(1 декабря 2015 г.)

Теория случайных процессов

Владимир Панов

Высшая Школа Экономики
Департамент статистики и анализа данных
Лаборатория стохастического анализа и его приложений
Москва, 115162, Шаболовка, д. 31, корп. Г, комн. 722
e-mail: vpanov@hse.ru

Аннотация: Данный файл представляет собой рабочий вариант учебника по теории случайных процессов. Учебник написан на основе материалов, использованных автором в 2014-2015 годах при прочтении курса "Теория случайных процессов".

Содержание

1. Определение случайного процесса. Классификация случайных процессов.

Литература по теме: [6], [2]

Определение 1.1. Пусть T - произвольное множество, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство. Тогда отображение

$$X:\ T \times \Omega \to \mathbb{R}$$

называется случайной функцией, если для любого $t \in T$ функция

$$X(t,\omega) =: X_t(\omega) = X_t, \qquad w \in \Omega,$$

является случайной величиной на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Наиболее важные виды случайных функций:

1. случайные процессы (stochastic processes, random processes): $T \subset \mathbb{R}$;
   - случайные процессы с дискретным временем: $T = \mathbb{Z}_+$ (иногда $T = \mathbb{Z}$);
   - случайные процессы с непрерывным временем: $T = [0, +\infty)$ (иногда $T = \mathbb{R}$);
2. случайные поля: $T \subset \mathbb{R}^k, \ k \geq 2$.

Определение 1.2. Траекторией случайного процесса X_t называется отображение $t \to X_t(\omega)$ при фиксированном ω. Конечномерным распределением случайного процесса X_t называется распределение вектора $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ для фиксированного набора моментов времени $t_1, t_2, .., t_n$.

Часть I

Процессы с дискретным временем. Однородные, неоднородные, составные процессы Пуассона

2. Процессы восстановления

Литература по теме: [2], [4], [8]

2.1. Определение. Уравнение восстановления.

Определение 2.1. Процесс восстановления (renewal process) - это случайный процесс $S_n, \ n = 0, 1, 2, ...$, задаваемый следующим образом:

$$\boxed{S_0 = 0, \qquad S_n = S_{n-1} + \xi_n, \quad n = 1, 2, ...,} \tag{1}$$

где $\xi_1, \xi_2, ...$ - последовательность независимых, одинаково распределённых, п.н. положительных случайных величин.

В дальнейшем мы будем обозначать функцию распределения величины ξ_1 через $F(\cdot)$. Согласно данному выше определению, $F(0) = 0$.

По любому процессу восстановления можно определить считающий процесс N_t:

$$\boxed{N_t := \arg\max_k \left\{S_k \leq t\right\}.}$$

Из определения считающего процесса следует свойство

$$\boxed{\{S_n > t\} = \{N_t < n\}\,.} \tag{2}$$

Примерами процесса восстановления являются моменты возвращения в начальное состояние марковской цепи, а также процесс Пуассона.

Утверждение 2.2. *(i) Ряд*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t),$$

где F^{n*} - свёртка n функций распределений F (см. Приложение A), сходится для любого t и любой функции распределения F положительной случайной величины.

(ii) Математическое ожидание количества моментов восстановления к моменту времени t (т.е. математическое ожидание процесса N_t) задаётся формулой

$$\boxed{\mathbb{E}\,[N_t] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t).}$$

Доказательство. (i*) [1] Операция свёртки (см. приложение A) обладает свойством

$$F^{n*}(t) \leq F^n(t).$$

Значит, положительный ряд $U(t)$ мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} F^n(t)$, который сходится для любого t такого, что $F(t) < 1$. Поэтому по теореме сравнения положительных рядов, ряд $U(t)$ сходится для всех таких t. Пусть теперь существует точка t° такая, что $F(t^\circ) = 1$. Так как по условию $F(0) = 0$, распределение с.в. сосредоточено на некотором конечном интервале $I \subset [0, t]$. Следовательно, сумма r с.в. с таким распределением будет сосредоточена на интервале rI, и найдётся такое $r \in \mathbb{Z}$, что $F^{r*}(t^\circ) < 1$. Обозначим через $\tilde{U}(t^\circ)$ ряд, состоящий из членов ряда $U(t^\circ)$ с номерами $r, 2r, 3r, \ldots$ Этот ряд имеет вид

$$\tilde{U}(t^\circ) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{n*}(t^\circ), \quad \text{где} \quad G(t^\circ) = F^{r*}(t^\circ) < 1.$$

Применяя ещё раз теорему сравнения, мы получаем, что $\tilde{U}(t^\circ)$ сходятся. Но члены исходного ряда $U(t)$ монотонны, т.к.

$$F^{n*}(t) \geq F^{(n+1)*}(t), \qquad \forall t,$$

и поэтому $U(t^\circ) \leq \sum_{n=1}^{r-1} F^{n*}(t^\circ) + r\tilde{U}(t^\circ)$, и ряд $U(t^\circ)$ сходится.

[1] Здесь и далее звёздочкой помечены те пункты доказательства, которые не будут спрашиваться на итоговой контрольной работе.

(ii)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_t] &= \mathbb{E}\left[\sharp\left\{n:\ S_n \le t\right\}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n \le t\right\}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}\left\{S_n \le t\right\}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{S_n \le t\right\}.\end{aligned}$$

Остаётся отметить, что $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, и поэтому функция распределения S_n равна $F^{n*}(\cdot)$.

□

Определение 2.3. Уравнение восстановления - это уравнение

$$\boxed{Z(x) = a(x) + \int_0^x Z(x-y)F(dy),} \tag{3}$$

где $a(x)$ - фиксированная функция, $F(x)$ - фиксированная функция распределения положительной с.в. и $Z(x)$ - неизвестная функция. Сокращённая запись:

$$\boxed{Z = a + F * Z.}$$

Теорема 2.4. *(i) Если функция $a(x)$ ограничена и равна нулю на $\mathbb{R}_-$, то решением уравнения восстановления является функция*

$$Z(x) = \int_0^x (1 + U(x-y)) \cdot a(dy), \tag{4}$$

которая сокращенно обозначается как $Z = (1+U) * a$ (здесь операция свёртки подразумевается как свёртка функций распределений, хотя $a(x)$ может не быть функцией распределения).

(ii) Данное решение является единственным в классе функций, равных 0 на $\mathbb{R}_-$ и ограниченных на конечных интервалах.

Доказательство. (i) Докажем первое утверждение, расписав $(1+U) * a$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}(1+U) * a &= \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}\right) * a \\ &= \left(1 + F * \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}\right)\right) * a \\ &= a + F * ((1+U) * a).\end{aligned}$$

Следовательно, (4) является решением уравнения (3).

(ii*) Пусть Z_1 и Z_2 - 2 решения уравнения восстановления, т.е.

$$Z_1 = a + F * Z_1, \qquad Z_2 = a + F * Z_2.$$

Вычитая из первого уравнения второе и обозначив $V := Z_1 - Z_2$, мы приходим к равенству $V = F * V$. Итеративно применяя это равенство, мы приходим к выводу, что для любого n,

$$V = F^{n*} * V$$

По утверждению 2.2(i), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$ сходится. Следовательно, для любого $t \in \mathbb{R}_+$,

$$F^{n*}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

как n-ый член сходящегося ряда. Отсюда и из ограниченности функции V следует, что $V \equiv 0$.

□

Пример 2.5. Рассмотрим уравнение восстановления с функцией $a(x) = F(x)$. По предыдущей теореме, функция $(1+U)*F = U$ является решением соответствующего уравнения восстановления, т.е.

$$U = F + F * U, \tag{5}$$

которое в данном случае является тривиальным равенством ввиду определения функции U.

Равенство (5) может быть эффективно использовано для нахождения функции $U(t)$ (мат. ожидание моментов восстановления на $(0, t]$) по плотности распределения одного прыжка $p(x)$. Действительно, воспользуемся свойствами преобразования Лапласа (см.приложение B) и возьмём преобразование Лапласа от левой и правых частей (5):

$$\mathscr{L}_U(s) = \frac{\mathscr{L}_p(s)}{s} + \mathscr{L}_U(s)\mathscr{L}_p(s),$$

где $\mathscr{L}_U(s)$ - преобразование Лапласа функции U, $\mathscr{L}_p(s)$ - преобразование Лапласа функции p. Мы приходим к равенству

$$\mathscr{L}_U(s) = \frac{\mathscr{L}_p(s)}{s\,(1 - \mathscr{L}_p(s))}, \tag{6}$$

которое можно использовать следующим образом:

1. по $p(x)$, вычислить $\mathscr{L}_p(s) = \int_0^\infty e^{-sx} p(x) dx$;
2. по $\mathscr{L}_p(s)$, вычислить $\mathscr{L}_U(s)$ по формуле (6);
3. по $\mathscr{L}_U(s)$, восстановить $U(x)$.

2.2. Предельные теоремы для процессов восстановления

Теорема 2.6 (закон больших чисел для процессов восстановления). *Рассмотрим процесс* (1) *с* $\mu := \mathbb{E}[\xi_n] < \infty$. *Тогда*

$$\boxed{\lim_{t\to\infty}\left[\frac{N_t}{t}\right] = \frac{1}{\mu} \qquad \textit{п.н.}}$$

Доказательство. Из определения считающего процесса N_t следует, что

$$S_{N_t} \le t \le S_{N_t+1},$$

и, следовательно,

$$\frac{N_t}{S_{N_t+1}} \le \frac{N_t}{t} \le \frac{N_t}{S_{N_t}}.$$

Можно показать (см. [2], Lemma 5.3.2), что $\lim_{t\to+\infty} N_t = +\infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{S_{N_t}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\xi_1 + \ldots + \xi_n} = \frac{1}{\mu},$$

где последнее равенство следует из усиленного ЗБЧ. Аналогичным образом,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{S_{N_t+1}} = \lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{N_t+1}\cdot\frac{N_t+1}{S_{N_t+1}} = \lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{N_t+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{S_{n+1}} = \frac{1}{\mu}.$$

Применение леммы о двух милиционерах завершает доказательство. □

Теорема 2.7 (центральная предельная теорема для процессов восстановления). *Рассмотрим процесс* (1) *с* $\mu := \mathbb{E}[\xi_n]$, $\sigma^2 := \mathbb{D}[\xi_n] < \infty$. *Тогда*

$$\boxed{\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\frac{\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}}} \xrightarrow[t\to+\infty]{Law} \mathcal{N}(0,1).}$$

Доказательство. Применим ЦПТ к сумме i.i.d. с.в. ξ_i,

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[t\to+\infty]{Law} \mathcal{N}(0,1),$$

что по определению сходимости по распределению означает, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left\{S_n \le \alpha\sigma\sqrt{n} + \mu n\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \le \alpha\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \Phi(\alpha),$$

где $\Phi(\cdot)$ - функция распределения стандартной нормальной с.в. По свойству (2), $\{S_n \le t\} = \{N_t \ge n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, и, следовательно,

$$\mathbb{P}\left\{S_n \le \alpha\sigma\sqrt{n} + \mu n\right\} = \mathbb{P}\left\{N_t \ge n\right\}, \qquad \text{где} \quad t := \alpha\sigma\sqrt{n} + \mu n.$$

Выразим n через t:

$$n = \frac{t}{\mu} - \frac{\alpha\sigma\sqrt{n}}{\mu} \approx \frac{t}{\mu} - \frac{\alpha\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}},$$

где последнее (нестрогое) равенство мотивировано тем, что $n \approx t/\mu$. Таким образом,

$$\mathbb{P}\left\{N_t \geq \frac{t}{\mu} - \frac{\alpha\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}}\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \Phi(\alpha),$$

или

$$\mathbb{P}\left\{Z_t \geq -\alpha\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \Phi(\alpha), \qquad \text{где } Z_t = \frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\frac{\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}}}.$$

Осталось заметить, что

$$\mathbb{P}\left\{Z_t \leq \alpha\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{Z_t \geq \alpha\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1 - \Phi(-\alpha) = \Phi(\alpha).$$

□

2.3. Процесс времени ожидания

Случайный процесс

$$\boxed{Y_t := S_{N_t+1} - t, \qquad t \geq 0}$$

называется процессом времени ожидания (renewal-reward process). Среднее время ожидания за интервал времени $[0, t]$ обычно вычисляется как $t^{-1}\int_0^t Y_u du$.

Теорема 2.8. *Рассмотрим процесс* (1) *с* $\mu := \mathbb{E}[\xi_n]$, $\sigma^2 = \mathbb{D}[\xi_n]$. *Тогда*

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Y_u du = \frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{2\mathbb{E}[\xi]}.}$$

Доказательство. Исходя из геометрических соображений, легко видеть, что

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_t} \xi_k^2 \leq \int_0^t Y_u du \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_t+1} \xi_k^2.$$

Разделим все части последнего неравенства на t,

$$\frac{1}{2t}\sum_{k=1}^{N_t} \xi_k^2 \leq \frac{1}{t}\int_0^t Y_u du \leq \frac{1}{2t}\sum_{k=1}^{N_t+1} \xi_k^2, \tag{7}$$

и найдём пределы левых и правых частей. Начнём с левой части:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k^2 = \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \left[\frac{N_t}{t} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{N_t} \xi_k^2}{N_t} \right] = \frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{2\mathbb{E}[\xi]},$$

т.к. $N_t/t \to 1/\mathbb{E}\xi$ по теореме 2.6, и

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k^2/N(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2/n = \mathbb{E}\xi^2$$

по УЗБЧ. Теперь рассмотрим правую часть:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \sum_{k=1}^{N_t+1} \xi_k^2 = \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \left[\frac{N_t}{t} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{N_t+1} \xi_k^2}{N_t+1} \cdot \frac{N_t+1}{N_t} \right] = \frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{2\mathbb{E}[\xi]},$$

где в последнем равенстве мы использовали те же аргументы, что и при рассмотрении левой части, и, кроме того, воспользовались равенством

$$\lim_{t\to\infty} (N_t+1)/N_t = \lim_{n\to\infty} (n+1)/n = 1.$$

Следовательно, левая и правая части (7) имеют один и тот же предел. $\square$

3. Процесс Пуассона

Литература по теме: [2], [4], [8]

Определение 3.1. Процесс Пуассона (пуассоновский процесс, Poisson process) - это процесс восстановления $S_n = S_{n-1} + \xi_n$, где $\xi_1, ..., \xi_n$ - независимые с.в. с экспоненциальным распределением, имеющим плотность

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\}$$

с параметром $\lambda > 0$.

Считающий процесс, определённый по процессу Пуассона,

$$N_t = \arg\max_n \{S_n \le t\},$$

также называется (считающим) процессом Пуассона.

Важным отличием процесса Пуассона от большинства процессов восстановления является возможность выписать распределение S_n и N_t в явном виде.

Теорема 3.2. *1. Функция распределения процесса $S_n, n = 1, 2, ...$ имеет вид*

$$\boxed{F_{S_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}}$$

Другими словами, плотность распределения процесса S_n имеет вид

$$p_{S_n}(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\}, \qquad n = 1, 2, ...$$

2. *Для любого t, считающий процесс N_t имеет распределение Пуассона с параметром λt, то есть*

$$\boxed{\mathbb{P}\{N_t = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, ...}$$

Доказательство. 1. Докажем формулу для плотности по индукции. Для $n = 1$ формула верна, т.к. $S_1 = \xi_1$ и $p_{\xi_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\}$. Предположим теперь, что формула верна для n и покажем, что она верна и для $n + 1$. Действительно, плотность суммы двух независимых случайных величин S_n и ξ_{n+1} для любого $x > 0$ вычисляется по формуле свёртки

$$\begin{aligned} p_{S_{n+1}}(x) &= \int_0^x p_{S_n}(x-y) p_{\xi_{n+1}}(y) dy \\ &= \int_0^x \lambda \frac{(\lambda(x-y))^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(x-y)} \cdot \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \int_0^x (x-y)^{n-1} dy \\ &= \frac{\lambda^{n+1} x^n}{n!} e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

2. Отметим, что

$$\{N_t = n\} = \{S_n \le t\} \cap \{S_{n+1} > t\} = \{S_n \le t\} \setminus \{S_{n+1} \le t\},$$

где последнее равенство следует из того, что $\{S_{n+1} \le t\} \subset \{S_n \le t\}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N_t = n\} &= \mathbb{P}\{S_n \le t\} - \mathbb{P}\{S_{n+1} \le t\} \\ &= \left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) - \left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

□

Определение 3.3. Говорят, что положительная случайная величина обладает свойством отсутствия памяти (memoryless property, absence of memory), если для любых положительных u, v:

$$\boxed{\mathbb{P}\{X > u + v\} = \mathbb{P}\{X > u\} \cdot \mathbb{P}\{X > v\}.} \tag{8}$$

Отметим, что если v выбрано так, что $\mathbb{P}\{X > v\} > 0$, то данное определение можно переписать в следующем виде

$$\mathbb{P}\left\{X > u + v | X > v\right\} = \mathbb{P}\left\{X > u\right\}.$$

Утверждение 3.4. *С.в. X с плотностью $p(x)$ обладает свойством отсутствия памяти тогда и только тогда, когда $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\}$ для некоторого $\lambda > 0$ (т.е. X имеет экспоненциальное распределение* $\mathrm{Exp}(\lambda)$*).*

Доказательство. (i) $\underline{\mathrm{Exp}(\lambda) \Rightarrow \text{memoryless}.}$ Равенство (8) очевидно, т.к. и левая, и правая части равны $e^{-\lambda(u+v)}$.

(ii*) $\underline{\text{Memoryless} \Rightarrow \mathrm{Exp}(\lambda).}$ Введём обозначение $h(x) = \ln \mathbb{P}\left\{X > x\right\}$. Согласно свойству (8),

$$h(u + v) = h(u) + h(v), \qquad u, v \in \mathbb{R}_+. \tag{9}$$

Покажем, что из последнего равенства и из того, что h-монотонно убывающая функция, следует, что $h(x) = \lambda x$ для некоторого $\lambda < 0$. Действительно, итеративно применяя (9), получаем

$$h(u_1 + ... + u_k) = h(u_1) + ... + h(u_k) \tag{10}$$

для любого $k \in \mathbb{Z}$. Подставляя в последнее равенство $u_1 = ... = u_k = a$ с некоторым $a \in \mathbb{R}$, получаем, что $h(ka) = kh(a)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Подставляя в (10) $u_1 = ... = u_k = a/k$, мы получаем, что $h(a/k) = h(a)/k,\ k \in \mathbb{Z}$. Поэтому $h(x) = xh(1)$ для любого $x \in \mathbb{Q}$.

Покажем теперь, что $h(x) = xh(1)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Возьмём $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Как известно, любое иррациональное число можно сколько угодно точно приблизить рациональным, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists q_1(\varepsilon) \in \mathbb{Q}: \quad |q_1(\varepsilon) - x| < \varepsilon.$$

Так как

$$q_1(\varepsilon) - \varepsilon < x < q_1(\varepsilon) + \varepsilon,$$

и функция $h(x)$ монотонно убывает, мы получаем

$$h(q_1(\varepsilon) + \varepsilon) \le h(x) \le h(q_1(\varepsilon) - \varepsilon).$$

Выберем теперь $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Отметим, что аргументы функции h в левой и правой частях являются рациональными. По уже доказанному,

$$\left(q_1(\varepsilon) + \varepsilon\right) h(1) \le h(x) \le \left(q_1(\varepsilon) - \varepsilon\right) h(1).$$

Применение леммы о двух миллиционерах завершает доказательство:

$$h(x) = \left[\lim_{\varepsilon \to 0} q_1(\varepsilon)\right] h(1) = xh(1).$$

$\square$

Ниже приведены 2 альтернативных определения процесса Пуассона.

Определение 3.5. Целочисленный процесс $N_t,\ t \geq 0$ называется процессом Пуассона с интенсивностью λ, если

0. $N_0 = 0$ п.н.
1. N_t имеет независимые приращения, т.е. для любого набора моментов времени $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$ случайные величины
$$N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, ..., N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$
являются независимыми.
2. N_t имеет стационарные приращения, т.е. для любых моментов времени t_1, t_2 и любого $h > 0$ выполнено
$$N_{t_2+h} - N_{t_1+h} \stackrel{d}{=} N_{t_2} - N_{t_1}.$$
3. Для любых моментов времени t и s,
$$N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}\left(\lambda(t-s)\right).$$

Замечание 3.6. *Отметим, что Определение 3.5 избыточно - если выполнено свойство 3, то автоматически выполнено и свойство 2. Данное определение подчёркивает тот факт, что по приращениям процесса можно сказать, является ли процесс пуассоновским. Определение 3.7, сформулированное ниже, подчёркивает важность того, что процесс Пуассона "прыгает" только на 1.*

Определение 3.7. Неотрицательный целочисленный процесс $N_t,\ t \geq 0$ называется процессом Пуассона, если выполены свойства 0-2 из определения 3.5, и кроме того

4.
$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}\left\{N_{t+h} - N_t \geq 2\right\}}{\mathbb{P}\left\{N_{t+h} - N_t = 1\right\}} = 0, \qquad \forall \quad t \geq 0,$$
$$\mathbb{P}\left\{N_t > 0\right\} \in (0,1), \qquad \forall \quad t > 0.$$

4. Неоднородные процессы Пуассона

Литература по теме: [2], [4].

Одним из недостатков процесса Пуассона, которого мы теперь будем называть однородным процессом Пуассона, является тот факт, что его математическое ожидание линейно по времени, $\mathbb{E}N_t = \lambda t$. В данном разделе мы обсудим неоднородные процессы Пуассона, математическое ожидание которых может быть любой возврастающей положительной функцией от времени.

Определение 4.1. Неоднородный процесс Пуассона с функцией интенсивности $\lambda(t)$ - это целочисленный неубывающий процесс $N_t,\ t \geq 0$ ("неубывающий процесс" означает, что $N_{t+h} - N_t \geq 0,\ \forall t \geq 0,\ \forall h > 0$), такой что

0. $N_0 = 0$ п.н.;
1. N_t имеет независимые приращения;
2. выполнено свойство 4 из определения 3.7 ("прыжки" только на 1)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t \geq 2\}}{\mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t = 1\}} = 0, \qquad \forall \quad t \geq 0,$$
$$\mathbb{P}\{N_t > 0\} \in (0,1), \qquad \forall \quad t > 0.$$

3. вместо стационарности выполнено следующее свойство:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t = 0\}}{h} = \lambda(t).$$

Теорема 4.2. *Пусть N_t - неоднородный процесс Пуассона с функцией интенсивности $\lambda(t)$. Утвеждается, что $N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$, т.е.*

$$\boxed{\mathbb{P}\{N_t = k\} = e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, ...}$$

Доказательство. Основная идея доказательства: показать, что производящая функция (см. Приложение C) процесса N_t имеет вид

$$\varphi_t(u) = e^{\Lambda(t)(u-1)}, \qquad |u| < 1.$$

Отметим, что производная функции $\varphi_t(u)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi_t(u)}{dt} = \Lambda'(t)(u-1)\varphi_t(u). \tag{11}$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что уравнение (11) с начальным условием $\varphi_0(u) = 1$ единственно. Поэтому нам достаточно показать, что производящая функция процесса N_t удовлетворяет уравнению (11), т.к. начальное условие $\varphi_0(u) = 1$ выполнено вследствие $N_0 = 0$.

Рассмотрим производную производящей функции процесса N_t:

$$\varphi_t'(u) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_{t+h}(u) - \varphi_t(u)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{E}[u^{N_{t+h} - N_t} \cdot u^{N_t}] - \mathbb{E}[u^{N_t}]}{h}$$
$$= \mathbb{E}[u^{N_t}] \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{E}[u^{N_{t+h} - N_t}] - 1}{h}, \tag{12}$$

т.к. приращения процесса N_t независимы. Далее,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{E}[u^{N_{t+h}-N_t}]-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty} u^k\cdot\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=k\}-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=0\}-1}{h}\\
&\qquad + \lim_{h\to 0}\frac{u\cdot\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=1\}}{h}\\
&\qquad + \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=2}^{\infty} u^k\cdot\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=k\}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=0\}-1}{h}\\
&\qquad + \lim_{h\to 0}\frac{u\cdot\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=1\}}{h}\cdot(1+Z_h),
\end{aligned}$$

где

$$Z_h := \sum_{k=2}^{\infty} u^{k-1}\frac{\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=k\}}{\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=1\}}.$$

Отметим, что из п.2 определения неоднородного процесса Пуассона следует, что $|Z_h|\to 0$ при $h\to 0$, т.к.

$$\begin{aligned}
|Z_h| &\le \sum_{k=2}^{\infty}|u|^{k-1}\frac{\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=k\}}{\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=1\}}\\
&\le \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=k\}}{\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=1\}} = \frac{\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t\ge 2\}}{\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=1\}}\to 0.
\end{aligned}$$

Наконец, используя п.3 определения, и обозначив

$$\rho(t) := \lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}\{N_{t+h}-N_t=1\}}{h},$$

мы приходим к компактной формуле

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{E}[u^{N_{t+h}-N_t}]-1}{h} = -\lambda(t)+u\cdot\rho(t). \tag{13}$$

Положив в последней формуле $u=1$, мы получаем, что $\rho(t)=\lambda(t)$. Подставив (13) в (12), мы получаем формулу

$$\varphi_t'(u)=\mathbb{E}[u^{N_t}]\cdot\lambda(t)(u-1)=\varphi_t(u)\Lambda'(t)(u-1),$$

которая в точности совпадает с (11). Теорема доказана. □

Следствие 4.3. *Приращения неоднородного процесса Пуассона имеют распределение Пуассона. Более точно, для любых $t\ge 0$, $h>0$:*

$$\boxed{N_{t+h}-N_t\sim \mathrm{Pois}(\Lambda(t+h)-\Lambda(t)).} \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим производящую функцию неоднородного процесса Пуассона в момент времени $t+h$:

$$\mathbb{E}[u^{N_{t+h}}] = \mathbb{E}[u^{N_{t+h}-N_t} \cdot u^{N_t}] = \mathbb{E}[u^{N_{t+h}-N_t}] \cdot \mathbb{E}[u^{N_t}].$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{E}[u^{N_{t+h}-N_t}] = \frac{\mathbb{E}[u^{N_{t+h}}]}{\mathbb{E}[u^{N_t}]} = \frac{e^{\Lambda(t+h)(u-1)}}{e^{\Lambda(t)(u-1)}} = e^{(\Lambda(t+h)-\Lambda(t))\cdot(u-1)}.$$

Так как по производящей функции однозначно восстанавливается распределение случайной величины, мы получаем (14). □

Следствие 4.4. *Если функция интенсивности неоднородного процесса N_t равна константе, то N_t на самом деле является однородным процессом Пуассона.*

Доказательство. Сравнивая определение неоднородного процесса Пуассона с определением 3.7, мы приходим к выводу, что для доказательства этого факта достаточно показать стационарность приращений. Но согласно следствию 4.3, для любых положительных t_1, t_2, h, приращение $N_{t_2+h} - N_{t_1+h}$ имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda(t_2+h)-\Lambda(t_1+h) = \lambda(t_2-t_1)$, которое совпадает с распределением $N_{t_2} - N_{t_1}$. □

5. Составные процессы Пуассона

Литература по теме: [4].

Определение 5.1. Составным процессом Пуассона (compound Poisson process - CPP) называется случайный процесс вида

$$\boxed{X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,}$$

где

1. $Y_1, Y_2, \ldots$ - независимые и одинаково распределённые с.в.;
2. N_t - однородный процесс Пуассона с параметром λ;
3. $Y_1, Y_2, \ldots$ и N_t независимы.

Теорема 5.2. *Составной процесс Пуассона имеет стационарные и независимые приращения, и кроме того,*

$$\boxed{\phi_{X_t - X_s}(u) = e^{\lambda(t-s)(\phi_Y(u)-1)},} \tag{15}$$

где $\phi_{X_t-X_s}(u)$ - характеристическая функция приращения $X_t - X_s$, а $\phi_Y(u)$ - характеристическая функция с.в. $Y_1, Y_2, \ldots$ (см приложение D).

Доказательство. Распишем характеристическую функция приращения $X_t - X_s$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}(X_t - X_s)u}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}u(X_t - X_s)} | N_t - N_s = k\right] \mathbb{P}\left\{N_t - N_s = k\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}u(Y_1 + \ldots + Y_k)} | N_t - N_s = k\right] \mathbb{P}\left\{N_t - N_s = k\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}u(Y_1 + \ldots + Y_k)}\right] \mathbb{P}\left\{N_t - N_s = k\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\phi_Y(u)\right)^k \mathbb{P}\left\{N_t - N_s = k\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\phi_Y(u)\right)^k e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda(t-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\phi_Y(u)\lambda(t-s))^k}{k!} = e^{\lambda(t-s)(\phi_Y(u)-1)},
\end{aligned}$$

где первое равенство следует из свойств условного математического ожидания, второе - из формы составного процесса Пуассона, третье - из независимости $Y_1, Y_2, \ldots$ и N_t, четвёртое - из независимости $Y_1, Y_2, \ldots$ и свойства 2 хар. функций (см приложение D), пятое - из определения 3.5 однородного процесса Пуассона. □

Следствие 5.3. *Для математического ожидания и дисперсии составного процесса Пуассона верны следующие формулы:*

$$\boxed{\mathbb{E}[X_t] = \lambda t \cdot \mathbb{E}[Y], \qquad \mathbb{D}[X_t] = \lambda t \cdot \mathbb{E}[Y^2].}$$

Доказательство. Положим в формуле (15) $s = 0$:

$$\phi_{X_t}(u) = e^{\lambda t(\phi_Y(u)-1)},$$

Согласно свойству 5 хар. функций (см приложение D),

$$\mathbb{E}[X_t] = \frac{1}{\mathrm{i}}\phi'_{X_t}(0) = \lambda t \cdot \frac{1}{\mathrm{i}}\phi'_Y(u) e^{\lambda t(\phi_Y(u)-1)}|_{u=0} = \lambda t \cdot \mathbb{E}[Y],$$

т.к. любая хар. функция в нуле равна 1. Аналогично вычисляется второй момент процесса X_t,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] = -\phi''_{X_t}(0) &= -(\lambda t)^2 \left(\phi'_Y(u)\right)^2 e^{\lambda t(\phi_Y(u)-1)}|_{u=0} \\
&\qquad - \lambda t \phi''_Y(u) e^{\lambda t(\phi_Y(u)-1)}|_{u=0} \\
&= -(\lambda t)^2 \left(\phi'_Y(0)\right)^2 - \lambda t \phi''_Y(0) \\
&= (\lambda t \mathbb{E}[Y])^2 + \lambda t \mathbb{E}[Y^2].
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbb{D}[X_t] = \mathbb{E}[X_t^2] - (\mathbb{E}[X_t])^2 = \lambda t \mathbb{E}[Y^2].$$

$\square$

6. Цепи Маркова

Литература по теме: [2],[7]

6.1. Определение. Примеры.

Определение 6.1. Марковская цепь - это процесс X_n с дискретным временем $n = 0, 1, 2, ..$ и со значениями в счётном множестве S, для которого выполнено марковское свойство:

$$\boxed{\mathbb{P}\{X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\} = \mathbb{P}\{X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}\}}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любых наборов $j, i_{n-1}, ..., i_0 \in S$ таких, что

$$\mathbb{P}\{X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\} \neq 0.$$

Смысл марковского свойства: положение в каждый момент времени зависит от положения в ближайший предыдущий момент времени и не зависит от более далёкого прошлого.

Так как S - счётное множество, мы будем обозначать его элементы натуральными числами (1,2,3...).

Мы будем изучать однородные цепи Маркова - такие, что вероятности

$$\mathbb{P}\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\} = p_{ij}$$

не зависят от n для любых $i, j \in S$.

Пример 6.2. Случайное блуждание:

$$S_0 = 0, \qquad S_n = S_{n-1} + \xi_n, \quad n = 1, 2, ...,$$

где $\xi_1, \xi_2, ...$ - i.i.d. с.в., принимающие значение 1 с вероятностью p и -1 с вероятностью (1-p). Случайное блуждание является цепью Маркова, т.к. значение в данный момент времени определяется значением в предыдущий:

$$\mathbb{P}\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\} = \begin{cases} p, & \text{если } j = i + 1, \\ 1 - p, & \text{если } j = i - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Некоторые процессы можно свести к процессам Маркова. Для примера предположим, что значения некоторого процесса Z_n определяются значениями в m предыдущих моментов времени, т.е.

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{Z_n = j \mid Z_{n-1} = i_{n-1}, ..., Z_0 = i_0\right\} \\ &\qquad\qquad = \mathbb{P}\left\{Z_n = j \mid Z_{n-1} = i_{n-1}, ..., Z_{n-m} = i_{n-m}\right\} \end{aligned} \tag{16}$$

для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{N}$, для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любых наборов $j, i_{n-1}, ..., i_0 \in S$. Сам процесс Z_n не является марковским, но процесс

$$X_n := \left(Z_n, ..., Z_{n-m+1}\right), \quad n = (m-1), m, ...$$

марковским является. Действительно, используя сокращённые записи вида

$$\mathbb{P}\left\{Z_n \mid Z_{n-1}, ..., Z_0\right\} := \mathbb{P}\left\{Z_n = j \mid Z_{n-1} = i_{n-1}, ..., Z_0 = i_0\right\},$$

можно переписать левую часть (16) в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{Z_n \mid Z_{n-1}, ..., Z_0\right\} &= \frac{\mathbb{P}\left\{Z_n, Z_{n-1}, ..., Z_0\right\}}{\mathbb{P}\left\{Z_{n-1}, ..., Z_0\right\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left\{\left(Z_n, ..., Z_{n-m+1}\right), \left(Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}\right), ..., \left(Z_{m-1}, ..., Z_0\right)\right\}}{\mathbb{P}\left\{\left(Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}\right), ..., \left(Z_{m-1}, ..., Z_0\right)\right\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left\{X_n, X_{n-1}, ..., X_{m-1}\right\}}{\mathbb{P}\left\{X_{n-1}, ..., X_{m-1}\right\}} = \mathbb{P}\left\{X_n \mid X_{n-1}, ..., X_{m-1}\right\}. \end{aligned}$$

Аналогично можно переписать правую часть:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{Z_n \mid Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}\right\} &= \frac{\mathbb{P}\left\{Z_n, Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}\right\}}{\mathbb{P}\left\{Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}\right\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left\{\left(Z_n, ..., Z_{n-m+1}\right), \left(Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}\right)\right\}}{\mathbb{P}\left\{\left(Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}\right)\right\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left\{X_n, X_{n-1}\right\}}{\mathbb{P}\left\{X_{n-1}\right\}} = \mathbb{P}\left\{X_n \mid X_{n-1}\right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что для процесса X_n выполнено марковское свойство:

$$\mathbb{P}\left\{X_n \mid X_{n-1}, ..., X_{m-1}\right\} = \mathbb{P}\left\{X_n \mid X_{n-1}\right\}.$$

6.2. Матричное представление цепи Маркова

В предыдущем разделе мы ввели обозначение p_{ij} - вероятность перехода из i в j за 1 шаг. Матрица $P = (p_{ij})$ называется матрицей переходных вероятностей. Обозначим вероятность перехода из состояния i в состояние j за m шагов через $p_{ij}(m)$. Аналогично можно определить матрицу перехода за m шагов $P^{(m)} := (p_{ij}(m))$.

Теорема 6.3. *Для конечной цепи Маркова (т.е. для цепи Маркова с конечным количеством состояний), имеет место равенство*

$$\boxed{P^{(m)} = P^m.}$$

Доказательство. Распишем $p_{ij}(m)$ по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} p_{ij}(m) &= \mathbb{P}\{X_{n+m} = j \mid X_n = i\} \\ &= \sum_{k\in S} \mathbb{P}\{X_{n+m} = j \mid X_n = i, X_{n+m-1} = k\}\,\mathbb{P}\{X_{n+m-1} = k \mid X_n = i\} \\ &= \sum_{k\in S} \mathbb{P}\{X_{n+m} = j \mid X_{n+m-1} = k\}\,\mathbb{P}\{X_{n+m-1} = k \mid X_n = i\} \\ &= \sum_{k\in S} p_{kj} \cdot p_{ik}(m-1). \end{aligned}$$

Следовательно, $P^{(m)} = P^{(m-1)}P$. Итеративно применяя доказанное равенство, мы получаем

$$P^{(m)} = P^{(m-1)}P = P^{(m-2)}P^2 = ... = P^{(1)}P^{m-1} = P^m,$$

где последнее равенство следует из того, что $P^{(1)} = P$. □

Следствие 6.4. *Из последней теоремы непосредственно следует уравнение Колмогорова-Чепмена:*

$$P^{(n+m)} = P^{(n)}P^{(m)}, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Обозначим количество элементов в конечной цепи Маркова через M. Обозначим распределение цепи Маркова на k-ом шаге ($k = 0, 1, 2, ...$) через $\vec{\pi}^{(k)} = \left(\pi_1^{(k)}, ..., \pi_M^{(k)}\right)$, т.е.

$$\mathbb{P}\{X_k = j\} = \pi_j^{(k)}, \qquad j = 1..M, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Отметим, что

$$\mathbb{P}\{X_k = j\} = \sum_{i=1}^{M} \mathbb{P}\{X_k = j \mid X_{k-1} = i\} \cdot \mathbb{P}\{X_{k-1} = i\} = \left(\vec{\pi}^{(k-1)}P\right)_j,$$

то есть

$$\boxed{\vec{\pi}^{(k)} = \vec{\pi}^{(k-1)}P,} \qquad k = 1, 2, ...$$

Итеративно применяя последнее равенство, получаем

$$\vec{\pi}^{(k)} = \vec{\pi}^{(0)}P^k, \qquad k = 1, 2, ...$$

Определение 6.5. Распределение $\vec{\pi}$ на множестве состояний цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей P называется стационарным, если $\vec{\pi}P = \vec{\pi}$.

Отметим, что если в начальный момент времени распределение $\vec{\pi}^{(0)}$ является стационарным, то для момента времени k, $\vec{\pi}^{(k)} = \vec{\pi}^{(0)}$.

6.3. Классификация состояний. Эргодическая теорема

В данном разделе мы используем графическое представление цепи Маркова. Каждый узел графа представляет собой некоторое состояние. Узлы графа i в j соединены ориентированным ребром (из i в j), если вероятность p_{ij} перехода цепи Маркова из состояния i в состояние j больше 0.

Под маршрутом мы пониманием конечную последовательность вершин, в котором каждая вершина (кроме последней) соединена со следующей вершины ориентированным ребром.

Определение 6.6. Состояние j достижимо из состояния i (обозначение: $i \to j$), если существует маршрут из i в j. Состояния i и j называются сообщающимися (обозначение: $i \leftrightarrow j$), если $i \to j$, $j \to i$.

На множестве состояний конечной цепи Маркова можно определить классы эквивалентности $B_1, B_2, ..$ (см приложение E) следующим образом. Каждый класс B_i характеризуется тем, что

$$\forall j \in B_i, \quad \forall k \neq j : \begin{cases} k \in B_i \Leftrightarrow k \leftrightarrow j; \\ k \notin B_i \Leftrightarrow k \not\leftrightarrow j. \end{cases}$$

Определение 6.7. Состояние i называется несущественным (transient), если существует состояние j такое, что $i \to j$, $j \not\to i$ (можно уйти так, что обратно вернуться не получится). Состояние i называется существенным (recurrent), если для любого состояния j такого, что $i \to j$, выполнено также $j \to i$ (в какое бы состояния цепь не перешла, можно с положительной вероятностью вернуться обратно).

Утверждение 6.8. *В классе эквивалентности либо все состояния существенные, либо все несущественные.*

Доказательство. Выберем несущественное состояние i. По определению, существует состояние j такое, что $i \to j$, $j \not\to i$.

Выберем теперь другое состояние k из того же класса, что i и покажем, что k - тоже несущественное состояние. Действительно, j достижимо из k, т.к. $k \to i$, $i \to j \Rightarrow k \to j$. Вместе с этим, k не достижимо из j, т.к. иначе $j \to k$, $k \to i \Rightarrow j \to i$, а мы знаем, что $j \not\to i$. Утверждение доказано. □

Определение 6.9. Период состояния i (обозначение: $d(i)$) - это наименьшее натуральное число, обладающее свойством $p_{ii}(m) = 0$ для всех m не кратных $d(i)$. Эквивалентно можно сказать, что $d(i)$ - наибольший общий делительно всех чисел m таких, что $p_{ii}(m) \neq 0$.

Если $d(i) = 1$, то состояние i называется непериодическим; если $d(i) \geq 2$, то состояние i называется периодическим.

Теорема 6.10. *Все состояния в одном классе эквивалентности имеют одинаковый период.*

Доказательство. Возьмём 2 элемента i, j из одного класса. Обозначим длину маршрута из i в j через n, а длину маршрута из j в i через m. Из i в i можно попасть за $n + m$ шагов, поэтому $n + m$ делится на $d(i)$.

Возьмём теперь произвольное k такое,что $p_{jj}(k) > 0$. Это означает, что существует маршрут из j в j длиной k. Таким образом, можно попасть из i в i за $n + m + k$ шагов ($i \to j \to j \to i$), поэтому $n + m + k$ делится на $d(i)$. Значит, k делится на $d(i)$. Но k - произвольное число такое, что $p_{jj}(k) > 0$, и, следовательно, $d(i)$ является общим делителем чисел k таких, что $p_{jj}(k) > 0$. Так как $d(j)$ - наибольший общий делитель всех таких k, то $d(j)$ делится на $d(i)$. Аналогично доказывается, что $d(i)$ делится на $d(j)$. В итоге получаем, что $d(i) = d(j)$. □

Определение 6.11. Состояние цепи Маркова называется возвратным, если вероятность возвращения в это состояние равна 1. Иначе состояние называется невозвратным.

Утверждение 6.12. *(i) Состояние i является возвратным тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n) = 1,$$

где через $f_{ii}(n)$ обозначена вероятность возвращения в i-ое состояние на n-ом шаге в первый раз.

(ii) Состояние i является возвратным тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty.$$

(iii) В классе эквивалентности либо все элементы возвратны, либо все невозвратны.

(iv) В конечной цепи Маркова состояние является возвратным тогда и только тогда, когда оно является существенным.

Определение 6.13. Эргодический класс состояний - класс, все элементы которого существенны и непериодичны. Цепь, состоящая из одного эргодического класса называется эргодической цепью.

Утверждение 6.14. *Если цепь с M состояниями эргодична, то*

(i) в цепи есть цикл длиной $m < M$ (цикл - маршрут, который начинается и заканчивается в одном и том же узле, при этом ни один другой узел не повторяется дважды);

(ii) $p_{ij}(m) > 0, \quad \forall i, j, \quad \forall m \geq (M-1)^2 + 1$.

Утверждение 6.15. *Если существует $m \in \mathbb{N}$: $\quad p_{ij}(m) > 0 \quad \forall i, j$, то цепь является эргодической.*

Теорема 6.16. *Для эргодической цепи существуют пределы*

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} p_{ij}(m) = \pi_j^*,}$$

причём π_j^* не зависят от i и, кроме того, $\pi_j^* > 0$, $\forall j$, и $\sum_j \pi_j^* = 1$.

Утверждение 6.17. *Распределение $\vec{\pi}^* = (\pi_1^*, ..., \pi_M^*)$ является стационарным.*

Доказательство. Действительно,

$$(\vec{\pi}^* P)_i = \sum_{j=1}^{M} \pi_j^* p_{ji} = \sum_{j=1}^{M} \left(\lim_{m\to\infty} p_{kj}(m)\right) p_{ji},$$

где k - произвольное целое число от 1 до M. Далее,

$$\begin{aligned}(\vec{\pi}^* P)_i = \sum_{j=1}^{M} \left(\lim_{m\to\infty} p_{kj}(m)\right) p_{ji} &= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{M} p_{kj}(m) p_{ji}\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(P^{(m)} P\right)_{ki} = \lim_{m\to\infty} \left(P^{(m+1)}\right)_{ki},\end{aligned}$$

где последнее равенство следует из Теоремы 6.3. Осталось заметить, что

$$(\vec{\pi}^* P)_i = \lim_{m\to\infty} \left(P^{(m+1)}\right)_{ki} = \lim_{m\to\infty} p_{ki}(m+1) = \pi_i^*,$$

то есть $\vec{\pi}^* P = \vec{\pi}^*$.

□

Часть II
Процессы с непрерывным временем

7. Гауссовские процессы. Броуновское движение. Стационарность.

Литература по теме: [6], [2].

7.1. Гауссовский вектор

В данном разделе удобно дополнить определение одномерной нормальной с.в. следующим образом. Мы будем говорить, что одномерная с.в. X имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ^2 (об. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$), если её плотность равна

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \qquad \sigma > 0,$$

или же

$$\mathbb{P}\{X = \mu\} = 1, \qquad \sigma = 0.$$

Определение 7.1. Вектор $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ называется гауссовским, если для любого набора коэффициентов $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ с.в. $Y := \sum_{k=1}^n \lambda_k X_k$ имеет нормальное распределение.

Утверждение 7.2. *Вектор $\vec{X}$ является гауссовским тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих свойств:*

(i) характеристическая функция вектора $\vec{X}$ представима в виде

$$\boxed{\phi_{\vec{X}}(\vec{u}) = \exp\left\{\mathrm{i}\,(\vec{u}, \vec{\mu}) - \frac{1}{2}\vec{u}^T \Sigma \vec{u}\right\},} \tag{17}$$

где $\mu \in \mathbb{R}^n$ и Σ - симметричная неотрицательно определённая матрица размера $n \times n$;

(ii) вектор $\vec{X}$ представим в виде

$$\boxed{\vec{X} = A\vec{X}^\circ + \vec{\mu},} \tag{18}$$

где $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathrm{Matr}(n, n)$ и $\vec{X}^\circ \in \mathbb{R}^n$ - стандартный нормальный вектор, т.е. все компоненты этого вектора независимы в совокупности и распределены по закону $\mathcal{N}(0, 1)$.

Замечание 7.3. *Из доказательства данного утверждения следует, что матрица $\Sigma = (\Sigma_{jk})_{j,k=1}^n$ является ковариационной матрицей вектора $\vec{X}$, то есть $\Sigma_{jk} = \mathrm{cov}(X_j, X_k)$. Матрицу A можно выбрать такой, что $AA = \Sigma$, и поэтому в дальнейшем будет использовано обозначение $A = \Sigma^{1/2}$.*

Доказательство. Опр. 7.1 $\Rightarrow$ (i). По определению хар. функции

$$\phi_{\vec{X}}(\vec{u}) = \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}(u_1 X_1 + ... + u_n X_n)}\right], \qquad \vec{u} \in \mathbb{R},$$

где выражение в правой части можно трактовать как значение хар. функции одномерной нормальной случайной величины $Y = u_1 X_1 + ... + u_n X_n$ в точке 1. Таким образом,

$$\phi_{\vec{X}}(\vec{u}) = e^{\mathrm{i}\mu_y - \sigma_y^2/2},$$

где

$$\begin{aligned}
\mu_y &= \mathbb{E}Y = \sum_{k=1}^n u_k \cdot \mathbb{E}X_k = (\vec{u}, \vec{\mu}), \qquad \vec{\mu} := (\mathbb{E}X_1, ..., \mathbb{E}X_n), \\
\sigma_y^2 &= \mathbb{D}Y = \mathbb{D}\left[\sum_{k=1}^n u_k X_k\right] = \sum_{k,s} u_k u_s \,\mathrm{cov}(X_k, X_s) = \vec{u}^T \Sigma \vec{u},
\end{aligned}$$

при этом матрица ковариаций $(\Sigma)_{k,s} := \mathrm{cov}(X_k, X_s)$ является симметричной (т.к. $\mathrm{cov}(X_k, X_s) = \mathrm{cov}(X_s, X_k)$) и неотрицательно определённой, т.к. для любого вектора $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ имеет место представление

$$\vec{u}^T \Sigma \vec{u} = \mathrm{cov}\left(\sum_{k=1}^n u_k X_k, \sum_{s=1}^n u_s X_s\right) = \mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^n u_k X_k\right) \geq 0.$$

(i) $\Rightarrow$ опр. 7.1. Этот факт следует из взаимнооднaзначного соответствия хар. функций и распределений случайных величин.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Покажем теперь, что хар. функция с.в. $\vec{X} = A\vec{X}^\circ + \vec{\mu}$ имеет вид (17). Действительно, по уже доказанному, хар. функция вектора $\vec{X}^\circ$ имеет вид

$$\phi_{\vec{X}^\circ}(\vec{u}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{u}^T\vec{u}\right\},$$

а по свойству (53),

$$\phi_{\vec{X}}(\vec{u}) = e^{\mathrm{i}(\vec{\mu},\vec{u})}\phi_{\vec{X}^\circ}(A^\top \vec{u}) = \exp\left\{\mathrm{i}\,(\vec{u},\vec{\mu}) - \frac{1}{2}\vec{u}^T\Sigma\vec{u}\right\},$$

где $\Sigma = A^T A$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Так как матрица Σ является симметричной неотрицательно определённой, то найдётся ортогональная матрица U (т.е. такая матрица U, что $U^{-1} = U^\top$), что $\Sigma = U^\top D U$, где $D = \mathrm{diag}(d_1, .., d_n)$ - диагональная матрица. Определим матрицу $\Sigma^{1/2}$ следующим образом:

$$\Sigma^{1/2} := U^\top \,\mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, .., \sqrt{d_n})U.$$

Введённое обозначение (корень из матрицы) обусловлено тем фактом, что $\Sigma^{1/2}\cdot\Sigma^{1/2} = \Sigma$. По уже доказанному, хар. функция вектора $\Sigma^{1/2}\vec{X}^\circ + \vec{\mu}$ имеет вид (17), и значит, всилу взаимнооднозначности, вектор $\vec{X}$ представим в виде (18).

□

Утверждение 7.4. *Если матрица ковариаций вектора $\vec{X}$ невырождена (т.е. $\det(\Sigma) \neq 0$), то распределение вектора $\vec{X}$ имеет плотность, равную*

$$p_{\vec{X}}(\vec{u}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{\mu})^\top\Sigma^{-1}(\vec{u}-\vec{\mu})}.$$

В данном случае используется обозначение $\mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$ по аналогии с одномерным нормальным распределением.

Утверждение 7.5. *(i) Если 2 некоррелированные случайные величины ξ, η имеют нормальное распределение, и, **кроме того, вектор** (ξ, η) **является гауссовским,** то ξ и η независимы.*

(ii) Если 2 независимые случайные величины ξ, η имеют стандартное нормальное распределение, то вектор (ξ, η) является гауссовским.

(iii) Существуют 2 зависимые некоррелированные случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Доказательство. (i) Отметим, что если $\xi \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\eta \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, причём ξ, η некоррелированы, то матрица ковариаций гауссовского вектора (ξ, η) имеет вид

$$\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2) := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Из доказательства утверждения 7.2 (i) $\Rightarrow$ (ii) следует, что

$$(\xi, \eta)^\top = \Sigma^{1/2}(\xi^\circ, \eta^\circ)^\top + \vec{\mu},$$

где $\Sigma^{1/2} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, а вектор (ξ°, η°) является стандартным гауссовским вектором. Следовательно, случайные величины

$$\xi = \sigma_1 \xi^\circ + \mu_1 \quad \text{и} \quad \eta = \sigma_2 \eta^\circ + \mu_2$$

являются независимыми как функции от независимых с.в. ξ° и η°.

(ii) Действительно, ввиду независимости ξ и η, для любых чисел u_1 и u_2 с.в. $u_1\xi + u_2\eta$ имеет нормальное распределение, и значит, вектор (ξ, η) является гауссовским по определению.

(iii) Рассмотрим с.в. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и с.в. $Y = |X| \cdot Z$, где с.в. Z принимает значения 1 и -1 с вероятностями 1/2. Заметим, что

- $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, т.к. для любого $x > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y < x\} &= \mathbb{P}\{|X| < x\} \mathbb{P}\{Z = 1\} + \mathbb{P}\{|X| > -x\} \mathbb{P}\{Z = -1\} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{P}\{|X| < x\} + 1) = \mathbb{P}\{X < x\}. \end{aligned}$$

  Аналогичные рассуждения верны для любого $x < 0$.

- С.в. X и Y некоррелированы, т.к.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \mathbb{E}[X \cdot |X| \cdot Z] = \mathbb{E}[X \cdot |X|] \cdot \mathbb{E}[Z] = 0 \\ \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] &= 0, \end{aligned}$$

  и, следовательно, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

- Докажем, что с.в. X и Y зависимы методом от противного. Допустим, что они независимы - значит, по пункту (ii), вектор (X, Y) является гауссовским, и, значит, любая комбинация комбинент этого вектора имеет нормальное распределение - в частности, с.в. $\xi = X - Y = X - |X|Z$ имеет нормальное распределение. Отметим, что

$$\mathbb{P}\{\xi > 0\} \geq \mathbb{P}\{X > 0,\ Z < 0\} = \mathbb{P}\{X > 0\} \cdot \mathbb{P}\{Z < 0\} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}\{\xi = 0\} \geq \mathbb{P}\{X > 0,\ Z > 0\} = \mathbb{P}\{X > 0\} \cdot \mathbb{P}\{Z > 0\} = \frac{1}{4}.$$

Мы пришли к противоречию, т.к. с.в. с нормальным распределением равна 0 либо с вероятностью 0 (если $\sigma > 0$), либо 1 (если $\sigma = 0,\ \mu = 0$).

□

7.2. *Определение гауссовского процесса. Ковариационная функция*

Определение 7.6. Случайный процесс X_t называется гауссовским, если все его конечномерные распределения являются гауссовскими векторами, т.е. для любого набора положительных чисел $t_1, ..., t_n$ вектор $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ является гауссовским.

С любом процессом (не обязательно гауссовским) связаны следующие функции:

- $m(t) := \mathbb{E}X_t$ - математическое ожидание;
- $K(s,t) := \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}X_s)(X_t - \mathbb{E}X_t)\right]$ - ковариационная функция.

Любая ковариационная функция обладает следующими свойствами:

- симметричность: $K(s,t) = K(t,s)$;
- неотрицательная определённость: для любого набора моментов времени $t_1, .., t_n$ и для любых вещественных чисел $u_1, ..., u_n$ выполнено

$$\sum_{j,k=1}^{n} u_j u_k K(t_j, t_k) \geq 0$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{n} u_j u_k K(t_j, t_k) &= \sum_{j,k=1}^{n} u_j u_k \operatorname{cov}(X_{t_j}, X_{t_k}) \\ &= \operatorname{cov}(\sum_j u_j X_{t_j}, \sum_k u_k X_{t_k}) \\ &= \mathbb{D}[\sum_j u_j X_{t_j}] \geq 0. \end{aligned} \tag{19}$$

- $K(t,t) = \mathbb{D}[X_t]$.

Теорема 7.7. *Для любых вещественнозначных функций $m(t)$ и $K(s,t)$, где $K(s,t)$ обладает свойствами симметричности и неотрицательной определённости, существует гауссовский случайный процесс ξ_t, такой что $\mathbb{E}X_t = m(t)$ и $\operatorname{cov}(X_s, X_t) = K(s,t)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\vec{t} = (t_1, .., t_n)$ и определим матрицу $\Sigma_{\vec{t}} \in \operatorname{Matr}(n,n) : (\Sigma_{\vec{t}})_{k,s} = K(t_k, t_s)$. Как уже было показано выше,

- матрица $\Sigma_{\vec{t}}$ является неотрицательно определённой, см. (19),
- существует матрица $A = \Sigma_{\vec{t}}^{1/2}$, т.е. такая матрица, что $A \cdot A = \Sigma_{\vec{t}}$, см. доказательство Утверждения 7.2.

Отметим, что случайный вектор $\vec{X}_{\vec{t}} = \Sigma_{\vec{t}}^{1/2} \vec{X}^{\circ}$, где $\vec{X}^{\circ}$-стандартный гауссовский вектор, имеет математическое ожидание $m(t)$ и ковариационную матрицу $\Sigma_{\vec{t}}$, т.к.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\vec{X}_{\vec{t}} &= \Sigma_{\vec{t}}^{1/2} \cdot \mathbb{E}\vec{X}^{\circ} = 0, \\ \operatorname{cov}(X_{t_k}, X_{t_s}) &= \left(\Sigma_{\vec{t}}^{1/2} \cdot \mathbb{E}\left[\vec{X}^{\circ}(\vec{X}^{\circ})^{\top}\right] \Sigma_{\vec{t}}^{1/2}\right)_{ks} = (\Sigma_{\vec{t}})_{ks}. \end{aligned}$$

Осталось доказать, что найдётся случайный процесс, у которого все конечномерные распределения совпадают с распределением $\vec{X}_{\vec{t}}$. Доказательство этого факта не входит в данный курс. Отметим лишь, что доказательство опирается на теорему Колмогорова о согласованных распределениях, см. приложение G. $\square$

Пример 7.8. Покажем, что существует гауссовский процесс с математическим ожиданием $m(t) = 0$ и ковариационной функцией $K(s,t) = \min(s,t)$. Симметричность функции $K(s,t)$ очевидна. Для того, чтобы показать её неотрицательную определённость, введём функцию $f_s(x) = \mathbb{I}_{[0,s]}(x)$ и заметим, что

$$\min(s,t) = \int_0^{\infty} f_s(x) f_t(x) dx.$$

Следовательно, для любого набора моментов времени $t_1, .., t_n$ и для любых вещественных чисел $u_1, ..., u_n$ выполнено

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{n} u_j u_k K(t_j, t_k) &= \sum_{j,k=1}^{n} u_j u_k \min(t_j, t_k) = \sum_{j,k=1}^{n} u_j u_k \int_0^{\infty} f_{t_j}(x) f_{t_k}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} u_j f_{t_j}(x)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} u_k f_{t_k}(x)\right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} u_j f_{t_j}(x)\right)^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Значит, функция $K(s,t)$ является неотрицательно определённой и условия Теоремы 7.7 выполнены.

8. Винеровский процесс

Литература по теме: [6], [5].

8.1. Одномерный случай

В данном подразделе под мы определим понятие одномерного винеровского процесса. В рамках данного конспекта, термин "винеровский процесс" используется для одномерного процесса.

Определение 8.1. Винеровский процесс (броуновское движение) - это гауссовский процесс W_t с математическим ожиданием $m(t) = 0$ и ковариационной функцией $K(s,t) = \min(s,t)$.

Определение 8.2. Винеровский процесс (броуновское движение) - это случайный процесс W_t, такой что:

1. $W_0 = 0$ п.н.;
2. W_t имеет независимые приращения;
3. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, для любых $t > s \geq 0$.

Теорема 8.3. *Определения 8.1 и 8.2 эквивалентны.*

Доказательство. Опр. 8.1 $\Rightarrow$ Опр. 8.2.

1. Отметим, что $\mathbb{E}W_0 = m(0) = 0$ и $\mathbb{D}W_0 = K(0,0) = 0$. Следовательно, $W_0 = 0$ п.н.
2. Зафиксируем произвольный набор чисел $0 \leq a < b < c < d$ и рассмотрим 2 приращения $W_d - W_c$ и $W_b - W_a$. Заметим, что эти приращения некоррелированы,

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{cov}\left((W_d - W_c)(W_b - W_a)\right) \\
&\quad = \operatorname{cov}(W_d, W_b) - \operatorname{cov}(W_d, W_a) - \operatorname{cov}(W_c, W_b) + \operatorname{cov}(W_c, W_a) \\
&\qquad = \min(d,b) - \min(d,a) - \min(c,b) + \min(c,a) \\
&\qquad\qquad = b - a - b + a = 0.
\end{aligned}
$$

   Кроме того, вектор $(W_d - W_c, W_b - W_a)$ является гауссовским, т.к. любая комбинация компонент этого вектора $u_1(W_d - W_c) + u_2(W_b - W_a)$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ является комбинацией значений гауссовского процесса W в точках a, b, c, d и потому имеет нормальное распределение. Значит, по утверждению 7.5(i), приращения $W_d - W_c$ и $W_b - W_a$ являются независимыми. Аналогично доказывается, что любого набора моментов времени $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, приращения

$$
W_{t_2} - W_{t_1},\ ...,\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}}
$$

   являются независимыми.
3. Из того, что процесс W_t является гауссовским, непосредственно следует, что приращение $W_t - W_s$ имеет нормальное распределение как комбинация значений гауссовского процесса W_t в точках t, s с коэффициентами 1 и -1. Математическое ожидание и дисперсия этого при-

ращения вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_t - W_s] &= \mathbb{E}[W_t] - \mathbb{E}[W_s] = m(t) - m(s) = 0, \\
\mathbb{D}[W_t - W_s] &= \operatorname{cov}(W_t - W_s, W_t - W_s) \\
&= K(t,t) - K(t,s) - K(s,t) + K(s,s) \\
&= t - s - s + s = t - s.
\end{aligned}$$

Опр. 8.2 $\Rightarrow$ Опр. 8.1. Покажем, что процесс W_t является гауссовским. Зафиксируем произвольные моменты времени $t_1, ..., t_n$ и произвольные числа $u_1, ..., u_n$ и рассмотрим линейную комбинацию значений процесса W_t:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k W_{t_k} &= u_n(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) + (u_n - u_{n-1})W_{t_{n-1}} + \sum_{k=3}^{n} u_k W_{t_k} \\
&= ... = \sum_{k=1}^{n} d_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}),
\end{aligned}$$

где $t_0 = 0$, и $d_1, d_2, ...d_n$ - некоторые числа. Таким образом, любая линейная комбинация значений процесса W_t является линейной комбинаций приращений $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, k = 1..n$, которые являются независимыми и нормально распределёнными. Следовательно, любая линейная комбинация значений процесса W_t имеет нормальное распределение, и поэтому процесс W_t является гауссовским.

Из п.1 и 3 определения 8.2 следует, что $W_t \sim \mathcal{N}(0, t),\ \forall t$, и, следовательно, $m(t) = \mathbb{E}W_t = 0$. Кроме того, для любых $t > s$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(W_t, W_s) &= \mathbb{E}\left[(W_t - \mathbb{E}W_t)(W_s - \mathbb{E}W_s)\right] \\
&= \mathbb{E}[W_t W_s] = \mathbb{E}\left[W_s(W_t - W_s)\right] + \mathbb{E}W_s^2 \\
&= \mathbb{E}\left[W_s\right] \cdot \mathbb{E}\left[W_t - W_s\right] + \mathbb{E}W_s^2 = s = \min(t, s).
\end{aligned}$$

□

Отметим некоторые свойства Броуновского движения.

Утверждение 8.4. *(i) Квадратичная вариация Броуновского движения на отрезке $[0, t]$ равна t, то есть*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 = t,$$

где разбиение отрезка $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ измельчается с ростом n так, что $\max(t_i - t_{i-1}) \to 0$, а сходимость понимается в смысле среднего квадратического.

(ii) Броуновское движение - процесс неограниченной вариации, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right| = \infty,$$

где $\max(t_i - t_{i-1}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. (i) Обозначим $\Delta W_i := W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i^2 - t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i^2 - \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\right)^2\right] \\
&= \mathbb{D}\left[\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}\left[\Delta W_i^2\right],
\end{aligned}$$

где последнее равенство следует из независимости $W_i, i = 1..n$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i^2 - t\right)^2\right] &= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}\left[\Delta W_i^4\right] - \left(\mathbb{E}\left[\Delta W_i^2\right]\right)^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(3(\Delta t_i)^2 - (\Delta t_i)^2\right) = 2\sum_{i=1}^{n}(\Delta t_i)^2 \\
&\le 2\max(\Delta t_i)\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i \to 0,
\end{aligned}$$

и утверждение доказано.

(ii) Так как последовательность $\xi_n := \sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2$ сходится в среднем квадратическом к числу t (следовательно, и по вероятности), то по теореме Рисса, найдётся подпоследовательность ξ_{n_k}, сходящаяся к t почти наверное. Кроме того, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta W_i)^2 \le \max_i |\Delta W_i| \cdot \sum_{i=1}^{n_k}|\Delta W_i|.$$

При устремлении диаметра разбиения к нулю, $\max_i |\Delta W_i|$ также стремится к нулю всилу непрерывности Броуновского движения. Осталось заметить, что если бы последовательность $\sum_{i=1}^{n}|\Delta W_i|$ была бы ограниченной, то и подпоследовательность $\sum_{i=1}^{n_k}|\Delta W_i|$ являлась бы ограниченной, и, следовательно, $\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta W_i)^2 \to 0$ при $k \to \infty$. Полученное противоречие показывает, что Броуновское движение имеет неограниченную вариацию.

□

8.2. Многомерный случай

Определение 8.5. d- мерный винеровский процесс (d-vthброуновское движение) - это случайный процесс $\vec{W}_t \in \mathbb{R}^d$, такой что:

1. $\vec{W}_0 = \vec{0}$ п.н.;
2. $\vec{W}_t$ имеет независимые приращения;
3. $\vec{W}_t - \vec{W}_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s)I_d)$, для любых $t > s \ge 0$, где I_d - $d-$мерная единичная матрица.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 8.6. *Случайный процесс* $\vec{W}_t = \left(W_t^1, ..., W_t^d\right) \in \mathbb{R}^d$ *является* d *- мерным винеровским процессом тогда и только тогда, когда процессы* $W_t^k, k = 1..n$ *являются одномерными броуновскими движениями, независимыми в совокупности.*

Доказательство. $\underline{\Rightarrow}$. Согласно утверждению 7.2, хар. функция приращений процесса $\vec{W}_t$ имеет вид

$$\phi_{\vec{W}_t - \vec{W}_s}(\vec{u}) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} u_k \left(W_t^k - W_s^k\right)\right\}\right] = \exp\left\{-\frac{1}{2}(t-s)\sum_{k=1}^{n} u_k^2\right\}. \quad (20)$$

Положив в этом равенстве все u_k, кроме одного, равными нулю, получаем равенство

$$\phi_{W_t^k - W_s^k}(u_k) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i}u_k \left(W_t^k - W_s^k\right)\right\}\right] = \exp\left\{-\frac{1}{2}(t-s)u_k^2\right\},$$

из которого следует, что приращения $W_t^k - W_s^k$ имеют нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $t-s$. Остальные пункты определения 8.2 непосредственно следует из соответствующих пунктов определения многомерного процесса $\vec{W}_t$.

Независимость компонент вектора $\vec{W}_t$ также следует из (20), т.к. это равенство может быть теперь переписано как

$$\phi_{\vec{W}_t - \vec{W}_s}(\vec{u}) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{W_t^k - W_s^k}(u_k).$$

$\underline{\Leftarrow}$. Доказательство обратного утверждения сводится к доказательству второго равенства (20), которое выполнено ввиду независимости и нормальной распределённости компонент вектора $\vec{W}_t$.

□

Часть III
Свойства случайных процессов

9. Стационарность

Литература по теме: [2], [4], [6].

Определение 9.1. Случайный процесс X_t называется стационарным (stationary, стационарным в узком смысле), если все его конечномерные распределения инвариантны относительно сдвигов, т.е. для любых наборов моментов времени $t_1, .., t_n$, любых вещественных $x_1, ..., x_n$ и любого $h > 0$,

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{X_{t_1} \le x_1, ..., X_{t_n} \le x_n\right\} = \mathbb{P}\left\{X_{t_1+h} \le x_1, ..., X_{t_n+h} \le x_n\right\}.}$$

Определение 9.2. Случайный процесс X_t называется стационарным в широком смысле (wide sense stationary, weakly stationary, covariance stationary, second-order stationary), если $m(t)$ является постоянной величиной (не зависящей от t), и кроме того, для любых $h > 0$, $s, t \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\boxed{K(s+h, t+h) = K(s, t).}$$

Другими словами, существует функция $\widetilde{K}(\cdot)$ такая, что $\widetilde{K}(t-s) = K(s,t)$ для любых s, t.

Отметим, что

(i) если процесс стационарен в узком смысле и у него в любой момент времени t конечен второй момент (т.е. существуют мат. ожидание и дисперсия), то он является стационарным и в широком смысле;

(ii) для гауссовских процессов стационарность в узком и в широком смыслах есть одно и то же.

10. Непрерывность траекторий

Литература по теме: [6]

Определение 10.1. Говорят, что процесс X_t стохастически эквивалентен процессу Y_t, (X_t - модификация Y_t), если

$$\mathbb{P}\{X_t = Y_t\} = 1, \qquad \forall t.$$

Следует отметить, что траектории случайных процессов могут существенно отличаться. Например, рассмотрим процесс $\xi_t = 0$ и процесс $\eta_t = \mathbb{I}\{t \neq \tau\}$, где τ - непрерывная случайная величина. Процесс ξ_t и η_t стохастически эквивалентны, но все траектории ξ_t являются непрерывными (тождественно равными 0), а все траектории η_t разрывны.

Теорема 10.2 (теорема Колмогорова о непрерывных траекториях). *Пусть имеется процесс X_t, $t \in [a,b]$, и существуют константы $C, \alpha, \beta > 0$ такие, что для любых $s, t \in [a,b]$ выполнено:*

$$\boxed{\mathbb{E}\,|X_t - X_s|^{\alpha} \le C\,|t-s|^{1+\beta}.} \tag{21}$$

Тогда процесс X_t имеет непрерывную модификацию, т.е. существует процесс Y_t, у которого все траектории непрерывны и который стохастически эквивалентен процессу X_t.

Пример 10.3. Броуновское движение обладает непрерывной модификацией. Действительно, условие (21) выполнено с $\alpha = 4, \beta = 1, C = 3$:

$$\mathbb{E}\left[|W_t - W_s|^4\right] = \mathbb{E}\left[\xi^4\right] \cdot (t-s)^2 = 3(t-s)^2,$$

где ξ - стандартная нормальная случайная величина. Зачастую в определение Броуновского движения (как 8.1, так и 8.2) добавляется условие, что процесс обладает непрерывными траекториями.

11. Эргодичность

Литература по теме: [4]

Понятие эргодичности мотивировано законом больших чисел. Рассмотрим процесс X_t, наблюдаемый в дискретные моменты времени $t = 1, 2, ..., T$ и зададимся вопросом, сходится ли процесс

$$M_T := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t$$

при устремлении горизонта времени T к бесконечности.

Определение 11.1. Процесс X_t с дискретным временем $t = 1, 2, ...$ называется эргодическим, если

$$\boxed{M_T \xrightarrow{\mathbb{P}} c, \qquad \text{при} \quad T \to \infty,}$$

где c - некоторая константа.

Отметим, что в данном случае сходимость по вероятности эквивалентна сходимости по распределению (см. Приложение F).

Пример 11.2. Разберём несколько простых примеров.

1. $X_t = \xi, \; t = 1, 2, ...,$ где ξ - стандартная нормальная величина. Этот процесс является стационарным, $m(t) = 0, \; K(s, t) = \mathbb{E}\xi^2 = 1$, но не является эргодическим, т.к. $M_T = \xi \not\to c$.
2. $X_t = \varepsilon_t + a\cos(\pi t/6), \; t = 1, 2, ...$ где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ - последовательность i.i.d. стандартных нормальных с.в., $\alpha \neq 0$ - некоторая константа. В данной модели t обычно ассоциируется с месяцами, а сама модель используется для описания сезонных колебаний (в этой связи отметим, что случайный процесс как функция от t имеет период 12).
   Отметим, что

   $$X_t \sim \mathcal{N}(a\cos(\pi t/6), 1), \quad t = 1, 2, ...,$$

   и эти случайные величины являются независимыми. Отсюда следует, что процесс не является стационарным, т.к. функция среднего $m(t) = \alpha\cos(\pi t/6)$ не равна константе. Вместе с этим, процесс является эргодическим, т.к.

   $$M_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \sim \mathcal{N}\left(\frac{a}{T}\sum_{t=1}^{T}\cos(\pi t/6), \; \frac{1}{T}\right), \quad T = 1, 2, ...,$$

   и математическое ожидание $|\mathbb{E}[M_T]| \leq 3a/T$, как и дисперсия $\mathbb{D}[M_T] = 1/T$, стремятся к нулю при $T \to \infty$.

В следующей теореме сформулирован критерий, при котором $\mathbb{D}[M_T]$ стремится к нулю при $T \to \infty$. Сразу после теоремы даны пояснения, как этот критерий может быть использован для доказательства эргодичности случайного процесса.

Теорема 11.3. *Пусть X_t - случайный процесс с дискретным временем, причём ковариационная функция $K(s,t)$ является ограниченной, т.е.*

$$\exists \alpha : \qquad |K(s,t)| \le \alpha, \qquad \forall s, t. \tag{22}$$

Обозначим ковариацию между последним наблюдением и средним значением по предыдущим наблюдениям через $C(T)$,

$$C(T) := \operatorname{cov}(X_T, M_T).$$

Тогда

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \mathbb{D}[M_T] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{T\to\infty} C(T) = 0.}$$

Замечание 11.4. *Отметим, что условие (22) эквивалентно условию*

$$\mathbb{D}[X_t] \le \alpha, \qquad \forall t. \tag{23}$$

Действительно, из (22) очевидно следует (23) (подстановка $s = t$). Наоборот, из (23) следует (22) из неравенства Коши-Буняковского,

$$|K(s,t)| \le \sqrt{\mathbb{D}X_s} \cdot \sqrt{\mathbb{D}X_t} \le \alpha \qquad \forall s, t.$$

Следствие 11.5. *(i) Стационарный в широком смысле процесс является эргодическим, если*

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{r=0}^{T-1} \widetilde{K}(r) = 0,} \tag{24}$$

где $\widetilde{K}(r)$ - такая функция, что $K(t,s) = \widetilde{K}(t-s)$ для любых t, s.

(ii) Свойство (24) выполнено, если $\boxed{\widetilde{K}(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty}$.

Доказательство следствия. (i) Отметим, что для любого случайного процесса X_t,

$$\begin{aligned} C(T) &= \operatorname{cov}(X_T, M_T) = \operatorname{cov}\left(X_T, \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \operatorname{cov}(X_T, X_t) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} K(T,t). \end{aligned}$$

Для стационарных процессов последнее выражение может быть переписано следующим образом:

$$C(T) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\widetilde{K}(T-t) = \frac{1}{T}\sum_{r=0}^{T-1}\widetilde{K}(r).$$

По теореме 11.3, из того, что $C(T) \to 0$ следует, что $\mathbb{D}M_T \to 0$ при $T \to \infty$. Отметим также, что сходимость $\mathbb{D}M_T \to 0$ есть в точности сходимость $M_T \to \mathbb{E}[M_T]$ в среднем квадратическом. Так как для стационарных процессов $m(t) = c$ (математическое ожидание есть некоторая константа), то $\mathbb{E}[M_T] = c$, и $M_T \to c$ при $T \to \infty$ в среднем квадратическом. Осталось заметить, что из сходимости в среднем квадратическом следует сходимость по вероятности, и поэтому процесс является эргодическим.

(ii) Напомним теорему Штольца из мат.анализа: если a_n, b_n - две последовательности, причём b_n - положительная неограниченная возрастающая последовательность, и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} =: q.$$

Тогда существует предел $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)$, и он тоже равен q.
Воспользуемся теперь теоремой Штольца с $a_n = \sum_{r=0}^{n-1}\widetilde{K}(r)$ и $b_n = n$.
Все условия теоремы выполнены, и кроме того

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\widetilde{K}(n) = 0,$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\widetilde{K}(r) = 0.$$

□

Пример 11.6. Применим следствие 11.5 к процессу

$$X_t = N_{t+p} - N_t,$$

где N_t - однородный считающий процесс Пуассона с интенсивностью λ, а $p > 0$ - фиксированное число. Данный процесс является стационарным в широком смысле, т.к. $m(t) = \lambda p$ и

$$K(s,t) = \begin{cases} \lambda\,(p - |t-s|) & , \quad |t-s| \le p \\ 0 & , \quad |t-s| > p. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\widetilde{K}(r) = \begin{cases} \lambda\,(p - |r|) & , \quad |r| \le p \\ 0 & , \quad |r| > p. \end{cases}$$

Отметим, что $\widetilde{K}(r) \to 0$ при $r \to \infty$, и поэтому процесс X_t является эргодическим.

Доказательство теоремы 11.3. (i) $[\lim_{T\to\infty} \mathbb{D}M_T = 0] \Longrightarrow [\lim_{T\to\infty} C(T) = 0.]$.

Это утверждение напрямую следует из неравенства Коши-Буняковского,

$$|C(T)|^2 = |\mathrm{cov}(X_T, M_T)|^2 \leq \mathbb{D}X_T \cdot \mathbb{D}M_T \leq \alpha \cdot \mathbb{D}M_T,$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались замечанием 11.4.

(ii) $[\lim_{T\to\infty} C(T) = 0.] \Longrightarrow [\lim_{T\to\infty} \mathbb{D}M_T = 0]$.

Докажем сначала такую формулу:

$$\mathbb{D}\left[M_T\right] = -\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + \frac{2}{T^2}\sum_{t=1}^{T} tC(t). \tag{25}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}\left[M_T\right] &= \mathbb{D}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right] = \frac{1}{T^2}\mathbb{D}\left[\sum_{t=1}^{T} X_t\right] \\
&= \frac{1}{T^2}\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + 2\sum_{t>s}\mathrm{cov}(X_t, X_s)\right) \\
&= \frac{1}{T^2}\left(-\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + 2\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + \sum_{t>s}\mathrm{cov}(X_t, X_s)\right)\right) \\
&= \frac{1}{T^2}\left(-\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + 2\sum_{t\geq s}\mathrm{cov}(X_t, X_s)\right) \\
&= \frac{1}{T^2}\left(-\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + 2\sum_{t=1}^{T} t\,\mathrm{cov}\left(X_t, \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} X_s\right)\right) \\
&= -\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + \frac{2}{T^2}\sum_{t=1}^{T} tC(t),
\end{aligned}$$

и формула (25) доказана. Осталось заметить, что оба слагаемых стремятся к нулю при $T \to \infty$:

- первое слагаемое:

$$\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] \leq \frac{1}{T}\alpha \to 0, \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

  т.к. дисперсия X_t ограничена числом α;
- второе слагаемое:

$$\frac{2}{T^2}\left|\sum_{t=1}^{T} tC(t)\right| \leq \frac{2}{T^2}\sum_{t=1}^{T} t\left|C(t)\right| \leq \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|C(t)\right| \to 0,$$

так как $C(t) \to 0$ и доказательство следствия 24 (ii) может быть применено и к данной ситуации.

□

12. Стохастическое интегрирование

Литература по теме: [4], [3]

12.1. Интегралы вида $\int X_t dt$

В данном разделе мы определим интеграл $\int_0^T X_t dt$, который естественным образом возникает при обобщении понятия среднего значения процесса за интервал $[0, T]$, определённого в предыдущем разделе как $T^{-1}\sum_{t=1}^{T} X_t$, на непрерывный случай:

$$M_T = \frac{1}{T}\int_0^T X_t dt.$$

Отметим также, что этот объект уже возникал в разделе 2.3.

Определение 12.1. Для любого отрезка $[a, b]$, интеграл процесса X_t по этому отрезку определяется следующим образом:

$$\int_a^b X_t dt = \lim_{\substack{\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0 \\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b}} \sum_{k=1}^{n} X_{t_k}\left(t_k - t_{k-1}\right),$$

где предел понимается в среднем квадратическом, т.е.

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_{t_k}\left(t_k - t_{k-1}\right) - \int_a^b X_t dt\right)^2\right] \xrightarrow[\substack{\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0 \\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b}]{} 0.$$

Утверждение 12.2. *Пусть X_t - процесс с непрерывным временем и с конечным вторым моментом, причём функция $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ является непрерывной функцией от t, а $K(t, s) = \operatorname{cov}(X_t, X_s)$ является непрерывной функцией от t, s. Тогда $\int_a^b X_t dt$ существует.*

Доказательство того факта, что функция от двух переменных является непрерывной, бывает затруднительным. Однако, в случае ковариационных функций справедливо следующее утверждение.

Утверждение 12.3. *Ковариационная функция $K(t, s)$ непрерывна для всех t, s тогда и только тогда, когда $\mathbb{D}[X_t] = K(t, t)$ непрерывная для любого t.*

Доказательство. Это утверждение является прямым следствием следующих двух фактов, которые мы докажем ниже. В приведённых ниже утверждениях X_t - случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $K(t, s)$.

(i) если $K(t,s)$ непрерывна в точке (t_0,t_0), то процесс X_t непрерывен в точке t_0 в смысле среднего квадратического, то есть

$$\mathbb{E}\left[(X_t - X_{t_0})^2\right] \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0;$$

(ii) если процесс X_t непрерывен в точках t_0 и s_0 в смысле среднего квадратического, то ковариационная функция $K(t,s)$ непрерывна в точке (t_0,s_0).

Действительно, пункт (i) следует из представления

$$\mathbb{E}\left[(X_t - X_{t_0})^2\right] = K(t,t) - 2K(t,t_0) + K(t_0,t_0) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0.$$

Пункт (ii) является следствием неравенства Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned} K(t,s) - K(t_0,s_0) &= K(t,s) - K(t_0,s) + K(t_0,s) - K(t_0,s_0) \\ &= \mathbb{E}\left[(X_t - X_{t_0})\, X_s\right] + \mathbb{E}\left[X_{t_0}\,(X_s - X_{s_0})\right] \to 0, \\ &\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad t \to t_0, s \to s_0, \end{aligned}$$

так как $|\mathbb{E}\left[(X_t - X_{t_0})\, X_s\right]| \le \sqrt{\mathbb{D}\,(X_t - X_{t_0})}\sqrt{\mathbb{D}\,[X_t]} \to 0.$ □

Свойства стохастического интеграла:

1. знаки математического ожидания и интеграла можно менять местами:

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b X_t dt\right] = \int_a^b \mathbb{E}\,[X_t]\, dt;$$

2. для вычисления второго момента можно использовать следующую формулу:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dt\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dt\right)\left(\int_a^b X_s ds\right)\right] \\ &= \int_a^b \int_a^b \mathbb{E}\,[X_t X_s]\, ds dt; \end{aligned}$$

3. из последних двух пунктов следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\left[\int_a^b X_t dt\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dt\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\int_a^b X_t dt\right]\right)^2 \\ &= \int_a^b \int_a^b K(t,s) ds dt = 2\int_a^b \int_a^t K(t,s) ds dt, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве используется свойство симметричности ковариационной функции;

4. для любых отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ справедливо равенство
$$\operatorname{cov}\left(\int_a^b X_t dt, \int_c^d X_t dt\right) \quad = \quad \int_a^b \int_c^d \operatorname{cov}(X_t, X_s)\, dsdt.$$

Пример 12.4. Для примера вычислим математическое ожидание, дисперсию и ковариацию случайного процесса
$$X_T = \int_0^T W_t dt,$$
называемого интегрированным винеровским процессом (integrated Wiener process). По свойству 1,
$$\mathbb{E}\left[X_T\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[W_t\ \right] dt = 0.$$
Для вычисления дисперсии воспользуемся последним равенством из свойства 3:
$$\mathbb{D}\left[X_T\right] = 2\int_0^T \int_0^t \min(t, s) dsdt = 2\int_0^T \int_0^t s\ dsdt = \int_0^T t^2\ dt = \frac{1}{3}T^3.$$
Наконец, ковариационная функция процесса X_T может быть вычислена при помощи свойства 4 стохастического интеграла. Для $T_1 < T_2$ выполнено:
$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_{T_1}, X_{T_2}) \quad &= \quad \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \operatorname{cov}(W_t, W_s)\, dsdt \\
&= \quad \int_0^{T_1} \left(\int_0^t \operatorname{cov}(W_t, W_s)\, ds + \int_t^{T_2} \operatorname{cov}(W_t, W_s)\, ds\right) dt \\
&= \quad \int_0^{T_1} \left(\int_0^t s\ ds + \int_t^{T_2} t\ ds\right) dt \\
&= \quad \int_0^{T_1} \left(\frac{1}{2}t^2 + t(T_2 - t)\right) dt = -\frac{1}{6}T_1^3 + \frac{1}{2}T_2 T_1^2.
\end{aligned}$$
Отметим, что такое же выражение для ковариационной функции можно получить исходя из несколько других соображений. Действительно, представим X_{T_2} в виде
$$X_{T_2} = X_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} (W_t - W_{T_1})\, dt + (T_2 - T_1)\, W_{T_1}$$
и распишем ковариационную функцию процесса X_T следующим образом:
$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(X_{T_1}, X_{T_2}) = \mathbb{E}\left[X_{T_1} X_{T_2}\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[X_{T_1}^2\right] + \int_0^{T_1} \int_{T_1}^{T_2} \mathbb{E}\left[(W_t - W_{T_1})\, W_s\right] dtds + (T_2 - T_1)\, \mathbb{E}\left[X_{T_1} W_{T_1}\right] \\
&\qquad\qquad = \mathbb{E}\left[X_{T_1}^2\right] + (T_2 - T_1)\, \mathbb{E}\left[X_{T_1} W_{T_1}\right],
\end{aligned}$$

где последнее равенство следует из наблюдения, что приращения $\{W_t - W_{T_1},\ t > T_1\}$ и $\{W_s - W_0, s < T_1\}$ независимы. Осталось заметить, что

$$\mathbb{E}\left[X_{T_1} W_{T_1}\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{T_1} W_t dt \cdot W_{T_1}\right] = \int_0^{T_1} \mathbb{E}\left[W_t \cdot W_{T_1}\right] dt = \frac{1}{2} T_1^2.$$

12.2. Интегралы вида $\int f(t) dW_t$

В данной секции мы определим интегралы вида

$$I(f) := \int_a^b f(t) dW_t,$$

где $f(t)$– детерминированная функция из пространства $L^2([a,b])$. Интегралы такого типа называются винеровскими интегралами (Wiener integrals). Определение состоит из двух этапов.

Этап 1. Для ступенчатой функции $f(t)$ (step function), то есть для функции вида

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbb{I}\left\{t \in [t_{i-1}, t_i)\right\},$$

где $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ и $\alpha_1, ..., \alpha_n$ - фиксированные числа, определим интеграл $I(f)$ следующим образом:

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right). \tag{26}$$

Пример 12.5. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1), \\ 10, & t \in [1,2), \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

Для такой функции интеграл $\int_0^T f(t) dW_t$ равен

$$\int_0^T f(t) dW_t = \begin{cases} W_T, & T \leq 1, \\ W_1 + 10\left(W_T - W_1\right), & T \in [1,2), \\ W_1 + 10\left(W_2 - W_1\right), & T \geq 2. \end{cases}$$

Утверждение 12.6. *Для любой ступенчатой функции f, стохастический интеграл $I(f)$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $\int_a^b f^2(t) dt$.*

Доказательство. Из определения 26 непосредственно следует, что $I(f)$ является суммой независимых нормально распределенных случайных величин. Поэтому $I(f)$ имеет нормальное распределение со средним значением

$$\mathbb{E}[I(f)] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbb{E}\left[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right] = 0$$

и дисперсией

$$\mathbb{D}[I(f)] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \cdot \mathbb{D}\left[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \cdot (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f^2(t)dt.$$

□

<u>Этап 2.</u> Теперь определим интеграл $I(f)$ для любой функции f из пространства $L^2([a,b])$. Выберем последовательность ступенчатых функций $f(t)$ таких, что $f_n \to f$ в пространстве $L^2([a,b])$, то есть

$$\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2\, dt \to 0, \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда

$$I(f) = \int_a^b f(t)dW_t := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dW_t = \lim_{n\to\infty} I(f_n),$$

где предел понимается в смысле среднего квадратического, то есть

$$\mathbb{E}\left[(I(f_n) - I(f))^2\right] \to 0.$$

Следующее утверждение показывает, что данное определение не зависит от выбора последовательности фукнций f_n и поэтому является корректным.

Утверждение 12.7. *Для любых двух последовательностей функций f_n и $\tilde{f}_n$ таких, что $f_n \to f$ и $\tilde{f}_n \to f$ при $n \to \infty$ в пространстве $L^2([a,b])$ выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dW_t = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \tilde{f}_n(t)dW_t,$$

где пределы понимаются в смысле среднего квадратического.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\mathbb{E}\left[\left(I(f_n) - I(\tilde{f}_n)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(I(f_n - \tilde{f}_n)\right)^2\right] = \int_a^b \left(f_n(t) - \tilde{f}_n(t)\right)^2 dt,$$

где последнее равенство следует из утверждения 12.6 и того факта, что разница двух ступенчатых функций сама является ступенчатой функцией.

Осталось показать, что последний интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(f_n(t) - \tilde{f}_n(t)\right)^2 dt &= \int_a^b \left(\left(f_n(t) - f(t)\right) - \left(\tilde{f}_n(t) - f(t)\right)\right)^2 dt \\ &\leq 2\int_a^b \left(f_n(t) - f(t)\right)^2 dt + 2\int_a^b \left(\tilde{f}_n(t) - f(t)\right)^2 dt \to 0,\end{aligned}$$

где мы воспользовались тривиальным неравенством $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$. □

Утверждение 12.8. *Для любой функции f из пространства $L^2([a,b])$, стохастический интеграл $I(f)$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $\int_a^b f^2(t)dt$.*

Доказательство. Для ступенчатых функций f это утверждение уже было доказано, см. утверждение 12.6. В общем случае, достаточно отметить, что предел последовательности нормальных случайных величин с параметрами (μ_n, σ_n^2) является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием $\mu := \lim_{n\to\infty} \mu_n$ и дисперсией $\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2$. □

Докажем так же свойство изометрии стохастического интеграла $I(f)$.

Утверждение 12.9. *Для любых двух функций $f, g \in L^2([a,b])$ выполнено*

$$\mathbb{E}\left[I(f)I(g)\right] = \int_a^b f(t)g(t)dt. \tag{27}$$

Доказательство. Распишем $\mathbb{E}\left[(I(f)+I(g))^2\right]$ двумя способами. С одной стороны,

$$\mathbb{E}\left[(I(f)+I(g))^2\right] = \mathbb{E}\left[(I(f))^2\right] + 2\,\mathbb{E}\left[I(f)I(g)\right] + \mathbb{E}\left[(I(g))^2\right]. \tag{28}$$

С другой стороны, согласно предыдущему утверждению,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(I(f)+I(g))^2\right] &= \int_a^b (f(t)+g(t))^2\, dt \\ &= \int_a^b (f(t))^2\, dt + 2\int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b (g(t))^2\, dt \\ &= \mathbb{E}\left[(I(f))^2\right] + 2\int_a^b f(t)g(t)dt + \mathbb{E}\left[(I(g))^2\right]. \end{aligned}\tag{29}$$

Сравнивая (28) с (29), мы приходим к искомому равенству. □

Из утверждения 12.9 следует, что если функции $f(t)$ и $g(t)$ ортогональны в пространстве $L^2([a,b])$, то соответствующие интегралы $I(f)$ и $I(g)$ будут независимы. Действительно, согласно формуле (27), $I(f)$ и $I(g)$ являются некоррелированными случайными величины. Кроме того. вектор $(I(f), I(g))$ является гауссовским по определению, т.к. для любых констант

λ_1 и λ_2 комбинация компонент этого вектора $\lambda_1 I(f)+\lambda_2 I(g) = I(\lambda_1 f + \lambda_2 g)$ имеет нормальное распределение по утверждению 12.8. Осталось воспользоваться утверждением 7.5 (i).

В заключении этого раздела приведём формулу для вычисления интеграла Винера при выборе базиса пространства $L^2([a,b])$.

Утверждение 12.10. *Пусть в пространстве $L^2([a,b])$ выбран некоторый ортонормированный базис $g_1, g_2, \ldots$. Тогда для любой функции $f \in L^2([a,b])$ справедлива формула*

$$\int_a^b f(t)dW_t = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\langle f, g_n\rangle \int_a^b g_n(t)dW_t\right],$$

где треугольные скобки обозначают скалярное произведение в пространстве $L^2([a,b])$, то есть $\langle f, g_n\rangle = \int_a^b f(t)g_n(t)dt$.

Доказательство. Действительно, разложим функцию $f(t)$ по базису $g_1, g_2, \ldots$. При этом имеет место тождество Парсеваля

$$\int_a^b f^2(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, g_n\rangle^2. \tag{30}$$

Покажем, что

$$G_N := \mathbb{E}\left[\left(I(f) - \sum_{n=1}^{N}\langle f, g_n\rangle I(g_n)\right)^2\right] \to 0, \qquad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Представим G_N в следующем виде

$$G_N = \mathbb{E}\left[(I(f))^2\right] - 2\sum_{n=1}^{N}\langle f, g_n\rangle \mathbb{E}\left[I(f)I(g_n)\right] + \sum_{n=1}^{N}\langle f, g_n\rangle^2 \mathbb{E}\left[(I(g_n))^2\right],$$

где мы использовали свойство независимости $I(g_n)$ и $I(g_m)$ при $n \neq m$. Кроме того, по формуле (27),

$$\mathbb{E}\left[I(f)I(g_n)\right] = \langle f, g_n\rangle \qquad \text{и} \qquad \mathbb{E}\left[(I(g_n))^2\right] = \|g_n\|^2 = 1$$

всилу ортонормальности базиса. Следовательно,

$$G_N = \mathbb{E}\left[(I(f))^2\right] - \sum_{n=1}^{N}\langle f, g_n\rangle^2,$$

причём правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$ всилу тождества Парсеваля (30). Значит, $G_N \to 0$, и утверждение доказано. $\square$

12.3. Интегралы вида $\int X_t dW_t$

В данном разделе, мы дадим нестрогое определение интеграла $I(X_t) = \int X_t dW_t$, где X_t принадлежит некоторому классу интегрируемых случайных процессов. Также, как и в предыдущем разделе, определение состоит из двух этапов.

Этап 1. Для ступенчатого случайного процесса $X(t)$ (step stochastic process), то есть для процессов вида

$$X_t = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \mathbb{I}\left\{t \in [t_{i-1}, t_i)\right\},$$

где $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ и $\xi_1, ..., \xi_n$ - случайные величины, определим интеграл $I(X_t)$ следующим образом:

$$I(X_t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right). \tag{31}$$

Этап 2. В общем случае предположим, что существует последовательность ступенчатых случайных процессов $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, ...$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \mathbb{E}\left[\left(X_t^{(n)} - X_t\right)^2\right] dt = 0.$$

Тогда интеграл $I(X_t)$ определяется как

$$I(X_t) = \int_a^b X_t dW_t := \lim_{n\to\infty} \int_a^b X_t^{(n)} dW_t = \lim_{n\to\infty} I(X_t^{(n)}),$$

где предел понимается в смысле среднего квадратического, то есть

$$\mathbb{E}\left[\left(I(X_t^{(n)}) - I(X_t)\right)^2\right] \to 0.$$

Рассмотрим более подробно частный случай, с которым мы уже сталкивались в разделе 12.1: предположим, что случайный процесс X_t имеет непрерывное математическое ожидание $m(t)$ и непрерывную ковариационную функцию $K(t, s)$. Покажем, что в данном случае в качестве последовательности ступенчатых стохастических процессов можно выбрать

$$\widetilde{X}_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}} \cdot \mathbb{I}\left\{t \in [t_{i-1}, t_i)\right\},$$

где разбиение отрезка $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ измельчается с ростом n так, что $\max(t_i - t_{i-1}) \to 0$.

Утверждение 12.11. *Если случайный процесс X_t имеет непрерывное математическое ожидание $m(t)$ и непрерывную ковариационную функцию $K(t,s)$, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X}_t^{(n)} - X_t\right)^2\right] dt = 0. \tag{32}$$

Доказательство. Отметим сначала, что функция

$$\mathbb{E}[X_t X_s] = K(t,s) + m(t)m(s)$$

также является непрерывной, и, кроме того, процесс X_t является непрерывным в среднем квадратическом, так как

$$\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[X_t^2\right] - 2\mathbb{E}[X_t X_s] + \mathbb{E}\left[X_s^2\right] \to 0, \qquad \text{при} \quad s \to t.$$

Следовательно, для любого $t \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X}_t^{(n)} - X_t\right)^2\right] = 0,$$

и для обоснования (32) достаточно обосновать возможность поменять местами интеграл и предел, то есть достаточно доказать, что

$$\int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X}_t^{(n)} - X_t\right)^2\right]\right] dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \left[\mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X}_t^{(n)} - X_t\right)^2\right]\right] dt.$$

Последнее равенство следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, так как

$$\mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X}_t^{(n)} - X_t\right)^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X}_t^{(n)}\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left(X_t\right)^2\right] \leq 4 \sup_{t\in[a,b]} \mathbb{E}\left[\left(X_t\right)^2\right],$$

где супремум в правой части конечен ввиду непрерывности функции $\mathbb{D}[X_t]$. □

Пример 12.12. Для примера вычислим интеграл $\int_0^t W_s dW_s$. Отметим, что процесс W_t удовлетворяет условиям утверждения 12.11, и поэтому

$$\int_0^t W_s\, dW_s = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right).$$

Отметим, что выражение в правой части может быть представлено в следующем виде

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 + \frac{1}{2}W_t^2.\end{aligned}$$

Осталось отметить, что квадратическая вариация процесса W_t равна t (см. утверждение 8.4), и поэтому

$$\int_0^t W_s dW_s = --\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}W_t^2.$$

Замечание 12.13. ** Для строгого определения интегралов вида $\int_a^b X_t dW_t$, необходимо сначала ввести понятие фильтрации.*

Фильтрация - это семейство σ - алгебр $\mathscr{F}_t$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, такое, что

$$\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}, \qquad \forall s \leq t.$$

Случайный процесс Y_t называется согласованным с фильтрацией $\mathscr{F}_t$, если Y_t измерим относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_t$ для любого $t \geq 0$.

Зафиксируем теперь некоторую фильтрацию $\mathscr{F}_t$ вместе с вероятностным пространством $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Определение интеграла $\int_a^b X_t dW_t$, данное выше, корректно при одновременном выполнении следующих свойств:

1. *процесс W_t является $\mathscr{F}_t$- Броуновским движением, то есть,*
   (i) процесс $\mathscr{F}_t$ согласован с фильтрацией $\mathscr{F}_t$, и кроме того,
   (ii) для любых $s \leq t$, случайная величина $W_t - W_s$ независима от σ-алгебры $\mathscr{F}_s$;
2. *X_t согласован с фильтрацией $\mathscr{F}_t$, и $\int_a^b \mathbb{E}\left[(f(t))^2\right] dt < \infty$.*

12.4. Интегралы вида $\int H_t dX_t$. Формула Ито.

В данном разделе мы рассмотрим интегралы вида $\int_a^b H_t dX_t$, где X_t - процесс Ито.

Определение 12.14. Назовём процессами Ито процессы X_t, задаваемые в виде

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \tag{33}$$

где W_t - Броуновское движение, и b_s, σ_s - случайные процессы. Вместо равенства (33) зачастую пишут

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t,$$

что по определению является просто сокращенной записью равенства (33).

Определение 12.15. Пусть X_t - процесс Ито, и H_t - случайный процесс такой, что $\int_a^b \left(|H_s b_s| + H_s^2 \sigma_s^2\right) ds < \infty$. Тогда стохастическим интегралом от процесса H_t по процессу X_t называется процесс

$$\int_a^b H_s dX_s := \int_a^b H_s b_s ds + \int_a^b H_s \sigma_s dW_s.$$

Замечание 12.16. ** Более строго, в Определение 12.14 необходимо добавить, что*

(i) W_t является $\mathscr{F}_t$ - Броуновским движением (см. Замечание 12.13);
(ii) процессы b_t и σ_t согласованы с фильтрацией $\mathscr{F}_t$;
(iii) случайная величина X_0 измерима относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_0$.

В Определение 12.15 следует добавить, что H_t - согласованный с фильтрацией $\mathscr{F}_t$ процесс.

Теорема 12.17. *Пусть X_t - процесс Ито вида (33). Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - дважды непрерывно-дифференцируемая функция. Тогда $f(t, X_t)$ также процесс Ито, и кроме того,*

$$\boxed{f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f_1'(s,X_s)ds + \int_0^t f_2'(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{22}''(s,X_s)\sigma_s^2 ds,}$$

где через $f_i', f_{ij}'', i = 1,2, j = 1,2$ - обозначены производные по i - ой переменной и вторые производные по $i-$ и $j-$ ой переменной. Данная формула называется формулой Ито и может быть сокращенно записана как

$$\boxed{df = f_1' dt + f_2' dX_t + \frac{1}{2} f_{22}'' \sigma_t^2 dt.} \tag{34}$$

Доказательство. * Ниже приведены некоторые нестрогие рассуждения, являющиеся мотивацией формулы (34). Идея доказательства формулы Ито основана на разложении функции f в ряд Тейлора с точностью до второго члена:

$$\begin{aligned} df &\approx f(t+\Delta t, X_t + \Delta X_t) - f(t, X_t) \\ &\approx f_1' dt + f_2' dX_t + \frac{1}{2}\left(f_{11}''(dt)^2 + 2f_{12}'' dt dX_t + f_{22}''(dX_t)^2\right). \end{aligned} \tag{35}$$

Отметим, что первые 2 члена этого разложения есть и в формуле (34). Далее,

$$\begin{aligned} (dt)^2 &\approx \sum_{i=1}^n (\Delta t_i)^2 \le \max(\Delta t_i) \cdot \sum_{i=1}^n \Delta t_i \to 0; \\ dt dX_t &= dt\,(b_t dt + \sigma_t dW_t) = \sigma_t\; dt\; dW_t \\ &\approx \sigma_t \sum_{i=1}^n \Delta t_i \Delta W_{t_i} \le \sigma_t \cdot \max(\Delta t_i) \cdot \sum_{i=1}^n \Delta W_{t_i} \to 0; \\ (dX_t)^2 &= (b_t dt + \sigma_t dW_t)^2 = \sigma_t^2 dW_t^2 \approx \sigma_t^2 \sum (\Delta W_{t_i})^2 \to \sigma_t^2 t, \end{aligned}$$

где в последней строчке используется тот факт, что квадратическая вариация процесса W_t равна t (см. утверждение 8.4). Подставляя все “полученные” формулы в (35), мы приходим к формуле (34). □

12.5. Вычисление стохастических интегралов при помощи формулы Ито

При помощи формулы Ито можно вычислять интегралы вида $\int_a^b f(t, W_t) dW_t$. Действительно, пусть $f(t, x)$ - непрерывная функция. Обозначим через $F(t, x)$ - первообразную этой функции по второй переменной, и применим к $F(t, x)$ формулу Ито для процесса Ито $X_t = W_t$:

$$F(t, W_t) = F(0,0) + \int_0^t F_1'(s, W_s) ds + \int_0^t F_2'(s, W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t F_{22}''(s, W_s) ds.$$

Так как справедливы равенства

$$F_2'(t, x) = f(t, x), \quad \text{и} \quad F_{22}''(t, x) = f_2'(t, x),$$

мы приходим к следующему представлению стохастического интеграла

$$\boxed{\int_0^t f(s, W_s) dW_s = F(t, W_t) - F(0,0) - \int_0^t \left(F_1'(s, W_s) + \frac{1}{2} f_2'(s, W_s) \right) ds.} \tag{36}$$

Из последней формулы в частности следует, что

$$\begin{aligned} \int_a^b f(s, W_s) dW_s &= \int_0^b f(s, W_s) dW_s - \int_0^a f(s, W_s) dW_s \\ &= F(b, W_b) - F(a, W_a) - \int_a^b \left(F_1'(s, W_s) + \frac{1}{2} f_2'(s, W_s) \right) ds. \end{aligned}$$

Пример 12.18. Вычислим при помощи формулы (36) интеграл $\int_0^t W_s dW_s$, уже рассмотренный нами в примере 12.12. Для этого примера, $f(t, x) = x$ и $F(t, x) = x^2/2$. Поэтому

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \int_0^t \frac{1}{2} ds = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

12.6. Применение формулы Ито к стохастическому моделированию

В данном разделе мы рассмотрим несколько стохастических моделей, широко применяемых при описании динамики цен.

Модель Блэка-Шоулза. В данной модели цена финансового инструмента описается как решение стохастического дифференциального уравнения (СДУ)

$$dX_t = X_t \mu \, dt + X_t \sigma \, dW_t, \tag{37}$$

где $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Напомним, что такое СДУ является просто сокращенной записью

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dW_s.$$

При помощи формулы Ито процесс X_t может быть найден в явном виде. Для этого воспользуемся формулой (34) для функции $f(t,x) = \ln(x)$ и процесса Ито X_t :

$$\begin{aligned} d(\ln X_t) &= \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X_t^2}\right)(X_t\sigma)^2\, dt \\ &= \frac{1}{X_t}\left(X_t \mu\, dt + X_t \sigma\, dW_t\right) - \frac{\sigma^2}{2} dt \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dW_t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\ln(X_t) - \ln(X_0) = \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma\, dW_s = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t,$$

и решением СДУ (37) является процесс

$$X_t = X_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right\}$$

Модель Васичека. В данной модели процесс X_t определяется как решение СДУ

$$dX_t = (a - bX_t)\, dt + c\, dW_t, \tag{38}$$

где $a \in \mathbb{R}, b, c > 0$. Для нахождения решения данного СДУ, воспользуемся формулой Ито (34) для функции $f(t,x) = xe^{bt}$ и процесса Ито X_t :

$$\begin{aligned} d\left(X_t e^{bt}\right) &= bX_t e^{bt} dt + e^{bt} dX_t \\ &= e^{bt}\left(a\, dt + c\, dW_t\right). \end{aligned}$$

Значит, решением СДУ (38) является процесс

$$X_t = e^{-bt} X_0 + \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) + c \int_0^t e^{-bs} dW_s.$$

Часть IV

Введение в теорию процессов Леви

Литература по теме: [1], [5]

13. Определение процесса Леви

Определение 13.1. Процесс X_t называется процессом Леви, если

0. $X_0 = 0$ п.н.
1. X_t имеет независимые приращения, т.е. для любого набора моментов времени $0 \le t_0 < t_1 < ... < t_n$ случайные величины
$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$
являются независимыми.
2. X_t имеет стационарные приращения, т.е. для любых моментов времени t_1, t_2 и любого $t > 0$ выполнено
$$X_{t_2+h} - X_{t_1+h} \stackrel{d}{=} X_{t_2} - X_{t_1}.$$
3. Процесс является стохастически непрерывным, т.е. для любого $x \ge 0$
$$X_{t+h} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t \quad \text{при} \quad h \to 0.$$
4. Процесс является càdlàg (continue à droite, limite à gauche, right-continuous with left limits) процессом, т.е. все траектории процесса являются càdlàg-функциями от t. По определению, функция $f(t)$ называется càdlàg-функцией, если для любого t существуют левые и правые пределы, т.е.
$$\exists\, f(t-) := \lim_{\substack{s \to t \\ s < t}} f(s), \qquad \exists\, f(t+) := \lim_{\substack{s \to t \\ s > t}} f(s),$$
и кроме того $f(t+) = f(t)$.

Замечание 13.2. *Данное определение является избыточным: можно показать, что если выполнены свойства (0) - (3), то существует càdlàg - модификация процесса.*

Пример 13.3. Процессами Леви являются

1. пуассоновский процесс;
2. составной пуассоновский процесс;
3. Броуновское движение.

14. Безгранично делимые распределения

Процессы Леви тесно связаны с безгранично делимыми распределениями, которые мы сейчас определим.

Определение 14.1. Говорят, что с.в. ξ имеет *безгранично делимое распределение (infinitely divisible distribution)*, если для любого натурального $n \ge 2$ существуют с.в. $Y_1, ..., Y_n$ такие, что
$$\xi \stackrel{d}{=} Y_1 + ... + Y_n. \tag{39}$$

Если обозначить распределение ξ через μ, то (39) эквивалентно тому, что найдётся распределение μ_n для которого выполнено $\mu = (\mu_n)^{n*}$. С другой стороны, (39) эквивалентно тому, что найдётся хар.функция $\phi_n(u)$ для которой выполнено $\phi(u) = (\phi_n(u))^n$, где $\phi(\cdot)$ - хар. функция с.в. ξ.

Определение 14.1 часто путают с определением устойчивого распределения, которое мы приводим ниже.

Определение 14.2. Говорят, что с.в. ξ имеет *устойчивое распределение (stable distribution)*, если для любого натурального $n \geq 2$ существуют с.в. $\xi_1, ..., \xi_n$, **имеющие то же распределение, что и** ξ такие, что

$$a_n \xi + b_n \stackrel{d}{=} \xi_1 + ... + \xi_n, \tag{40}$$

где $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ - детерминированные последовательности чисел.

Можно показать, что для любого устойчивого распределения, $a_n = n^{1/\alpha}$ для некоторого $\alpha \in (0, 2]$. В связи с этим, распределение ξ называют также *α-устойчивым (α -stable distribution)*.

Любое устойчивое распределение является безгранично делимым, так как в этом случае (39) выполнено с $Y_k := a_n^{-1} (\xi_k - b_n/n)$. Ниже мы приведём большое количество примеров безгранично делимых распределений. Данные примеры удобно скомбинировать следующим образом:

1. нормальное распределение (пример 14.3) и распределение Коши (пример 14.4) - 2 устойчивых распределения;
2. отрицательное биномиальное (пример 14.5) и геометрическое (пример 14.6) - 2 дискретных распределения;
3. гамма распределение (пример 14.7) и экспоненциальное (пример 14.8) - 2 распределения на $\mathbb{R}_+$;
4. распределение Пуассона (пример 14.9) и составное пуассоновское распределение (пример 14.10) - 2 распределения, связанные с пуассоновскими процессами.

Пример 14.3. *Нормальное распределение* является безгранично делимым, так как для с.в. $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ выполнено

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} Y_k, \qquad \text{где} \quad Y_k - \text{i.i.d.} \sim \mathcal{N}(\mu/n,\ \sigma^2/n).$$

В терминах хар.функций, это означает, что

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(u) &= \exp\left\{ \mathrm{i}\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \right\} \\ &= \left(\exp\left\{ \mathrm{i}\frac{\mu}{n}u - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}x^2 \right\} \right)^n = \left(\phi_{\mathcal{N}(\mu/n,\sigma^2/n)}(u)\right)^n.\end{aligned}$$

Нормальное распределение является также 2- устойчивым, так как (40) выполнено с $a_n = \sqrt{n},\ b_n = (n - \sqrt{n})\,\mu$.

Пример 14.4. *Распределение Коши* имеет плотность

$$p(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left(1 + (x - x_0)^2/\gamma^2\right)},$$

где x_0 является параметром положения (location parameter), а γ - параметром масштаба (scale parameter). Хар. функция распределения Коши имеет вид

$$\phi(u) = \exp\Big\{x_0\mathrm{i}u - \gamma|u|\Big\} = \left(\exp\Big\{\frac{x_0}{n}\mathrm{i}u - \frac{\gamma}{n}|u|\Big\}\right)^n = (\phi_n(u))^n,$$

где $\phi_n(u)$ - хар. функция распределения Коши с параметрами x_0/n и γ/n. Распределение Коши является 1- устойчивым, так как (40) выполнено с $a_n = n$, $b_n = 1$. Действительно, хар. функция левой части (40) равна

$$\phi_{n\xi}(u) = \phi_\xi(nu) = \exp\Big\{x_0\mathrm{i}nu - \gamma n|u|\Big\} = (\phi_\xi(u))^n$$

и совпадает с хар. функцией правой части.

Пример 14.5. *Отрицательное биномиальное распределение* определяется как количество успехов в схеме Бернулли до r- ой неудачи (r в этом определении - фиксированное натуральное число).

Обозначим вероятность успеха через p (вероятность неудачи равна $1-p$). Тогда с.в. X имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами r и p (обозн. $NB(p,r)$), если

$$\mathbb{P}\{X = k\} = C^k_{k+r-1}(1-p)^r p^k, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{41}$$

Хар. функция данного распределения имеет вид

$$\phi_{NB(p,r)}(u) = \left(\frac{1-p}{1-pe^{\mathrm{i}u}}\right)^r \tag{42}$$

Данное определение может быть естественным образом расширено на случай любого $r \in \mathbb{R}_+$. При этом формулы (41) - (42) остаются без изменений, а число сочетаний C_{k+r-1} для $r \in \mathbb{R}_+$ следует понимать как

$$C_{k+r-1} := \frac{(k+r-1)(k+r-2)...r}{k!}.$$

При таком расширении определения отрицательного биномиального распределения становится очевидным, что это распределение является безгранично делимым, так как для любого $n \geq 2$

$$\phi_{NB(p,r)}(u) = \left(\frac{1-p}{1-pe^{\mathrm{i}u}}\right)^r = \left(\left(\frac{1-p}{1-pe^{\mathrm{i}u}}\right)^{r/n}\right)^n = \left(\phi_{NB(p,r/n)}(u)\right)^n.$$

Пример 14.6. *Геометрическое распределение* определяется как распределение количества испытаний до первого успеха в схеме Бернулли.

Обозначим вероятность успеха через p (вероятность неудачи равна $1-p$). Тогда с.в. X имеет геометрическое распределение, если

$$\mathbb{P}\{X = k\} = (1-p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Характеристическая функция данного распределения имеет вид

$$\phi(u) = \frac{p}{1-(1-p)e^{\mathrm{i}u}}.$$

Распределение является безгранично делимым, так как для любого $n \geq 2$,

$$\phi(u) = \frac{p}{1-(1-p)e^{\mathrm{i}u}} = \left(\left(\frac{1-\tilde{p}}{1-\tilde{p}e^{\mathrm{i}u}}\right)^{1/n}\right)^n = \left(\phi_{NB(\tilde{p},1/n)}(u)\right)^n,$$

где $\tilde{p} = 1-p$.

Пример 14.7. *Гамма распределение* $Gamma(\alpha, \beta)$ имеет плотность

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \qquad x > 0,$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ - фиксированные параметры. Важной особенностью данного распределения является тот факт, что асимметрия и эксцесс распределения полностью определяются параметром α (асимметрия равна $2/\sqrt{\alpha}$, эксцесс - $6/\alpha$). Второй параметр является параметром масштаба в том смысле, что если X имеет распределение $Gamma(\alpha, \beta)$, то с.в. X/λ для любого фиксированного $\lambda > 0$ имеет распределение $Gamma(\alpha, \lambda\beta)$, так как

$$p_{X/\lambda}(x) = \lambda p_X(\lambda x) = \lambda \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda x}, \qquad x > 0.$$

Хар. функция этого распределения имеет вид $\phi(u) = (1 - \mathrm{i}u/\beta)^{-\alpha}$, и для любого $n \geq 2$ представима в в виде

$$\phi(u) = \left(\left(1 - \frac{\mathrm{i}u}{\beta}\right)^{-\alpha/n}\right)^n,$$

то есть как n-ая степень хар. функции распределения $Gamma(\alpha/n, \beta)$.

Пример 14.8. *Экспоненциальное распределение* с параметром $\lambda > 0$ имеет плотность $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\}$ и хар. функцию $\phi(u) = \lambda/(\lambda - \mathrm{i}u)$, представимую для любого $n \geq 2$ как

$$\phi(u) = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}u} = \left(\left(1 - \frac{\mathrm{i}u}{\lambda}\right)^{-1/n}\right)^n,$$

то есть как n-ая степень хар. функции распределения $Gamma(1/n, \lambda)$.

Пример 14.9. *Распределение Пуассона* с параметром $\lambda > 0$ имеет хар. функцию

$$\phi(u) = \exp\left\{\lambda\left(e^{\mathrm{i}u} - 1\right)\right\},$$

представимую для любого $n \geq 2$ как произведение n хар.функций распределения Пуассона с параметром λ/n.

Пример 14.10. *Составное пуассоновское распределение* определяется как распределение, хар. функция которого представима в вида

$$\phi(u) = \exp\left\{\lambda\left(\phi_Y(u) - 1\right)\right\},$$

где $\phi_Y(u)$ - хар. функция некоторой сл.в. Y. Согласно теореме 5.2, составной пуассоновский процесс в момент времени $t = 1$ имеет именно такое распределение.

Все распределения такого вида являются безгранично делимыми, так как для любого $n \geq 2$ могут быть представлены как произведение n хар.функций составного распределения Пуассона с параметром λ/n :

$$\phi(u) = \left(\exp\left\{\frac{\lambda}{n}\left(\phi_Y(u) - 1\right)\right\}\right)^n.$$

Наиболее важные свойства безграничных делимых распределений сформулированы в следующем утверждении.

Утверждение 14.11. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) Любое безгранично делимое распределение не имеет нулей, то есть уравнение $\phi(u) = 0$ не имеет решений.

(ii) Любое невырожденное распределение с ограниченным носителем не является безгранично делимым.

Доказательство. Оба пункта утверждения доказаны в книге [5]: пункт (i) совпадает с леммой 7.5, пункт (ii) - с теоремой 24.3. □

Пример 14.12. Из пункта (ii) утверждения 14.11 сразу следует, что биномиальное и равномерное распределения не являются безгранично делимыми. Любопытно, что хар. функция равномерного распределения имеет нули (и это является доказательством, что равномерное распределение не является безгранично делимым), в то время как хар. функция бернулевского распределения нулей не имеет.

Следующая теорема показывает тесную связь между процессами Леви и безгранично делимыми распределениями.

Теорема 14.13. *(i) Любой процесс Леви X_t в любой момент времени t имеет безгранично делимое распределение.*

(ii) Для любого безгранично делимого распределения μ существует процесс Леви, который в момент времени $t = 1$ имеет это распределение.

Доказательство. (i) Действительно, любой процесс X_t для любого $n \in \mathbb{N}$ может быть представлен в виде

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} \left(X_{k\Delta} - X_{(k-1)\Delta} \right), \qquad \Delta = t/n,$$

где слагаемые независимы (ввиду п.1 определения 13.1) и имеют одинаковые распределения (ввиду п.2 того же определения).

(ii) Отметим, что $\phi_\mu(u) \neq 0$ для всех $u \in \mathbb{R}$ (см. утверждение 14.11), и поэтому взятие логарифмической или степенной функции от $\phi_\mu(u)$) определены корректно. Следующая лемма играет ключевую роль в доказательстве.

Лемма 14.14. *$\phi_\mu^t(u)$ является хар.функцией для любого $t \in \mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Действительно, для натуральных t этот факт очевидно следует из того, что $\phi_\mu^t(\cdot)$ является хар. функцией суммы t i.i.d. случайных величин с хар. функцией $\phi_\mu(\cdot)$. Отметим также, что так как μ - безгранично делимое распределение, то $\phi_\mu^t(u)$ является хар. функцией для любого $t = 1/k$. Следовательно, $\phi_\mu^t(u)$ является хар. функцией для любого $t \in \mathbb{Q}$.

Осталось доказать лемму для $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Выберем последовательность $r_n \in \mathbb{Q}$ такую, что $\lim_{n\to\infty} r_n = t$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \phi_\mu^{r_n}(u) = \phi_\mu^t(u),$$

и функция $\phi_\mu^t(u)$ непрерывна в нуле, то $\phi_\mu^t(u)$ является хар. функцией. (см. Утверждение D.3). Можно доказать, что распределение с хар. функцией $\phi_\mu^t(u)$ является безгранично делимым. $\square$

Определим систему конечномерных распределений для любых $t_0 < t_1 < .. < t_n$ и любых $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), k = 0..n$, следующим образом:

$$\mu_{t_0,..,t_n}(B_0 \times ... \times B_n) = \int_{\{y_0 \in B_0\}} \left(\int_{\{y_0+y_1 \in B_1\}} \left(\int_{\{y_0+y_1+y_2 \in B_2\}} (...)\, \mu^{t_2-t_1}(y_2) \right) \mu^{t_1-t_0}(y_1) \right) \mu^{t_0}(y_0).$$

Условие (54) теоремы Колмогорова о согласованных распределениях (теорема G.1) выполнено ввиду равенства $\mu^t * \mu^s = \mu^{t+s}$, выполненного для любых t, s и являющегося очевидным следствием того факта, что хар. функция распределения μ^t равна $\phi_t(u) = e^{t \log \phi_\mu(u)}$. Значит, существует процесс X_t с коночномерными распределениями $\mu_{t_0,..,t_n}$. Покажем, что этот процесс является процессом Леви.

Для любой ограниченной борелевской функции f выполнено

$$\mathbb{E}\left[f\left(X_{t_0}, ..., X_{t_n}\right)\right] = \int ... \int \int f\left(y_0, y_0 + y_1, ..., y_0 + y_1 + ... + y_n\right) \mu^{t_0}(dy_0)\mu^{t_1-t_0}(dy_1)...\mu^{t_n-t_{n-1}}(dy_n) \tag{43}$$

Выберем теперь

$$f\left(x_0,...,x_n\right)=\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}u_j\left(x_j-x_{j-1}\right)\right\}$$

для фиксированных $u_1,...,u_n\in\mathbb{R}^d$ и подставим эту функцию в (43):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&\left[\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}u_j\left(X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\right)\right\}\right]\\&=\int...\int\int\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}u_jy_j\right\}\mu^{t_0}(dy_0)\mu^{t_1-t_0}(dy_1)...\mu^{t_n-t_{n-1}}(dy_n)\\&=\prod_{j=1}^{n}\int e^{\mathrm{i}u_jy_j}\mu^{t_j-t_{j-1}}(dy_j).\end{aligned}\tag{44}$$

Положив все u_j, кроме одного, равными 0, приходим к выводу, что $X_{t_j}-X_{t_{j-1}}$ имеет распределение $\mu^{t_j-t_{j-1}}$ и поэтому приращения процесса X_t является стационарными. Из равенства (44) также следует, что приращения независимы.

Осталось отметить, что по нашему определению меры μ^t, выполнено $\mu^t\to\delta_0$ при $t\to0$, где δ_0 - мера Дирака в точке 0. Поэтому

$$X_{t+h}-X_t\overset{d}{=}X_h\overset{\mathbb{P}}{\to}0,\qquad\text{при}\quad h\to0,$$

и свойство стохастической непрерывности также выполнено. □

15. Характеристическая экспонента

Утверждение 15.1. *Для любого процесса Леви X_t существует функция $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, называемая характеристической экспонентой (characteristic exponent) или кумулянтой, такая, что*

$$\boxed{\phi_t(u)=\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}uX_t}\right]=e^{t\psi(u)}.}\tag{45}$$

Доказательство. (i) Пусть t,s - 2 произвольных момента времени. Рассмотрим характеристическую функцию в момент времени $t+s$:

$$\begin{aligned}\phi_{t+s}(u)=\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}uX_{t+s}}\right]&=\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}u(X_{t+s}-X_t)}\cdot e^{\mathrm{i}uX_t}\right]\\&=\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}u(X_{t+s}-X_t)}\right]\cdot\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}uX_t}\right]\\&=\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}uX_s}\right]\cdot\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}uX_t}\right]=\phi_s(u)\phi_t(u),\end{aligned}$$

т.к. приращения процесса X_t обладают свойствами стационарности и независимости. Следовательно, функция $g(t) := \ln \phi_t(u)$ обладает свойством

$$g(t+s) = g(t) + g(s), \qquad \forall\, t, s \geq 0. \tag{46}$$

Кроме того, функция $g(t)$ является непрерывной. Действительно, по п.3 определения процесса Леви,

$$X_{t+h} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению (см. приложение F), а уже из сходимости по распределению вытекает сходимость характеристических функций, т.е. для любого $u \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{t+h}(u) \to \phi_t(u) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

(ii*) Итак, отображение $t \to g(t)$ обладает свойством (46) и является непрерывным. Отсюда аналогично доказательству утверждения 3.4(ii) можно показать, что $g(t) = at$ для некоторого a, не зависящего от t, но зависящего от u. Другими словами, $g(t) = \psi(u)t$ для некоторой функции $\psi(u)$.

□

Следствие 15.2. *(i) Распределение процесса Леви в любой фиксированный момент времени (например, в момент времени $t = 1$) однозначно определяет распределение во все моменты времени.*

(ii) Для любого процесса Леви имеют место следующие равенства

$$\mathbb{E}[X_t] = t\, \mathbb{E}[X_1];$$

$$\mathbb{D}[X_t] = t\, \mathbb{D}[X_1];$$

$$K(s,t) = \min(t,s)\, \mathbb{D}[X_1].$$

(iii) Невырожденные процессы Леви (т.е. процессы, не равные тождественно нулю) не являются стационарными в широком смысле.

Доказательство. (i) По распределению в фиксированный момент времени t^* однозначно определяется характеристическая функция, т.к. из (45) следует, что

$$\psi(u) = \frac{1}{t^*} \ln\left(\phi_{t^*}(u)\right).$$

Далее, по функции $\psi(u)$ однозначно определяется характеристическая функция (и, значит, и само распределение) в любой момент времени.

(ii) По свойству 5 характеристических функций (см. Приложение D),

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = \frac{1}{\mathrm{i}}\phi_t'(0) = \frac{1}{\mathrm{i}}t\psi'(0)e^{t\psi(0)} = \frac{1}{\mathrm{i}}t\psi'(0),$$

так как любая хар. функция равна 1 в нуле, и значит $\psi(0) = 0$. Из последнего равенства следует, что

$$\mathbb{E}\left[X_1\right] = \frac{1}{\mathrm{i}}\psi'(0).$$

Следовательно, $\mathbb{E}\left[X_t\right] = t\mathbb{E}\left[X_1\right]$. Аналогично доказывается, что

$$\mathbb{E}\left[X_t^2\right] = -t\psi''(0) - t^2\left(\psi'(0)\right)^2,$$

и, следовательно,

$$\mathbb{D}\left[X_t\right] = \mathbb{E}\left[X_t^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[X_t\right]\right)^2 = -t\psi''(0) = t\mathbb{D}\left[X_1\right].$$

Формула для ковариационной функции непосредственно следует из того факта, что для любого процесса с независимыми приращениями, равного нулю в момент времени $t = 0$, выполнено

$$K(s,t) = \mathbb{D}\left[X_{\min(t,s)}\right].$$

Применяя уже доказанную формулу для дисперсии, мы приходим к искомому равенству.

(iii) Последний пункт является непосредственным следствием (ii).

□

Вычислим хар. экспоненту в частных случаях.

(i) $X_t = bt$, где b - некоторая константа. В этом случае $\psi(u) = \mathrm{i}ub$.

(ii) $X_t = cW_t$, где W_t - Броуновское движение. В этом случае, $X_t \sim \mathcal{N}(0, c^2 t)$, и поэтому

$$\phi_t(u) = \exp\left\{-\frac{1}{2}c^2u^2t.\right\}, \qquad \psi(u) = -\frac{1}{2}c^2u^2.$$

(iii) Составной процесс Пуассона (CPP_t), $X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$, где N_t - Пуассоновский процесс с интенсивностью λ, с.в. $Y_1, Y_2, ...$ - i.i.d., независимые от N_t. По формуле (15),

$$\begin{aligned}\phi_t(u) = \exp\left\{\lambda t\left(\phi_Y(u) - 1\right)\right\} &= \exp\left\{\lambda t\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}ux}F(dx) - 1\right)\right\} \\ &= \exp\left\{t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{\mathrm{i}ux} - 1\right)\lambda F(dx)\right\}.\end{aligned}$$

Следовательно, если процесс X_t представим в виде

$$X_t = bt + cW_t + CPP_t,$$

где слагаемые независимы, то

$$\phi_t(u) = \exp\left\{t\left(\mathrm{i}ub - \frac{1}{2}c^2u^2 + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{\mathrm{i}ux} - 1\right)\lambda F(dx)\right)\right\}. \tag{47}$$

16. Мера Леви. Теорема Леви-Хинчина

Для того, что обобщить формулу (47) на случай всех процессов Леви, нам необходимо ввести понятие меры Леви

Определение 16.1. Мерой Леви процесса Леви X_t называется мера, равная для любого подмножества $B \subset \mathbb{R}/0$ математическому ожиданию количества прыжков, совершённых за интервал времени $[0,1]$ и имеющими размеры из множества B,

$$\boxed{\nu(B) = \mathbb{E}\left[\sharp\left\{t \in [0,1] : \Delta X_t \in B\right\}\right],}$$

где $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$- размеры скачков в момент времени t. Кроме того, предполагается, что $\nu(\{0\}) = 0$.

Пример 16.2. Приведём несколько простых примеров.

1. Траектории Броуновского движения непрерывны, поэтому мера Леви тождественно равна нулю.
2. Пуассоновский процесс "прыгает" только на 1 - это следует из того, что процесс Пуассона является процессом восстановления, причём распределение интервалов времени между прыжками имеет экспоненциальное распределение, принимающее нулевое значение с нулевой вероятностью. Значит, $\nu(B) = 0$ для любого множества B не содержащего 1. Если же B содержит 1, то количество прыжков на интервале $[0,1]$ совпадает с N_1. Итак, мера Леви процесса Пуассона равна

$$\nu(B) = \lambda \cdot \mathbb{I}\left\{1 \in B\right\}.$$

Теорема 16.3 (теорема Леви-Хинчина)**.** *Характеристическая функция любого процесса Леви имеет вид*

$$\boxed{\phi_t(u) = \exp\left\{t\left(\mathrm{i}ub - \frac{1}{2}c^2u^2 + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{\mathrm{i}ux} - 1 - \mathrm{i}ux\mathbb{I}\{|x| < 1\}\right)\nu(dx)\right)\right\},} \tag{48}$$

где

- $b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}_+$,
- ν *- мера Леви, причём*

$$\int_{|x|\le 1} x^2\nu(dx) < \infty, \qquad \int_{|x|>1}\nu(dx) < \infty.$$

Тройка (b, c, ν) *называется тройкой Леви.*

Доказательство.* Нужно показать, что любой процесс Леви можно представить в виде

$$X_t = \underbrace{bt + cW_t}_{\text{continuous part}} + \underbrace{J_t}_{\text{jump part}}, \tag{49}$$

где

$$J_t = \sum_{\substack{0 \le s \le t \\ |\Delta X_s| \ge 1}} \Delta X_s + \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\sum_{\substack{0 \le s \le t \\ \varepsilon \le |\Delta X_s| \le 1}} \Delta X_s - \int_{\varepsilon < |x| < 1} x \nu(dx) \cdot t \right], \tag{50}$$

и $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ - размер скачка процесса в момент времени $s \in \mathbb{R}_+$. Представление (49) - (50) называется разложением Леви-Ито.

Оказывается, что все суммы в (50) являются составными процессами Пуассона, но при переходе к пределу при $\varepsilon \to 0$, это свойство уже нарушается. Именно поэтому формула (48) отличается от формулы (47), доказанной ранее для случая составных процессов Пуассона.

Более того, можно показать, что Броуновское движение в (49) и слагаемые в (50) независимы. Поэтому характеристическая функция X_t представима в виде произведения характеристических функций слагаемых. $\square$

17. Классы процессов Леви

Рассмотрим важные примеры процессов Леви.

(i) *Процессы с ограниченной вариацией* - это процессы, для которых

$$\sup_{t_0 < \ldots < t_n} \sum_{k=1}^{n} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}| < \infty.$$

Примером процессов, имеющим неограниченную вариацию, является Броуновское движение, см. Утверждение 8.4. Можно показать, что процесс имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда

$$c = 0, \quad \int_{|x| \le 1} |x| \nu(dx) < \infty.$$

В этом случае, формула (48) может быть переписана в следующем виде:

$$\boxed{\phi_t(u) = \exp\left\{ t \left(\mathrm{i}u\tilde{b} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\mathrm{i}ux} - 1 \right) \nu(dx) \right) \right\},} \tag{51}$$

где $\tilde{b} = b - \int_{|x| \le 1} x \nu(dx)$.

(ii) *Составной процесс Пуассона (CPP).* Можно доказать, что процесс X_t является CPP тогда и только тогда, когда X_t является процессом Леви, и его траектории кусочно-постоянны. С другой стороны, процесс Леви является CPP тогда и только тогда, когда

$$c = 0, \quad \nu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \nu(dx) < \infty.$$

Отметим, что CPP является процессом с ограниченной вариацией, и поэтому его хар. функция удовлетворяет равенству (51).

(iii) *Субординаторы.*

Определение 17.1. Процесс Леви называется субординатором, если выполнено любое из следующих условий:

(a) $X_t \geq 0, \quad \forall\, t \geq 0$ (процесс неотрицательный);

(b) $X_t \geq X_s, \quad \forall\, t \geq s$ (процесс неубывающий).

Известно, что процесс является субординатором тогда и только тогда, когда

$$c = 0, \quad \nu(\mathbb{R}_-) = 0, \quad \int_{0 \leq x < 1} x\, \nu(dx) < \infty.$$

Отметим, что субординаторы также являются процессами с ограниченной вариацией, и поэтому их хар. функция удовлетворяет равенству (51).

(iv) *Устойчивые процессы.*

Определение 17.2. Говорят, что процесс Леви X_t является α - устойчивым (α - stable), если

$$\forall \alpha > 0\ \exists b : \quad \Big\{S_{at}\Big\} \stackrel{d}{=} \Big\{a^{1/\alpha} S_t + bt\Big\},$$

где $\alpha \in (0, 2]$.

Примером устойчивых процессов является Броуновское движение W_t. В этом случае $\alpha = 2$ и $b = 0$, так как процессы W_{at} и $\sqrt{a} W_t$ являются гауссовскими, имеют одинаковое мат. ожидание (равное нулю) и одинаковые ковариационные функции (равные $a \min(t, s)$).
Устойчивые процессы имеют меру Леви с плотностью

$$s(x) = \frac{A}{x^{1+\alpha}} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\} + \frac{B}{|x|^{1+\alpha}} \cdot \mathbb{I}\{x < 0\},$$

где $A, B \geq 0$. Например, для Броуновского движения $A = B = 0$.

18. Некоторые следствия из разложения Леви-Ито

Напомним, что разложением Леви-Ито называется представление процесса X_t в виде (49)-(50).

18.1. Носитель безгранично делимого распределения

Определение 18.1. Носителем меры μ на $\mathbb{R}$ называется множество

$$\mathrm{supp}(\mu) := \{x \in \mathbb{R} :\ \mu(G) > 0\ \ \forall \text{ открытого множества } G, \text{ содержащего } x\}.$$

Носителем случайной величины ξ называется носитель его вероятностной меры, то есть

$$\mathrm{supp}(\xi) := \mathrm{supp}(\mathbb{P}_\xi), \qquad \text{где} \quad \mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}\{X \in B\},\ \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Утверждение 18.2. *Носитель любого (невырожденного) процесса Леви X_t в любой момент времени t является неограниченным множеством.*

Замечание 18.3. *Из Теоремы 14.13 следует, что данное утверждение эквивалентно следующему факту: носитель любого безгранично делимого распределения является неограниченным множеством. Из этого факта, в частности, следует, что распределение Бернулли и равномерное распределение не являются безгранично делимыми.*

Доказательство. Прежде всего, отметим, что если ξ, η - 2 независимые случайные величины, то

$$\operatorname{supp}(\xi + \eta) = \overline{\operatorname{supp}(\xi) + \operatorname{supp}(\eta)}. \tag{52}$$

Строгое доказательство этого факта приведено в [5], лемма 24.1. Поэтому если ξ имеет неограниченный носитель, то $\xi + \eta$ также имеет неограниченный носитель.

Обозначим тройку Леви процесса X_t через (b, c, ν). Рассмотрим несколько случаев.

1. $\underline{c \neq 0}$ Тогда из разложения Леви-Ито следует, что $X_t = \sigma W_t + L_t$, где W_t - Броуновское движение, L_t - некоторый процесс, независимый от W_t. Так как первое слагаемое имеет для любого t нормальное распределение (и, значит, его носитель неограничен), то носитель X_t также неограничен.

2. $\underline{Y_t := \sum_{0 \le s \le t} \Delta X_s \cdot \mathbb{I}\{|\Delta X_s| \ge 1\} \neq 0}$. Как уже отмечалось при доказательстве теоремы 16.3, процесс Y_t является составным процессом Пуассона, независимым от всех остальных слагаемых в разложении Леви-Ито. Поэтому $Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} \chi_k$, где N_t - процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda = \nu(\{|x| > 1\})$, $\chi_1, \chi_2, \ldots$ - i.i.d. с.в., независимые от N_t. Распределение составного процесса Пуассона задаётся формулой

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{Y_t}(B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\chi_1 + \ldots + \chi_{N_t} \in B \mid N_t = n\} \cdot \mathbb{P}\{N_t = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbb{P}_{\chi_1 + \ldots + \chi_n}(B) \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \right], \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Из формулы (52) следует, что если $z \in \operatorname{supp}(\chi_1)$, то

$$nz \in \operatorname{supp}(\chi_1 + \ldots + \chi_n) \subset \operatorname{supp}(Y_t)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому носитель Y_t неограничен, и значит и носитель X_t также неограничен.

3. Отметим, что существуют процессы Леви, для которых $Y_t = 0$ - это те процессы, которые не имеют прыжков размера, большего 1. Однако для всех невырожденных процессов Леви, не являющихся Броуновским движением, найдётся такое $\tau > 0$, что $\tilde{Y}_t := \sum_{0 \le s \le t} \Delta X_s \cdot \mathbb{I}\{|\Delta X_s| \ge \tau\} \neq 0$. Доказательство утверждения в этом случае совпадает с доказательством для случая 2.

□

Часть V
Приложение

Приложение А: Свёртка функций

В теории вероятности понятие свёртки возникает в следующих двух (близких) смыслах.

1. В смысле свёртки функций распределений: если случайные величины X и Y независимы, то функция распределения их суммы вычисляется по формуле
$$F_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} F_X(x-y)F_Y(dy),$$
где $F_X(\cdot)$ - функция распределения X, $F_Y(\cdot)$ - функция распределения Y. Операция с функциями F_1 и F_2 в правой части называется свёрткой и обозначается $F_1 * F_2$.
2. В смысле свёртки плотностей распределений: если случайные величины X и Y независимы, X имеет плотность p_X, Y имеет плотность p_Y, то плотность их суммы вычисляется по формуле
$$p_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} p_X(x-y)p_Y(y)dy.$$
Операция с функциями p_X и p_Y в правой части также называется свёрткой и обозначается $p_X * p_Y$.

Перечислим некоторые свойства свёртки функции распределения:

1. Если $F(0) = 0$, то для любого $n \in \mathbb{N}$,
$$F^{n*}(x) \leq F^n(x),$$
где в левой части стоит свёртка функции распределения $F(x)$ сама с собой n раз (т.е. функция распределения с.в., представляющей собой сумму n i.i.d. с.в. с функцией распределения $F(x)$), а в правой части - функция $F(x)$ в n -ой степени.
2. Если $F(0) = 0$, то для любого $n \in \mathbb{N}$,
$$F^{n*}(x) \geq F^{(n+1)*}(x).$$
3. Свойство коммутативности: для любых функций распределения F_1 и F_2,
$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1.$$
4. Свойство ассоциативности: для любых функций распределения F_1, F_2, F_3,
$$F_1 * (F_2 * F_3) = (F_1 * F_2) * F_3.$$

Приложение B: Преобразование Лапласа

Определение B.1. Преобразование Лапласа неотрицательной функции $f(x)$ называется функция

$$\mathscr{L}_f(s) := \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx.$$

Перечислим наиболее важные свойства преобразования Лапласа

1. Если $f(x)$ является функцией плотности некоторой случайной величины ξ, то $\mathscr{L}_f(s) = \mathbb{E}[e^{-s\xi}]$.
2. Если $F(x)$ - функция распределения некоторой положительной с.в. (т.е. $F(0) = 0$), а $p(x)$ - её плотность, то

$$\mathscr{L}_F(s) = \mathscr{L}_p(s)/s.$$

   Действительно,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_F(s) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-sx}F(x)dx = -\int_{\mathbb{R}_+} F(x)d(e^{-sx}/s) \\ &= -F(x)\frac{e^{-sx}}{s}\bigg|_0^\infty + \int_{\mathbb{R}_+} p(x)\frac{e^{-sx}}{s}dx = \mathscr{L}_p(s)/s. \end{aligned}$$

3. Для любых двух неотрицательных функций f_1 и f_2,

$$\mathscr{L}_{f_1 * f_2}(s) = \mathscr{L}_{f_1}(s) \cdot \mathscr{L}_{f_2}(s),$$

   где свёртка в левой части подразумевается как свёртка плотностей, т.е.

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-y)f_2(y)dy.$$

Приложение C: Производящие функции

Определение C.1. Проводящей функцией целочисленной неотрицательной случайной величины X называется функция

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[u^X\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k \cdot \mathbb{P}\left\{X = k\right\}, \qquad |u| < 1.$$

Для примера вычислим производящую функцию пуассоновской с.в. с параметром λ:

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda u)^k}{k!} = e^{\lambda(u-1)}.$$

Важные свойства производящей функции:

1. для независимых с.в. X и Y,

$$\varphi_{X+Y}(u) = \mathbb{E}\left[u^{X+Y}\right] = \mathbb{E}[u^X] \cdot \mathbb{E}[u^Y] = \varphi_X(u)\varphi_Y(u);$$

2. существует взаимнооднозначное соответствие между производящими функциями и распределениями целочисленных неотрицательных с.в., т.к.

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{1}{k!}\varphi_X^{(k)}(0), \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Приложение D: Характеристические функции

Определение D.1. Характеристической функцией одномерной случайной величины X называется

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}uX}\right], \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Любая характеристическая функция обладает следующими свойствами:

1. $\phi_X(0) = 1, \quad |\phi_X(u)| \leq 1,\ \forall u \in \mathbb{R};$
2. если с.в. X и Y независимы, то $\phi_{X+Y}(u) = \phi_X(u)\phi_Y(u)$;
3. $\phi_{aX+b}(u) = e^{\mathrm{i}bu}\phi_X(au)$, где a, b - константы;
4. любая функция распределения однозначно определяется своей характеристической функцией, и кроме того

$$F(x_1) - F(x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\mathrm{i}ux_2} - e^{-\mathrm{i}ux_1}}{\mathrm{i}u}\phi_X(u)du,$$

где F -функция распределения с.в. X, а x_1, x_2 - точки непрерывности функции $F(x)$;
5. моменты распределения случайной величины связаны с характеристической функцией формулой

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{1}{\mathrm{i}^k}\phi_X^{(k)}(0), \qquad k = 1, 2, ...,$$

где $\phi_X^{(k)}$ - k-ая производная характеристической функции ϕ_X.
6. Любая хар. функция непрерывна и даже равномерно непрерывна на любом компактном подмножестве числовой прямой.

Пример D.2. Характеристическая функция стандартной нормальной случайной величины равна $\phi_X(u) = e^{-u^2/2}$, см [Севастьянов Б.А. *Курс теории вероятностей и математической статистики.* Москва: Наука, 1982, стр. 134-135]. По свойству 3, отсюда следует, что характеристическая функция с.в. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ равна

$$\phi_X(u) = e^{\mathrm{i}u\mu - \sigma^2 u^2/2}.$$

Отметим также следующий теоретический факт.

Утверждение D.3. *Если последовательность хар. функций $\phi_n(\cdot)$ сходится к функции $\phi(\cdot)$, непрерывной в нуле, то функция $\phi(\cdot)$ сама является характеристической. При этом последовательность с.в. X_n, распределения которых имеют хар. функции $\phi_n(\cdot)$ сходится по вероятности к с.в., имеющей распределение с хар.функцией $\phi(\cdot)$.*

Аналогично можно определить характеристическую функцию многомерной случайной величины $\vec{X}$:

$$\phi_{\vec{X}}(\vec{u}) = \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}(\vec{u},\vec{X})}\right], \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Все свойства характеристической функции распространяются на многомерный случай. В частности, свойство 3 можно переписать как

$$\phi_{A\vec{X}+\vec{\mu}}(\vec{u}) = e^{\mathrm{i}(\vec{\mu},\vec{u})}\phi_{\vec{X}}(A^\top \vec{u}), \tag{53}$$

где $A \in \mathrm{Matr}(n \times n)$, $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^n$.

Приложение E: Отношение эквивалентности

Пусть задано некоторое конечное множество A, и на нём определено отношение $\sim$. Это отношение называется отношением эквивалентности, если оно обладает следующими свойствами:

1. рефлексивность: $a \sim a,\ \forall a \in A$;
2. симметричность: $a \sim b,\ \Rightarrow\ b \sim a,\ \forall a, b \in A$;
3. транзитивность: $a \sim b,\ b \sim c\ \Rightarrow\ a \sim c,\ \forall a, b, c \in A$.

Любое отношение эквивалентности задаёт разбиение на классы эквивалентности, т.е. на непересекающиеся подмножества $B_1, B_2, ...$, объединение которых есть всё A. Обратное утверждение также верно - для любого разбиения на классы эксивалентности, можно определить отношение эквивалентности: $a \sim b \Leftrightarrow a, b$ лежат в одном классе.

Приложение F: Виды сходимости случайных величин

Говорят, что последовательность ξ_n случайных величин сходится к с.в. ξ

1. *почти наверное* ($\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi$), если

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\right\} = 1;$$

2. *по вероятности* ($\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right\} \to 0;$$

3. *в среднем квадратическом* ($\xi_n \xrightarrow{\text{ср.кв.}} \xi$), если

$$\mathbb{E}\left[(\xi_n - \xi)^2\right] \to 0;$$

4. *по распределению* ($\xi_n \xrightarrow{d} \xi, \quad \xi_n \xrightarrow{Law} \xi$), если

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{P}\{\xi_n \le x\} \to \mathbb{P}\{\xi \le x\}.$$

Известно следующее:

1. если последовательность ξ_n сходится к с.в. ξ почти наверное, то она сходится и по вероятности к этой же с.в. ξ;
2. если последовательность ξ_n сходится к с.в. ξ в среднем квадратическом, то она сходится и по вероятности к этой же с.в. ξ;
3. если последовательность ξ_n сходится к с.в. ξ по вероятности, то она сходится и по распределению к этой же с.в. ξ;
4. если последовательность ξ_n сходится к некоторой константе c по распределению, то она сходится к этой константе и по вероятности.

Из перечисленных свойств в частности следует, что сходимость по вероятности к константе эквивалентна сходимости по распределению.

Приложение G: Теорема Колмогорова о согласованных распределениях

Теорема G.1 (Kolmogorov's extension theorem)**.** *Пусть для любого натурального n и любых моментов времени $0 \le t_1 < ... < t_n$ задано распределение $\mu_{t_1,...,t_n}$ на $\mathbb{R}^{nd}$ такое, что*

$$\mu_{t_1,...,t_n}(B_1 \times ... \times B_n) = \mu_{t_1,...,t_{k-1},t_{k+1},...,t_n}(B_1 \times ... \times B_{k-1} \times B_{k+1} \times ... \times B_n), \quad (54)$$

для $B_k = \mathbb{R}^d$ и любых $B_1, ..., B_{k-1}, B_{k+1}, ..., B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Тогда существует процесс X_t, конечномерные распределения которого совпадают с семейством мер $\mu_{t_1,...,t_n}$ на $\mathbb{R}^{nd}$, то есть

$$\mathbb{P}\{X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_n} \in B_n\} = \mu_{t_1,...,t_n}(B_1 \times ... \times B_n), \qquad \forall\, B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Список литературы

[1] Cont, R. and Tankov, P. (2004). *Financial modelling with jump process.* Chapman & Hall, CRC Press UK.

[2] Gallager, R. G. (2013). *Stochastic processes: theory for applications.* Cambridge University Press.

[3] Kuo, H. -H. (2006). *Introduction to stochastic integration.* Springer.

[4] Parzen, E. (1999). *Stochastic processes.* SIAM, Philadelphia.

[5] Sato, K. (1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* Cambridge University Press, Cambridge University Press.

[6] Курс лекций по случайным процессам (2005). Лектор - Б.М. Гуревич. http://dmvn.mexmat.net/ptms.php.

[7] Прохоров, А. В. , Ушаков, В. Г. , Ушаков, Н. Г. (1986). *Задачи по теории вероятностей: основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы*. Наука.

[8] Феллер, В. (1984). *Введение в теорию вероятностей и её приложения, том 2.* . Москва: Мир.