

E6 – Základní vektorové veličiny v magnetickém poli. Stacionární magnetické pole. Biotův-Savartův zákon. Ampérův zákon a jeho aplikace pro výpočet magnetického pole. Energie v magnetickém poli, objemová hustota energie. Faradayův indukční zákon, indukovaná napětí. Vlastní a vzájemná indukčnost a její výpočet pro základní geometrické uspořádání proudovodičů. (Elektromagnetické pole)

Pro detailnější vysvětlení/odvození – Pankrácova skripta a příklady (MG) na moodlu + podobnost vztahů

https://elmag.fel.cvut.cz/sites/default/files/users/pankrac/files/text_A1B17EMP_22_leden_2016.pdf

https://elmag.fel.cvut.cz/sites/default/files/users/pankrac/files/Priklady_IV_magneticke_pole.pdf

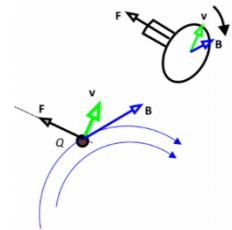
https://moodle.fel.cvut.cz/pluginfile.php/212603/course/section/40675/podobnost_vztahu_2017.pdf

ZÁKLADNÍ VELIČINY V MAGNETICKÉM POLI

Magnetická indukce \mathbf{B} [T]

- Pokud vložíme do daného místa v magnetickém poli, ve kterém má magnetická indukce velikost \mathbf{B} , kladný bodový náboj Q , který se pohybuje v daném směru rychlostí \mathbf{v} , působí na tento náboj podle definičního vztahu pro magnetickou indukci síla \mathbf{F}
- Jinak: Magnetická indukce je definována jako vektorová veličina, která popisuje sílu působící na náboj pohybující se rychlostí \mathbf{v} v magnetickém poli o dané magnetické indukci \mathbf{B} .

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

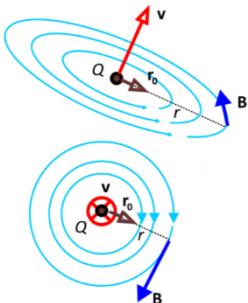


Obr.18 Magnetická indukce, siločáry magnetického pole

- Vektor magnetické indukce je v každém místě k siločáre tečný.**
- Magnetická indukce, kterou kolem sebe vybudí jeden rovnoměrně se pohybující bodový náboj v daném místě orientovaném ve směru jednotkového vzdálenosti dané

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0)$$

poloměrem r :



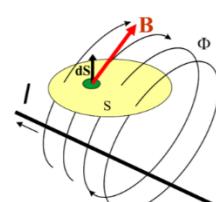
Obr.19 Magnetické pole letícího bodového náboje

- Směr siločar magnetického pole lze určit mnemotechnickým pravidlem pravé ruky: Pokud bychom pomyslně obemkli dlaní a prsty pravé ruky dráhu pohybujícího se náboje a palec pravé ruky by ukazoval směr pohybu, zahnuté prsty ukáží směr siločar magnetického pole.

Magnetický indukční tok (není vektorová veličina)

- Pokud magnetické pole popišeme magnetickou indukcí \mathbf{B} , kterou budeme chápát v tomto případě jako plošnou hustotu pomyslného magnetického toku Φ , potom bude platit pro velikost toku, který proteče obecnou plochou:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$



Obr.67 Magnetický indukční tok

- Tok vektoru magnetické indukce uzavřenou plochou**

- Pokud bude plocha, kterou protéká magnetický tok, uzavřená, proteče touto plochou nulový součtový magnetický tok. Stejně velký tok vteče na jedné straně a vyteče na druhé straně. □ Jedna z Maxwellových rovnic

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

Intenzita magnetického pole H [A/m]

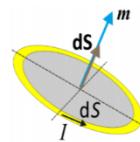
- Intenzita magnetického pole popisuje míru silových účinků magnetického pole. Na rozdíl od magnetické indukce nezahrnuje vliv vázaných magnetizačních proudů prostředí, ale pouze "vnějších" zdrojů pole, tedy volných elektrických proudů.
- Souvisí pouze s volnými (konduktorními) proudy.

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

Magnetický dipólový moment m [A*m²]

- Magnetický dipólový moment je vektorová veličina, která je dána součinem orientované plochy a proudu. Plocha je orientována v kladném směru ve vztahu ke kladnému smyslu proudu (pravidlo pravé ruky):

$$\mathbf{m} = I d\mathbf{S}$$



Obr.78 Magnetický dipól

Magnetizace M [A/m]

- Magnetizace je vektorová fyzikální veličina, charakterizující magnetické vlastnosti látkového prostředí, vystaveného vnějšímu magnetickému poli. Magnetizace představuje objemovou hustotu magnetického dipólového momentu v prostředí.
- Souvisí pouze s vázanými proudy.

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}}{\Delta V}$$

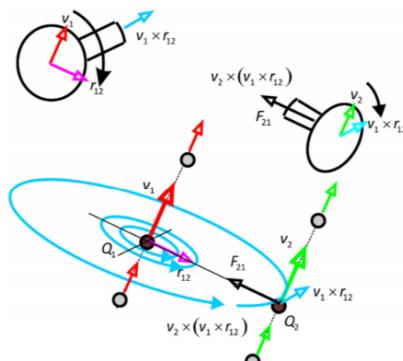
Síla F [N]

- Síla v magnetickém poli mezi rovnoměrně se pohybujícími náboji (podobnost s Coulombovým zákonem)

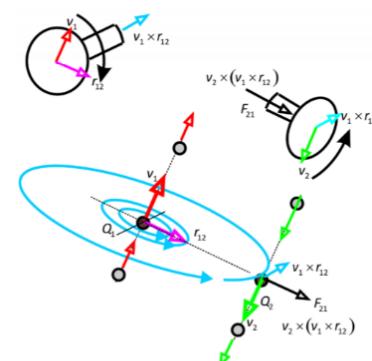
$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \left[\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12}) \right]$$

kde r_{12} je jednotkový vektor, který je orientován po spojnici ve směru od budícího náboje k náboji, na kterém posuzujeme silové účinky
 r je vzdálenost mezi náboji
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [H/m]$ je permeabilita vakua
 v_1, v_2 jsou vektory rychlostí pohybujících se nábojů

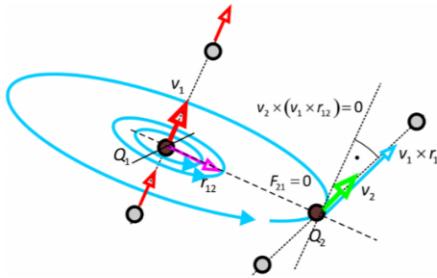
- Pokud se náboje pohybují ve stejném směru působí mezi nimi přitažlivá síla, pokud ve směru opačném působí mezi nimi síla odpudivá – pravidlo pravé ruky
- Pokud se pohybují v navzájem kolmých směrech je mezi nimi síla nulová.



Obr.15 Náboje se pohybují v paralelních liniích ve stejném směru



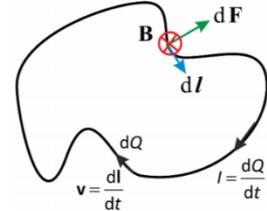
Obr.16 Náboje se pohybují v paralelních liniích v opačném směru



Obr.17 Náboje se pohybují v navzájem kolmých směrech

- Síla působící na vodiče nebo proudovou smyčku v magnetickém poli

$$\mathbf{F} = I \int_1 (\mathbf{dI} \times \mathbf{B})$$



Obr.66 Síla působící na proudovou smyčku v magnetickém poli

Stacionární magnetické pole

- Stacionární magnetické pole je primárně buzené rovnoměrně se pohybujícími volnými náboji. V technické praxi zkoumáme především problémy, ve kterých se náboje nepohybují ve volném prostoru, ale ve vodičích ve formě elektrického proudu, který má v tomto případě konstantní časově neproměnnou hodnotu (stejnosměrný proud). V obecném nestacionárním případě se při časových změnách elektrického proudu vybudí nestacionární elektromagnetické pole, které má neoddělitelnou elektrickou a magnetickou složku.
- Při studiu stacionárního magnetického pole nedochází k časovým změnám elektrického pole.

Biot – Savartův zákon

- Biot – Savartův zákon v různých modifikacích umožňuje stanovit magnetickou indukci v magnetickém poli vyvolaném pohybujícími se elektrickými náboji.**
- Biot – Savartův zákon pro proudovou smyčku
 - V technické praxi obvykle neuvažujeme jednotlivé izolované letící náboje, ale většinou náboje, které se pohybují ve vodiči v podobě elektrického proudu $I = \frac{dQ}{dt}$.
 - Pokud budeme uvažovat, že se náboje ve vodiči pohybují rychlostí $v = \frac{dl}{dt}$ a vodičem teče elektrický proud o velikosti $I = \frac{dQ}{dt}$, bude platit:

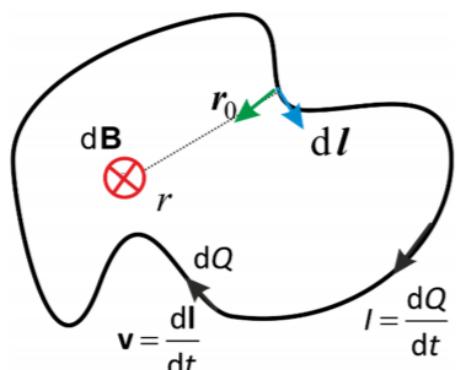
$$dQ \cdot v = dQ \frac{dl}{dt} = \frac{dQ}{dt} dl = I \cdot dl$$

- Pro magnetickou indukci buzenou proudovým elementem $I \cdot dl$ v bodě o vzdálenosti r a ve směru daném jednotkovým vektorem r_0 bude potom platit

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dQ}{r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(dl \times r_0)}{r^2}$$

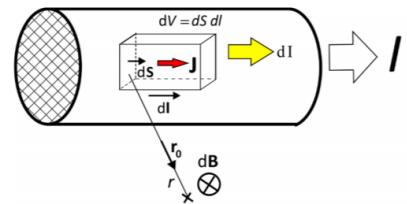
- Výslednou magnetickou indukci dostaneme sečtením (integrací) magnetického pole všech proudových elementů smyčky:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_1 \frac{(dl \times r_0)}{r^2}$$



- Biot – Savartův zákon pro vodič konečných rozměrů s obecně rozloženou proudovou hustotou
 - Pokud je magnetické pole buzené proudem s obecně rozloženou proudovou hustotou ve vodiči, lze napsat pro objemový element:

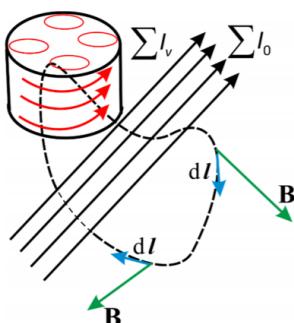
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}_0}{r^2} dV$$



Obr.65 Objemový proudový element budící magnetické pole

Zákon celkového proudu = Ampérův zákon

- Zdrojem magnetického pole jsou pohybující se náboje, které můžeme ve vodičích sledovat v podobě konduktivních proudů a v magnetiku v podobě vázaných proudů.
- Na obrázku je naznačeno magnetické pole vybuzené volnými proudy ve vodiči a vázanými proudy v magnetiku. Pokud v tomto magnetickém poli zvolíme libovolnou uzavřenou dráhu (začíná a končí v jednom bodě) a v každém bodě dráhy stanovíme skalární součin vektoru magnetické indukce \mathbf{B} a orientovaného elementu dráhy $d\mathbf{l}$, obdržíme po integraci výsledek, který je vždy roven celkovému proudu (volnému i vázanému), který je uzavřenou dráhou obemknut, vynásobenému permeabilitou vakua. Nezáleží na tom, jestli proud protéká izolovanými tenkými vodiči či jedním masivním vodičem, nezávisí ani na poloze vodičů a tvaru dráhy. Pokud dráha neobemyká žádný proud, bude výsledek nulový, přestože může být hodnota magnetické indukce na uzavřené dráze nenulová. Podle konvence se po uzavřené dráze obíhá v kladném smyslu (podle pravidla pravé ruky) s ohledem na zvolený kladný smysl protékajícího proudu.

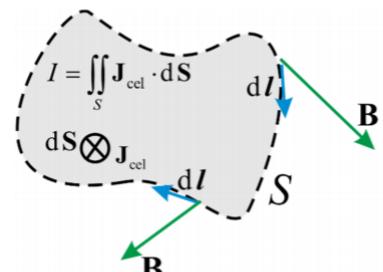


$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{cel}} = \mu_0 (\sum I_0 + \sum I_v)$$

- Pokud bude proud rozložen po ploše vymezené oběhovou dráhou s obecnou proudovou hustotou J_{cel} , lze zákon celkového proudu zapsat v alternativní podobě:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J}_{\text{cel}} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S (\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_v) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{cel}} = \mu_0 (\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_v)$$



- Diferenciální tvar

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_0$$

Plošnou hustotu konduktivního proudu J_0 vyjádříme pomocí intenzity magnetického pole \mathbf{H}

$$\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{J}_v$$

Po dosazení zpět bude platit

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{cel}} = \mu_0 (\text{rot } \mathbf{H} + \text{rot } \mathbf{M})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

- Zákon celkového proudu pro intenzitu (pouze jiné vyjádření)

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_0$$

- Aplikace

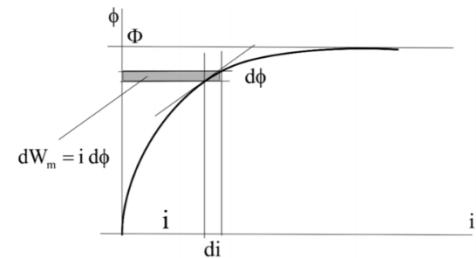
- o Příklady MG/17, 18, 29, 21

Energie v magnetickém poli, objemová hustota energie

- Energie magnetického pole vybuzeného proudovou smyčkou

$$W_m = \int_0^\Phi i d\phi$$

- o Na obrázku je zobrazena tzv. magnetizační charakteristika – závislost magnetického toku na proudu. Obecně je nelineární.

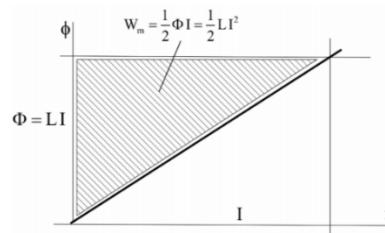


Magnetizační charakteristika

Z obrázku je patrné, že součinu $i d\phi$ a tedy přírůstku energie magnetického pole dW_m odpovídají vyšrafované elementární oblasti nad charakteristikou. Celková energie vybuzeného magnetického pole potom odpovídá celkové ploše nad charakteristikou.

- o V případě, že bude magnetizační charakteristika lineární, což znamená, že bude platit vztah podle statické definice indukčnosti, ve kterém bude indukčnost konstantní a nezávislá na proudu: $\phi = L i$ (respektive $d\phi = L di$, $L = \text{konst} \neq f(i)$), potom pro energii magnetického pole v induktoru vyplýne:

$$W_m = \int_0^\Phi i d\phi = L \int_0^I i di = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \Phi I$$



- Vyjádření energie pomocí **B** a **H**

Obr.90 Lineární magnetizační charakteristika

$$d\Phi = B dS \quad \oint H dl = I$$

$$dW_m = \frac{1}{2} d\Phi I = \frac{1}{2} B dS \oint H dl = \frac{1}{2} \oint BH dV$$

- o V objemovém elementu bude tedy energie o velikosti $\frac{1}{2} BH dV$ a objemová hustota energie magnetického pole bude:

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

Pro celkovou energii pak platí:

$$W_m = \iiint_V w_m dV$$

Faradayův indukční zákon, indukovaná napětí

- Faradayův indukční zákon, Lenzovo pravidlo
 - Faradayův indukční zákon udává elektromotorické napětí indukované v uzavřené vodivé smyčce, která je umístěna v časově proměnném magnetickém poli. Okamžitá hodnota elektromotorického napětí je v daném okamžiku rovna záporně brané časové změně magnetického toku, který plochou smyčky prochází.

$$u_{em} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Pokud by se nejednalo o prostou smyčku, ale cívku, která má počet závitů N , je nutno kalkulovat se sumárním magnetickým tokem Φ_{cel} (součet jednotlivých Φ_i) ve všech závitech. Tím obdržíme rovněž součet indukovaných napětí ve všech závitech, a tedy i v celé cívce:

$$u_{em} = -\frac{d\Phi_{cel}}{dt}$$

Pokud leží všechny závity cívky v přibližně stejném magnetickém poli a platí $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \dots = \Phi_n$ (závity navinuté těsně na sobě), je možné pro sumární tok napsat $\Phi_{cel} = N \Phi$ a pro indukované napětí:

$$u_{em} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

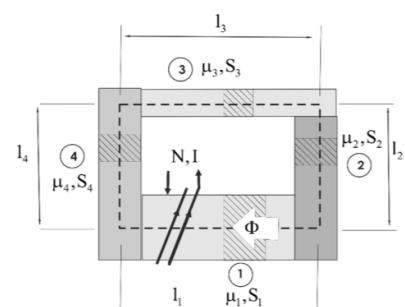
Znaménko mínus v sobě zahrnuje velice důležité **Lenzovo pravidlo**, podle kterého se proud vyvolaný indukovaným napětím v uzavřené smyčce snaží zabránit časovým změnám magnetického pole.

- Názorný příklad např. MG/31, 33
- **Zobecnění Faradayova indukčního zákona (Maxwellova rovnice)**
 - Faradayův indukční zákon je nutné chápát jako obecný vztah mezi elektrickým polem a časově proměnným magnetickým polem bez ohledu na to, jestli do časově proměnného magnetického pole vložíme vodivou smyčku, na které posuzujeme velikost indukovaného napětí, nebo nevložíme. Pokud existuje časově proměnné magnetické pole, existuje i časově proměnné elektrické pole. Jsou to navzájem neoddělitelné složky společného elektromagnetického pole.
 - Pokud si v časově proměnném magnetickém poli vytýčíme libovolnou myšlenou uzavřenou dráhu a určíme časové změny magnetického toku procházejícího plochou, kterou dráha vymezuje, bude výsledek roven integrálu intenzity elektrického pole po této uzavřené dráze:

$$\oint_1 E \cdot dl = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- Diferenciální tvar (pomocí Stokesovy věty)

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$



Obr.85 Magnetický obvod

Vlastní a vzájemná indukčnost a její výpočet pro základní geometrické uspořádání proudovodičů

- Hopkinsův zákon – pro magnetické obvody

$$\Phi = \frac{U_m}{R_m}$$

- Reluktance R_m = magnetický odpor

$$R_m = \sum_i R_{mi} \quad R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_i S_i}$$

- Magnetomotorické napětí U_m

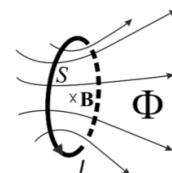
$$U_m = NI$$

STATICKÁ DEFINICE

- **Vlastní indukčnost**

- Vlastní indukčnost podle statické definice udává podíl mezi vybuzeným magnetickým tokem a proudem:

$$L_{stat} = \frac{\Phi}{I}$$



Vlastní indukčnost smyčky – statická definice

- Pokud se bude jednat o cívku, která má N závitů a každým závitem prochází jiný magnetický tok, vlastní indukčnost je určena tzv. „spřaženým“ magnetickým tokem

$$\Phi_{celk}, \text{ což je sečtený magnetický tok} \quad \Phi_{celk} = \sum_i \Phi_i \quad \text{všemi závity:}$$

$$\text{Pro indukčnost podle statické definice bude pak platit:} \quad L_{stat} = \frac{\Phi_{celk}}{I}$$

- Pokud můžeme předpokládat, že všemi závity teče stejný magnetický tok a cívka má N závitů bude platit:

$$L_{stat} = \frac{N \Phi}{I}$$

- Pokud je závislost $\Phi_{celk} = LI$ lineární, indukčnost je konstanta nezávislá na velikosti elektrického proudu. Indukčnost podle statické definice potom udává pro libovolně veliký elektrický proud nejen magnetický tok, ale pro libovolné časové změny tohoto proudu i napětí, které by se v cívce indukovalo:

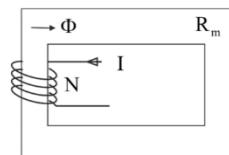
$$u_i = \frac{d\Phi_{celk}}{dt} = N \frac{d\Phi}{dt} = L_{stat} \frac{di}{dt}$$

- V případě nelineární závislosti $\Phi(I)$ však vztah pro indukované napětí a energii magnetického pole v závislosti na indukčnosti podle statické definice **obecně neplatí**. Zavádí se zvláště pojem **dynamické a energetické definice** indukčnosti. Hodnoty indukčnosti podle statické, dynamické a energetické definice jsou obecně rozdílné

- Vlastní indukčnost zapsaná pomocí **reluktance**

- Pokud bude cívka umístěna na magnetickém obvodu, lze velikost vlastní indukčnosti vyjádřit pomocí celkové reluktance obvodu (Hopkins).

$$L = \frac{N \Phi}{I} = \frac{N \frac{NI}{R_m}}{I} = \frac{N^2}{R_m}$$



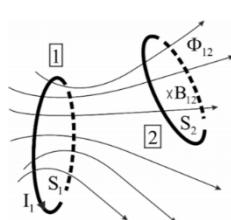
Vlastní indukčnost cívky na magnetickém obvodu

Tento vztah je bez omezení použitelný pouze za předpokladu, kdy je možné magnetický odpor a potažmo permeabilitu považovat za konstantní nezávislé na velikosti proudu. U feromagnetických materiálů tato podmínka splněná není. Hodnoty permeability, magnetického odporu, a tedy i indukčnosti je proto nutné stanovit pro určitý pracovní bod daný konkrétní velikostí proudu.

- **Vzájemná indukčnost**

- Na obrázku jsou dvě smyčky označené jako 1 a 2. Pokud prochází první smyčkou elektrický proud I_1 , vybudí tato smyčka magnetické pole, které zasáhne i do druhé smyčky (magnetická indukce \mathbf{B}_{12}).
- Vzájemná indukčnost podle statické definice udává podíl společného magnetického toku Φ_{12} a proudu první smyčkou I_1 :

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$



Vzájemná indukčnost dvou smyček – statická definice

Smyčkou 2 neteče v tomto případě žádný proud. Kdyby byl proud první smyčkou časově proměnný, do druhé smyčky by se indukovalo napětí $u_{i2} = M_{12} \frac{di_1}{dt}$.

$$\text{Stejnou úvahu lze udělat i pro druhou smyčku } M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

- Pokud bude místo druhé smyčky cívka s počtem závitů N_2 , je opět nutné pracovat se spřaženým magnetickým tokem. Pokud bude všemi závity procházet stejný magnetický tok, lze psát:

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$

- Pokud je závislost $M_{12} I_1 = N_2 \Phi_{12}$ lineární, vzájemná indukčnost M_{12} je konstanta nezávislá na proudu. Vzájemná indukčnost podle statické definice potom udává pro libovolně veliký elektrický proud v první cívce nejen společný magnetický tok, ale pro libovolné časové změny tohoto proudu i napětí, které by se indukovalo v druhé cívce

$$u_{i2} = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

V případě nelineární závislosti však vztah pro indukované napětí v závislosti na indukčnosti podle statické definice neplatí. Zavádí se zvláště pojem dynamické definice vzájemné indukčnosti. Hodnoty vzájemné indukčnosti podle statické a dynamické definice jsou obecně rozdílné.

- Vzájemná indukčnost pomocí **reluktance**

- Pokud budou cívky umístěny na magnetickém obvodu, lze velikost vzájemné indukčnosti vyjádřit pomocí celkové reluktance (magnetického odporu) obvodu (Hopkins).

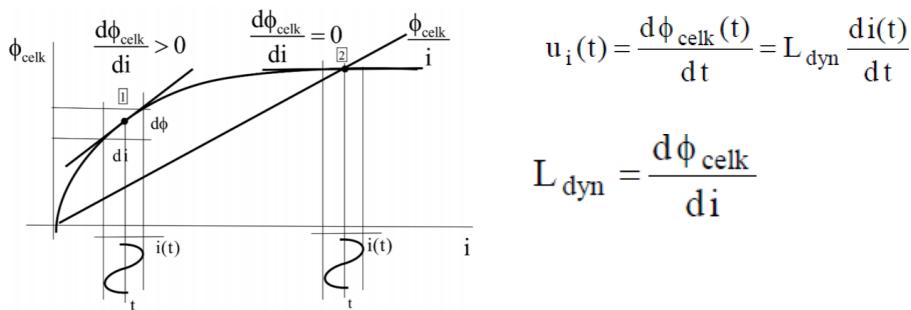
$$M = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \frac{N_2 \frac{N_1 I_1}{R_m}}{I_1} = \frac{N_1 N_2}{R_m}$$

- Tento vztah je možné bez omezení použít pouze za předpokladu, kdy je možné magnetický odpor a potažmo permeabilitu považovat za konstantní nezávislou na velikosti proudu. U feromagnetických materiálů tato podmínka splněná není. Hodnoty permeability, magnetického odporu, a tedy i vzájemné indukčnosti je proto nutné stanovit pro určitý pracovní bod daný konkrétní velikostí proudu.

DYNAMICKÁ DEFINICE

- **Vlastní a vzájemná indukčnost**

- o Vlastní indukčnost definovaná podle dynamické definice udává směrnici tečny k magnetizační charakteristice v daném pracovním bodě a potažmo i indukované napětí při relativně malých změnách proudu v okolí pracovního bodu:



Obr.98 Porovnání statické a dynamické definice indukčnosti

- o Statická definice udává nározdíl od dynamické v každém pracovním bodě podíl $L_{stat} = \frac{\Phi_{celk}}{I}$ a potažmo směrnici sečny magnetizační charakteristiky v každém pracovním bodě. V pracovním bodě 2 na obrázku tak bude dynamická indukčnost prakticky nulová, časové změny proudu nebudou vyvolávat změny magnetického toku, a tudíž se nebude indukovat žádné napětí. Indukčnost podle statické definice, která bude určovat v pracovním bodě celkový magnetický tok, však nulová nebude. V případě lineární magnetizační charakteristiky bude směrnice sečny i tečny totožná a indukčnosti podle statické i dynamické definice budou stejné.
- o Pro vzájemnou podobně

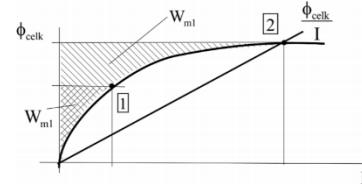
ENERGETICKÁ DEFINICE

- **Vlastní indukčnost (vzájemná ne)**

- o Vlastní indukčnost podle energetické definice udává pro určitý proud (v určitém pracovním bodě) skutečnou hodnotu energie magnetického pole, která je v cívce akumulována:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{en} I^2$$

$$L_{en} = \frac{2W_m}{I^2}$$



- Výpočty vzájemné indukčnosti MG/48, 50, 51

Obr.99 Energetická definice indukčnosti