Моллибдэнс,

или

**линейные рекурренты
с непостоянными коэффициентами**

Глеб Погудин
Пётр Торт

Предисловие

Перед вами записки миникурса, прочитанного первым автором для школьников СУНЦ МГУ весной 2016 г.

Целью курса было показать область, которая оказывается очень близка ко многим традиционным дисциплинам (комбинаторика, дифференциальные уравнения), но обычно обделена вниманием: рекурренты с непостоянными коэффициентами или, если говорить шире, разностную, да и вообще компьютерную алгебру. Особенно привлекла нас эта тематика тем, что:

- может быть изложена на достаточно элементарном уровне;
- в ней есть сравнительно недавние результаты, для понимания которых не нужно углубляться в дебри;
- является поводом ввести интересные некоммутативные алгебраические структуры, познакомиться с некоммутативным миром;
- имеет непосредственные приложения и связи с computer science;
- позволяет поговорить о связях и аналогиях между дифференциальными и разностными уравнениями;
- просто интересно.

Текст состоит из четырех лекций (каждая занимала порядка 45 минут). К каждой лекции идут задачи для семинара, многие снабжены решениями. В самом конце приведен список задач для самостоятельного решения. Устроен он достаточно хаотично, поэтому пытаться решать эти задачи подряд нет особого смысла.

Авторы хотели бы поблагодарить 11 «Б» и 11 «В» СУНЦ МГУ 2016 года выпуска за то, что они стоически перенесли апробацию этого курса на себе. Благодаря их замечаниям и обратной связи этот текст стал гораздо лучше. Собственно, не будь их, он бы и не существовал. Мы также выражаем признательность нашему коллеге Илье Воробьеву, который очень помог с ведением семинаров по данному курсу и сделал ряд важных замечаний по тексту записок. Отдельное спасибо Мануэлю Кауэрсу за введение в эту чудную науку.

Лекция 1

Соотношение вида

$$a_{n+k} = r_1(n)a_{n+k-1} + r_2(n)a_{n+k-2} + \ldots + r_k(n)a_n + q(n)$$

называется *линейной рекуррентой порядка* k. Вообще говоря, в качестве $r_1(n), \ldots, r_k(n)$ и $q(n)$ могут быть взяты любые функции. Если все они являются константами, мы говорим, что имеем дело с рекуррентой с постоянными коэффициентами. Если $q(n) = 0$, то рекуррента называется *однородной*. Если $r_k(n)$ не является тождественно нулевой функцией, то число k называют *порядком рекурренты*.

Линейные рекурренты возникают практически во всех разделах математики: от комбинаторики и теории чисел до дифференциальных уравнений и топологии. Нахождение формулы *общего члена* (то есть формулы, выражающей a_n через n) — сложная открытая математическая проблема. Однако, в некоторых важных частных случаях можно придумать довольно эффективные алгоритмы для решения этой задачи. Целью настоящих записок является рассказать о некоторых их них, как о классических, так и о сравнительно недавних.

Начнем со случая $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$, где α и β — числа. Можно считать, что $\beta \neq 0$, иначе получается геометрическая прогрессия.

Утверждение 1. *Пусть $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ — две последовательности, удовлетворяющие одной и той же линейной однородной рекурренте второго порядка с постоянными коэффициентами. Если вектора (a_0, a_1) и (b_0, b_1) не пропорциональны, то любая другая последовательность, удовлетворяющая той же рекурренте имеет вид $\{\lambda a_i + \mu b_i\}_{i=0}^{\infty}$.*

Доказательство. Для начала заметим, что для любых λ и μ последовательность $\lambda a_i + \mu b_i$ действительно удовлетворяет той же рекурренте. Для этого достаточно сложить равенства

$$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n \text{ и } b_{n+2} = \alpha b_{n+1} + \beta b_n,$$

умножив первое на λ, а второе на μ:

$$(\lambda a_{n+2} + \mu b_{n+2}) = \alpha(\lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) + \beta(\lambda a_n + \mu b_n)$$

Получаем все ту же рекурренту.

Рассмотрим теперь произвольную последовательность $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$, удовлетворяющую той же рекурренте. Тогда $c_{n+2} = \alpha c_{n+1} + \beta c_n$. Так как вектора (a_0, a_1) и

(b_0, b_1) не коллинеарны, вектор (c_0, c_1) через них выражается. Обозначим коэффициенты в этом разложении через λ и μ.

$$(c_0, c_1) = \lambda(a_0, a_1) + \mu(b_0, b_1)$$

Тогда получается, что последовательности $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{\lambda a_i + \mu b_i\}_{i=0}^{\infty}$ удовлетворяют одной и той же рекурренте, и у них совпадают первые два числа. Но тогда в них совпадают и все остальные числа, так как первые два числа задают всю последующую последовательность однозначно: c_2 однозначно выражается через c_0 и c_1, c_3 — через c_1 и c_2, и т.д.

□

Утверждение 2. *Пусть $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ — линейная рекуррента с постоянными коэффициентами ($\beta \neq 0$). Рассмотрим квадратный трехчлен $q^2 - \alpha q - \beta$ относительно переменной q.*

1. *Если он имеет два различных корня $q_1 \neq q_2$, то всякая последовательность, удовлетворяющая рекурренте имеет вид $a_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$.*

2. *Если он имеет один корень q_0, то всякая последовательность, удовлетворяющая рекурренте имеет вид $a_n = \lambda q_0^n + \mu n q_0^n$.*

Доказательство. Согласно предыдущему утверждению, для нахождения всех рекуррент, удовлетворяющих данному соотношению, достаточно найти две рекурренты с непропорциональными началами. Будем искать их в виде геометрических прогрессий. Итак, пусть $a_n = q^n$. Тогда рекуррента превращается в $q^{n+2} = \alpha q^{n+1} + \beta q^n$. Сократив на q^n, получим *характеристическое уравнение*:

$$q^2 - \alpha q - \beta = 0$$

Есть два варианта развития событий:

1. У этого уравнения два различных корня $q_1 \neq q_2$. Тогда получается, что нашей рекурренте удовлетворяют последовательности $1, q_1, q_1^2, \ldots$ и $1, q_2, q_2^2, \ldots$. Так как вектора $(1, q_1)$ и $(1, q_2)$ непропорциональны, мы оказываемся в юрисдикции Утверждения 1, в силу которого всякая последовательность, удовлетворяющая нашей рекурренте имеет вид $\{\lambda q_1^i + \mu q_2^i\}_{i=0}^{\infty}$.

2. У этого уравнения один кратный корень q_0. В этом случае рекурренте $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ удовлетворяет последовательность $1, q_0, q_0^2, \ldots$. Но этого мало! К счастью, оказывается, что этой же рекурренте удовлетворяет ещё и последовательность $a_n = n q_0^n$. Чтобы в этом удостовериться, заметим

для начала, что в силу теоремы Виета $\alpha = 2q_0$ и $\beta = -q_0^2$. Учитывая это, подставим:

$$\alpha a_{n+1} + \beta a_n = 2q_0 \cdot (n+1)q_0^{n+1} - q_0^2 \cdot nq_0^n = (n+2)q_0^{n+2} = a_{n+2}$$

Осталось заметить, что ветора $(1, q_0)$ и $(0, q_0)$ непропорциональны, откуда из Утверждения 1 опять всё следует.

$\square$

Пример 1. Рассмотрим рекурренту $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$. Зададимся целью найти формулу для такой последовательности, чтобы ещё и $a_0 = a_1 = 1$.

Для начала забудем об условии $a_0 = a_1 = 1$ и найдем формулу для общего вида для последовательностей, удовлетворяющих нашей рекурренте. Следуя Утверждению 2, поищем геометрические прогрессии, удовлетворяющие соотношению $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$. Характеристическое уравнение будет иметь вид $0 = q^2 - q - 6 = (q-3)(q+2)$. таким образом, всякая последовательность, удовлетворяющая нашей рекурренте имеет вид $a_n = \lambda 3^n + \mu(-2)^n$. Самое время вспомнить об условии $a_0 = a_1 = 1$, оно даёт нам систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 = \lambda + \mu = 1 \\ a_1 = 3\lambda - 2\mu = 1 \end{cases}$$

Решая её, находим $\lambda = \frac{3}{5}$ и $\mu = \frac{2}{5}$. Итого получаем формулу $a_n = \frac{1}{5}\left(3^{n+1} - (-2)^{n+1}\right)$.

Аналогично Утверждню 1 доказывается и следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ — три последовательности, удовлетворяющие одной и той же линейной однородной рекурренте с постоянными коэффициентами третьего порядка. Если вектора (a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2) и (c_0, c_1, c_2) не компланарны, то любая другая последовательность, удовлетворяющая той же рекурренте имеет вид $\{\lambda a_i + \mu b_i + \xi c_i\}_{i=0}^{\infty}$.*

Задачи к семинару

1. Для чисел Фибоначчи заданных $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ вывести *формулу Бине*:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

2. Найти формулу для рекурренты $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ и $a_{n+2} = \sqrt{2}a_{n+1} - a_n$ (в идеале хочется получить действительнозначную последовательность).

3. Построить линейную однородную рекурренту с постоянными коэффициентами, которой удовлетворяла бы последовательность

   (a) $a_n = n$;

   (b) $a_n = n^2$;

   (c) $a_n = n^3$.

   Решение:

   (a) Заметим, что рекуррента $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ подходит. Более того, этой рекурренте удовлетворяет любая последовательность вида $a_n = \alpha n + \beta$.

   (b) Пусть $b_n = n^2$. Тогда $b_{n+1} - b_n = 2n + 1$, то есть удовлетворяет рекурренте из предыдущего пункта. Подставив, получим:

   $$(b_{n+3} - b_{n+2}) = 2(b_{n+2} - b_{n+1}) - (b_{n+1} - b_n)$$

   То есть [1]

   $$b_{n+3} = 3b_{n+2} - 3b_{n+1} + b_n$$

   $\square$

[1] Хотим обратить внимание читателя на призрак треугольника Паскаля в этих примерах

Лекция 2

Операторный подход

Рассмотрим уже знакомую нам последовательность чисел Фибоначчи, заданную начальным условием $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ и рекуррентой $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Обозначим всю полученную последовательность (как цельный объект) буквой F.

Давайте ещё осознаем, что последовательности можно складывать. Например, рассмотрим ещё последовательность A, заданную формулой $a_n = n$. Тогда последовательность A и F можно поэлементно сложить и получится такая вот последовательность:

F:	0,	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	...
A:	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	...
$A+F$:	0,	2,	3,	5,	7,	10,	14,	20,	...

Определим теперь оператор $\mathcal{S}$, который будет на вход получать последовательность, а на выходе выдавать её же, но сдвинутую на один назад. Через $\mathcal{S}^m$ обозначим m-кратное применение оператора $\mathcal{S}$. Для пущей гармонии будем считать, что $\mathcal{S}^0$ — это оператор, который с последовательность просто ничего не делает. Его мы ещё будем обозначать 1, то есть оператор умножения всей последовательности на единицу.

Рассмотрим последовательности F, $\mathcal{S}(F)$ и $\mathcal{S}^2 F$:

F:	0,	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	...
$\mathcal{S}(F)$:	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	...
$\mathcal{S}^2(F)$:	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	34,	...

Нетрудно заметить, что третья строчка равна сумме первых двух, что и неудивительно: ведь именно об этом нам говорит рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи. Таким образом, рекуррентное соотношение экавивалентно равенству $\mathcal{S}^2(F) = \mathcal{S}F + 1 \cdot F$. Перепишем его в виде

$$\left(\mathcal{S}^2 - \mathcal{S} - 1\right)(F) = 0$$

Об этом равенстве надо думать, так: есть некий оператор, который берет два сдвига последовательности и её саму, а потом как-то это складывает, и оказывается, что после этого получается последовательность из одних только нулей.

Подчеркнем, что пока толком ничего не произошло: мы просто переписали исходные условия задачи в каких-то новых обозначениях. Посмотрим на выражение $\mathcal{S}^2 - \mathcal{S} - 1$ как на квадратный трехчлен (да, обычный квадратный трехчлен, просто от оператора), разложим его на множители: $\left(\mathcal{S} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\mathcal{S} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Из этого разложения, в частности следует, что достаточным условием выполне-

ния равенства
$$\left(\mathcal{S}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\mathcal{S}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(A)=0$$
является равенство $\left(\mathcal{S}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(A)=0$, которое в свою очередь означает попросту, что A является геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Поменяв скобки местами, получаем, что исходный оператор превращет в нулевую последовательность ещё и геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Осталось теперь лишь, как и раньше, из этих последовательностей скомбинировать последовательность Фибоначчи.

Полученные результаты совпадают с тем, что получалось у нас ранее. Ещё бы: трехчлен $\mathcal{S}^2-\mathcal{S}-1$ попросту совпадает с характеристическим трехчленом последовательности Фибоначчи. Польза от нового подхода в том, что мы не угадывали, что нам нужно искать геометрические прогрессии, а получили их естественным путём.

Замечание 1. На рекурренты с постоянными коэффициентами есть и другие концептуальные точки зрения: через производящие функции (см. [5, §7.3]) и через умножение матриц (см. [2, §4.1]).

Рекурренты для многочленов

Давайте представим, что у нас есть последовательность a_n, для которой нам хотелось бы вывести рекурренту. Пусть мы уже нашли рекурренту для последовательности $b_n = a_{n+1} - a_n$, например $b_{n+2} = \alpha b_{n+1} + \beta b_n$ (она может быть и большего порядка, второй порядок мы взяли просто для примера). Обозначив обсуждаемые последовательности через A и B соответственно, мы можем переписать имеющиеся данные в операторном виде вот так:

$$B=\mathcal{S}(A)-A=(\mathcal{S}-1)(A) \text{ и } \left(\mathcal{S}^2-\alpha\mathcal{S}-\beta\right)(B)=0$$

Возникает естественный порыв подставить выражение для B из первого равенства во второе, не будем же его сдерживать:

$$\left(\mathcal{S}^2-\alpha\mathcal{S}-\beta\right)(\mathcal{S}-1)(A)=0$$

Раскрыв скобки, получим:

$$\left(\mathcal{S}^3-(\alpha+1)\mathcal{S}^2-(\beta-\alpha)\mathcal{S}+\beta\right)(A)$$

Что и даёт нам рекурренту $a_{n+3}=(\alpha+1)a_{n+2}+(\beta-\alpha)a_{n+1}-\beta a_n$.

Вернувшись к семинарской задаче о рекуррентах для многочленов, мы теперь можем концептуальнейше объяснить, откуда там брались биномиальные коэффициенты. Действительно, докажем индукцией по d, что любая последовательность $a_n = p(n)$, где $p(x)$ — многочлен степени не выше d, обращается в нуль оператором $(\mathcal{S} - 1)^{d+1}$.

База для $d = 0$ очевидна: любая постоянная последовательность просто идентична своему сдвигу. Пусть теперь $a_n = p(n)$, и $p(x)$ имеет степень $d+1$. Тогда последовательность $b_n = p(n+1) - p(n) = (\mathcal{S} - 1)(A)$ задается многочленом степени не выше d, а значит по предположению индукции $(\mathcal{S} - 1)^{d+1}(B) = 0$, откуда $(\mathcal{S} - 1)^{d+2}(A) = 0$, что и требовалось.

Рекурренты с непостоянными коэффициентами, или приглашение в Некоммутативный Мир

Пусть у нас теперь последовательность удовлетворяет рекурренте $a_{n+2} = (n + 1)a_{n+1} + (n+1)a_n$, и нам хочется опять переписать все в операторном виде. Для этого давайте будем мыслить себе выражение nA, где A традиционно символизирует собой какую-то последовательность $\{a_n\}$, как последовательность, n -ый член которой равен na_n, то есть последовательность $\ldots, a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots$. Аналогичным образом можно определить последовательность n^2A и даже $\frac{n-3}{n^2+n+11}A$.

Тогда последовательность $(n+1)a_{n+1}$ есть не что иное, как $(n+1)\mathcal{S}(A)$. Мы умножаем именно на $n + 1$, так как в последовательности $\mathcal{S}$ член a_{n+1} имеет номер n. Последовательность $(n + 1)a_n$ записывается как $(n + 1)A$. Собрав всё воедино, имеем:

$$\left(\mathcal{S}^2 - (n+1)\mathcal{S} - (n+1)\right)(A) = 0$$

Кажется, что надо так же, как и в случае Фибоначчи, найти корни квадратного трехчлена, разложить его на множители, после чего радоваться жизни. Однако, корни этого трехчлена имеют довольно мерзкий вид, что настораживает.

И всё дело в том, что n и $\mathcal{S}$ *не коммутируют*! Действительно, давайте возьмем некоторую последовательность A и применим к ней операторы $n\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}n$.

1. Последовательность $\mathcal{S}(A)$ задается формулой $b_n = a_{n+1}$, то есть последующее умножение на n превращает её в na_{n+1}.

2. Если же я рассмотрю сдвиг последовательности nA, то получится последовательность $b_n = (n+1)a_{n+1}$.

Таким образом, операторы ведут себя как обычные многочлены до тех пор, пока вы не захотите в выражении переставить $\mathcal{S}$ и некоторую функцию $r(n)$.

Они, как мы выяснили, переставляются по правилу:

$$r(n)\mathcal{S} = \mathcal{S}r(n-1)$$

Аналогично

$$r(n)\mathcal{S}^d = \mathcal{S}^d r(n-d)$$

Многочлены от оператора $\mathcal{S}$, коэффициентами в которых являются некоторые функции от n, являются частным случаем так называемых *многочленов Оре*. Мы периодически будем их так называть.

В нашем исходном примере получается, что оператор расклдывается на множители не так, как разложилось бы на множители обычное квадратное уравнение:

$$\mathcal{S}^2 - (n+1)\mathcal{S} - (n+1) = (\mathcal{S}+1)\left(\mathcal{S} - (n+1)\right)$$

В частности, отсюда следует, что всякое решение рекурренты $a_{n+1} = (n+1)a_n$ является решением исходной рекурренты. Решения $a_{n+1} = (n+1)a_n$ имеют вид $a_n = c \cdot n!$, можно легко убедиться, что такая последовательность действительно подходит.

Однако, решения рекурренты $a_{n+1} = -a_n$ не подходят, несмотря на то, что в разложении оператора имеется множитель $\mathcal{S}+1$. Дело в том, что оператор делится на $\mathcal{S}+1$ *слева*, но не делится на *справа*:

$$\mathcal{S}^2 - (n+1)\mathcal{S} - (n+1) = \left(\mathcal{S} - (n-1)\right)(\mathcal{S}+1) - 2$$

Оба полученных выше разложения получаются путем обычного деления в столбик (только теперь их два: правое и левое). Продемонстрируем это ещё на одном примере. Как мы знаем, всякая линейная последовательность превращается в нуль под действием оператора

$$(\mathcal{S}-1)^2 = \mathcal{S}^2 - 2\mathcal{S} + 1$$

С другой стороны, последовательность $a_n = n+1$ удовлетворяет рекурренте $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$, то есть зануляется оператором $\mathcal{S} - \frac{n+2}{n+1}$. Давайте поделим первый оператор на второй в столбик:

1. чтобы «убить» $\mathcal{S}^2$, вычтем $\mathcal{S}\left(\mathcal{S} - \frac{n+2}{n+1}\right) = \mathcal{S}^2 - \frac{n+3}{n+2}\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}^2 - 2\mathcal{S} + 1 - \left(\mathcal{S}^2 - \frac{n+3}{n+2}\mathcal{S}\right) = -\frac{n+1}{n+2}\mathcal{S} + 1$$

2. чтобы «убить» $-\frac{n+1}{n+2}\mathcal{S}$, вычтем $-\frac{n+1}{n+2}\left(\mathcal{S} - \frac{n+2}{n+1}\right) = -\frac{n+1}{n+2}\mathcal{S} + 1$. Получится нуль.

Итоговый результат нашего славного деления таков:

$$\mathcal{S}^2 - 2\mathcal{S} + 1 = \left(\mathcal{S} - \frac{n+1}{n+2}\right)\left(\mathcal{S} - \frac{n+2}{n+1}\right)$$

Задачи к семинару

1. Перемножьте $\mathcal{S} - \frac{2n}{n+1}$ на $\mathcal{S} - \frac{2n+2}{n}$. Попробуйте объяснить полученный результат.

   Ответ. $(\mathcal{S} - 2)^2$

2. Разделите самостоятельно $\mathcal{S}^2 - (n+1)\mathcal{S} - (n+1)$ на $\mathcal{S} - (n+1)$ справа. А делится ли оно слева?

3. Последовательность a_n удовлетворяет рекурренте $a_{n+1} = a_n + 2^n$. Запишите для a_n однородную рекурренту с постоянными коэффициентами.

4. Выведите формулу для наименьшего общего левого кратного многочленов $\mathcal{S} - a(n)$ и $S - b(n)$.

   Решение. Понятно, что степень НОЛК относительно $\mathcal{S}$ не может быть один. Поищем НОЛК среди многочленов второй степени. Условие задачи можно переформулировать следующим образом: нужно найти такие функции $c(n)$ и $d(n)$, что

   $$(\mathcal{S} - c(n))\,(\mathcal{S} - a(n)) = (\mathcal{S} - d(n))\,(\mathcal{S} - b(n))$$

   Раскроем скобки:

   $$\mathcal{S}^2 - (c(n) + a(n+1))\,\mathcal{S} + a(n)c(n) = \mathcal{S}^2 - (d(n) + b(n+1))\,\mathcal{S} + d(n)b(n)$$

   Приравняем коэффициенты при $\mathcal{S}^1$ и $\mathcal{S}^0$:

   $$c(n) + a(n+1) = d(n) + b(n+1) \text{ и } a(n)c(n) = b(n)d(n)$$

   Выражаем, подставляем, получаем:

   $$\mathcal{S}^2 - \frac{a(n)a(n+1) - b(n)b(n+1)}{a(n) - b(n)} + a(n)b(n)\frac{a(n+1) - b(n+1)}{a(n) - b(n)}$$

5. Используя результат предыдущей задачи, придумайте рекурренту, которой бы удовлетворяли последовательности $a_n = n!$ и $b_n = 2^n$.

   Набросок решения. Надо взять наименьшее общее правое кратное операторов, зануляющих эти две последовательности: $\mathcal{S} - (n+1)$ и $\mathcal{S} - 2$.

6. Пусть известно, что последовательность a_n удовлетворяет рекуррентам:

   $$a_{n+3} = (2n+5)a_{n+2} - (n+1)(n+3)a_{n+1} - (n+1)a_n$$

$$a_{n+2} = 2(n+1)a_{n+1} - n(n+1)a_n$$

Докажите, что a_n имеет вид $c \cdot n!$, где c — некоторая константа.

Набросок решения. Если последовательность обнуляется операторами, соответствующими этим рекуррентам, то она обнуляется и их наибольшим общим левым делителем (подумайте, почему!). Осталось найти его с помощью алгоритма Евклида и получить $\mathcal{S} - (n+1)$.

Лекция 3

Теорема Безу

Напомним, что *рациональной функцией* называется отношение двух многочленов. Последовательность, удовлетворяющая рекурренте $a_{n+1} = r(n)a_n$, где $r(n)$ — рациональная функция, называется *гипергеометрической*. В операторных обозначениях это означает, что последовательность A обращается в нуль при применении оператора $\mathcal{S} - r(n)$.

Следующее утверждение является прямым аналогом теоремы Безу.

Утверждение 4. *Пусть $\mathcal{A}$ — оператор, коэффициенты в котором являются рациональными функциями, A — последовательность, где бесконечно много ненулевых чисел, причем $\mathcal{A}(A) = 0$. Пусть также A удовлетворяет рекурренте $a_{n+1} = r(n)a_n$, где $r(n)$ — некая рациональная функция. Тогда $\mathcal{S} - r(n)$ является правым делителем оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Доказательство также аналогично доказательству теоремы Безу. Разделим $\mathcal{A}$ на $\mathcal{S} - r(n)$ справа с остатком, получим

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q}\left(\mathcal{S} - r(n)\right) + p(n),$$

где $p(n)$ — ненулевая рациональная функция. Теперь подействуйем всем этим хозяйством на последовательность A:

$$\begin{gathered} \mathcal{A}(A) = \mathcal{Q}\left(\mathcal{S} - r(n)\right)(A) + p(n)A \\ 0 = p(n)A \end{gathered}$$

Если $p(n) \neq 0$, то у неё лишь конечное число корней, а у A бесконечно много ненулевых членов. Отсюда следует, что $p(n) = 0$.

$\square$

Последовательность, удовлетворяющая рекурренте вида $a_{n+1} = r(n)a_n$, где $r(n)$ — рациональная функция, называется *гипергеометрической*. Тут есть некоторая тонкость: у $r(n)$ есть знаменатель, который может обращаться в нуль в некоторых целых точках. Это чисто техническая деталь, таких точек лишь конечное множество, можно считать, что мы смотрим только на достаточно большие n. Давайте далее делать вид, что такого не происходит.

Полиномиальные решения

Пусть у нас есть оператор второго порядка $\mathcal{A} = a(n)\mathcal{S}^2 + b(n)\mathcal{S} + c(n)$, где $a(n)$, $b(n)$ и $c(n)$ — рациональные функции. Домножив на знаменатели, можно считать, что $a(n)$, $b(n)$ и $c(n)$ являются многочленами. Предложим алгоритм поиска всех таких последовательностей X вида $x_n = p(n)$, где $p(n)$ — многочлен (такие последовательности называются *полиномиальными*), что $\mathcal{A}(X) = 0$. Наше изложение будет следовать статье Петровшека [3, §2] (алгоритм для решения этой задачи был впервые построен С.А. Абрамовым в [6]).

Если бы мы знали, что степень $p(n)$ не превосходит некоторого числа, то мы могли бы написать этот многочлен с неопределенными коэффицентами, что свело бы нашу задачу к решению системы линейных уравнений.

Пример 2. Пусть, например, $\mathcal{A} = (2n+1)(2n+3)\mathcal{S}^2 - 2(2n+1)\mathcal{S} + (2n+3)^2$. Попробуем найти у него все линейные решения, то есть решения вида $\alpha n + \beta$. Подставим:

$$(2n+1)(2n+3)(\alpha(n+2)+\beta) - 2(2n+1)(\alpha(n+1)+\beta) - (2n+3)^2(\alpha n+\beta) = 0$$

Приведя подобные, получим:

$$(4\alpha - 8\beta)n + (4\alpha - 8\beta) = 0$$

Откуда $\alpha = 2\beta$, то есть подходят все последовательности вида $x_n = c(2n+1)$.

Заметим, что если бы мы искали линейные непостоянные решения, то могли бы сразу говорить, что поделив на нужную константу, можно считать старший коэффициент единицей. Этим мы будем активно пользоваться в дальнейшем.

Пусть максимум из степеней $a(n)$, $b(n)$ и $c(n)$ равен s. Тогда их всех можно записать в виде

$$\begin{aligned} a(n) &= a_s n^s + a_{s-1} n^{s-1} + \dots \\ b(n) &= b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \dots \\ c(n) &= c_s n^s + c_{s-1} n^{s-1} + \dots \end{aligned}$$

Причем хотя бы одно из чисел a_s, b_s и c_s не равно нулю. Нас интересует, имеет ли рекуррента решение, являющееся многочленом степени ровно d. Запишем его пока с неопределенными коэффицентами $p(n) = n^d + p_{d-1}n^{d-1} + \dots$ и подставим в рекурренту:

$$a(n)\left((n+2)^d + p_{d-1}(n+2)^{d-1} + \dots\right) + b(n)\left((n+1)^d + p_{d-1}(n+1)^{d-1} + \dots\right) + \\ + c(n)\left(n^d + p_{d-1}n^{d-1} + \dots\right) = 0$$

Коэффиценты при всех степенях n должны оказаться равны нулю. Запишем это условие для двух старших:

При $\quad n^{d+s}$: $\quad a_s + b_s + c_s = 0$

При $\quad n^{d+s-1}$: $\quad a_s(2d + p_{d-1}) + a_{s-1} + b_s(d + p_{d-1}) + b_{s-1} + c_s p_{d-1} + c_{s-1} = 0$

Если первое равенство не выполнено, то надежды на полиномиальное решение нет. Иначе, вычитая из второго равенства первое, умноженное на p_{d-1}, получим:

$$d(2a_s + b_s) = -(a_{s-1} + b_{s-1} + c_{s-1})$$

Если $2a_s + b_s \neq 0$, то мы нашли единственно возможное d, осталось только проверить его. В противном случае, если $a_{s-1} + b_{s-1} + c_{s-1} \neq 0$, то опять же полиномиального решения ожидать не приходится. В случае $2a_s + b_s = a_{s-1} + b_{s-1} + c_{s-1} = 0$ придется записать ещё и коэффициент при n^{d+s-2}:

$$a_s\left(4C_d^2 + 2(d-1)p_{d-1} + p_{d-2}\right) + a_{s-1}\left(2d + p_{d-1}\right) + a_{s-2} + b_s\left(C_{d-1}^2 + (d-1)p_{d-1} + p_{d-2}\right) + \\ + b_{s-1}\left(d + p_{d-1}\right) + b_{s-2} + c_s p_{d-2} + c_{s-1}p_{d-1} + c_{s-2}p_d = 0$$

Учитывая равенства $a_s + b_s + c_s = 0$,$a_{s-1} + b_{s-1} + c_{s-1}$ и $2a_s + b_s = 0$, получаем:

$$4C_d^2 a_s + 2da_{s-1} + C_{d-1}^2 b_s + db_{s-1} + a_{s-2} + b_{s-2} + c_{s-2} = 0$$

Это квадратное уравнение со старшим коэффициентом $\frac{1}{2}(4a_s + b_s)$. Если бы он обнулился, то получилось бы, что $a_s = b_s = c_s = 0$. Таким образом, это уравнение задает нам те два d, кроме которых ничего быть и не может.

Замечание 2. Изложенному выше алгоритму явно не хватает некоторого изящества. Более того, ясно, что попытка обобщить его на случай операторов более высокого порядка будет сопряжена с существенными трудностями и огорчениями. Как именно это происходит, можно прочесть всё в той же статье [3]. Оказывается, если подойти к этой же процедуре немного с другой стороны (воспринимая наши операторы как в некотором смысле дифференциальные), то можно получить весьма гармоничный алгоритм для всех порядков. См., например, [1, §6].

Пример 3. Рассмотрим опять оператор из Примера 2. В этом случае $s = 2$ и условие $a_s + b_s + c_s = 0$ выполнено. Так как $2a_s + b_s = 8 \neq 0$, мы получаем, что d находится из линейного уравнения $8d = -(8 - 4 - 12)$, то есть $d = 1$. Стало быть в Примере 2 мы нашли все полиномиальные решения данной рекурренты.

Задачи к семинару

1. Покажите, что следующие последовательности являются гипергеометрическими:

(a) $a_n = (n+2)!$

(b) $a_n = 2^n(n^2+1)$;

(c) $a_n = p(n)$, где $p(n)$ — многочлен от n;

(d) $a_n = C_{n+k}^k$.

2. Найти полиномиальные решения рекурренты

$$(n+2)a_{n+2} + a_{n+1} - (n+3)a_n = 0.$$

Разделить её на соответствующие линейные многочлены справа.

Ответ. Из уравнений получится, что $d = 0$, то есть если полиномиальные решения есть, то они постоянны. Нетрудно видеть, что любая постоянная последовательность подходит.

3. Найти возможные степени многочленов, удовлетворяющих рекурренте

$$n(n+1)a_{n+2} - 2n(n+100)a_{n+1} + (n+99)(n+100)a_n = 0.$$

Ответ. Получаются 99 и 100.

4. Докажите, что у рекурренты

$$n^5 a_{n+5} - n^4 a_{n+4} - n^3 a_{n+3} - \ldots - a_n = 0$$

нет полиномиальных решений.

Набросок решения. Достаточно записать многочлен с неопределенными коэффициентами и подставить его в рекурренту. Окажется, что вклад в самый старший коэффициент делает только первое слагаемое, а значит этот моном ни с чем не может сократиться.

Лекция 4

Целью этой лекции будет изложение алгоритма Петковшека для случая рекуррент второго порядка. Исходно нам дана линейная рекуррента

$$P(n)a_{n+2} + Q(n)a_{n+1} + R(n)a_n = 0, \tag{1}$$

где $P(n)$, $Q(n)$ и $R(n)$ — многочлены.

Мы хотим найти все гипергеометрические последовательности, удовлетворяющие данной рекурренте. На операторном языке это означает найти все правые делители вида $\mathcal{S} - h(n)$, где $h(n)$ — рациональная функция, у оператора $P(n)\mathcal{S}^2 + Q(n)\mathcal{S} + R(n)$.

Предположим, что a_n — гипергеометрическая последовательность, то есть удовлетворяет рекурренте $a_{n+1} = h(n)a_n$. Поставив это в уравнение (1), получим уравнение на $h(n)$:

$$P(n)h(n+1)h(n) + Q(n)h(n) + R(n) = 0 \tag{2}$$

Учитывая, что $h(n)$ является ещё и рациональной функцией, а не просто многочленом, сходу неочевидно, как решать такое уравнение. Для этого нам потребуется представить $h(n)$ в особом удобном виде.

Нормальная форма Госпера

Мы будем приводить любую рациональную функцию к некоторому определенному виду, называемому *нормальной формой Госпера* (на самом деле требования в исходной статье Госпера были слабее, нам нужен модифицированный вариант из работы Петковшека [3, Lemma 3.1]).

Утверждение 5. *Любая рациональная функция $h(x)$ имеет представление в виде $Z\frac{A(x)}{B(x)}\frac{C(x+1)}{C(x)}$, где*

1. *Старший коэффициент в многочленах $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ равен единице.*
2. *НОД$(A(x), B(x+k)) = 1$ для всех целых $k \geqslant 0$.*
3. *НОД$(A(x), C(x)) = 1$.*
4. *НОД$(B(x), C(x+1)) = 1$.*

Доказательство. Пусть $h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где НОД$(P(x), Q(x)) = 1$. Тогда понятно, что число Z должно быть равно частному старших коэффициентов P и Q. Через

$\mathcal{P}$ обозначим множество (с учетом кратности) корней P, через $\mathcal{Q}$ — то же самое для Q. Положим $A(x) = B(x) = C(x) = 1$.

Будем действовать следующим образом. Пусть существуют элементы $\alpha \in \mathcal{P}$ и $\beta \in \mathcal{Q}$ такие, что разность $\beta - \alpha$ является натуральным числом. Среди всех таких пар возьмем пару с минимальной разностью (если таких несколько — возмьем любую), $\alpha \in \mathcal{P}$ и $\alpha + m \in \mathcal{Q}$. Выкинем эти числа из соответствующих множеств и обновим $C(x)$:

$$C(x) := C(x)(x - \alpha - m)(x - \alpha - m + 1) \dots (x - \alpha - 1)$$

Заметим, что частное $\frac{C(x+1)}{C(x)}$ домножилось в точности на $\frac{x-\alpha}{x-\alpha-m}$. Повторяем эту операцию до тех пор, пока все такие пары не исчезнут. После этого в качестве $A(x)$ берем многочлен, корни которого — оставшиеся в $\mathcal{P}$ элементы. В качестве $B(x)$ берем многочлен, корни которого — оставшиеся в $\mathcal{Q}$ элементы.

Покажем, что результат работы этого алгоритма удовлетворяет условиям леммы.

1. Все старшие коэффициенты равны единице по построению.

2. Если НОД$(A(x), B(x+k)) \neq 1$ для некоторого $k \geqslant 0$, то многочлены $A(x)$ и $B(x+k)$ имеют общий корень. Это означает, что на момент окончания работы алгоритма оставалась необработанная пара (α, β) с натуральной разностью, чего наш алгоритм не допускает.

3. Если НОД$(A(x), C(x)) \neq 1$, то $A(x)$ и $C(x)$ имеют общий корень. Это означает, что на некотором шаге мы добавили к $C(x)$ корни от $\alpha + 1$ до $\alpha + m$, где α — корень $P(x)$, а $\alpha + m$ — корень $Q(x)$, а потом одно из этих чисел, обозначим его $\alpha + m'$, оказалось ещё и корнем $A(x)$. В таком случае на момент добавления чисел от $\alpha + 1$ до $\alpha + m$ у $P(x)$ был корень $\alpha + m'$, то есть была пара корней $(\alpha + m', \alpha + m)$ на меньшем расстоянии, чем $(\alpha, \alpha + m)$, что противоречит нашему алгоритму.

4. Доказательство того, что НОД$(B(x), C(x+1)) = 1$ аналогично предыдущему пункту, остается на совести читателя.

$\square$

Замечание 3. Согласно [3, Corollary 3.1], представление, построенное выше, оказывается единственным.

Замечание 4. Понятно, что способ построения нормальной формы из нашего доказательства не применим на практике, так как требует нахождения всех корней многочлена. На самом деле можно обойтись только вычислениями в рациональных числах, см. [3, Lemma 3.1] или [2, Problem 5.8]. Отметим, что в алгоритме Петровшека нам не нужно вычислять нормальную форму Госпера, достаточно знать об её существовании.

Собственно алгоритм

Пусть $h(x) = Z\frac{A(x)}{B(x)}\frac{C(x+1)}{C(x)}$ как в Утверждении 5. Подставим все это в соотношение (2) и домножим на $B(n)B(n+1)C(n)$:

$$Z^2P(n)A(n)A(n+1)C(n+2)+ZQ(n)A(n)B(n+1)C(n+1)+R(n)B(n)B(n+1)C(n) = 0 \tag{3}$$

Выглядит левая часть этого выражения как действие оператора

$$Z^2P(n)A(n)A(n+1)\mathcal{S}^2 + ZQ(n)A(n)B(n+1)\mathcal{S} + R(n)B(n)B(n+1) \tag{4}$$

на полиномиальную последовательность $c_n = C(n)$. Все такие последовательности мы умеем находить благодаря предыдущей лекции, но есть проблема: мы не знаем $A(n)$, $B(n)$ и Z, из-за чего не можем записать сам оператор. Оказывается, все возможные варианты $A(n)$ и $B(n)$ нетрудно перечислить. Действительно, в выражении (3) первые два слагаемых делятся на $A(n)$ (делятся как многочлен от n, а не просто как число!), значит

$$A(n) \mid R(n)B(n)B(n+1)C(n).$$

Так как в силу Утверждения 5

$$\text{НОД}(A(n), B(n)B(n+1)C(n)) = 1,$$

получается, что $A(n) \mid R(n)$. Аналогично доказывается, что $B(n+1) \mid P(n)$. Получается, что $A(n)$ и $B(n+1)$ находятся среди унитарных (то есть со старшим коэффициентом 1) делителей $R(n)$ и $P(n)$, соответственно, коих конечное количество.

Осталось одно белое пятно — числовая константа Z. Однако, оказывается, что при фиксированных $A(n)$ и $B(n)$ есть не более двух возможных значений для Z, если мы хотим, чтобы у данной рекурренты были полиномиальные решения. Проще всего это осознать, посмотрев на следующий пример.

Пример: беспорядки

Через a_n будем обозначать количество способов переставить числа от 1 до $n+1$ так, чтобы для любого i на i-ом месте стояло число отличное от i. В частности, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Эта последовательность удовлетворяет следующей рекурренте (докажите, это несложно)

$$a_{n+2} - (n+2)a_{n+1} - (n+2)a_n = 0 \tag{5}$$

В этой ситуации $P(n) = 1$, $Q(n) = -n-2$ и $R(n) = -n-2$. Отсюда следует, что $B(n) = 1$, а $A(n)$ равно 1 или $n+2$. Получаем две рекурренты, у которых нужно найти полиномиальные решения:

1. В случае $A(n) = 1$:

   $$Z^2 c_{n+2} - Z(n+2)c_{n+1} - (n+2)c_n = 0$$

   Будем искать полиномиальные решения в виде $c_n = n^d + an^{d-1} + \ldots$. Рассмотрим коэффициент при n^{d+1}: $-Z - 1$. Так как он должен быть равен нулю, $Z = -1$. Теперь посмотрим на коэффициент при n^d: $1 + (2 + a + d) - (2 + a) = d + 1$. Отсюда, $d = -1$, то есть полиномиальных решений у этой рекурренты нет.

2. В случае $A(n) = n + 2$:

   $$Z^2(n+3)(n+2)c_{n+2} - Z(n+2)^2 c_{n+1} - (n+2)c_n = 0$$

   Это сокращается до $Z^2(n+3)c_{n+2} - Z(n+2)c_{n+1} - c_n = 0$. Снова поищем решение в виде $c_n = n^d + an^{d-1} + \ldots$. Коэффициент при n^{d+1} оказывается равен $Z^2 - Z$, откуда $Z = 0$ или $Z = 1$. В первом случае получается рекуррента $c_n = 0$, у которой только нулевое решение. Во втором случае давайте посмотрим на коэффициент при n^d: $(3 + a + 2d) - (2 + a + d) - 1 = d$. Значит, единственное полиномиальное решение — константа. Легко видеть, что оно действительно подходит.

   Если теперь собрать воедино функцию $h(n)$ из частей, то получится $h(n) = (n+2)$, то есть интересующий нас оператор делится справа на $\mathcal{S} - (n+2)$ и, в частности, обнуляет последовательность $a_n = (n+1)!$.

Вариация постоянной

В прошлом разделе мы нашли единственное с точностью до умножения на константу гипергеометрическое решение рекурренты (5). Однако, оно не пропорционально числу беспорядков, то есть не решает нашу задачу!

Для решения этой проблемы используется *вариация постоянной*, с которым вы все познакомитесь в курсе дифференциальных уравнений[2]. Нам уже известно решение $a_n = b \cdot (n+1)!$, где b — некоторая постоянная. А давайте поищем

[2]Вообще говоря, разностные уравнения, которые мы сейчас решаем имеют довольно много общего с дифференциальными уравнениями

решение в виде $b_n \cdot (n+1)!$, где b_n — некоторая последовательность. Подействуем нашим оператором $\mathcal{S}^2 - (n+2)\mathcal{S} - (n+2)$ на последовательность $(n+1)!B$:

$$(n+3)!\mathcal{S}^2(B) - (n+2) \cdot (n+2)!\mathcal{S}B - (n+2) \cdot (n+1)!B = 0$$

Сократив на $(n+2)!$, получим:

$$(n+3)\mathcal{S}^2(B) - (n+2)\mathcal{S}(B) - B = 0$$

Это можно переписать в виде

$$((n+3)\mathcal{S} + 1)(\mathcal{S} - 1)(B) = 0$$

Это означает, что последовательность $c_n = b_{n+1} - b_n$ удовлетворяет рекурренте $(n+3)c_{n+1} = -c_n$, а значит имеет вид (с точностью до пропорциональности, как обычно) $c_n = \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$, откуда:

$$b_n = \alpha + \beta \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Положив $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ получим последовательность, совпадающую с числом беспорядков в первых двух членах, а значит и совпадающую всюду.

Задачи к семинару

1. Записать рекурренту для последовательности $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot k!$.

   Решение. Последовательность a_n удовлетворяет соотношению $a_{n+1} - a_n = (n+1) \cdot (n+1)!$[3], что операторно записывается как

   $$(\mathcal{S} - 1)\, A = (n+1) \cdot (n+1)!$$

   Правая часть этого равенства обращается в нуль при действии оператором $(n+1)\mathcal{S} - (n+2)^2$, откуда

   $$\left((n+1)\mathcal{S} - (n+2)^2\right)(\mathcal{S} - 1)\, A = 0$$

   Раскрыв скобки, получаем:

   $$\left((n+1)\mathcal{S}^2 - (n^2+5n+5)\mathcal{S} + (n+2)^2\right) A = 0$$

   То есть рекуррента имеет вид

   $$(n+1)a_{n+2} - (n^2+5n+5)a_{n+1} + (n+2)^2 a_n = 0$$

[3] Справедливости ради отметим, что этому же соотношению удовлетворяет и последовательность $a_n + 5$, например

2. Найти у рекурренты из предыдущей задачи все гипергеометрические решения, откуда получить формулу для a_n, не содержащую знака суммы.

   Решение. В обозначениях с лекции имеем $P(n) = n+1$, $Q(n) = -n^2 - 5n - 5$ и $R(n) = (n+2)^2$. Нам нужно найти все варианты для $A(n)$ и $B(n)$, чтобы выполнялись соотношения $A(n)|R(n)$ и $B(n+1)|P(n)$. Есть варианты $A(n) = 1, n+2, (n+2)^2$ и $B(n) = 1, n$. Шесть вариантов кажется большим количеством, но мы справимся. Заранее оговоримся, что будем искать результат в виде $c_n = n^d + an^{d-1} + \ldots$.

   (a) $B(n) = 1$. Нам нужно подставить один из трех вариантов для $A(n)$ в выражение

   $$Z^2 A(n)A(n+1)(n+1)c_{n+2} - ZA(n)(n^2+5n+5)c_{n+1} + (n+2)^2 c_n = 0$$

   Начнем с того, что $A(n) = (n+2)^2$ можно не подставлять, так как в полученном выражении коэффициент при c_{n+2} будет иметь степень пять, а оставшиеся два не больше четырех, поэтому самый старший моном многочлена заведомо не сократится. Оставшиеся два вариант придется честно попробовать:

   i. $A(n) = 1$. Получаем рекурренту

   $$Z^2(n+1)c_{n+2} - Z(n^2+5n+5)c_{n+1} + (n+2)^2 c_n = 0$$

   Коэффициент при n^{d+2} будет равен $-Z+1$, откуда $Z = 1$. Коэффициент при n^{d+1} равен $1 - (5+a+d) + (4+a) = d$, откуда $d = 0$. Отметим, что константа действительно подходит. Собрав все в нормальную форму Госпера обратно, мы получаем **первое решение** $a_{n+1} = a_n$, константу, иначе говоря.

   ii. $A(n) = n+2$. Сократив на $n+2$, получим:

   $$Z^2(n+1)(n+3)c_{n+2} - Z(n^2+5n+5)c_{n+1} + (n+2)c_n = 0$$

   Коэффициент при n^{d+2} равен $Z^2 - Z$, откуда $Z = 1$ или $Z = 0$. Случай $Z = 0$ приводит нас к нулевой последовательности, то есть не интересен. Если $Z = 1$, то коэффициент при n^{d+1} равен $(4+a+2d) - (5+a+d) + 1 = d$, то есть c_n снова константа. Собрав все воедино получаем **второе решение** $a_{n+1} = (n+2)a_n$, то есть $a_n = C(n+1)!$.[4]

[4] На самом деле в этом месте можно бы и остановиться, так как мы нашли два непропорциональных решения, через которые можем выразить все остальные.

(b) $B(n) = n$. Нам нужно подставить один из трех вариантов для $A(n)$ в выражение (мы уже сократили на $n+1$)

$$Z^2 A(n)A(n+1)c_{n+2} - ZA(n)(n^2+5n+5)c_{n+1} + n(n+2)^2 c_n = 0$$

Вариант $A(n) = 1$ нам не подходит, так как коэффициент при c_n будет иметь степень три, а остальные не больше двух. Оставшиеся два придется подставить.

i. $A(n) = (n+2)$. Получим

$$Z^2(n+3)c_{n+2} - Z(n^2+5n+5)c_{n+1} + n(n+2)c_n = 0$$

Коэффициент при n^{d+2} равен $-Z+1$, откуда $Z = 1$. Тогда коэффициент при n^{d+1} равен $1-(5+a+d)+(2+a) = -d-2$, откуда $d = -2$, то есть полиномиальных решений нет.

ii. $A(n) = (n+2)^2$. Получим

$$Z^2(n+3)^2 c_{n+2} - Z(n^2+5n+5)c_{n+1} + nc_n = 0$$

Коэффициент при n^{d+2} равен $Z^2 - Z$, откуда $Z = 1$. При n^{d+1}: $(6+a+2d) - (5+a+d) + 1 = d+2$, откуда $d = -2$, то есть полиномиальных решений нет.

В результате мы нашли два гипергеометрических решения: константа и $(n+1)!$. Посмторим на первые члены нашей последовательности $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Тогда легко видеть, что $a_n = (n+1)!-1$. Кстати, это просто задача 1.14 из книги [4].

3. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + y = 0$. Хочется найти у него все решения в степенных рядах, то есть найти степенные ряды вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, удовлетворяющие данному уравнению. Напишите рекурренту на a_k и найдите все такие ряды.

Набросок решения. Подставим степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ вместо y в выражение $y'' - 2y' + y$. Коэффициент при x^k после подстановки будет равен:

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2(k+1)a_{k+1} + a_k$$

Если функция y удовлетворяет дифференциальному уравнению, то это выражение равно нулю при всех k, что дает нам рекурренту.

Применив алгоритм Петровшека, вы получите общее решение вида $a_k = \frac{\alpha}{k!} + \frac{\beta k}{k!}$, где α и β — некоторые константы. Осталось «узнать» получающийся степенной ряд: $y = \alpha e^x + \beta x e^x$.

Ответ. $y = \alpha e^x + \beta x e^x$, где α и β — произвольные константы.

4. Докажите, что метод вариации постоянной работает всегда: если вы нашли только одно гипергеометрическое решение, то второе решение можно найти в виде суммы гипергеометрической последовательности.

Задачи

В некоторых задачах для самопроверки или исследования ситуации может быть полезно воспользоваться копмьютерной версией некоторых из изученных нами алгоритмов. Они реализованы в любой разумной системе компьютерной алгебры. В частности, в свободно распространяемой системе Sage, использующей Python в качестве основного языка. Вот пример кода, находящего полиномиальные решения для одной из рекуррент из задачи 2 к четвертой лекции.

```
from ore_algebra import *
R.<x> = PolynomialRing(ZZ); A.<Sx> = OreAlgebra(R)
operator =
  (x + 3) * (x + 1) * Sx^2 - (x * x + 5 * x + 5) * Sx + x + 2
solutions = operator.polynomial_solutions()
solutions
```

Использовать Sage, не устанавливая его, можно с помощью Sage MathCloud. Документацию по библиотеке ore_algebra можно найти в [7].

1. Найдите все степенные ряды, удовлетворяющие дифференциальному уравнению $(x-x^2)y''-(1+2x-x^2)y'+(1+x)y=0$. Напишите рекурренту, которой должны удовлетворять коэффициенты такого ряда и решите её.

2. Найдите все степенные ряды, удовлетворяющие дифференциальному уравнению $y'-2y=\frac{1}{(1-x)^2}$. Напишите рекурренту, которой должны удовлетворять коэффициенты такого ряда, сделайте её однородной второго порядка и решите.

3. Опишите все последовательности, удовлетворяющие рекуррента

$$(n+4)a_{n+2}=-a_{n+1}+(n+1)a_n.$$

   Примечание. Этот пример разобран в [3, Example 4.1].

4. Для нецелого α определим $C_\alpha^k=\frac{\alpha\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$. Напишите рекурренту второго порядка для последовательности $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}C_\alpha^k$ и получите формулу без суммы. (на самом деле для целых α формула тоже работать будет и давать как частны случай формулу для знакопеременной суммы цешек, но там будет неприятный вычислительный феномен)

5. Через a_n обозначим количество способов расставить n людей в два хоровода (хороводы математические, то есть может быть хоровод из одного человека). Напишите рекурренту и получите общую формулу.

Примечание. Эта последовательность является частным случаем чисел Стирлига первого рода. Подробнее о числах Стирлинга можно прочесть в [5, §6.1].

6. Найдите все степенные ряды, удовлетворяющие дифференциальному уравнению $y'' - 2y' + y = 0$. Напишите рекурренту, которой должны удовлетворять коэффициенты такого ряда и решите её.

7. Через a_n обозначим количество разбиений множества из n различных элементов на три непустых подмножества. Напишите рекурренту для a_n, получите общую формулу. (указание: вам будет удобно сначала вывести формулу и рекурренту для разбиений на два непустых подмножества)

   Примечание. Эта последовательность является частным случаем чисел Стирлинга второго рода, подробнее см. [5, §6.1].

8. Напишите рекурренту второго порядка для последовательности $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k2^k$. Найдите все решения этой рекурренты и, в частности, формулу для a_n без суммирования.

9. Напишите рекурренту второго порядка для $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. Найдите все решения рекурренты и, в частности, формулу для a_n.

10. Через a_n обозначим число способов расставить n людей в две непустые очереди (при этом очереди не нумерованы). Напишите рекурренту второго порядка для a_n, найдите все её решения и, в частности, формулу для a_n. (Это частный случай чисел Лаха, номер 105278 в OEIS, [8])

11. Выражение $(1+\sqrt{2})^n$ после раскрытия скобок имеет вид $a_n + b_n\sqrt{2}$, где $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$. Напишите рекурренты и, решив их, получите формулы для a_n и b_n.

12. Опишите все последовательности, удовлетворяющие рекуррента $na_{n+2} - (n^2+3n+1)a_{n+1} + (n+1)^3(n+2)a_n = 0$.

13. Опишите все последовательности, удовлетворяющие рекуррента $a_{n+2} - 2(n+2)a_{n+1} + (n+1)(n+2)a_n = 0$.

14. Напишите рекурренту порядка три для последовательности $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_n$ (f_n — n-ое число Фибоначчи). Найдите все решения рекурренты и, в частности, формулу для a_n.

15. Имеется пятиугольник $ABCDE$. Изначально в точке A сидит муха. За один шаг муха можете переместиться из вершины, где сидит, в любую из соседних. Сколькими способами за n ходов может муха из A попасть в C? (нужно решить задачу, написав и решив соответствующую рекурренту)

16. Имеется шестиугольник $ABCDEF$. Изначально в точке A сидит муха. За один шаг муха можете переместиться из вершины, где сидит, в любую из соседних. Сколькими способами за n ходов может муха из A попасть в C? (нужно решить задачу, написав и решив соответствующую рекурренту)

17. Имеется октаэдр. Изначально в вершине A сидит муха. За один шаг муха можете переместиться из вершины, где сидит, в любую из соседних по ребру. Сколькими способами за n ходов может муха из A попасть обратно в A? (нужно решить задачу, написав и решив соответствующую рекурренту)

18. Для рекурренты $(n+2)a_{n+2} - 2(n^2+2n+3)a_{n+1} + 4n(n+2)a_n = 0$ найти все решения вида $2^n p(n)$, где $p(n)$ — многочлен.

19. Для последовательности a_n, заданной формулой $a_{n+1} - (n+1)a_n = (n+1)!2^n$ и начальным условием $a_1 = 1$, запишите рекурренту второго порядка. Найдите все решения этой рекурренты и, в частности, формулу для a_n.

20. Два ковбоя играют в интеллектуальную игру: у одной есть m монет, у другого — n. Каждым ходом первый кидает монету, у которой вероятность орла равна p, и в случае орла забирает у второго монету, а в случае решки — отдает. Выигрывает тот, кто соберет у себя все монеты. Обозначим через $P_{m,n}$ вероятность выигрыша первого. Выразив $P_{m+1,n-1}$ через $P_{m,n}$ и $P_{m,n-1}$, получите линейную рекурренту. Решив её, получите формулу для $P_{m,n}$.

21. Опишите все последовательности, удовлетворяющие соотношению

$$(n+1)a_{n+2} - (1+(n+2)^2(n+1))a_{n+1} + (n+1)^2 a_n = 0$$

22. Напишите рекурренту второго порядка для последовательности $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k 3^k$. Найдите все решения этой рекурренты и, в частности, формулу для a_n без суммирования.

23. Опишите все последовательности, удовлетворяющие рекурренте

$$a_{n+2} - 2(n+2)a_{n+1} + (n+1.5)^2 a_n = 0$$

24. Опишите все последовательности, удовлетворяющие рекурренте

$$a_{n+2} - (n+2)a_{n+1} + \frac{(n+1)^2}{4}a_n = 0$$

25. Опишите все последовательности, удовлетворяющие рекурренте

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2(n+1)a_{n+1} + a_n = 0$$

26. Петя Торт красит дощатый забор в семь цветов радуги. Однако, ему хочется, чтобы количество подряд идущих красных, оранжевых, желтых и фиолетовых доско всегда было четно. Сколькими способами он может покрасить забор из n досок?

27. Петя Торт умеет делать три типа добрых дел и два типа недобрых. Недоброе дело Петя делает за одну минуту, на доброе ему требуется две минуты. Сколькими способами Петя может провести n минут?

28. Могло ли быть так, что в последовательности a_n, удовлетворяющей рекурренте

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + 2a_n$$

первые три числа по модулю не превосходят единицы, а $a_{100} > 3^{100}$?

29. Обозначим через a_n количество перестановок n предметов, которые при двукратном применении возвращают все на свои места. Задайте a_n рекуррентой и докажите, что a_n не является, увы, гипергеометрической последовательностью.

    Примечание. Разобрано в [3, Example 4.4]

30. Найдите все многочлены $p(n)$ такие, что рекуррента $a_{n+2}+p(n)a_{n+1}+na_n = 0$ имеет полиномиальное решение.

    Примечание. Полное решение этой задачи авторам неизвестно. Дерзайте.

31. Пусть $a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$. Напишите рекурренты третьего порядка для a_n. Найдите все последовательности, ей удовлетворяющие. Получите формулу для a_n.

32. Найдите все гипергеометрические решения рекурренты

$$a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n = 0$$

33. Опишите все решения рекурренты

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$$

34. Найдите наименьший порядок рекурренты с полиномиальными коэффициентами, которой удовлетворяла бы последовательность $a_n = 2^n + 3^n + 5^n$.

35. Найдите все последовательности, удовлетворяющие рекурренте

$$a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+1)a_{n+1}$$

36. Найдите все последовательности, удовлетворяющие рекурренте

$$a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$$

37. Сколько существует n-значных чисел, в которых соседние цифры дают разные остатки при делении на три?

38. Сколько существует n-значных чисел, в которых соседние цифры дают разные остатки при делении на четыре?

39. Найдите все полиномиальные последовательности, зануляемые оператором $\mathcal{S}^2 - (n-1)\mathcal{S} + n$.

40. Пусть известно, что последовательность a_n удовлетворяет рекуррентам:

$$a_{n+3} = (2n+5)a_{n+2} - (n+1)(n+3)a_{n+1} - (n+1)a_n$$

$$a_{n+2} = 2(n+1)a_{n+1} - n(n+1)a_n$$

Докажите, используя операторную запись, что a_n имеет вид $c \cdot n!$, где c — некоторая константа.

Что дальше?

Если тематика вас заинтересовала, то рекомендуем почитать книги [2] и [1]. Первая является более элементарной и может быть доступна старшеклассникам. Вторая рассчитана более на младшекурсников.

Из книг подобной тематики хотелось бы также отметить [9] и [10], которые будут доступны и интересны младшекурсникам и наиболее подготовленным старшеклассникам.

Список литературы

[1] С. А. Абрамов, *Элементы компьютерной алгебры линейных обыкновенных, дифференциальных, разностных и q-разностных операторов*, М.: МЦНМО, 2012.

[2] M. Kauers, P. Paule, *The Concrete Tetrahedron*, Texts & Monographs in Symbolic Computations, Springer, 2011.

[3] M. Petkovsek, *Hypergeometric Solutions of Linear Recurrences with Polynomial Coefficients*, J. Symbolic Computation, vol. 14, pp. 243-264, 1992.

[4] Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов, *Алгебра и теория чисел*, М.: МЦНМО, 2002.

[5] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика: основание информатики*, М.: «Мир», 1998.

[6] С.А. Абрамов, *Задачи компьютерной алгебры, связанные с поиском полиномиальных решений линейных дифференциальных и разностных уравнений*, Вестник МГУ, Серия 15, №3, 1989.

[7] M. Kauers, M. Jaroschek, F. Johansson, *Ore Polynomials in Sage*, http://arxiv.org/abs/1306.4263.

[8] *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, https://oeis.org/.

[9] H. S. Wilf, *generatingfunctionology.*

[10] M. Petrovsek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, $A = B$.