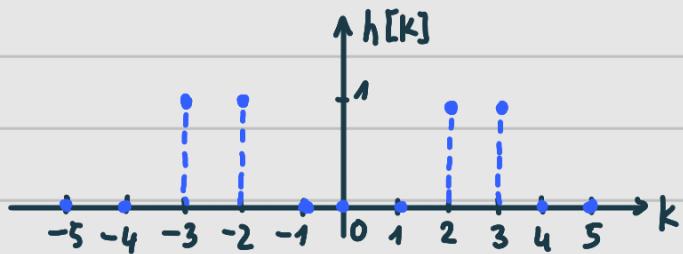
\Rightarrow autokorelační funkce

v Čase

(B) $H(\Omega) = e^{-j3\Omega} + e^{-j2\Omega} + e^{j2\Omega} + e^{-j3\Omega}$

1) $H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-jk\Omega}$

$$h[k] = \delta[k-3] + \delta[k+3] + \delta[k-2] + \delta[k+2]$$

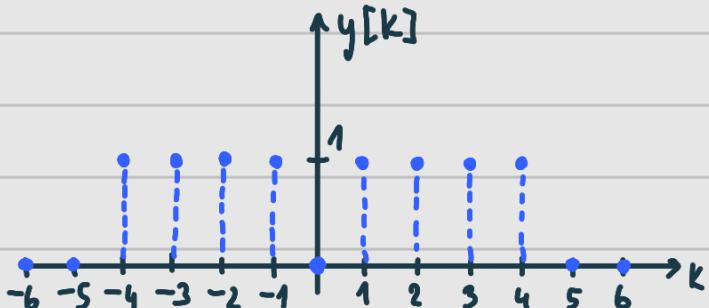
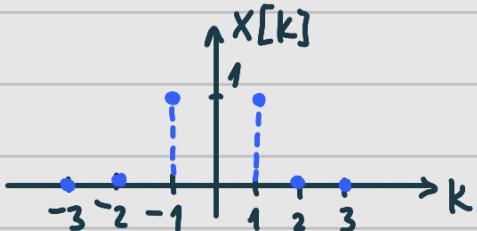


2) není kauzální $k \neq 0$ pro $k < 0$

3) je stabilní

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 4 < \infty$$

4) $x[k] = \delta[k+1] + \delta[k-1]$



5) $E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |y[k]|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 8$

Jméno, příjmení, login:

Paralelka nebo termín cvičení:

150604

Příklad A: [35 bodů]

Spektrum $X(\Omega)$ (DtFT) diskrétního signálu $x[k]$ na vstupu soustavy je dáné předpisem:

$$X(\Omega) = \cos^2 \frac{\Omega}{2} + \cos 2\Omega$$

- 1) Určete a nakreslete časový průběh signálu $x[k]$ na vstupu soustavy. [7 bodů]
- 2) Určete energii E , signálu $x[k]$, určete a nakreslete autokorelační funkci $R_s[m]$. [7 bodů]
- 3) LTI soustava v diskrétním čase je definována vztahem mezi vstupním a výstupním signálem. Určete a nakreslete impulsovou odezvu $h[k]$ této soustavy. Rozhodněte a zdůvodněte, zda je soustava s impulsovou odezvou $h[k]$ kauzální a stabilní. [8 bodů]

$$y[k] = \frac{1}{2}x[k+1] + x[k] + \frac{1}{2}x[k-1]$$

- 4) Určete a nakreslete přenosovou funkci $H(\Omega)$ (frekvenční charakteristiku) soustavy. [6 bodů]
- 5) Určete a nakreslete časový průběh signálu $y[k]$ na výstupu soustavy. [7 bodů]

Příklad B: [35 bodů]

LTI soustava ve spojitém čase je popsána svou impulsovou odezvou $h(t)$:

$$h(t) = e^{-2t} I(t)$$

- 1) Nakreslete časový průběh impulsové odezvy $h(t)$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda je soustava s impulsovou odezvou $h(t)$ kauzální a stabilní. [7 bodů]
- 2) Určete přenosovou funkci $H(\omega)$ (frekvenční charakteristiku) soustavy s impulsovou odezvou $h(t)$. [7 bodů]
- 3) Na vstup soustavy s impulsovou odezvou $h(t)$ je přiveden signál $x(t)$. Nakreslete časový průběh tohoto signálu. [7 bodů]

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \delta(t-k)$$

- 4) Určete a nakreslete spektrum (koeficienty komplexní Fourierovy řady X_n) signálu $x(t)$. [8 bodů]
- 5) Určete spektrum (koeficienty komplexní Fourierovy řady Y_n) signálu $y(t)$ na výstupu soustavy s přenosovou funkcí $H(\omega)$. [6 bodů]

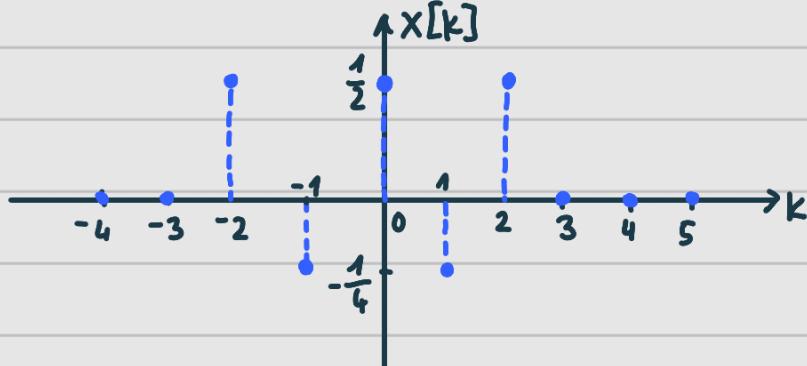
(A)

$$X(\Omega) = \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \cos(2\Omega)$$

1) $X(\Omega) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\Omega)) + \cos(2\Omega) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{4}e^{j\Omega} + \frac{1}{2}e^{2j\Omega} + \frac{1}{2}e^{-2j\Omega}$

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\Omega k}$$

$$x[k] = \frac{1}{2}\delta[k] - \frac{1}{4}\delta[k-1] - \frac{1}{4}\delta[k+1] + \frac{1}{2}\delta[k-2] + \frac{1}{2}\delta[k+2]$$



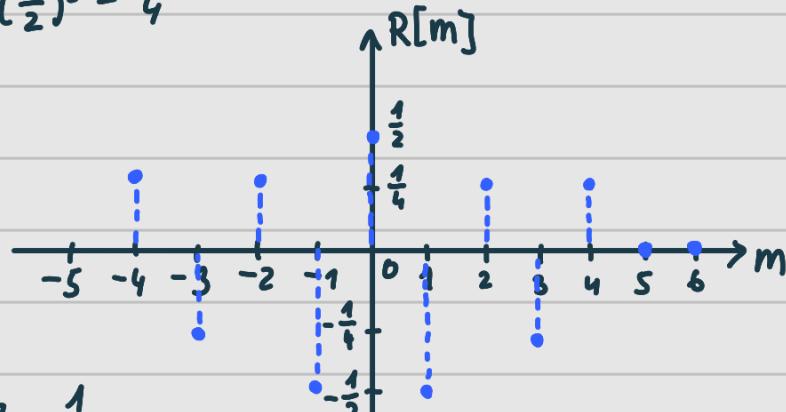
2) $R[0] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$$R[1] = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$R[2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$R[3] = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$R[4] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$



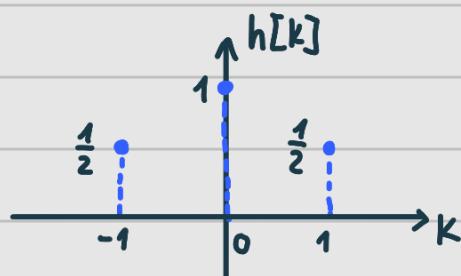
$$E = R[0] = \frac{1}{2}$$

3) $y[k] = \frac{1}{2}x[k+1] + x[k] + \frac{1}{2}x[k-1]$

$$h[k] = \frac{1}{2}\delta[k+1] + \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1]$$

není kauzální : $h[k] \neq 0$ pro $k < 0$

je stabilní : $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2 < \infty$



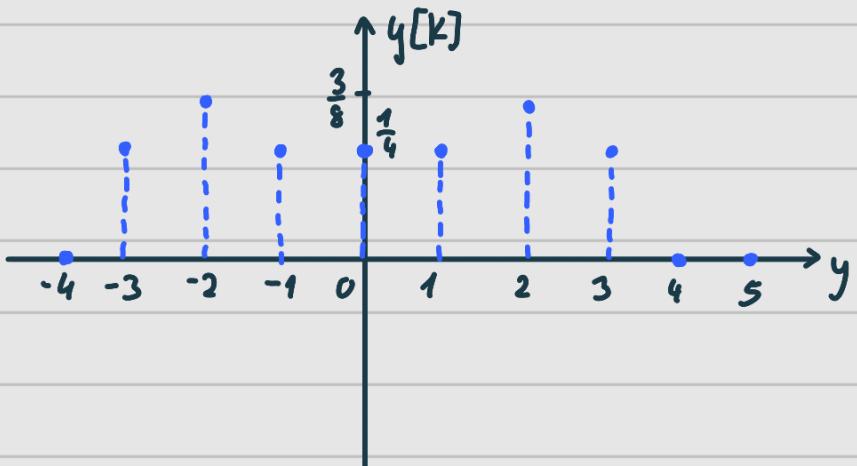
$$4) H(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k} = \frac{1}{2} e^{-j\Omega} + \frac{1}{2} e^{j\Omega} + 1 = \cos(\Omega) + 1$$

$$5) y[0] = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

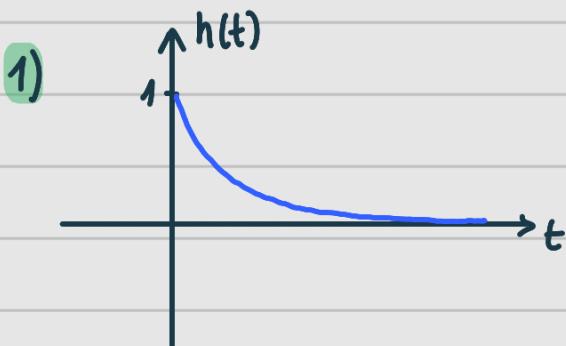
$$y[1] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y[2] = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$y[3] = \frac{1}{4}$$



$$(B) h(t) = e^{-2t} u(t)$$



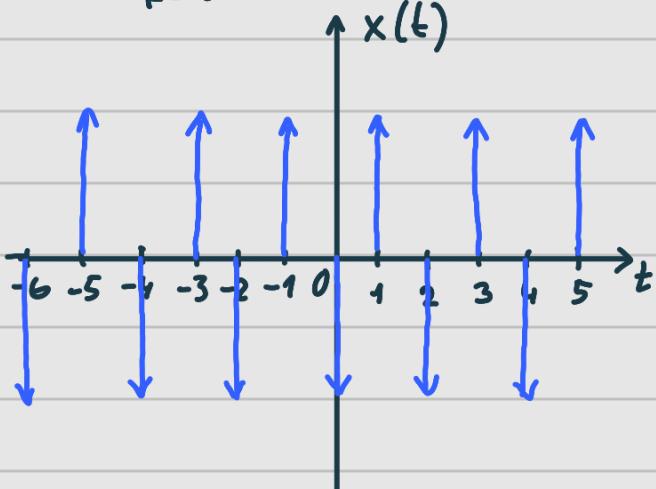
je kavzalni': $h(t) = 0$ pro $t < 0$

$$\text{je stabilni': } \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \left[\frac{e^{-2t}}{-2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} < \infty$$

$$2) H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(2+j\omega)t} dt = \left[\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2+j\omega} - 0 = \frac{1}{2+j\omega}$$

$$3) x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \delta(t-k)$$



$$4) X_n = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)}^2 x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 (-\delta(t) + \delta(t-1)) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} (-e^0 + e^{-jn\omega_0})$$

$$X_n = \frac{1}{2} (e^{-jn\omega_0} - 1) = \frac{1}{2} (e^{-jn\frac{2\pi}{T_0}} - 1) = \frac{1}{2} (e^{-jn\frac{2\pi}{2}} - 1) = \frac{1}{2} (e^{-j\pi n} - 1)$$

$$5) Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) = \frac{1}{2} (e^{-j\pi n} - 1) \cdot \frac{1}{2+j\omega}$$

???

Příklad A: [35 bodů]

Spektrum periodického signálu $x(t)$ je dáno následujícím předpisem ($\omega_0 \in \mathbb{R}, \omega_0 > 0$):

$$X(\omega) = 2\pi [j\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) - j\delta(\omega - 2\omega_0)]$$

- 1) Určete a nakreslete amplitudové **spektrum** $|X(\omega)|$. Určete **spektrum** také jako koeficienty komplexní Fourierovy řady X_n periodického signálu $x(t)$. [7 bodů]
- 2) Určete a nakreslete **výkonové spektrum** $|X_n|^2$, určete **výkon** P a **stejnosměrnou složku** x_{ss} signálu $x(t)$. [7 bodů]
- 3) Určete **signál** $x(t)$. [7 bodů]
- 4) Určete **autokorelační funkci** $R_x(\tau)$ signálu $x(t)$. [7 bodů]
- 5) Signál $x(t)$ prochází ideální dolní propustí s jednotkovým přenosem $H(\omega) = 1$ v propustném pásmu a mezním kmitočtem $\omega_m = 3\omega_0 / 2$. Určete a nakreslete **spektrum signálu** $y(t)$ na výstupu dolní propusti (koeficienty komplexní Fourierovy řady Y_n). Určete také **časový průběh** signálu $y(t)$. [7 bodů]

Příklad B: [35 bodů]

LTI soustava (tzv. hřebenový filtr) v diskrétním čase je popsána přenosovou funkcí $H(\Omega)$:

$$H(\Omega) = 1 - \cos(4\Omega) + j \sin(4\Omega)$$

- 1) Určete a nakreslete **impulsovou odezvu** soustavy $h[k]$. [7 bodů]
- 2) Určete a nakreslete **amplitudovou charakteristiku** soustavy $|H(\Omega)|$. [6 bodů]
- 3) Rozhodněte a zdůvodněte, zda je soustava **kauzální** a **stabilní**. [6 bodů]
- 4) Na vstup soustavy je přiveden signál $x[k]$. Signál nakreslete a určete **spektrum signálu** $X(\Omega)$. Určete a nakreslete **amplitudové spektrum** signálu $|X(\Omega)|$. [8 bodů]

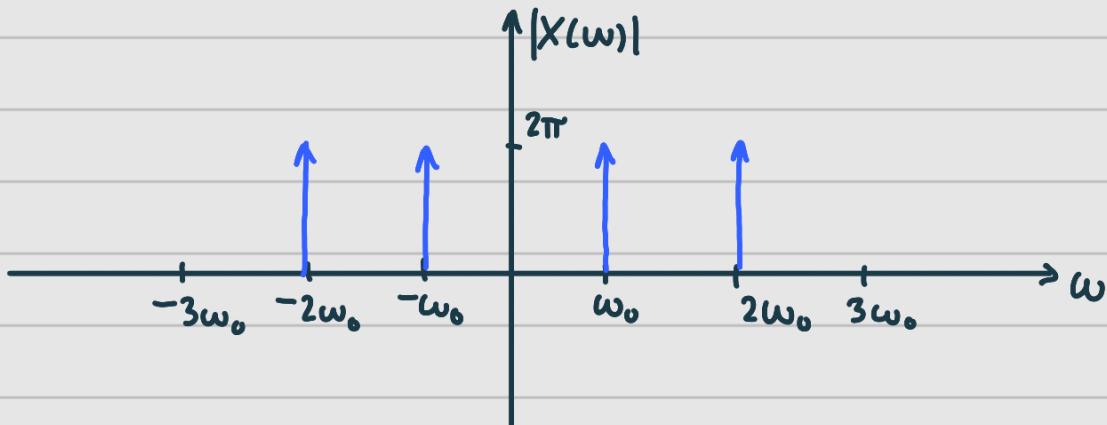
$$x[k] = \frac{1}{2} \delta[k+2] + \delta[k] + \frac{1}{2} \delta[k-2]$$

- 5) Určete **spektrum signálu** na výstupu soustavy $Y(\Omega)$. Určete a nakreslete **časový průběh signálu** $y[k]$ na výstupu soustavy. Určete **energiu** E_y signálu $y[k]$. [8 bodů]

A

$$X(\omega) = 2\pi [j\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) - j\delta(\omega - 2\omega_0)]$$

1) $|X(\omega)| = 2\pi [\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega - 2\omega_0)]$



$$X_0 = 0$$

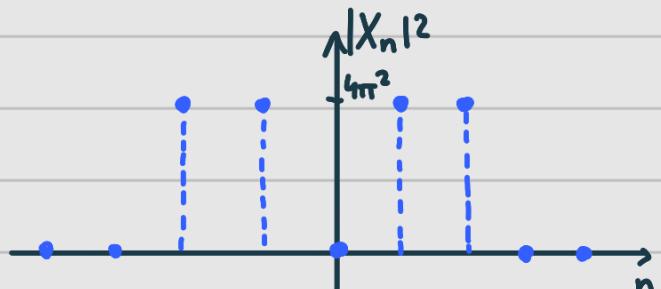
$$X_1 = X_2 = X_{-1} = X_{-2} = 2\pi$$

$$X_n = 0 \quad \text{pro } |n| > 2$$

2) $|X_0|^2 = 0$

$$|X_1|^2 = |X_2|^2 = |X_{-1}|^2 = |X_{-2}|^2 = 4\pi^2$$

$$|X_n|^2 = 0 \quad \text{pro } |n| > 2$$



$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 = 4 \cdot 4\pi^2 = 16\pi^2$$

$$S_{ss} = X_0 = 0$$

3) $\mathcal{F}[s(t)e^{jat}] = S(\omega - a)$

$$\mathcal{F}[K] = 2\pi K \delta(t)$$

$$X(\omega) = 2\pi j \delta(\omega + 2\omega_0) + 2\pi \delta(\omega + \omega_0) + 2\pi \delta(\omega - \omega_0) - 2\pi j \delta(\omega - 2\omega_0)$$

$$x(t) = j e^{-2j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t} - j e^{2j\omega_0 t}$$

$$x(t) = j(e^{-2j\omega_0 t} - e^{2j\omega_0 t}) + (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$x(t) = \frac{2}{2j} (e^{2j\omega_0 t} - e^{-2j\omega_0 t}) + \frac{2}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$x(t) = 2\sin(2\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t)$$

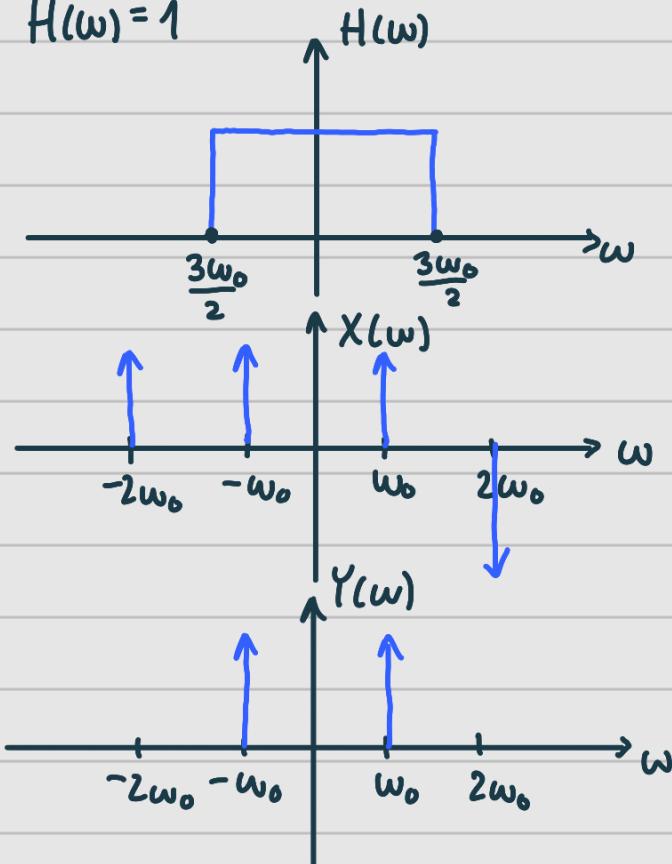
4) $R_{1,2}(\tau) = \mathcal{F}[|X(\omega)|^2]$

$$\mathcal{F}[4\pi^2 \delta(\omega+2\omega_0) + 4\pi^2 \delta(\omega+\omega_0) + 4\pi^2 \delta(\omega-\omega_0) + 4\pi^2 \delta(\omega-2\omega_0)]$$

$$R_{1,2}(\tau) = 2\pi(e^{-2j\omega_0\tau} + e^{2j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau} + e^{j\omega_0\tau})$$

$$R_{1,2}(\tau) = 4\pi(\cos(2\omega_0\tau) + \sin(\omega_0\tau))$$

5) $H(\omega) = 1$



$$Y(\omega) = 2\pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

$$Y_1 = 2\pi$$

$$Y_{-1} = 2\pi$$

$$Y_n = 0 \text{ pro } |n| \neq 1$$

$$y(t) = e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}$$

$$y(t) = 2\cos(\omega_0 t)$$

(B)

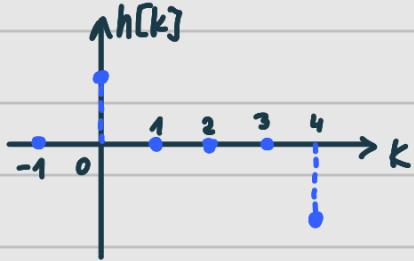
$$H(\Omega) = 1 - \cos(4\Omega) + j\sin(4\Omega)$$

1) $H(\Omega) = 1 - \frac{1}{2}e^{j4\Omega} - \frac{1}{2}e^{-j4\Omega} + \frac{1}{2}e^{j4\Omega} - \frac{1}{2}e^{-j4\Omega} = 1 - e^{-j4\Omega}$

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k}$$

$$h[0] = 1$$

$$h[4] = -1 \quad h[k] = 0 \text{ jinde}$$

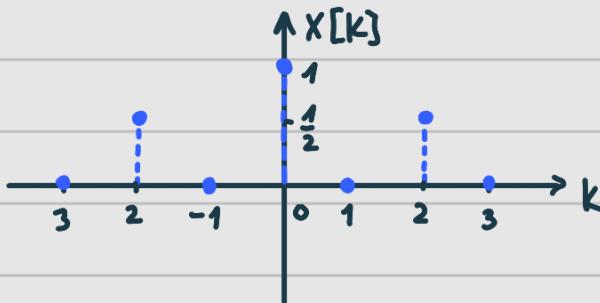


$$2) |H(\omega)| = |1 - \cos(4\omega) + j\sin(4\omega)|$$

3) je kauzalní: $h[k] = 0$ pro $k < 0$

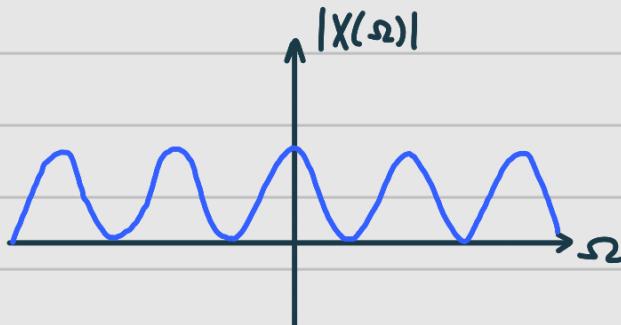
je stabilní: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = 1+1=2 < \infty$

$$4) x[k] = \frac{1}{2}\delta[k+2] + \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-2]$$



$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\omega} = 1 + \frac{1}{2}e^{-2j\omega} + \frac{1}{2}e^{2j\omega} = 1 + \cos(2\omega)$$

$$|X(\omega)| = |1 + \cos(2\omega)| = 1 + \cos(2\omega)$$



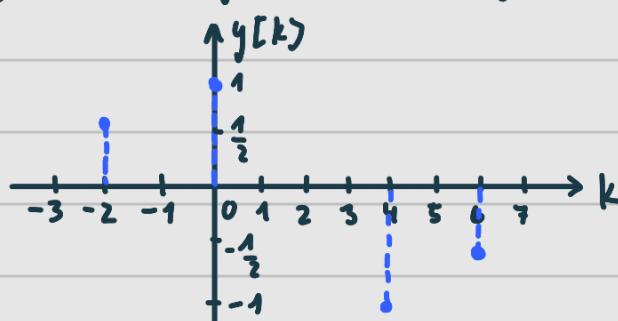
$$5) Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) = (1 - \cos(4\omega) + j\sin(4\omega)) \cdot (1 + \cos(2\omega)) =$$

$$= (1 - e^{-j4\omega}) \cdot (1 + \frac{1}{2}e^{-2j\omega} + \frac{1}{2}e^{2j\omega}) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}e^{-2j\omega} + \frac{1}{2}e^{2j\omega} - e^{-4j\omega} - \frac{1}{2}e^{-6j\omega} - \frac{1}{2}e^{-2j\omega}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}e^{2j\omega} - e^{-4j\omega} - \frac{1}{2}e^{-6j\omega}$$

$$y[0] = 1 \quad y[-2] = \frac{1}{2} \quad y[4] = -1 \quad y[6] = -\frac{1}{2} \quad y[k] = 0 \text{ jinde}$$

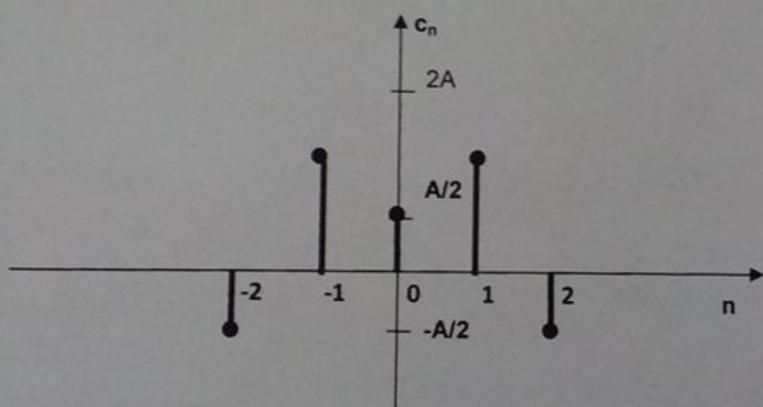


$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |y[k]|^2 = 1 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

číslo paralelky nebo termín cvičení

Příklad A (35 bodů):

Spojitý periodický signál $s(t)$ je popsán koeficienty Fourierovy řady podle obrázku. Zbývající koeficienty Fourierovy řady jsou nulové a na obrázku nejsou zakresleny.



Určete:

1. časový průběh signálu,
2. výkonové spektrum signálu a nakreslete jej,
3. výkon signálu,
4. procentuální podíl výkonu, který nese stejnosměrná složka,
5. autokorelační funkci signálu.

Jméno, příjmení, login

číslo paralelky nebo termín cvičení

Příklad B (35 bodů):

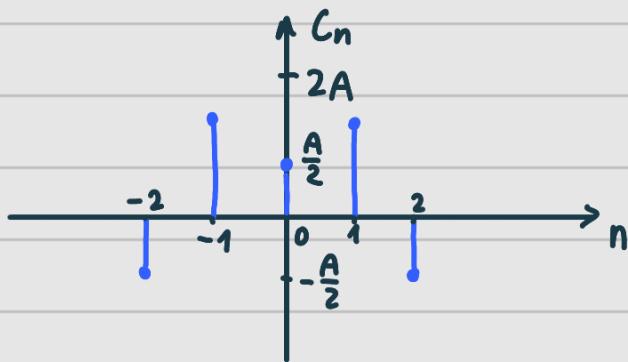
Soustava v diskrétním čase je popsaná diferenční rovnicí

$$y[k] = 2x[k+1] + x[k] + x[k-1] - 2x[k-2]$$

Určete:

1. impulsovou odezvu $h[k]$ a nakreslete ji,
2. je-li soustava kauzální a stabilní a zdůvodněte tvrzení,
3. přenosovou (systémovou) funkci soustavy $H(\Omega)$,
4. spektrum výstupního signálu $Y(\Omega)$ a nakreslete jej, je-li na vstup soustavy přiveden signál $x[k]$, jehož spektrum je $X(\Omega) = \frac{1}{2} \cos \Omega$.

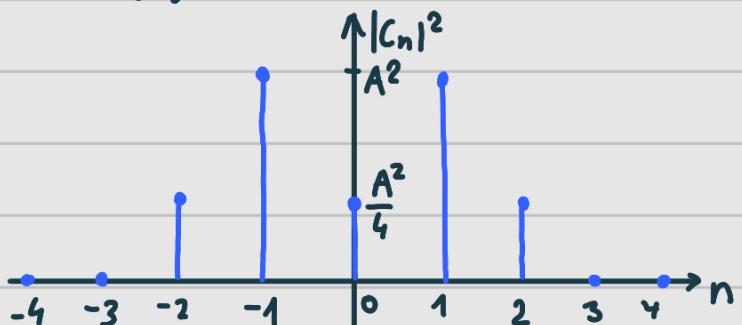
(A)



$$1) s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = -\frac{A}{2} e^{-2j\omega_0 t} + A e^{-j\omega_0 t} + \frac{A}{2} + A e^{j\omega_0 t} - \frac{A}{2} e^{2j\omega_0 t}$$

$$s(t) = \frac{A}{2} + 2A \cos(\omega_0 t) - A \cos(2\omega_0 t)$$

$$2) |c_n|^2 \begin{cases} A^2 & \text{pro } n = \pm 1 \\ \frac{A^2}{4} & \text{pro } n = 0, \pm 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



$$3) P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{A^2}{4} + A^2 + \frac{A^2}{4} + A^2 + \frac{A^2}{4} = \frac{11}{4} A^2$$

$$4) P(0) = \frac{A^2}{4}$$

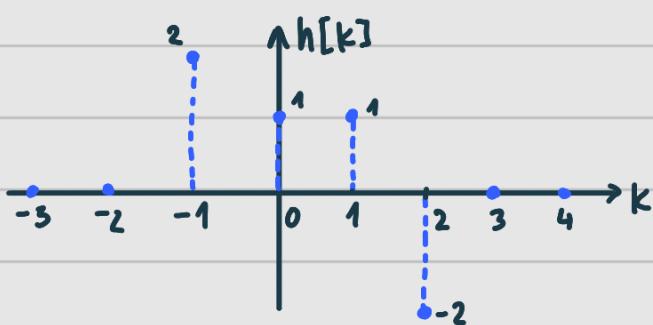
$$\frac{P(0)}{P} = \frac{\frac{A^2}{4}}{\frac{11}{4} A^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{11} = \frac{1}{11} = 0,09\%$$

$$5) R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0 t} = \frac{A^2}{4} e^{-2j\omega_0 t} + A^2 e^{-j\omega_0 t} + \frac{A^2}{4} + A^2 e^{j\omega_0 t} + \frac{A^2}{4} e^{2j\omega_0 t} = \\ = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{2} \cos(2\omega_0 t) + 2A^2 \cos(\omega_0 t)$$

(B)

$$y[k] = 2x[k+1] + x[k] + x[k-1] - 2x[k-2]$$

$$1) h[k] = 2\delta[k+1] + \delta[k] + \delta[k-1] - 2\delta[k-2]$$



2) není kauzalní: $y[k] \neq 0$ pro $k < 0$

je stabilní: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = 2 + 1 + 1 + 2 = 6 < \infty$

$$3) H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-jk\Omega} = 2e^{2j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} - 2e^{-2j\Omega}$$

$$4) X(\Omega) = \frac{1}{2} \cos(\Omega) = \frac{1}{4} e^{j\Omega} + \frac{1}{4} e^{-j\Omega}$$

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= X(\Omega) \cdot H(\Omega) = \left(\frac{1}{4} e^{j\Omega} + \frac{1}{4} e^{-j\Omega} \right) \cdot (2e^{2j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} - 2e^{-2j\Omega}) \\ &= \frac{1}{2} e^{3j\Omega} + \frac{1}{4} e^{j\Omega} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} e^{-j\Omega} + \frac{1}{2} e^{j\Omega} + \frac{1}{4} e^{-j\Omega} + \frac{1}{4} e^{-2j\Omega} - \frac{1}{2} e^{-3j\Omega} \\ &= \frac{1}{2} e^{3j\Omega} - \frac{1}{2} e^{-3j\Omega} + \frac{3}{4} e^{j\Omega} - \frac{1}{4} e^{-j\Omega} + \frac{1}{4} e^{-2j\Omega} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

jak to mám nakreslit?

jméno, příjmení, login

Ales Janeček

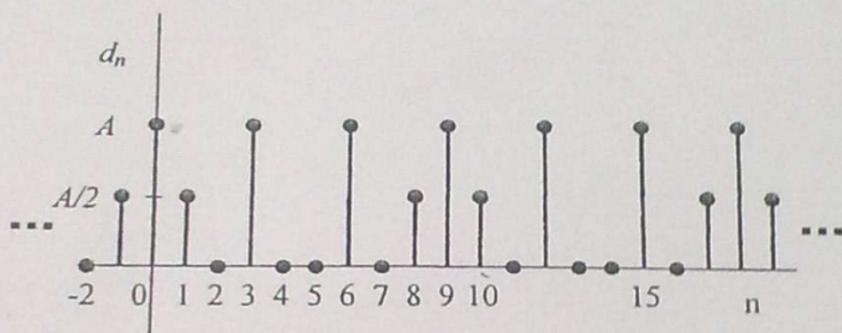
č. paralelky nebo termín cvičení

100628

Příklady A a B řešte na oddělené listy papíru.

Příklad A:

Signál $s[k]$ vznikl vzorkováním periodického signálu $s(t)$ vzorkovacím kmitočtem $f_{sa} = 1,8 \text{ kHz}$. Signál $s(t)$ má spektrum nulové pro kmitočty větší než $f_m = 600 \text{ Hz}$. Signál $s[k]$ má spektrum dle obrázku:



1. Určete a nakreslete výkonové spektrum signálu $s(t)$.
2. Určete minimální kmitočet f_{sa_min} pro vzorkování signálu $s(t)$, při kterém bude dodržena vzorkovací podmínka.
3. Určete stejnosměrnou složku a výkon signálu $s(t)$.
4. Určete signál $s[k]$ (nakreslete obrázek jedné periody signálu).
5. Určete signál $s(t)$.

Příklad B:

Signál ve spojitém čase $x(t) = A \left(\sin\left(\frac{\omega_m}{2}t\right) + 2 \cos(2\omega_m t) \right)$ je přiveden na vstup soustavy (ideální dolní propust) s přenosovou funkcí:

$$H(\omega) = \begin{cases} B & \text{pro } |\omega| < \omega_m, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

kde $A > 0$, $B > 0$.

Určete:

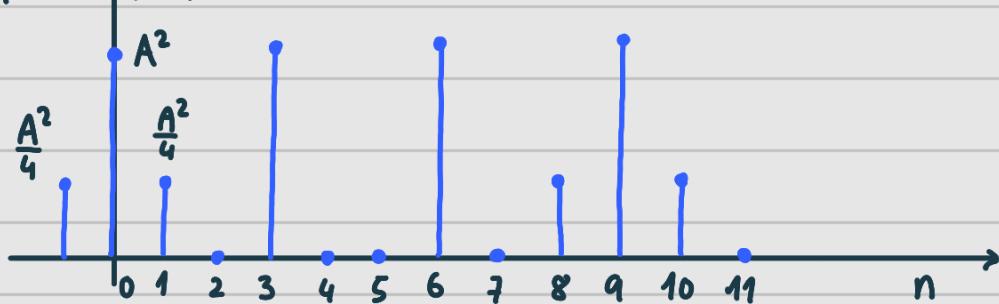
1. Amplitudové a fázové spektrum signálu $x(t)$.
2. Výkonové spektrum signálu na výstupu soustavy.
3. Výkon signálu na vstupu P_x a výkon signálu na výstupu soustavy P_y .
4. Impulsovou odezvu soustavy $h(t)$. Impulsovou odezvu nakreslete.
5. Je zadaná soustava kauzální? Zdůvodněte.

A

$$f_{Sa} = 1,8 \text{ kHz}$$

$$f_m = 600 \text{ Hz}$$

1) $|d_n|^2$



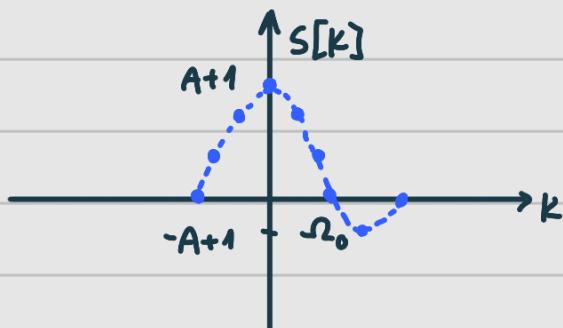
2) $f_{Sa\text{-max}} = 2f_m = 2 \cdot 600 \text{ Hz} = \underline{1,2 \text{ kHz}}$

3) $S_{ss} = d_0 = A$

$$P = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} |d_n|^2 = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^8 |d_n|^2 = \frac{1}{q} \left(A^2 + \frac{A^2}{4} + 0 + A^2 + 0 + 0 + A^2 + 0 + \frac{A^2}{4} \right) = \frac{7}{2} A^2$$

4) $S[k] = \sum_{n=-4}^4 d_n e^{jn\Omega_0 k} = A \left(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 k} + \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 k} + e^{-3j\Omega_0 k} + e^{3j\Omega_0 k} \right)$

$$S[k] = A \left(1 + \cos(\Omega_0 k) + 2 \cos(3\Omega_0 k) \right)$$



5) $s(t) = A \left(1 + \cos(\Omega_0 t) + 2 \cos(3\Omega_0 t) \right) \leftarrow \text{totole určitě nebude správně :-)$

B

$$x(t) = A \left(\sin\left(\frac{\omega_m}{2}t\right) + 2 \cos(2\omega_m t) \right)$$

$$H(\omega) = \begin{cases} B & |\omega| < \omega_m \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$A > 0, B > 0$$

$$1) \quad x(t) = A \left(\frac{1}{2j} e^{j \frac{\omega_m}{2} t} - \frac{1}{2j} e^{-j \frac{\omega_m}{2} t} + e^{j \omega_m t} + e^{-j \omega_m t} + 1 \right)$$

Jméno, příjmení, login:

Paralelka nebo termin evičení:

110621

Příklady A a B řešte na oddělené listy papíru.

Příklad A:

Periodický signál ve spojitém čase $s(t)$ s periodou T_0 lze definovat uvnitř základní periody $t \in (-T_0/2, T_0/2)$ následovně:

$$s(t) = \begin{cases} A \exp(-a|t|) & t \in \left(-\frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{4}\right); \quad A, a \in \mathbb{R}; \quad A, a > 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

- 1) Pečlivě zakreslete **časový průběh** periodického signálu.
- 2) Určete **výkon** periodického signálu.
- 3) Určete **stejnosměrnou složku** periodického signálu.
- 4) Určete **spektrum** periodického signálu (koeficienty komplexní Fourierovy řady c_n).
- 5) Pečlivě zakreslete **průběh signálu na výstupu LTI soustavy** s impulsovou odevzou $h(t) = \delta(t) - \delta(t - T_0/2)$ pokud na vstup soustavy přivedeme zadáný periodický signál $s(t)$.
- 4) Určete **spektrum** periodického signálu (koeficienty komplexní Fourierovy řady c_n).
- 5) Pečlivě zakreslete **průběh signálu na výstupu LTI soustavy** s impulsovou odevzou $h(t) = \delta(t) - \delta(t - T_0/2)$ pokud na vstup soustavy přivedeme zadáný periodický signál $s(t)$.

Příklad B:

Signál $x(t)$ je dán součtem harmonických signálů:

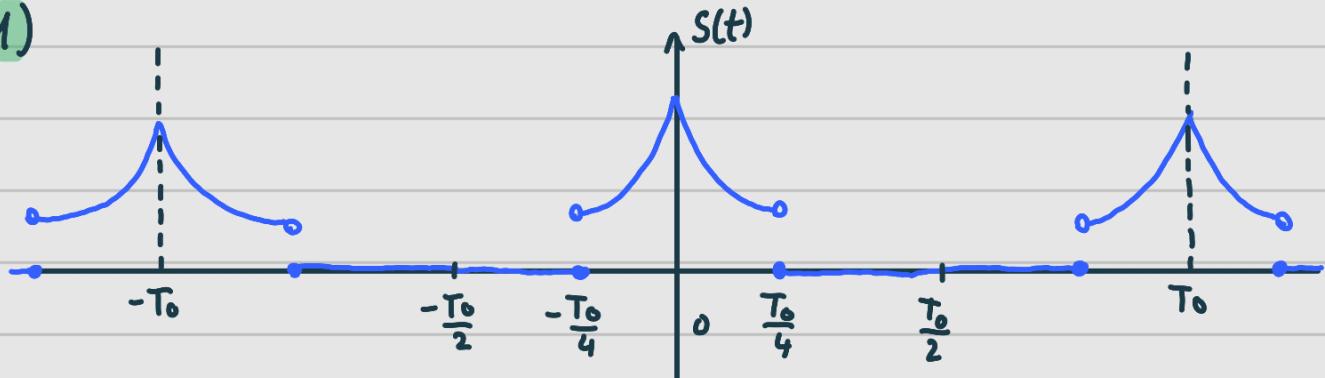
$$x(t) = \cos(3t) + \cos(6t) + \cos(9t) + \cos(12t)$$

- 1) Určete a pečlivě zakreslete **spektrum** (koeficienty FŘ) signálu $x(t)$.
- 2) Určete **výkon a stejnosměrnou složku** signálu $x(t)$.
- 3) Soustava má impulsovou odevzdu $h(t) = (\sin(10t))/(\pi t)$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda je tato soustava **kauzální**.
- 4) Určete a pečlivě zakreslete **přenosovou funkci** $H(\omega)$ soustavy s impulsovou odevzdu $h(t)$.
- 5) Pro signál $y(t)$, který vznikne průchodem signálu $x(t)$ soustavou s impulsovou odevzdu $h(t)$, určete a pečlivě zakreslete jeho **spektrum**.

A

$$S(t) \begin{cases} Ae^{-\alpha|t|} & t \in (-\frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{4}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad A, \alpha \in \mathbb{R} \quad A, \alpha > 0 \quad \text{periodic} \quad t \in (-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2})$$

1)



$$2) P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |S(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A e^{-2\alpha|t|} dt = \frac{A^2}{T_0} \left(\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{2at} dt + \int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-2at} dt \right)$$

$$P = \frac{A^2}{T_0} \left[\frac{e^{2at}}{2a} \right]_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{A^2}{T_0} \left[\frac{e^{-2at}}{-2a} \right]_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{A^2}{2aT_0} \left(1 - e^{-2a\frac{T_0}{2}} \right) - \frac{A^2}{2aT_0} \left(e^{-2a\frac{T_0}{2}} - 1 \right)$$

$$P = \frac{A^2}{aT_0} \left(1 - e^{-2a\frac{T_0}{2}} \right)$$

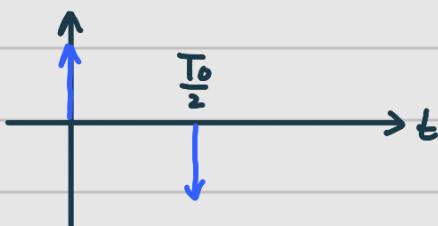
$$3) S_{ss} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} S(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A e^{-\alpha|t|} dt = \frac{2A}{aT_0} \left(1 - e^{-a\frac{T_0}{2}} \right)$$

$$4) C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 A e^{at} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A e^{-at} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{A}{T_0} \left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \right]_{-\frac{T_0}{2}}^0 + \frac{A}{T_0} \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right]_0^{\frac{T_0}{2}} =$$

$$= \frac{A}{T_0(a-j\omega)} \left(1 - e^{(a-j\omega)\frac{T_0}{2}} \right) - \frac{A}{T_0(a+j\omega)} \left(e^{-(a+j\omega)\frac{T_0}{2}} - 1 \right)$$

$$5) h(t) = \delta(t) - \delta(t - \frac{T_0}{2})$$



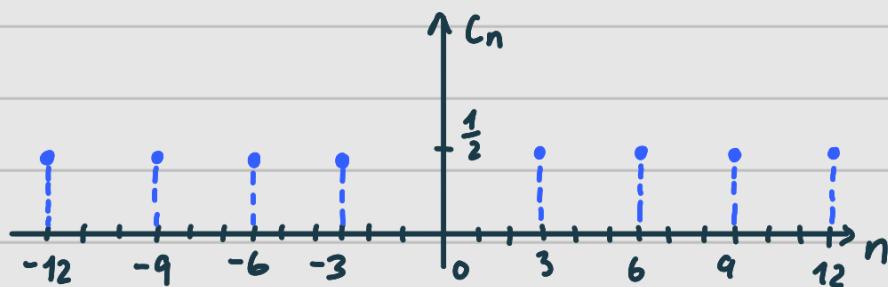
$y(t) = h(t) * s(t) \rightarrow$ vzorkovací vlastnost diracova impulu

$$y(t) = A e^{-\alpha|t|} - A e^{-\alpha|t-\frac{T_0}{2}|} = A (e^{-\alpha|t|} - e^{-\alpha|t-\frac{T_0}{2}|})$$

(B) $x(t) = \cos(3t) + \cos(6t) + \cos(9t) + \cos(12t)$

1) $x(t) = \frac{1}{2} e^{3jt} + \frac{1}{2} e^{-3jt} + \frac{1}{2} e^{6jt} + \frac{1}{2} e^{-6jt} + \frac{1}{2} e^{9jt} + \frac{1}{2} e^{-9jt} + \frac{1}{2} e^{12jt} + \frac{1}{2} e^{-12jt}$

$$C_3 = C_{-3} = C_6 = C_{-6} = C_9 = C_{-9} = C_{12} = C_{-12} = \frac{1}{2} \quad \text{ostatní: } C_n = 0$$



2) $S_{ss} = 0 \quad (C_0 = 0)$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$$

3) $h(t) = \frac{\sin(10t)}{\pi t}$

není kavza'lní: $h(t) \neq 0$ pro $t < 0$

4) $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(10t)}{\pi t} e^{-j\omega t} dt$

moc složité, bude to nějaký čtverec