I7: Klasifikace signálů ve spojitém a diskrétním čase, speciální signály. Časová a spektrální reprezentace signálů, charakteristiky signálů, korelace, základní teorémy. Vzorkování a interpolace signálu. Základní charakteristiky náhodného procesu, stacionarita a ergodicita, bílý šum.

Většina se probrala jak v ZZS, tak podrobněji v SASu. Ke slidům není často moc co dodat, tak snad to stačí. Nejdřív většinou dávám slidy ze ZZS, který jsou srozumitelnější, pak ty ze SASu, kde je zas podrobnější matematický popis.

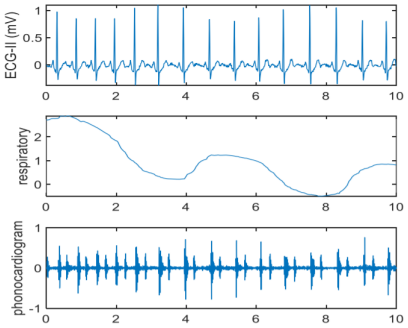
KLASIFIKACE SIGNÁLŮ

Signál popisuje měnící se veličinu (v čase, prostoru…). Je to tedy funkce reálné nebo komplexní proměnné. Počet proměnných = dimenze signálu (tzn. zvuk v čase = 1D, graysvale obraz = 2D, grayscale video = 3D atd.).

Příklady signálů

jednorozměrné (1D)

$y(t) = f(t)$



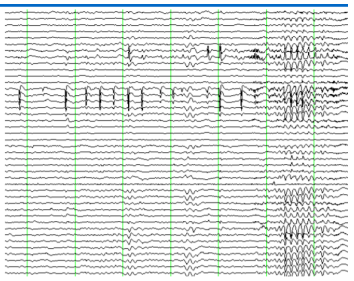
Příklady signálů

dvojrozměrné (2D)

Multikanálový signál

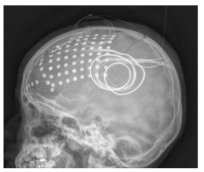
$y(ch, t) = f(ch, t)$

ch... kanál



Obraz

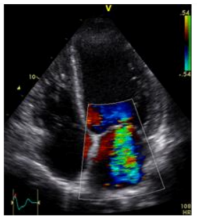
$y(x, y) = f(x, y)$

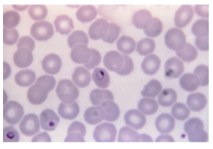


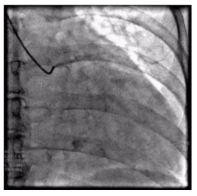
Příklady signálů

vícerozměrné (N-D)

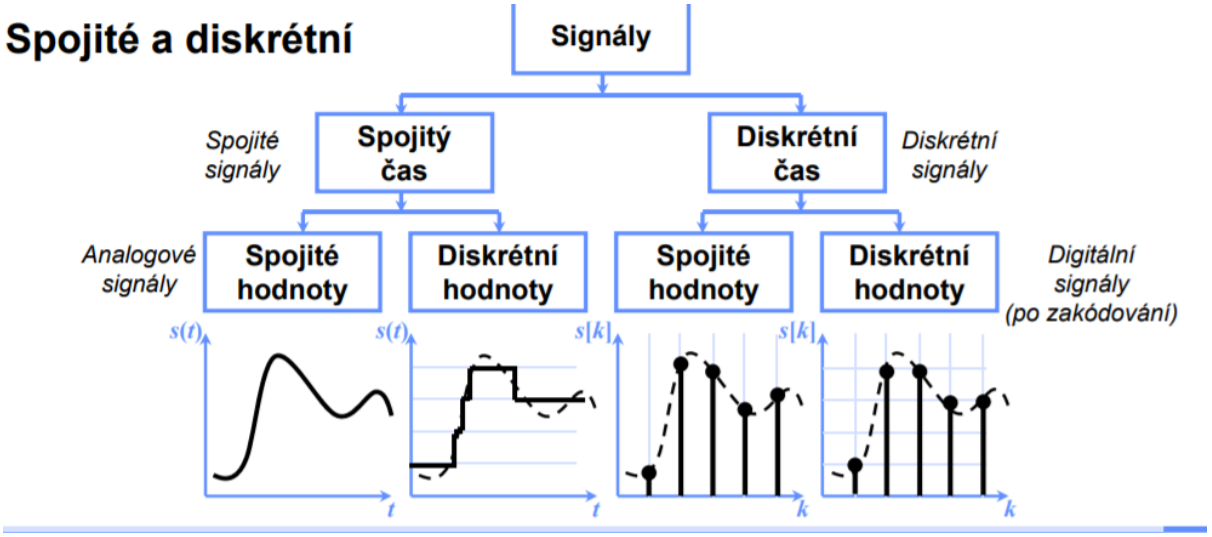
- barevný obrázek *y*(*x*,*y*,*rgb*)
- tomografie y(*x*,*y*,*z*)
- video (2D+čas) *y*(x,y,t)
- fMRI (3D+čas) y(x,y,z,t)
- multimodální zobrazení

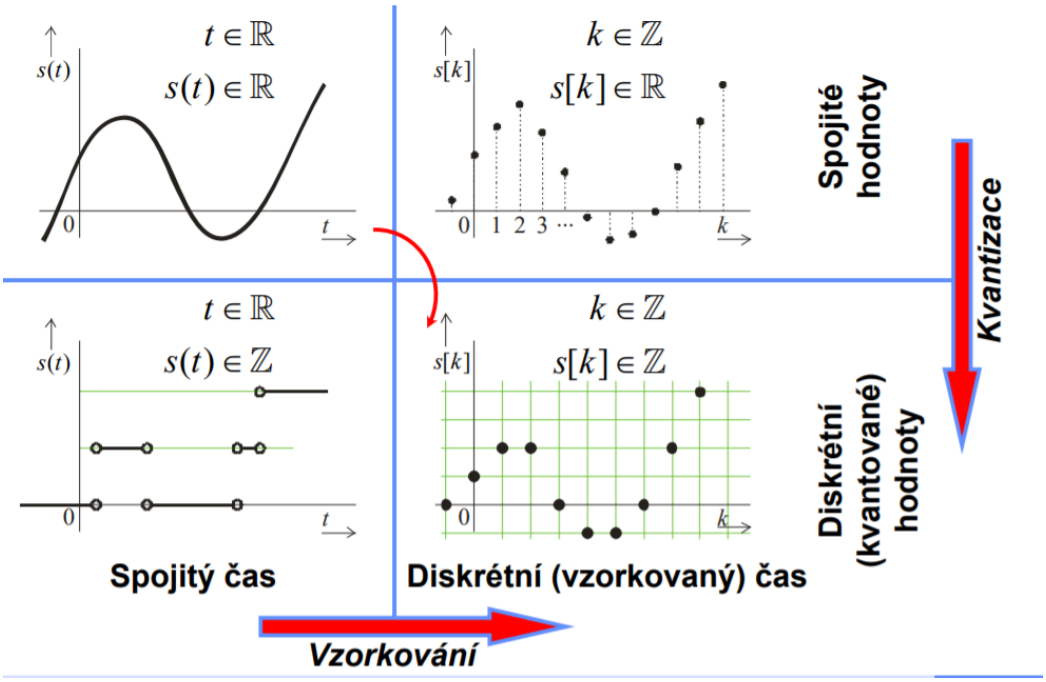






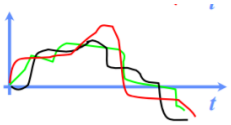
Signál může být spojitý a diskrétní a to jak v proměnné (diskr. vzorkování) tak v hodnotách (diskr. kvantizace). Podrobněji popsáno v sekci o vzorkování a interpolaci.



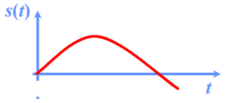


Signály jsou:

- Stochastické – náhodné, popsat se tedy dají jen pravděpodobnostími modely. Víc o nich níž.

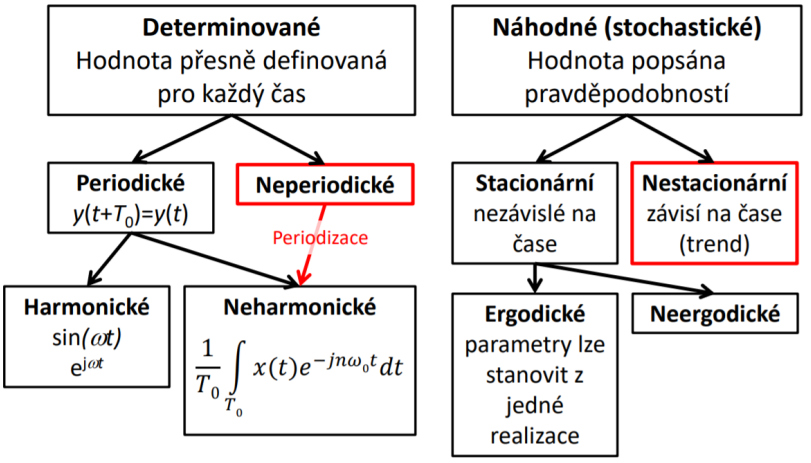


- Deterministické – jejich průběh je přesně znám, mají explicitní popis matematickým vzorcem nějaké funkce



$$s(t) = \sin(\omega t + \varphi)$$

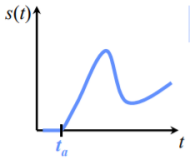
Základní dělení – z pohledu determinovanosti



Další dělení:

Kauzální signály

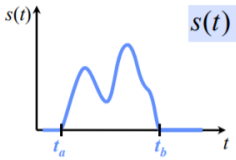
- Mají ***definovaný začátek*** (nulové před definovaným časovým okamžikem)



$$s(t) = 0, t < t_a$$

Finitní signály

- Mají ***definovaný začátek a konec*** (konečná délka trvání)

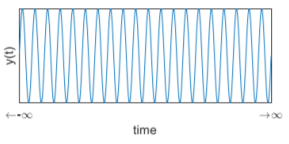


$$s(t) = 0, t \notin (t_a, t_b)$$

- Lze definovat **podobně** také pro **diskrétní signály**

Nekauzální

- Nesplňuje podmínku výše, začíná v -∞
- (např. harmonické funkce)



SIGNÁLY V ČASE

Dají se charakterizovat energií/výkonem signálu a autokorelační finkcí. Podobnost různých signálů můžeme charakterizovat vzájemnou energií/výkonem a vzájemnou korelační funkcí.

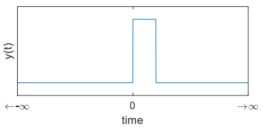
ENERGIE A VÝKON SIGNÁLU

Energetické

- v nekonečném čase mají konečnou energii (limitu)
- kvadrát plochy pod křivkou

$E = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \,;\; E < \infty$

$I = \sqrt{E}$ ... intenzita (plocha)

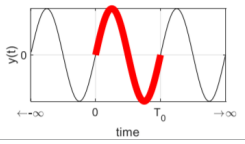


Výkonové

- v nekonečném čase mají nekonečnou energii (E=∞)
- stanovujeme pro periodu (0-T_0), úsek (t_a-t_b) nebo okamžik (t)

$P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |y(t)|^2 dt$ ... výkon

$p(t) = |y(t)|^2$... okamžitý výkon



Energie a výkon diskrétního signálu

- ***Celková energie*** diskrétního signálu

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |s[k]|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]s^*[k]$$

- Energie ***bez fyzikálního rozměru***
  - Např. jestliže $s[k]$ je napětí, pak jednotkou "energie" je [V²]
- ***Energetické signály*** – diskrétní signály s ***konečnou energií***

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |s[k]|^2 < \infty$$

- Okamžitý výkon signálu v diskrétním čase

$$p[k] = |s[k]|^2 = s[k]s^*[k]$$

- ***Výkon*** signálu v diskrétním čase

$$P = Av[p[k]] = Av\left[|s[k]|^2\right] = Av[s[k]s^*[k]] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} |s[k]|^2$$

Stejnosměrná složka (střední hodnota) signálu

$$s_{ss} = Av[s(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t)dt \qquad s_{ss} = Av[s[k]] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} s[k]$$

Efektivní hodnota signálu

- ***Konstantní signál*** se ***stejným výkonem*** jako signál původní

$$s_{ef} = \sqrt{P} = Av\left[|s(t)|^2\right]$$

Energie a výkon spojitého signálu

- ***Celková energie*** spojitého signálu

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t)dt$$

- Energie ***bez fyzikálního rozměru***
  - Např. jestliže $s(t)$ je napětí, pak jednotkou "energie" je [V²s]
  - Nezaměňujme fyzikální energii v [J] a bezrozměrnou energii signálu
- ***Energetické signály*** – spojité signály s ***konečnou energií***

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

- Okamžitý výkon signálu ve spojitém čase

$$p(t) = |s(t)|^2 = s(t)s^*(t)$$

- ***Výkon*** signálu ve spojitém čase

$$P = Av[p(t)] = Av\left[|s(t)|^2\right] = Av[s(t)s^*(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |s(t)|^2 dt$$

VZÁJEMNÁ ENERGIE A VÝKON

Pro posouzení jak moc toho spolu mají dva signály společného se používá vzájemná energie, nebo vzájemný výkon. Pokud jsou si spolu signály hodně podobné, budou mít vysokou vzájemnou energii/výkon. Pokud naopak jsou signály úplně opačné, bude vzájemná energie nízká. Pokud jsou signály ortogonální, mají nulovou vzájemnou energii. Ortogonalita se teda dá představit tak, že spolu signály nemají nic společného a „neinteragují", takže se vzájemně energeticky neovlivňují. Pokud ortogonální signály působí současně, jejich celková energie se rovná pouze součtu jednotlivých signálů. Lze je tedy přenášet přes jeden komunikační kanál bez ztráty srozumitelnosti.

Energie součtu dvou signálů ve spojitém čase

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s_1(t) + s_2(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (s_1(t) + s_2(t))(s_1^*(t) + s_2^*(t))dt =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_1^*(t)dt}_{E_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt}_{E_{12}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_1^*(t)s_2(t)dt}_{E_{21}=E_{12}^*} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)s_2^*(t)dt}_{E_2} =$$

$$= E_1 + E_2 + E_{12} + E_{21}$$

- Energie součtového signálu *není rovna součtu energií*
- **Vzájemná energie** pro energetické signály

$$E_{12} = E_{21}^* = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt$$

- **Vzájemný výkon** pro výkonové signály

$$P_\Sigma = Av\left[|s_1(t) + s_2(t)|^2\right] = P_1 + P_2 + P_{12} + P_{21}$$

$$P_{12} = P_{21}^* = Av\left[s_1(t)s_2^*(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s_1(t)s_2^*(t)dt$$

Vzájemná energie a výkon v diskrétním čase

- Vzájemná energie

$$E_{12} = E_{21}^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1[k]s_2^*[k]$$

- Vzájemný výkon

$$P_{12} = P_{21}^* = Av\left[s_1[k]s_2^*[k]\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} s_1[k]s_2^*[k]$$

Ortogonální signály

- Dva signály jsou *ortogonální* pokud mají *nulovou vzájemnou energii/výkon*

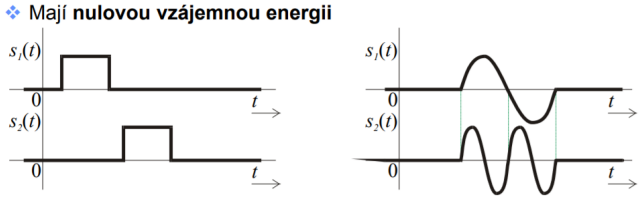
$E_{12} = E_{21} = 0$ -pro energetické signály $E_\Sigma = E_1 + E_2$

$P_{12} = P_{21} = 0$ -pro výkonové signály $P_\Sigma = P_1 + P_2$

- ***Ortogonální signály lze snadno separovat***

Příklady ortogonálních signálů

- Mají **nulovou vzájemnou energii**



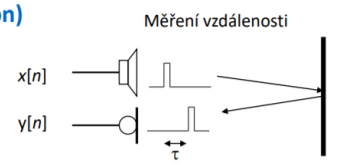
AUTOKORELAČNÍ FUNKCE A VZÁJEMNÁ KORELACE

Vzájemná korelační funkce popisuje, jak moc jsou si signály podobné z hladiska vzájemné energie, ale bere k tomu v úvahu i posun signálů. Pro každý posun signálů tedy dostaneme hodnotu vzájemné korelační funkce. Pokud jde například o zvukový signál a jeho zpožděnou kopii, dostaneme maximum vzájemné korelační funkce pro posun, který odpovídá zpoždění.

Křížová korelace (Cross-correlation)

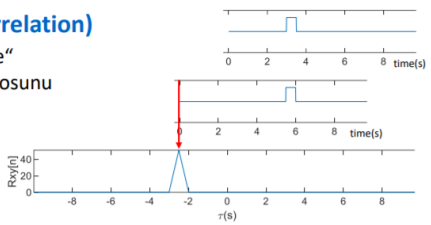
Použití

- Měření časového zpoždění
- Vyslání impulzu
- Příjem odraženého signálu

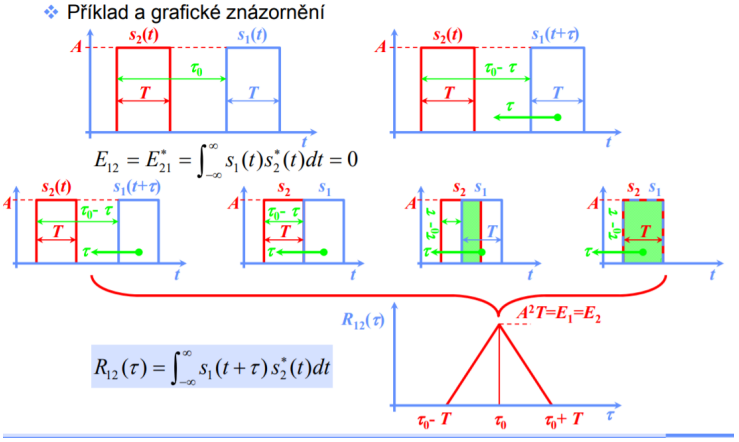


Křížová korelace (Cross-correlation)

- Korelace „vzájemná energie“
- Maximální při odstranění posunu



- Příklad a grafické znázornění



Vzájemná korelační funkce

$t,\tau\in\mathbb{R}$

$k,m\in\mathbb{Z}$

- Míra podobnosti dvou signálů (vzájemná energie či výkon)
- ***Energetické signály*** ve ***spojitém čase***

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s_1(t+\tau)s_2^*(t)dt$$

- ***Energetické signály*** v ***diskrétním čase***

$$R_{12}[m]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s_1[k+m]s_2^*[k]$$

$$R_{12}(0)=E_{12}$$

- ***Výkonové signály*** ve ***spojitém čase***

$$R_{12}(\tau)=Av\left[s_1(t+\tau)s_2^*(t)\right]$$

- ***Výkonové signály*** v ***diskrétním čase***

$$R_{12}[m]=Av\left[s_1[k+m]s_2^*[k]\right]$$

$$R_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}s_1(t+\tau)s_2^*(t)dt$$

$$R_{12}(0)=P_{12}$$

$$R_{12}[m]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}s_1[k+m]s_2^*[k]$$

- **Vzájemná korelační funkce** pro **reálné signály**

$$R_{12}(\tau)=R_{21}(-\tau)$$

- **Autokorelační funkce** pro **reálný signál** je **sudá**

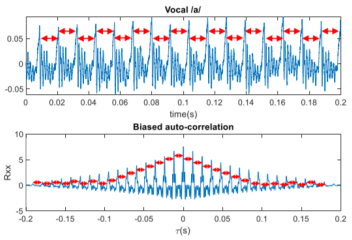
$$R(\tau)=R(-\tau)$$

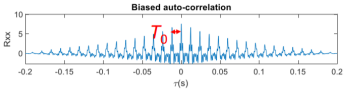
Autokorelační funkce

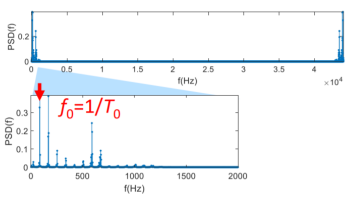
Autokorelační funkce udává, jak moc je pro různé posuny signál podobný sám sobě. Pomáhá tedy odhalit periodicitu nebo přibližnou periodicitu (kvaziperiodicitu) signálu. Má lokální maxima pro ty posuny, které odpovídají násobkům periody. Ve spektru je pak maximum na té frekvenci, která odpovídá hlavní frekvenci signálu.

K čemu je to dobré?

- Hledání periodicit v signálu
- Periodická složka $R_{xx}[\tau]$
- Jak bude vypadat spektrum?







Autokorelační funkce

- Popisuje **závislost hodnot** jednoho a **téhož signálu**
- ***Energetické signály*** ve ***spojitém čase***

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau)s^*(t)dt$$

- ***Energetické signály*** v ***diskrétním čase***

$$R[m]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k+m]s^*[k]$$

$$t,\tau\in\mathbb{R}$$
$$k,m\in\mathbb{Z}$$

$$R(0)=E$$

- ***Výkonové signály*** ve ***spojitém čase***

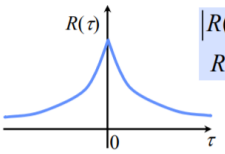
$$R(\tau)=Av\left[s(t+\tau)s^*(t)\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}s(t+\tau)s^*(t)dt$$

- ***Výkonové signály*** v ***diskrétním čase***

$$R[m]=Av\left[s[k+m]s^*[k]\right]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}s[k+m]s^*[k]$$

$$R(0)=P$$

- **Globální maximum** pro **nulové posunutí** a **sudá** pro **reálný signál**



$$|R(\tau)|\le R(0)$$
$$R(\tau)=R(-\tau)$$

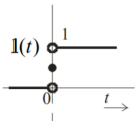
ZVLÁŠTNÍ SIGNÁLY

https://moodle.fel.cvut.cz/pluginfile.php/243058/mod_resource/content/0/b2b37sas_02_v0.65_200227.pdf

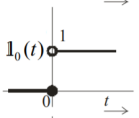
Jednotkový skok

- ***Jednotkový skok – spojitý*** čas
  - Tři definice

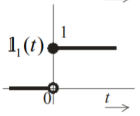
$$1(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 1/2 & t=0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



$$1_0(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

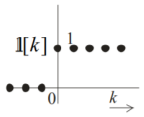


$$1_1(t)=\begin{cases}1 & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



- ***Jednotkový skok – diskrétní*** čas
  - Jedna definice

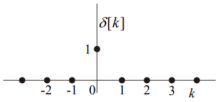
$$1[k]=\begin{cases}1 & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$



- Vlastnosti jednotkového skoku
  - Stejnosměrná složka $s_{ss}=1/2$
  - Autokorelační funkce $R(\tau)=1/2$
  - Výkon $P=R(0)=1/2$

Jednotkový impuls (Kronecker delta)

$$\delta[k]=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & \text{jinde}\end{cases}$$



- **Vzorkovací vlastnost**

$$\sum_{a}^{b}s[k]\delta[k-k_0]=s[k_0];\ k\in\{a,\dots,b\}$$

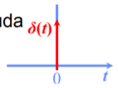
Diracův impuls (Diracova delta)

- Formálně označen jako "derivace" jednotkového skoku

$$\delta(t)=\frac{d1(t)}{dt}$$

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty & t=0\\ 0 & t\ne 0\end{cases}$$

- **Jednotková plocha**, nulová délka, nekonečná amplituda

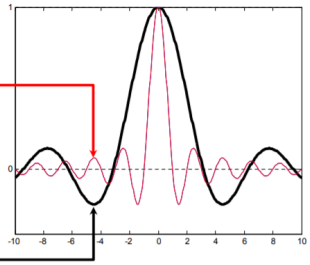


$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

Vzorkovací funkce (sinc funkce)

- ***Normalizovaná*** sinc funkce
  - Matlab, Zpracování signálu

$$\mathrm{sinc}(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t\ne 0\\ 1 & t=0\end{cases}$$



- ***Nenormalizovaná*** sinc funkce
  - Historicky, matematika

$$\mathrm{Sa}(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin(t)}{t} & t\ne 0\\ 1 & t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(t)dt=\pi$$

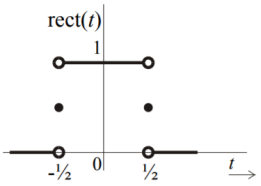
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}^2(t)dt=\pi$$

- Vlastnosti
  - Patří mezi energetické signály

$$R(\tau)=\pi\,\mathrm{Sa}(\tau)\Rightarrow E=R(0)=\pi$$

Obdélníkový impuls

$$\mathrm{rect}(t)=1\left(t+\frac{1}{2}\right)-1\left(t-\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}1 & |t|<1/2\\ 1/2 & |t|=1/2\\ 0 & |t|>1/2\end{cases}$$



- Energetický signál

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|^2\,dt$$

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{rect}(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|1\left(t+\frac{1}{2}\right)-1\left(t-\frac{1}{2}\right)\right|^2dt=\int_{-1/2}^{1/2}dt=1$$

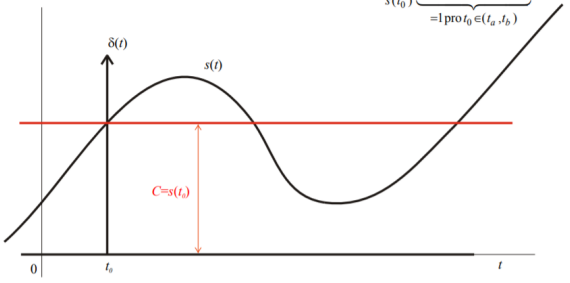
- Autokorelační funkce

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t+\tau)s^*(t)dt$$

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}(t+\tau)\,\mathrm{rect}(t)dt=\begin{cases}0 & |\tau|\ge 1\\ 1-|\tau| & |\tau|<1\end{cases}$$

- Vzorkovací vlastnost

$$\int_{t_a}^{t_b}s(t)\delta(t-t_0)dt=\int_{t_a}^{t_b}C\delta(t-t_0)dt=\underbrace{C}_{s(t_0)}\underbrace{\int_{t_a}^{t_b}\delta(t-t_0)dt}_{=1\,\text{pro}\,t_0\in(t_a,t_b)}$$



$$\int_{t_a}^{t_b}s(t)\delta(t-t_0)dt=s(t_0)\quad\text{pro}\quad t_0\in(t_a,t_b)$$

Periodické signály

Výkonové, výkon se počítá přes periodu. Autokorelační funkce je periodická se stejnou periodou jako původní signál. Jejich speciálním případem jsou harmonické signály.

Periodický signál ve spojitém čase

- ***Periodický signál***

$$s(t) = s(t + mT_0) \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{Z}$$

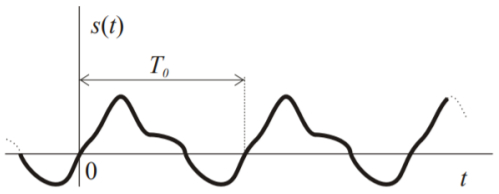
- Perioda

$$0 < T_0, 2T_0, 3T_0, \ldots$$

- ***Základní perioda***
  - Nejmenší perioda

$$s(t) = s(t + T_0) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

- Vlastnosti
  - Není kauzální, není finitní, výkonový signál



Periodický signál v diskrétním čase

- ***Periodický signál***

$$s[k] = s[k + mN_0] \qquad \forall k, m \in \mathbb{Z}$$

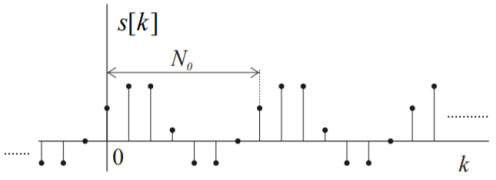
- Perioda

$$0 < N_0, 2N_0, 3N_0, \ldots$$

- ***Základní perioda***
  - Nejmenší perioda

$$s[k] = s[k + N_0] \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Vlastnosti
  - Není kauzální, není finitní, výkonový signál



Periodický signál – *základní charakteristiky v časové oblasti*

Stejnosměrná složka	
$Av[s(t)] = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)dt$	$Av[s[k]] = \frac{1}{N_0}\sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1} s[k]$
Výkon	
$P = Av\left[\lvert s(t)\rvert^2\right] = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} \lvert s(t)\rvert^2 dt$	$P = Av\left[\lvert s[k]\rvert^2\right] = \frac{1}{N_0}\sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1} \lvert s[k]\rvert^2$
Vzájemná korelační funkce	
$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s_1(t+\tau)s_2^*(t)dt$	$R_{12}[m] = \frac{1}{N_0}\sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1} s_1[k+m]s_2^*[k]$
Autokorelační funkce	
$R(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t+\tau)s^*(t)dt$	$R[m] = \frac{1}{N_0}\sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1} s[k+m]s^*[k]$

Harmonický signál

- Zvláštní případ periodického signálu
- Reálný harmonický signál

$$s(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

- Komplexní harmonický signál

$$s(t) = Ae^{j(\omega t+\theta)} = A\cos(\omega t + \theta) + jA\sin(\omega t + \theta)$$

- Základní perioda a kmitočet

$$\omega = 2\pi f = 2\pi / T_0 \ [\text{rad/s}] \qquad f = \frac{1}{T_0}\ [\text{Hz}]$$

Reálný harmonický signál

- Zvláštní případ periodického signálu

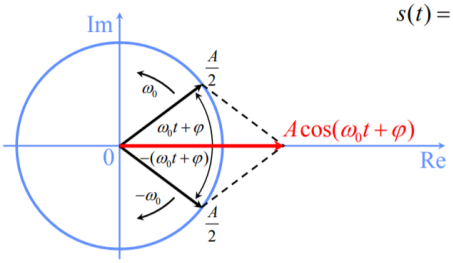
$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- Může být zapsán pomocí ***komplexních exponenciál***

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A}{2}e^{j\varphi}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\varphi}e^{-j\omega_0 t}$$

- ***V komplexní rovině***

$$s(t) = \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\varphi}}_{c_1}e^{j\omega_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\varphi}}_{c_{-1}}e^{-j\omega_0 t}$$



Harmonický signál v diskrétním čase

- Reálný harmonický signál

$$s[k] = A\cos[\Omega k + \theta]$$

- Komplexní harmonický signál

$$s[k] = Ae^{j[\Omega k+\theta]} = A\cos[\Omega k + \theta] + jA\sin[\Omega k + \theta]$$

- Základní perioda a kmitočet

$$\Omega = 2\pi F = 2\pi / N_0 \ [\text{rad}] \quad (-\pi, \pi) \qquad F = \frac{1}{N_0}\ [-]$$

- ***Harmonický signál v diskrétním čase nemusí být periodický***
  - Pro periodický signál musí platit

$$Ae^{j(2\pi Fk+\theta)} = Ae^{j(2\pi F(k+N_0)+\theta)} \Rightarrow e^{j2\pi FN_0} = 1 \Rightarrow 2\pi FN_0 = 2\pi m \Rightarrow$$

$$F = \frac{m}{N_0}\ [-]$$

KVANTIZACE, VZORKOVÁNÍ A INTERPOLACE

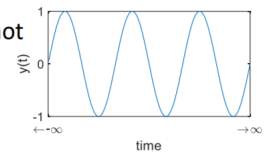
Kvantizace

Pokud chceme nahrát nějaký reálný signál do digitálního zařízení, musíme nutně ztratit nějakou informaci Hodnoty digitálního signálu lze zakódovat pouze konečným počtem úrovní -> hodnoty se „zaokrouhlují“. Tomu se říká kvantizace. Počet úrovní, do kterých kvantujeme (vlastně jak moc zaokrouhlujeme) závisí na vlastnosti AD (analog 2 digital) převodníku. Počet úrovní se volí tak, aby zaokrouhlení nevadilo v dalším zpracování a využití signálu (typicky záleží na rozlišení lidských smyslů).

Základní dělení – z pohledu spojitosti

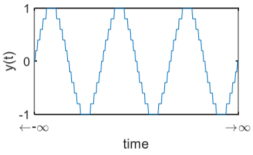
Spojitá amplituda

- hodnoty $y(t)$ nabývají libovolných hodnot
- typicky analogový signál



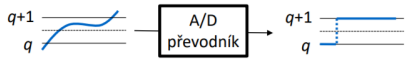
Nespojitá (diskrétní) amplituda

- kvantizace
- omezený počet hodnot v intervalu
- převodníky (8, 12, 16 bit)



Kvantizační šum

Kvantizační chyba
< ½ kvantizačního kroku

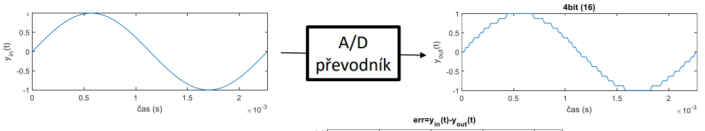


$$SQNR \approx 20\ \log_{10}(2^B)\ [\text{dB}]$$

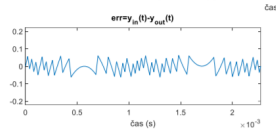
B... počet bitů převodníku

Rozlišení sluchu	Bitů	Hodnot	*SQNR* [dB]	Pozn.
	24	16,8×10⁶	144,49	Studiové audio, DVD
	16	65.536	96,33	Běžné audio, CD
	12	4096	72,24	Komprese
	8	256	48,16	Telefon

Kvantizační šum



Kvantizační šum
Rozdíl mezi vstupem a výstupem



Odstup signál-šum SQNR (Signal to Quantization Noise Ratio)

- Energie signálu
- Energie kvantizačního šumu

$$SQNR = \frac{E\{y_{in}\}}{E\{y_{in} - y_{out}\}} = \frac{E\{y_{in}\}}{E\{err\}}\ [-]$$

$$SQNR_{dB} = 10 \log_{10}(SQNR) \qquad [\text{dB}]$$

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt$$

$$E = \sum_{n=1}^{N} |y[n]|^2$$

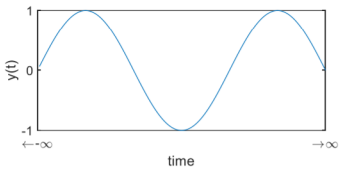
Vzorkování

AD převodníky navíc umí zaznamenat hodnotu pouze v konečně malém časovém úseku, potřebují nějaký čas na zaznamenání hodnoty. Nemůžeme proto dostat hodnotu pro každý okamžik, ale dostáváme pouze vzorky hodnot po určitých malých časových odstupech. Frekvence, s jakou dokáže AD převodník snímat hodnoty signálu se jmenuje vzorkovací.

Základní dělení – z hlediska spojitosti v čase

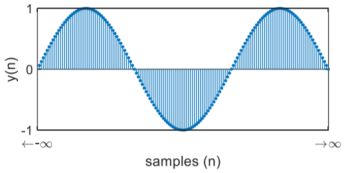
Spojitý čas

- $t \in \langle -\infty; \infty \rangle$
- typicky analogový signál



Diskrétní čas

- kvantizace v čase = **vzorkování**
- $t \in \{t_k\};\ k \in (-\infty; \infty),\ k \in \mathbb{N}$
- $y[n]=y(t_k)$
- *n*... *n*-tý vzorek signálu



Vzorkování

Ekvidistantní (pravidelné)

Neekvidistantní (nepravidelné)

- Např. ruční odečítání, nepravidelná měření

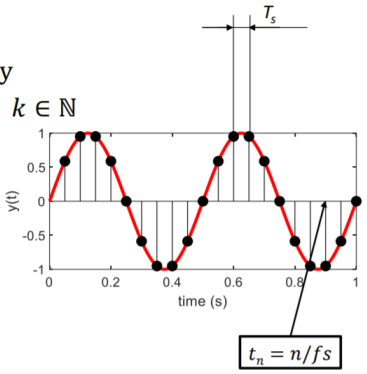
- $y[n]=y(t_k)$

Vzorkovací perioda

- Doba mezi sousedními vzorky
- $T_s = t_{k+1} - t_k;\ k \in (-\infty; \infty),\ k \in \mathbb{N}$
- [s]

Vzorkovací frekvence

- Počet vzorků za 1 sekundu
- $f_s = \frac{1}{T_s}$
- [Hz]



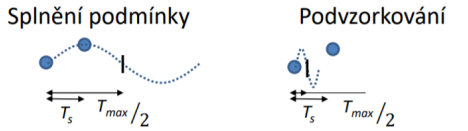
Vzorkovací frekvence se volí podle požadavků na výsledný digitální signál. Závisí podle vzorkovacího teorému na nejvyšší frekvenci, která se v signálu vyskytuje. Pokud je fmax = 50 Hz, musím vzorkovat aspoň fs = 100 Hz. V praxi často chceme nejvyšší frekvenci signálu předem omezit filtrem (dolní propustí), abychom mohli použít rozumnou vzorkovací frekvenci a nedocházello k aliasingu (viz I10). Na vysokých frekvencích je často jen šum, který nás nezajímá a nepotřebujeme ho postihnout.

Vzorkovací teorém

Rekonstrukce signálu

- mezi naměřenými hodnotami očekáváme spojité proložení

- pro rekonstrukci signálu se musí mezi dva sousední vzorky vejít více než půlperioda nejrychlejší harmonické složky



$$T_s < \frac{T_0}{2}$$

$$\frac{1}{f_s} < \frac{1}{2fmax}$$

$$f_s > 2fmax$$

$$f_{max} < f_s/2$$

Vzorkovací teorém

$$f_s > 2fmax$$

$$f_{max} < f_s/2$$

Aplikace	Pásmo	f_s [Hz]
lidský sluch	20 – 20.000	44.100 (CD)
Srozumitelnost řeči	300 – 3.400	8.000 (tel. linka)
EKG	0.1 – 60	200
Invasivní EEG	0 – 800	2.000

v praxi: $f_{max} < q \times fs;\ q \in \langle 0.3;\ 0.45 \rangle$

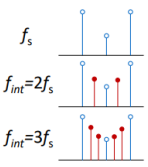
Interpolace

Pojemem interpolace se dají popsat 2 problémy:

- Dostaneme signál s nižší vzorkovací frekvencí, než nám vyhovuje. Potřebujeme tedy nějak odhadnout hodnoty mezi vzorky (například dvakrát zvýšit hustotu vzorků). Pořád ale chceme jako výsledek digitální signál. Implemetace spočívá v doplnění potřebným počtem nul mezi vzorky. Doplněný signál převedeme pomocí fft na spektru. Doplněný signál pak filtrujeme dolní propustí. Ve spektru je ideální dolní propusť obdélník. Pak to vrátíme zpět ifft. Princip je v tom, že dolněním nul vzniknou rychlé změny (ty „strmé skoky“), které se ve spektru projeví jako vysoké frekvence. Když tyhle vysoké frekvence odfiltrujeme DP, dostaneme signál skoro stejný jako původní, akorát s vyšší vzorkovací frekvencí.

Interpolace

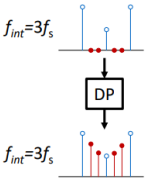
- Zvýšení vzorkovacího kmitočtu
- Interpolační faktor $I = \frac{f_{int}}{f_s}; I \in \mathbb{Z}\ (1,2,3,\dots)$
- Mezi každý vzorek vložíme (I-1) hodnot



Implementace

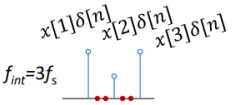
- DSP expandér
- Mezi vzorky vložíme (I-1) nul
- $y[n] = \begin{cases} x[n/I] & n = I, 2I, \dots \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
- Filtrace dolní propustí FIR: $sinc(2\pi f_s/2)$

Digital to Analog Converter (DAC)

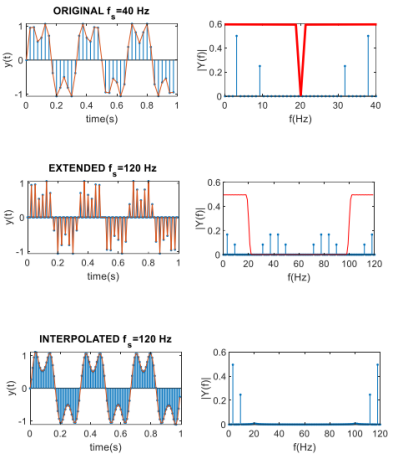


Co? Jak to funguje?

Implementace



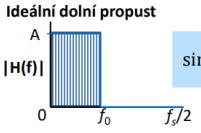
- Mezi vzorky vložíme (I-1) nul
- Použijeme dolní propust $f_{DP}=f_s/2$
- + zesílení (kompenzace energie signálu – Parsevalova rovnost)
- Výsledek filtrace – signál s omezeným spektrem

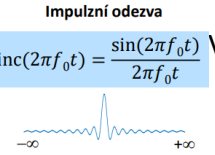


- Chceme z digitálního signálu zrekonstruovat původní spojitý signál. Vlastně je to extrémní případ předchozího, kdy chceme vzorky nekonečně-krát zahustit. Teoreticky by šel použít stejný postup s tím, že si představím, že doplníme nekonečným počtem nul a filtrujeme ideální dolní propustí. Analogie stejného postupu v čase je konvoluce se sampling function. Fourierův obraz sampling function je totiž právě ten obdélník dolní propusti. Proto by stejný výsledek dalo, kdybychom každý vzorek původního signálu „proložili“ sampling function a pak jen vše sečetli (to je to, co dělá konvoluce). Pokud byl při vzorkování dodržen vzorkovací teorém, lze ze vzorků zpětně aproximovat původní spojitý signál s velmi malou chybou. Nikdy to ale ve skutečném případě nejde úplně bezchybně, protože pro realizaci ideálního interpolátoru by byla třeba ideální dolní propusť (nekonečně stmý obdélník ve spektru/ nekonečná impulzní odezva sampling function v čase).

Rekonstrukční dolní propust

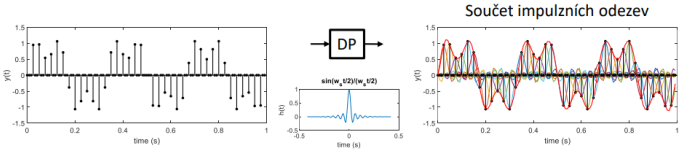
Reconstruction filter
Anti-imaging filter
Digital to analog converter (DAC)





$f_0 = f_s/2$ ... vzorkovací kmitočet před interpolací

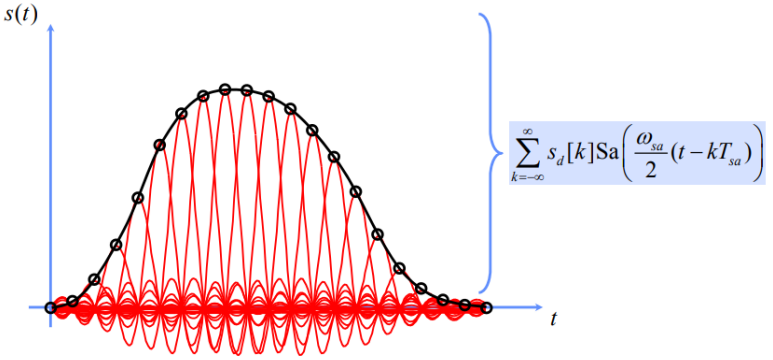
$\mathrm{sinc}(2\pi f_0 t) = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t}$



Vzorec pro proložení sampling funkcemi a sečtení:

- **Rekonstrukce spojitého signálu z jeho vzorků**

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_d[k]\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_{sa}}{2}(t-kT_{sa})\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_{sa})\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_{sa}}{2}(t-kT_{sa})\right)$$



Jinak řečeno jako časová konvoluce s impulzní odezvou dolní propusti h(t):

- jako průchod ***ideálně vzorkovaného*** signálu (řetězec váhovaných Diraců)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_{sa})\delta(\tau - kT_{sa}) = s(kT_{sa}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT_{sa})$$

- soustavou s ***impulsovou odezvou*** (ideální ***dolní propust***)

$$h(t) = \mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{T_{sa}}t\right)$$

V praxi se stane to, že nedokážeme ideálně odfiltrovat nežádoucí frekvence a signál se nám trochu zkreslí. Je to zaviněné konečnou strmostí obdélníku dolní propusti ve spektru.

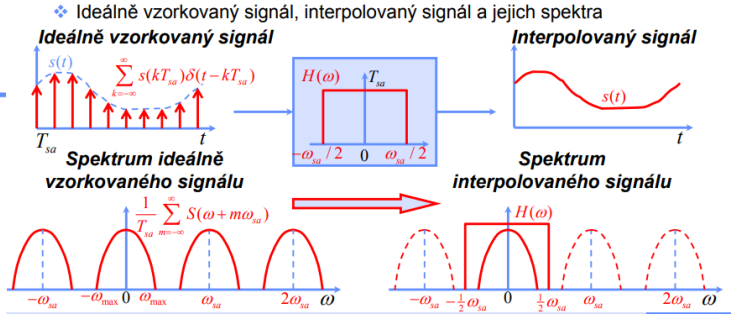
- **Rekonstrukce spojitého signálu z jeho vzorků**
  - ***Interpolace – ideální interpolátor***

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_{sa})\delta(\tau - kT_{sa})\,\mathrm{d}\tau$$

$$h(t) = \mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{T_{sa}}t\right)$$

$$\omega_{sa} = 2\pi / T_{sa} \geq 2\omega_{\max}$$

  - Ideálně vzorkovaný signál, interpolovaný signál a jejich spektra

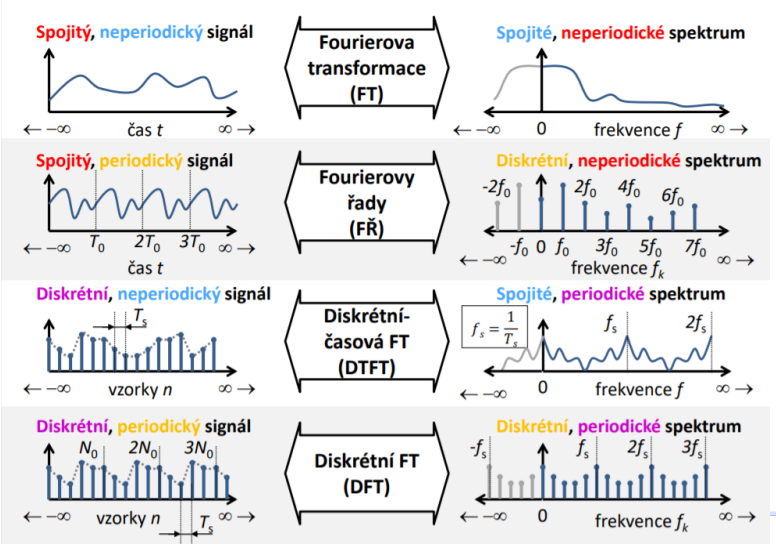


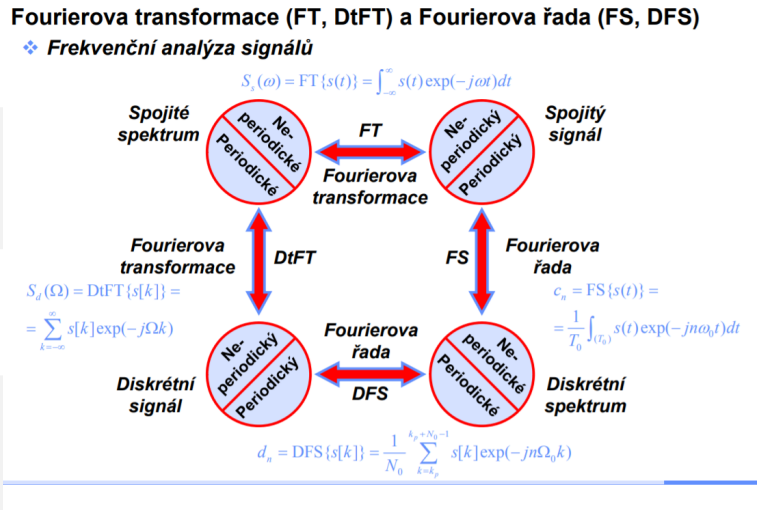
SIGNÁLY VE FREKVENČNÍ OBLASTI

V SASu byl ten přehled vyčerpávající (5 přednášek na různé druhy FŘ a FT + převody mezi těmi druhy). Pokusím se to nějak zkrátit a hlavně popsat DFT a FFT, protože ty v praxi používáme. Ty převody vynechám, neuměla jsem je ani tenkrát a pochybuju, že se to teď bude někdo nazpaměť učit. Dá se čekat, že se nás budou ptát spíš na praktické věci jako je vzorkování a různé vlastnosti spektra než že nás budou zkoušet ze vzorečků. Použití je líp popsané v ZZS, tak bych jela spíš podle toho. Pokud by si někdo chtěl znovu projet přednášky ze SASu je to 3-7 přednáška tady: https://moodle.fel.cvut.cz/course/view.php?id=4777

FŘ i FT umožňují převod signálu z časové oblasti do spektrální oblasti. Jde tedy v principu o převod do jiné báze (jiného souřadného systému). Báze fourierova prostoru je ortogonální a má nekonečný počet prvků báze. Prvky báze jsou komplexní exponenciály. Souřadnice v bázi komplexních exponenciál jsou pak koeficienty spektra ve spektrální oblasti. Signál se pak dá zpětně složit jako lineání kombinace komplexních exponenciál. Koeficienty té lineární kombinace jsou právě koeficienty spektra. Pro spojité spektrum jsou si komplexní exponenciály „nekonečně blízko“ lineární kombinace proto přejde v integrál.

Lidsky řečeno: Mám nějaký signál a chci zjistit jaké frekvence jsou v něm zastoupené a jaké frekvence jsou v signálu důležité (mají velkou amplitudu) a naopak jaké nejsou v signálu důležité. Taky mě může zajímat, jakou má která frekvence fázi (jak jsou vůči sobě frekvence v čase posunuté). Provedu Fourierovu transformaci / rozklad do FŘ a dostanu spektrum/koeficienty spektra. Reálná část spektra/koeficientů odpovídá amplitudovému spektru, komplexní část spektra/koeficientů odpovídá fázovému spektru. Každý bod spektra/koeficient odpovídá nějaké frekvenci v signálu. Z amplitudového spektra tedy zjistím, jak silně je která frekvence v signálu zastoupená. Čím vyšší hodnota ve spektru, tím větší amplituda dané frekvence. Z fázového spektra zjistím, jaký má která frekvence posun v čase.





FŘ (fourierova řada)

Pro spojité periodické signály. Nedá se použít pro obecné signály. Periodický signál je obecně nekonečným součtem „sinusovek“ (správně harmonických složek), které jsou různě posunuté (různá fáze) a různě naškálované (různá amplituda). Výstupem transformace jsou komplexní fourierovy koeficienty. Každý koeficient udává amplitudu (Re) a fázi (Im) příslušné „sinusovky“. Pokud je součet konečný a signál se skládá třeba jen ze 2 „sinusovek“, dostaneme jen 2 nenulové kladné koeficienty (+ 2 odpovídající nenulové záporné). Koeficienty tvoří diskrétní neperiodické spektrum.

https://moodle.fel.cvut.cz/pluginfile.php/244049/mod_resource/content/0/b2b37sas_03_v0.77_200305.pdf

- **Komplexní Fourierova řada**
  - Vyjádření **komplexních periodických signálů** (syntéza a analýza)

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \qquad c_n=\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

  - Zvláštní případ pro **reálné signály**

$$c_{-n}=\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)e^{jn\omega_0 t}dt=\left(\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right)^*=c_n^*$$

  - **Symetrie** amplitudového a fázového spektra pro reálný signál

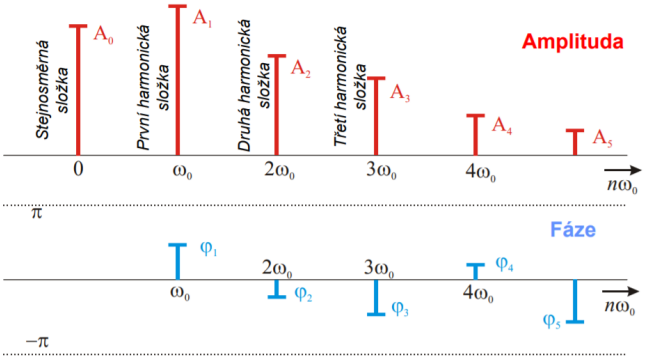
$$|c_{-n}|=|c_n|, \qquad \arg c_{-n}=-\arg c_n$$

  - **Reálný signál** lze popsat **polovinou koeficientů** (jednostranné spektrum)

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|e^{j\arg c_n}e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|e^{j(n\omega_0 t+\arg c_n)}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overbrace{|c_n|\cos(n\omega_0 t+\arg c_n)}^{\text{sudá posloupnost}}+j\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overbrace{|c_n|\sin(n\omega_0 t+\arg c_n)}^{\text{lichá posloupnost}}$$

Rozklad periodického signálu do harmonické Fourierovy řady

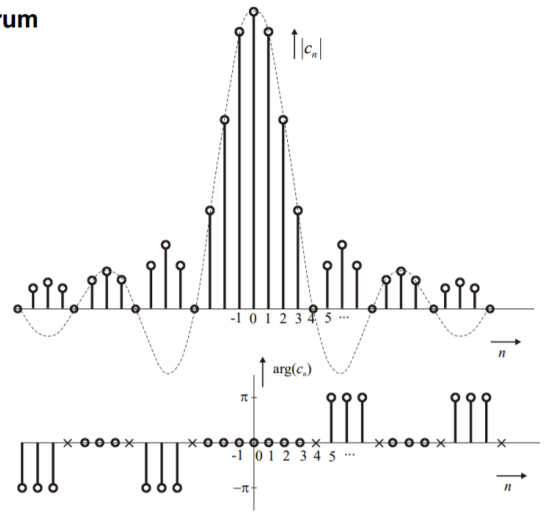


$$s(t)=A_0+A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_1)+A_2\cos(2\omega_0 t+\varphi_2)+A_3\cos(3\omega_0 t+\varphi_3)+\dots$$

- **Amplitudové spektrum**

$$\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

  - Sudá posloupnost pro reálný signál



- **Fázové spektrum**

$$\{\arg(c_n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

  - Lichá posloupnost pro reálný signál

DFŘ (diskrétní fourierova řada)

Pro diskrétní periodický signál. Výstupem jsou komplexní koeficienty spektra. Spektrum je diskrétní a periodické. Periodicita vyplývá z toho, že pro frekvence f> fs/2 nelze odlišit f od fs-f. Koeficienty pak proto mají stejné hodnoty a opakují se. Jinak se DFŘ chová stejně jako FŘ.

https://moodle.fel.cvut.cz/pluginfile.php/244049/mod_resource/content/0/b2b37sas_03_v0.77_200305.pdf

Fourierova řada pro diskrétní periodický signál (DFS)

- Periodický signál v diskrétním čase

$$s[k] = s[k + mN_0] \qquad \forall k, m \in \mathbb{Z}$$

- ***Fourierova řada*** v diskrétním čase – aproximace signálu – expanze

$$s[k] = \sum_{(N_0)} c_n \, e^{jk\Omega_0 n}$$

  - Základní kmitočet

$$\Omega_0 = 2\pi F_0 = 2\pi / N_0 \ [\text{rad}]$$

- ***Výpočet Fourierových koeficientů***
  - Periodická posloupnost s periodou N_0

$$c_n = \frac{1}{N_0} \sum_{(N_0)} s[k] e^{-jn\Omega_0 k} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1} s[k] e^{-jn\Omega_0 k} = c_{n+mN_0}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

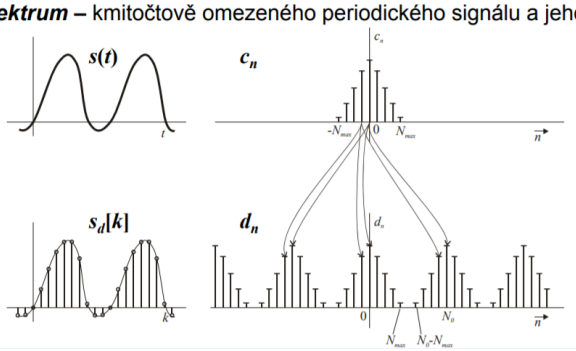
$$c_n = \frac{1}{N_0} \sum_{(N_0)} s[k] e^{-jn\Omega_0 k} = \frac{1}{N_0} \sum_{(N_0)} s[k] e^{-j(n+mN_0)\Omega_0 k} = \frac{1}{N_0} \sum_{(N_0)} s[k] e^{-j(n+m\frac{2\pi}{\Omega_0})\Omega_0 k} = c_{n+mN_0}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Fourierova řada pro diskrétní periodický signál (DFS)

- ***Výpočet koeficientů Fourierovy řady***

$$d_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n+mN_0}$$

- ***Spektrum*** – kmitočtově omezeného periodického signálu a jeho vzorků

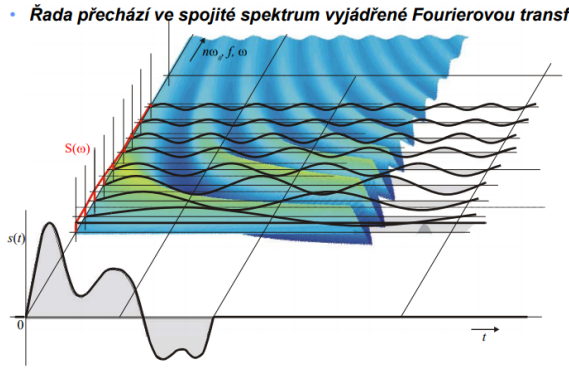


FT (fourierova transformace)

Pro obecné neperiodické signály. Spektrum je vždy spojité a neperiodické. Zjednodušeně řečeno jde o zobecnění FŘ s předpokladem, že obecný signál má nekonečnou délku periody. Čím delší je perioda, tím blíž si jsou spektrální čáry ve spektru. Pro nekonečnou délku periody splynou spektrální čáry ve spojité spektrum (vzdálenost spektrálních čar je nulová).

Periodický signál je vyjádřen Fourierovou řadou

- Limitní prodloužení periody signálu do nekonečna
  - ***Vzdálenost harmonických složek na kmitočtové ose nulová***
  - ***Řada přechází ve spojité spektrum vyjádřené Fourierovou transformací***



- **Fourierova transformace**

$$S(\omega) = \mathcal{F}[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

- **Inverzní Fourierova transformace**

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- **Alternativní definice**
  - Frekvence $f = \omega / 2\pi$
  - Fourierova transformace

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

  - Inverzní Fourierova transformace

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

- **Spektrální reprezentace obecných signálů**
  - ***Spektrum*** signálu

$$S(\omega) = \mathcal{F}[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

  - ***Amplitudové spektrum*** signálu

$$|S(\omega)| = |\mathcal{F}[s(t)]|$$

  - ***Fázové spektrum*** signálu

$$\arg(S(\omega)) = \arg(\mathcal{F}[s(t)])$$

$$S(\omega) = |S(\omega)| \, e^{j \arg S(\omega)}$$

  - ***Symetrie*** pro ***reálný signál***

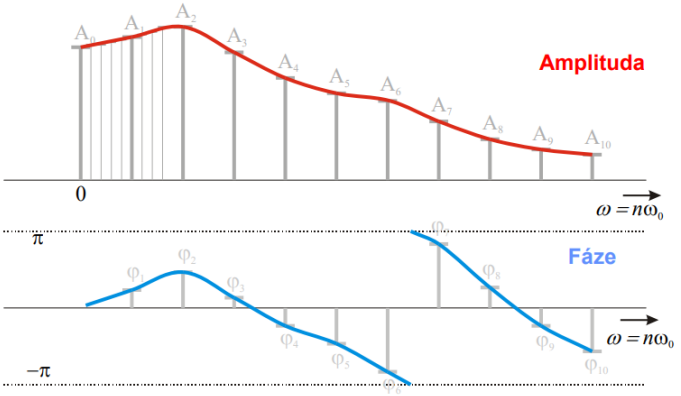
$$s(t) \in \mathbb{R}$$

$$S^*(\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} dt = S(-\omega)$$

$$S(-\omega) = S^*(\omega)$$
$$|S(-\omega)| = |S(\omega)|$$
$$\arg(S(-\omega)) = -\arg(S(\omega))$$

Rozklad periodického signálu do harmonické Fourierovy řady

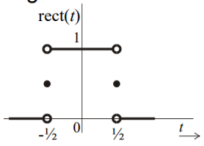
- Limitní případ – ***Fourierova transformace*** se spojitým kmitočtem
- ***Fourierova transformace*** – spektrální analýza ***neperiodických signálů***



Fourierova transformace – příklad

- Spektrum, amplitudové spektrum, spektrální hustota energie …?
- Signál

$$s(t)=\mathrm{rect}\frac{t}{T}=\mathbb{1}\left(t+\frac{T}{2}\right)-\mathbb{1}\left(t-\frac{T}{2}\right)=\begin{cases}T & |t|<1/2\\ T/2 & |t|=1/2\\ 0 & |t|>1/2\end{cases}$$

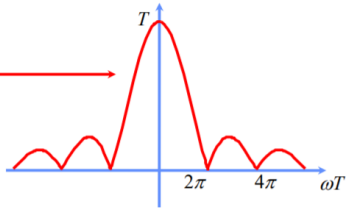


- Spektrum – Fourierova transformace

$$S(\omega)=T\,\mathrm{Sa}\left(\omega\frac{T}{2}\right)$$

- Amplitudové spektrum

$$|S(\omega)|=T\left|\mathrm{Sa}\left(\omega\frac{T}{2}\right)\right|$$



Pro fourierovu transformaci platí spousta vět, které zjednoduší výpočty. Nebudu je tu vypisovat, je to zas dost vyčerpávající seznam. Zmíním Parsevalovu rovnost a větu o konvoluci, které mi připadají nejdůležitější. Parsevalova věta říká, že enrgie signálu v čase je stejná jako energie jeho spektra ve spektrální oblasti (spektrální hustota energie). Věta o konvoluci umožňuje v praxi rychlou implementaci filtrování signálů – FFT to rychle převede do spektra, tam se provede násobení spekter a iFFT to zas převede zpět.

- ***Parsevalova*** věta

$$s_1(t)=s_2(t)=s(t)\Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S(\omega)|^2\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2\,df$$

- ***Konvoluce*** v časové oblasti přechází v ***násobení*** v kmitočtové

$$\mathcal{F}\left[s_1(t)*s_2(t)\right]=S_1(\omega)\cdot S_2(\omega)$$

FT funguje i pro periodické signály, je to jen speciální případ:

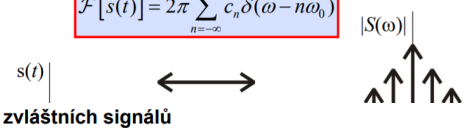
Spektrum zvláštních signálů

- ***Periodický signál***

$$\mathcal{F}[s(t)]=\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathcal{F}\left[e^{jn\omega_0 t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathcal{F}\left[e^{jn\omega_0 t}\right]=$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

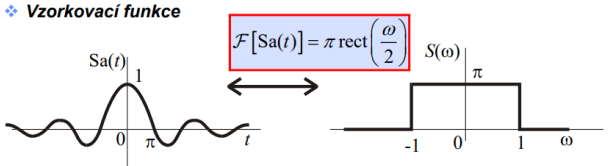
$$\mathcal{F}[s(t)]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0)$$



Spektrum zvláštních signálů

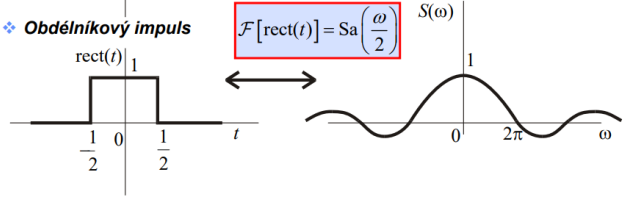
- ***Vzorkovací funkce***

$$\mathcal{F}[\mathrm{Sa}(t)]=\pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



- ***Obdélníkový impuls***

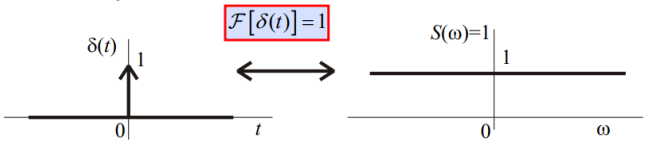
$$\mathcal{F}[\mathrm{rect}(t)]=\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



Spektrum zvláštních signálů

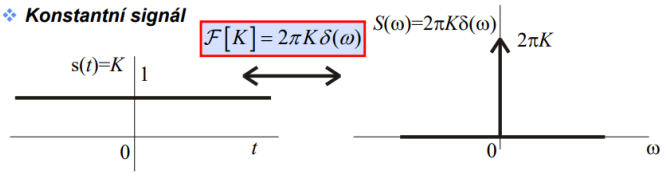
- ***Diracův impuls***

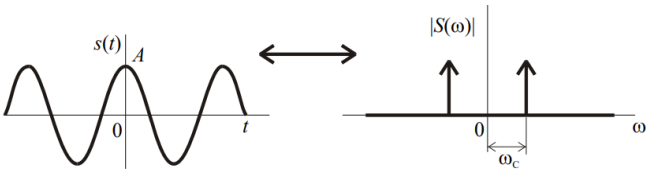
$$\mathcal{F}[\delta(t)]=1$$



- ***Konstantní signál***

$$\mathcal{F}[K]=2\pi K\delta(\omega)$$



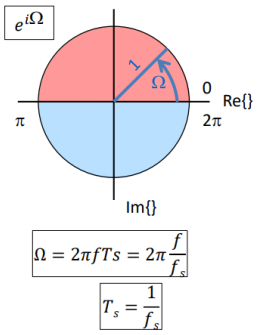


DtFT (discrete time fourier transform ~=DFT !!!)

Pro obecné neperiodické diskrétní signály. Spektrum bude opět spojité, ale bude periodické. Periodicita spektra je způsobena vzorkováním stejně jako u DFŘ.

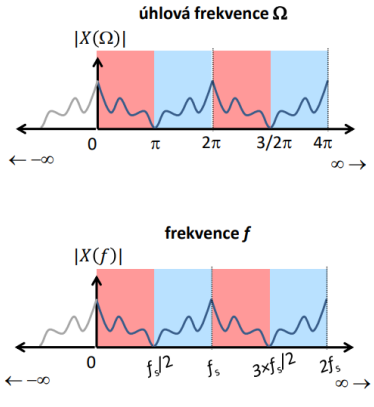
https://moodle.fel.cvut.cz/pluginfile.php/244811/mod_resource/content/0/b2b37sas_05_v0.71_200319.pdf .

Diskrétní signál → periodické spektrum



$$\Omega = 2\pi f Ts = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

$$T_s = \frac{1}{f_s}$$



❑ **Obecný neperiodický signál v diskrétním čase – DtFT**

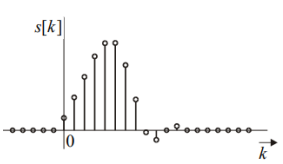
❖ ***Fourierova transformace v diskrétním čase***

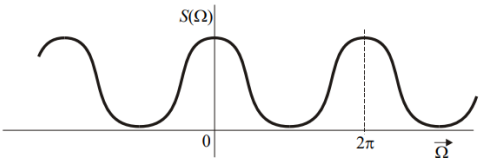
$$S(\Omega) = \mathcal{F}\{s[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] e^{-j\Omega k}$$

❖ ***Inverzní Fourierova transformace v diskrétním čase***

$$s[k] = \mathcal{F}^{-1}\{S(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} S(\Omega) e^{j\Omega k} d\Omega$$

❖ Spektrum – ***periodická funkce***





Spektrální analýza obecných signálů v diskrétním čase

❖ ***Spektrum*** signálu

$$S(\Omega) = \mathcal{F}\{s[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] e^{-j\Omega k}$$

❖ ***Amplitudové spektrum*** signálu

$$|S(\Omega)| = |\mathcal{F}\{s[k]\}|$$

❖ ***Fázové spektrum*** signálu

$$\arg(S(\Omega)) = \arg(\mathcal{F}\{s[k]\})$$

$$S(\Omega) = |S(\Omega)|\, e^{j \arg S(\Omega)}$$

❖ ***Symetrie*** pro ***reálný signál***

$$s[k] = s^*[k]$$

$$S(-\Omega) = S^*(\Omega)$$

$$|S(-\Omega)| = |S(\Omega)|$$

$$\arg(S(-\Omega)) = -\arg(S(\Omega))$$

Jinak platí všechna pravidla i věty jako pro FT.

Zase platí, že se dá použít i pro diskrétní periodické signály, jde jen o speciální případ. Ve spektru se pak objeví diracovy impulzy.

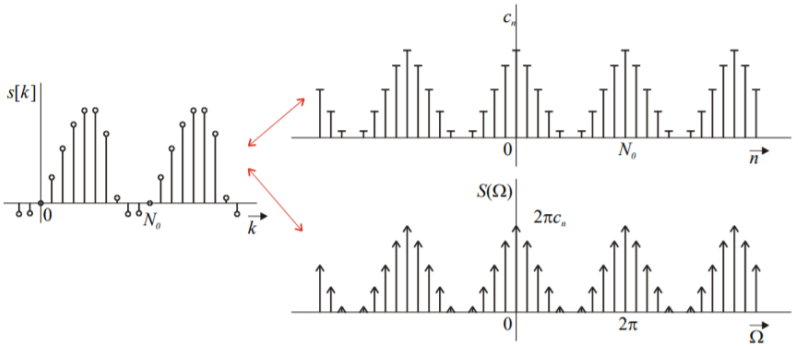
Spektrum zvláštních signálů

❖ ***Periodický signál***

$$s[k] = s[k + mN_0]$$

❖ ***Spektrum periodického signálu***

$$\mathcal{F}\{s[k]\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=n_0}^{n_0+N_0-1} c_n e^{jn\Omega_0 k}\right\} = 2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \delta(\Omega - i\Omega_0), \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$



DFT a FFT

DFT je varianta FT, která umožňuje výpočt spetkra pro signály, které vzniknou ze skutečných měření. Jsou to signály diskrétní (v čase ale i v hodnotách), finitní a neperiodické (i když můžou být periodickému signálu blízké). Využije se tedy periodizace signálu – finitní úsek pomyslně tvoří jednu periodu, která se nekonečně-krát opakuje. S tím předpokladem se pak provede DFT. DFT má svoje limitace, jde o aproximaci. Problém dělá například to, že na „hraně“ jedotlivých finitních úseků může vznikat rychlý schod, který se projeví jako vysoké frekvence ve spektru (prosakování ve spektru - víc v otázkách na ZZS). Také je třeba dodržovat vzorkovací teorém (jinak aliasing). Základní implemetace DFT spočívá v násobení signálu transforamční maticí N*N, složitost DFT je proto také O(N*N). Rychlou implemetací DFT je FFT. FFT v základní implementaci využívá iterativního dělení signálu o délce N na poloviny. Výsledná složitost FFT je proto O(NlogN). Pomocí DFT lze aproximovat všechny z předchozích FŘ, DFŘ, FT, DtFT. Pro každou z variant platí specifické podmínky a předpolady, aby převod fungoval, kdyžtak v téhle prezentaci: https://moodle.fel.cvut.cz/pluginfile.php/245959/mod_resource/content/0/b2b37sas_07_v0.56_200402.pdf . Nejbližší vztah má DFT k DFŘ, protože periodizací finitního signálu vlastně vytváříme diskrétní periodický signál. Rozdíl je v tom, že jako výstup DFŘ teoreticky obržíme nekonečný počet koeficientů, kdežto DFT nám dá N hodnot spektrálních čar (N je počet vzorků vstupního signálu).

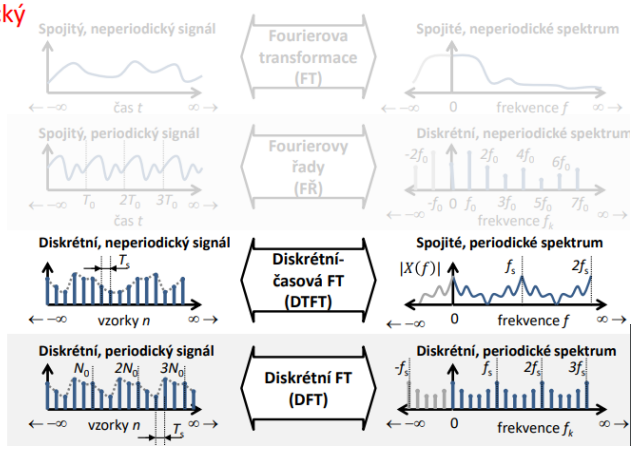
Signály z praxe, digitální zpracování a Fourierova transformace

Biologické signály, měření přírodních jevů apod.

- diskrétní
- neperiodický
- finitní

$n \notin (-\infty, \infty)$

$n \in (1, N)$

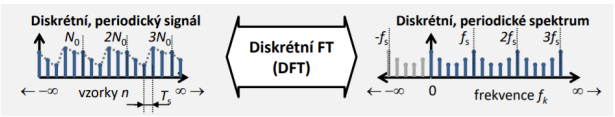


požadavky: $n \in (-\infty, \infty)$

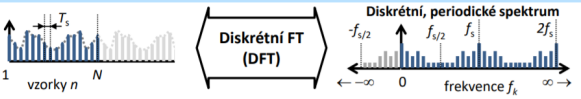
?

požadavky: perioda N_0

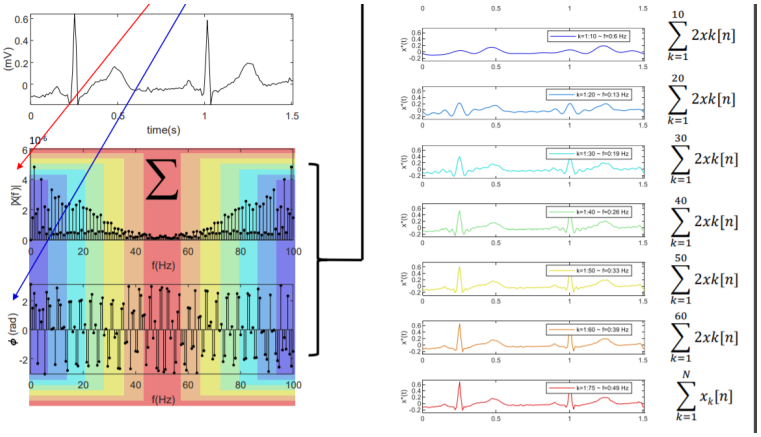
Periodizace finitního signálu



Periodizace:
Budeme předstírat, že finitní signál $n \in (1, N)$ je jedna perioda



Počet vzorků v „periodě“ N	→	Počet spektrálních čar ***K=N***
Vzorkovací čas T_s ($1/f_s$)	→	Pozor na vzorkovací teorém!
Zrcadlení ve spektru	→	$f_k'=f_s-f_k$ $\varphi_k'=-\varphi_k$



Transformační vztahy

❖ ***Přímá DFT***

$$D[n] = \mathrm{DFT}\{d[k]\} = \sum_{k=0}^{N-1} d[k] \exp(-jn\frac{2\pi}{N}k) \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

❖ ***Zpětná DFT***

$$d[k] = \mathrm{DFT}^{-1}\{D[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D[n] \exp(jn\frac{2\pi}{N}k) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

❖ ***DFT*** dává do vztahu ***dvě komplexní posloupnosti*** $d[k]$ a $D[n]$

❖ Obě ***posloupnosti jsou konečné a mají stejnou délku*** N

Pro DFT také platí věta o lineritě, parsevalova rovnost a další jako u předchozích „druhů“ fourierovy transformace.

Význam DFT

- ***Umožňuje numerický výpočet spektra***
  - ***Výpočet spektra*** (resp. signálu) ze ***vzorků signálu*** (resp. spektra) na ***konečném intervalu***
  - ***Nepotřebujeme analytický výraz*** (vzoreček)
  - ***Nepotřebujeme znalost signálu*** (resp. spektra) na ***celém definičním oboru***
  - Můžeme dostat jen ***přibližný výsledek***
- ***FFT – Fast Fourier Transform***
  - ***Rychlá Fourierova transformace***
  - Algoritmus ***efektivního výpočtu DFT***
  - Nejde o další transformaci, dává ***stejný výsledek jako DFT***
- ***DFT implementovaná jako FFT***
  - Je ***součástí téměř všech počítačových algebraických programů*** (Matlab, Mathematica, Maple, atd.)
  - Je ***dostupná vývojářům formou knihoven*** (např. pro jazyk C)

Spektrální hustota energie a výkonu

V podstatě jde o kvadrát fourierových koeficientů/spektra. Spektrální hustota je fourierův obraz průběhu autokorelační funkce. Figuruje v Parsevalově rovnosti. V praxi může spektrální hustota pomoct zvýraznit frekvence s vysokou amplitudou (kvadrát ještě umocní vysokou hodnotu). Může se počítat pro klouzavé okno -> spektrogram.

Výkonový spektrální hustota (PSD)

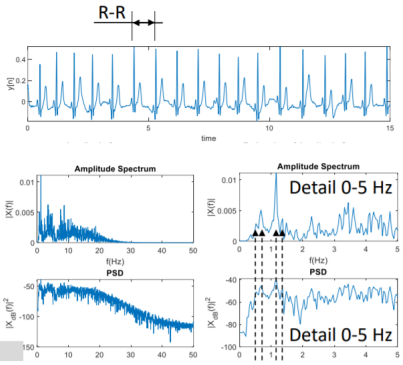
Power Spectral Density:

- Energetické spektrum → kvadrát
- Komplexní spektrum: $X(f)$
- Modul spektra: $|X(f)|$
- Výkonová hustota: $|X(f)|^2$
- Udáváme v dB: $|X_{\mathrm{dB}}(f)|^2$

PSD celého signálu:

- Extrémní frekvenční rozlišení
- $\Delta f = f_s/N$ (zde 0.04 Hz)
- Pro analýzu signálů často na nic
- Šum, prosakování, tranzienty ...

Př.: Nalezněte ve spektru EKG



- **Spektrální hustota energie**
  - Nezáporná, pro reálný signál sudá

$$C(\omega) = |S(\omega)|^2$$

  - ***Parsevalova*** věta

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) d\omega$$

- Vztah k ***autokorelační funkci***

$$C(\omega) = |S(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(u) s^*(t) e^{-j\omega\overbrace{(t-u)}^{\tau}} dt du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau) s^*(t) e^{-j\omega\tau} dt d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau) s^*(t) dt}^{R(\tau)} d\tau =$$

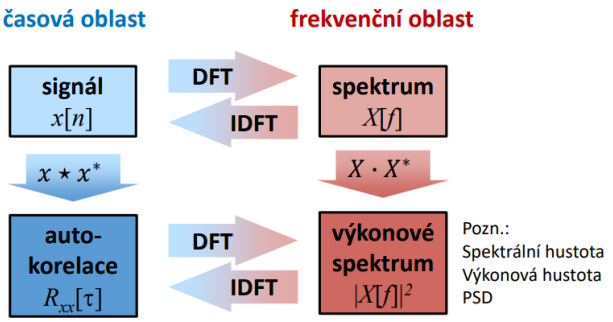
$$= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} \, d\tau = \mathcal{F}[R(\tau)]$$

$$C(\omega) = \mathcal{F}[R(\tau)]$$

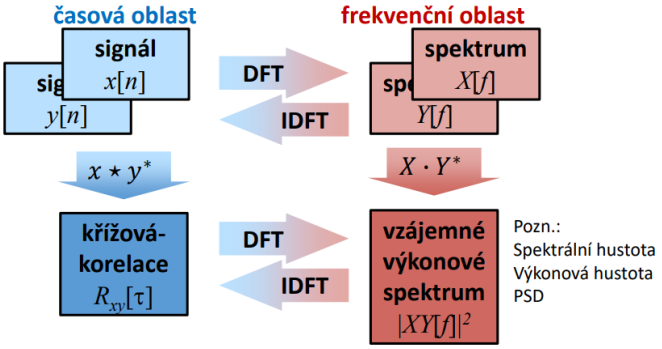
SOUVISLOST ČASOVÉ A FREKVENČNÍ OBLASTI

Reprezentace signálu v časové a frekvenční oblasti spolu souvisí. Toho se využívá při výpočtech charakteristik signálů. Výpočet korelace a konvoluce je obecně výpočetně náročný a pomalý. Většinou je proto výhodnější nejdříve signál pomocí FFT převést do frekvenční oblasti, tam najít potřebnou charakteristiku a pak provést iFFT. Toho se dá využít při hledání autokorelační funkce, filtrování signálu atd. Dá se nakreslit takzvaný DSP (discrete signal processing) čtyřúhelník, který zobrazuje vztah mezi časovou a frekvenční oblastí. DSP čtyřúhelník platí pro všechny „druhy“ spekter.

DSP čtyřúhelník



DSP čtyřúhelník

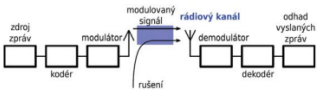


NÁHODNÉ SIGNÁLY

Moc to v SASu nerozebíral, byla to poslední přednáška. Nějak jsem to pochopila až teď u vyplňování otázky. Ta přednáška je hodně teoretická a plná ošklivých vzorců :D Kdyžtak tady: .Doufám, že u státnic by je kdyžtak spíš zajímaly nějaké základy, sama nevím, co si z toho odnést. Víc mi dává smysl přednáška ze ZZS, kde to Radek bere spíš z toho úhlu pohledu, že máme jednu realizaci signálu, který je ale hodně zašuměný (signál ze svalů). Je tam přehled parametrů, které se pro takový signál dají spočítat a které o něm potom něco řeknou.

Běžně se vyskytující signály jsou náhodné

- Protože **obsahují** (neznámou) **informaci**
  - Např. **přijímaný** signál v komunikačním systému, ...
- Protože **obsahují šum**
  - Např. **zašuměný** deterministický signál, ...

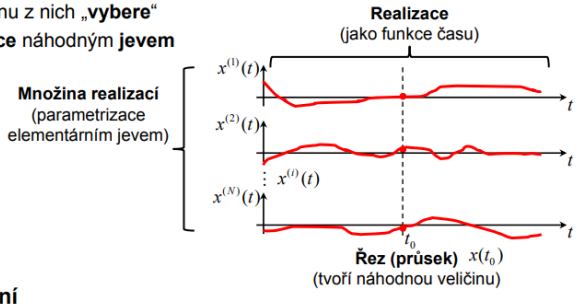


Zpracování náhodných signálů

- Založeno na jejich **pravděpodobnostním popisu**
- **Statistické zpracování** signálů

Náhodný signál (náhodný proces)

- **Náhodná veličina závislá na čase** (např. elektrický šum, ...)
- Lze si představit jako **soubor** (množinu) **realizací náhodného procesu**
  - „**Příroda**“ jednu z nich „**vybere**“
  - **Parametrizace** náhodným **jevem**



- **Obvyklé značení**
  - **Náhodný signál** x (případně velkým písmenem)
  - **Hodnoty náhodného signálu** malým písmenem $x(t)$
  - **Realizace** malým písmenem s horním indexem $x^{(i)}(t)$

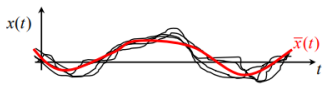
Co jsem pochopila, dá se na to dívat takhle: Náhodný signál bude v každé realizaci trochu jiný, předem nevíme, jak přesně bude vypadat (třeba vlivem šumu). Takže 10x nahrajeme stejný zvuk, ale pokaždé tam bude jiný šum pozadí (nahrávám třeba v parku) a šum nahrávacího zařízení. Máme pak 10 realizací daného zvuku. Každá z realizací náhodného signálu se dá považovat za determinovaný signál – když už máme jeden konkrétní záznam, známe všechny jeho charakteristiky. Každá realizace ale bude obecně mít jinou charakteristiku.

Charakteristiky jsou časové a spektrální. Časové (jinak amplitudové) jsou třeba stejnosměrná složka, výkon/energie, autokorelační funkce, směrodatná odchylka od stejnosměrné složky. Frekvenční jsou třeba fourierovo spektrum, spektrální hustota.

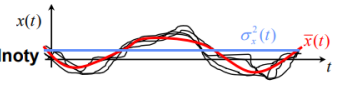
Vybrané pravděpodobnostní charakteristiky náhodných signálů

- **Střední hodnota** (na množině realizací)
  - Stejný význam jako u náhodné veličiny
  - **Průměrná hodnota** všech **realizací** v **daném časovém okamžiku**

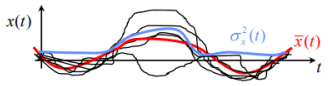
$$\bar{x}(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u\, f_x(u;t)\,du$$



- **Rozptyl**
  - Stejný význam jako u náhodné veličiny
  - Míra **odchylky realizací** od **střední hodnoty** v **daném časovém okamžiku**



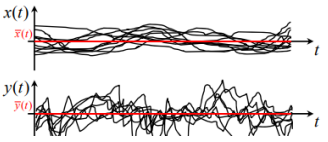
$$\mathrm{var}[x(t)] = \sigma_x^2(t) = E[|\,x(t)-\bar{x}(t)\,|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |\,u-\bar{x}(t)\,|^2\, f_x(u;t)\,du$$



Vybrané pravděpodobnostní charakteristiky náhodných signálů

- **Autokorelační funkce** (pravděpodobnostní)
  - Vyjadřuje **závislost hodnot náhodného signálu** ve **dvou časových okamžicích**

$$B_x(t_1,t_2) = E[x(t_1)\cdot x^*(t_2)]$$



  - **Výkon** (pravděpodobnostní)

$$B_x(t,t) = E[|\,x(t)\,|^2]$$

Charakteristiku náhodného signálu pak chceme určit jako průměr charakteristik ze všech realizací. V praxi ale nemusíme mít více realizací, máme jen jednu. Takže spočítáme charakteristiky pro tu jednu a tváříme se, že vystihuje náhodný signál. Pokud tohle uděláme, vlastně tím říkáme, že náhodný signál považujeme za ergodický tzn. takový, že napříč realizacemi nemění parametry, které jsme vypočítali.

Ergodické signály

- **Třída náhodných signálů**
  - Určitá **časová charakteristika** má **nulový rozptyl** (je nenáhodná)
  - Tato **charakteristika** se **nemění** na **množině realizací** (stačí jedna realizace)
  - Tato **charakteristika** je **determinovaným číslem** (rovným střední hodnotě)

Striktně ergodické signály

- **Signál zároveň stacionární a ergodický**
  - **Pravděpodobnostní charakteristiky** lze **nahradit časovými** na **jedné realizaci** (měření na jedné realizaci)
  - Velký **význam v praktických aplikacích** – pouze **jedna realizace** k **dispozici**
  - **Dlouhodobé časové průměrování** ($T\to\infty$) **parametrů libovolné realizace**
  - Problém **konečné délky realizace** (při praktickém měření není nekonečná)

Pak můžeme charakteristiky ještě průměrovat v čase -> „časové charakteristiky“. Takže např. vezmeme průměrný výkon signálu ze všech okamžitých výkonů v čase – získáme jedno číslo, které charakterizuje výkon signálu nezávisle na čase (stejně by to bylo pro jiné charakteristiky). Pokud máme víc realizací, nejdřív zprůměrujeme skrz realizace a pak ještě skrz čas. Pokud máme jen jednu realizaci, průměrujeme jen skrz čas.

Náhodný signál a časové charakteristiky

- **Náhodný signál** v **daném čase** → **náhodná veličina**
- **Realizace** náhodného signálu → **determinovaný signál**
  - Lze popsat **časovými charakteristikami** pro **determinované signály**
  - Ty **mají souvislost** s **pravděpodobnostními charakteristikami**

Časové charakteristiky

- Typické **charakteristiky** pro **determinované signály**
  - **Střední hodnota v čase** (stejnosměrná složka) $Av[\,]$
  - **Výkon** (náhodné signály většinou výkonové), **autokorelační funkce** $R(\tau)$
  - **Spektrum** $S(\omega)$, **spektrální hustota** výkonu $C(\omega)$,
- **Časové charakteristiky** jsou v principu **nezávislé na čase** (konstantní)
- Pro **obecné náhodné signály** jsou **časové charakteristiky náhodné**
  - Pro **náhodný signál** se **časové charakteristiky jednotlivých realizací liší**
  - Určuje se jejich (pravděpodobnostní) **střední hodnota** $E[\,]$
    - Využívá se **průměrování přes realizace**
    - Získáváme **střední časové charakteristiky** (**dvojí průměrování**, **čas** a **realizace**)

Střední časové charakteristiky

- **Střední stejnosměrná složka** náhodného signálu
  - Využití linearity operátorů $E[\,]$ a $Av[\,]$
  - **Časový průměr** pravděpodobnostní **střední hodnoty**

$$\bar{x}_{ss} = E[Av[x(t)]] = Av[E[x(t)]] = Av[\bar{x}(t)]$$

- **Střední časový výkon** náhodného signálu
  - **Časový průměr** pravděpodobnostního **výkonu**

$$\bar{P} = E[Av[|\,x(t)\,|^2\,]] = Av[E[|\,x(t)\,|^2\,]] = Av[B_x(t,t)]$$

- **Střední časová autokorelační funkce** náhodného signálu

$$\bar{R}(\tau) = E[R(\tau)] = E[Av[x(t+\tau)x^*(t)]] = \\ = Av[E[x(t+\tau)x^*(t)]] = Av[B_x(t+\tau,t)] \qquad \bar{P} = \bar{R}(0)$$

- **Střední spektrální hustota** (časového) **výkonu** náhodného signálu

$$\bar{C}(\omega) = E[C(\omega)] = E[\mathcal{F}[R(\tau)]] = \mathcal{F}[E[R(\tau)]] = \mathcal{F}[\bar{R}(\tau)] = \\ = \mathcal{F}[Av[B_x(t+\tau,t)]] = Av[\mathcal{F}[B_x(t+\tau,t)]] = Av[S_x(\omega,t)]$$

Takový hybrid mezi přístupem s časovým průměrováním a bez něj je charakteristika po časových oknech. Typicky se použije, pokud máme jen 1 realizaci náhodného signálu. Signál si rozsekáme na časová okna a charakteristiky určíme v každém okně. Například to je spektrogram – v každém časovém okně spočteme spektrum a dává nám to informaci o změně zastoupení frekvenčních složek v čase. Pro každé okno můžeme ale spočítat spoustu dalších parametrů.

Charakteristiky a parametry, které můžeme určovat pro časové okno (ale lze i pro celou délku signálu):

Popis segmentu signálu jedním číslem (neplatí obecně)

Změna amplitudy:

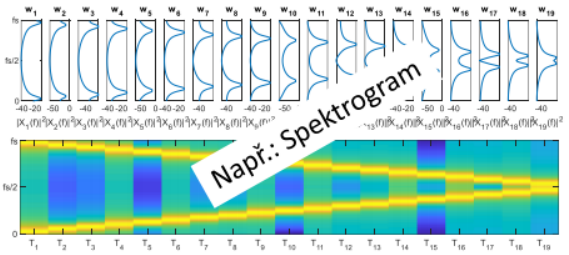
- intenzita (průměrná)
- energie (energie)
- min/max
- trend

Statistické parametry (nejen pro stochastické signály):

- rozptyl, inter-quartil range,
- mean, modus, medián
- šikmost, strmost distribuce

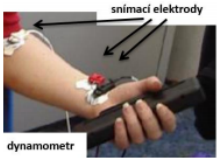
Frekvenční charakteristiky

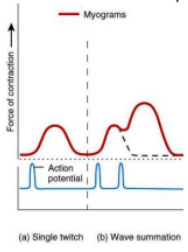
- frekvence (celý spektrogram/největší spektrální čára)
- poměr energie ve frek. pásmech ($E_{0\text{-}10Hz}/E_{10\text{-}20Hz}$)
- spektrální momenty
- počet průchodů nulou
- délka čáry (frekvence + amplituda)
- **...**
- **existují stovky parametrů, výběr záleží na řešené úloze**
- **některé se mohou principiálně korelovane**



Příklad ze ZZS, kde šlo o posuzování kontrakce svalů. EMG se chová jako šum. Po oknech se určovaly parametry signálu a hledali jsme, kde jsou kontrakce. Podle vypočtených parametrů pro okna jsme měli úvahou vyvodit, jak závisí frekvenční parametry (výkonové spektrum, počet průchodů nulou, mediánová frekvence, spektrální momenty) naměřené na svalech s výslednou silou stisku (měřená dynamometrem).

Ukázkovým elektrofyziologickým signálem může být EMG (elektromyogram) aktivity svalu. Sumací akčních potenciálů jednotlivých svalových buněk vzniká jeden z nejsilnějších biosignálů, který je měřitelný i na povrchu kůže (napětí až ±1 mV). Aktivací svalové buňky dojde k její krátkodobé kontrakci. K udržení trvalé svalové kontrakce musí být svalové buňky opakovaně a nesynchronně aktivovány, proto EMG pozorujeme jako šumový signál. Síla kontrakce svalu je mozkem řízena frekvenčně, aby se docílilo co největšího počtu současně aktivovaných buněk. Při analýze EMG jako stochastického širokospektrálního signálu (<150 Hz) proto jednotlivé segmenty parametrizujeme, protože přímo měřitelné hodnoty EMG neposkytují informaci o svalové kontrakci. Ačkoliv při silnější kontrakci pozorujeme i nárůst amplitudy EMG, tento jev je způsoben zapojením více svalových skupin, nikoliv elektrofyziologickou změnou svalové tkáně. Oproti tomu frekvenční parametry přímo zohledňují kooperaci CNS a svalu.





Bílý šum (white noise)

- **Náhodný signál** (idealizovaný model pro omezenou šířku pásma)
- **Konstantní spektrální hustota výkonu** (nekonečná šířka pásma)
  - **Nekorelovaný** protože platí **Wiener-Chinčinova** věta
  - **Konstantní** spektrální hustota ⇒ nulová **střední hodnota** (není Dirac ve spektru)

$$S_{wn}(\omega) = S_0 = konst.$$
$$B_{wn}(\tau) = K_{wn}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_0] = S_0\delta(\tau)$$

Příklady náhodných signálů (Šumy):

- **Gaussův šum**
  - **Normální rozložení** hustoty pravděpodobnosti

$$f(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t)} e^{-\frac{(x(t)-\bar{x}(t))}{2\sigma_x^2(t)}}$$

    - U **Gaussova šumu** z **nekorelovanosti** plyne **nezávislost**

- **AWGN** (Additive White Gaussian Noise)
  - Aditivní Gaussův bílý šum
  - **Model náhodného signálu**
    - **Bílého** (nekonečná šířka pásma)
    - (Z toho plyne) **nekorelovaného**
    - S **Gaussovským rozložení pravděpodobnosti** (potom z nekorelovanosti plyne nezávislost)