

姓名：王博奕
系級：財金四
學號：B07302230

Homework 5

1. Linear Programming

首先我們先定義問題：假設四種標的分別購買了不同的數量，可以得到下面的限制式，而目標即為最大化目標方程式：

Unit: m
bond = a
stock = b
gold = c
land = d

▲ 各標的購買數量

st(subject to):
$a+b+c+d \leq 5$
$a+b \geq 2$
$d \leq 1$
$0 \leq a \leq 3$
$0 \leq b \leq 3$
$0 \leq c \leq 2$
$0 \leq d \leq 3$

▲ 限制式

objective function:
$0.03a+0.12b+0.08c+0.09d$

▲ 目標函數

有了假設、限制與目標後，即可丟入矩陣運算的架構，使用 SOLVER 解決問題，值得注意的是要先給一個起始的 initial guess，另外很特別的一點是不用設一個 0 的限制，只要在 SOLVER 勾選 Make Unconstrained Variables Non-negative 就好：

initial:	a	b	c	d				
	0	3	1	1		max result	0.53	
max	0.03	0.12	0.08	0.09				
st1	1	1	1	1	=	5 <=		5
st2	1	1	0	0	=	3 >=		2
st3	0	0	0	1	=	1 <=		1
st4	1	0	0	0	=	0 <=		3
st5	0	1	0	0	=	3 <=		3
st6	0	0	1	0	=	1 <=		2
st7	0	0	0	1	=	1 <=		3

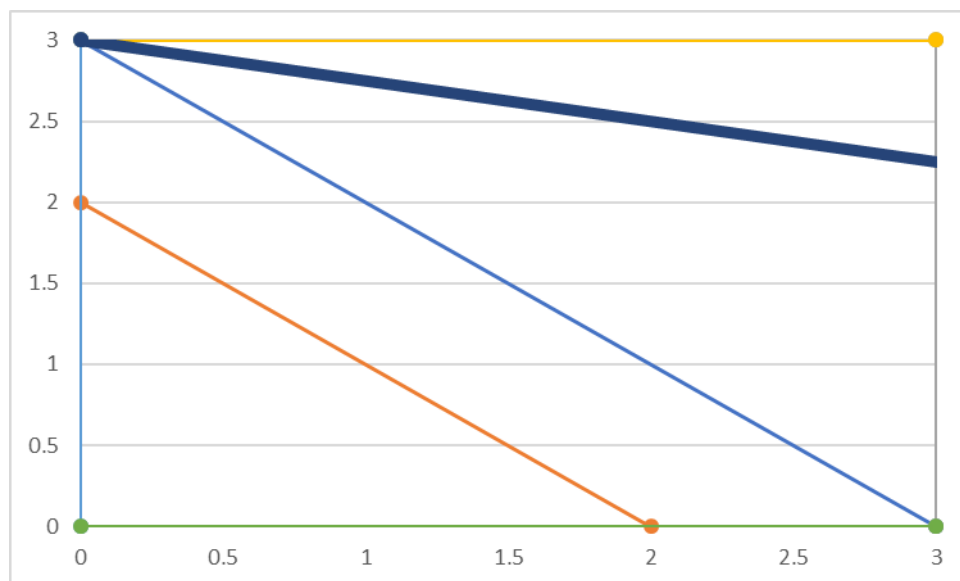
▲ SOLVER 的運算結果

觀察結果可以發現，最佳解出現在當 **bond 購買 0 單位、stock 購買 3 million、gold 購買 1 million、land 購買 1 million**。其實我們也可以使用圖形來尋找最佳解，但這有個前提是變數只能有兩個，因此我們先限制兩個變數，來找剩餘的兩個變數解。那我們的限制就會如下圖：

Assuming land and gold = 1						
initial	a	b				
	0	3		max result		
max	0.03	0.12		0.36		
st1	1	1 =	3	<=	3	
st2	1	1 =	3	>=	2	
st3	1	0 =	0	<=	3	
st4	0	1 =	3	<=	3	

▲ 新的限制式和 SOLVER 運算結果

把上面的限制式畫成圖，並且把目標函數也畫上去（圖中最粗的線）。觀察圖可發現，最大值會在 (0,3) 時發生，也就是 **bond 購買 0 單位、stock 購買 3 million**。這個結果與前述直接使用 SOLVER 的解一樣。



▲ 圖形解

obj	=	0.36	36			
x	y					
0	3					
12	0					

▲ 使用滾軸來移動目標函數尋找最佳解

2. Regression

Jensen's alpha 的計算方式為 $\alpha = r_i - [r_f + \beta(r_m - r_f)]$ ，其中：

- α ：Jensen's alpha，投資組合超過理論預期收益的超額收益
- r_i ：投資組合的實際報酬
- r_f ：無風險利率
- β ：投資組合的系統性風險係數，顯示相對總體市場的波動性
- r_m ：市場期望報酬率

為了計算 α ，在此我先將方程式改寫為 $r_i - r_f = \alpha + \beta(r_m - r_f)$ 方便閱讀，其中自變項 $x = r_m - r_f$ 、應變項 $y = r_i - r_f$ 。得到方程式的關係後，我們必須先進行下列的矩陣運算求得 β 。

$$\begin{aligned} X\beta &= Y \\ X^T X\beta &= X^T Y \\ \beta &= (X^T X)^{-1} X^T Y \end{aligned}$$

這裡就用股票代碼 1310 的前五項來做示範。

ri-rf(Y)	rm-rf(X)	constant
0.973	-2.5129	1
5.8869	3.0651	1
-3.7519	3.767	1
-8.4152	-4.396	1
-2.978	1.6822	1

▲ Y 與 X 矩陣

實際運算結果會像以下（為求版面簡潔取自小數點後第四位）：

1310			2440		
X'X	1179.8566	61.1159	X'X	1179.8566	61.1159
	61.1159	70.0000		61.1159	70.0000
(X'X) ⁻¹	0.0009	-0.0008	(X'X) ⁻¹	0.0009	-0.0008
	-0.0008	0.0150		-0.0008	0.0150
(X'X) ⁻¹ X'Y	1.1365		(X'X) ⁻¹ X'Y	1.6421	
	-0.1386			0.1779	

3294			4207		
X'X	1179.8566	61.1159	X'X	1179.8566	61.1159
	61.1159	70.0000		61.1159	70.0000
$(X'X)^{-1}$	0.0009	-0.0008	$(X'X)^{-1}$	0.0009	-0.0008
	-0.0008	0.0150		-0.0008	0.0150
$(X'X)^{-1}X'Y$	1.2996		$(X'X)^{-1}X'Y$	0.6059	
	0.0017			0.4677	

▲ 各自的運算結果

統整上述結果為一個表格：

股票代碼	alpha	beta
1310	-0.1386	1.1365
2440	0.1779	1.6421
3294	0.0017	1.2996
4207	0.6059	0.4677

以 alpha 值來看，4207 擁有最高的 alpha 值，而 1310 擁有最低的值，而且還是負的。另外以 beta 值來看，只有 4207 的 beta 值小於 1，意味著股票本身的風險比市場風險還小，其餘三支股票變動幅度都較市場報酬率大。因此以穩健的角度來看，我會推薦 4207 來購買。