Записи по увлекательной математике October 18, 2016

Геометрия и вероятность

Аршак Минасян

Disclaimer. Этот текст представляет собой краткое введение в геометрическую вероятность. Автор допускает наличие ошибок/опечаток в тексте и будет благодарен за их нахождение. Также приветствуются комментарии, вопросы и пожелания. Почта автора arshak.minasyan@skolkovotech.ru.

1 Исходные наблюдения

Итак, начнем с наблюдения очень простого, хотя совсем неиттуитивного геометрического факта:

- Рассмотрим гомотетию $x \to \lambda x$, следовательно объем фигуры D меняется $|D| \to \lambda^n |D|$, поскольку $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\lambda = 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0 \implies (1+\varepsilon)^n$ может быть очень большим, если $n \gg 1$. Наглядным примером является арбуз в $\mathbb{R}^{1000}$. Предположим, что мы живем в 1000-мерном пространстве и купили арбуз с радиусом в один метр. Как все обычные люди (только они живут в $\mathbb{R}^3$) отдираем корку толщины в один сантиметр. Давайте посмотрим что останется

$$\lambda = \frac{1}{1-10^{-2}} \implies \frac{V}{V_-} = \left[1 + \frac{10^{-2}}{1-10^{-2}}\right]^{1000} \approx 2.3 \times 10^4, \tag{1}$$

  где V это объем целого арбуза, а V_- объем арбуза без корки. Следовательно,

$$\frac{V - V_-}{V_-} \approx 2.3 \times 10^4, \tag{2}$$

  что означает, что объем корки больше чем в 20000 раз больше, чем объем оставшегося арбуза. Итак, мы получили, что свойство концентрации $n-$мерного шара (гиперсферы), то есть почти весь объем $n-$мерного шара находится на границе.

- Пусть имеем функцию $F(x) \leq 1$ при $|x| \leq 1$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $n \gg 1$, тогда если фактически измерить значение функции в точках x, таких, что $|x| \leq 1$ (по доказанному выше утверждению) $|x|$ будет примерно равна 1, что означает, что значения функции $F(x)$ также будут близки к 1.

- Обобщая пункт выше можно таким образом:

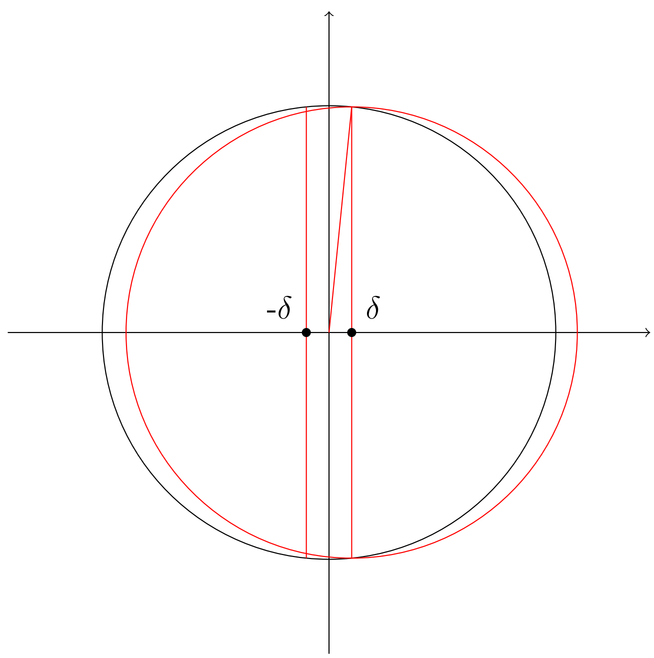
$$f \in C(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}) \text{ и } f(\partial \mathbb{B}^n) = \text{const}, \text{ а противном случае — любая}, \tag{3}$$

тогда с точки зрения наблюдателя функция будет равна константе с большой вероятностью.

2 Более тонкие наблюдения и оценки

- **Отсекаемый объем**

Пусть $\delta \in [0, 1]$



Предположим, что имеем шар в $\mathbb{R}^n$ и отсекаем маленькую полоску вокруг центра ширины дельта. Радиус красной окружности равен $r = (1-\delta^2)^{\frac{1}{2}}$ и для того, чтобы точка $(1-\delta, 0)$ лежала в этой построенной окружности (красной) нужно, чтобы $1 - \delta \leq (1-\delta^2)^{\frac{1}{2}} \implies 2\delta(1-\delta) \leq 0$, что верно, так как $\delta \in [0, 1]$. Итак, что мы делаем, отрезаем часть шара, которая лежит правее горизонтальной линии проходящей через δ и считаем отношение объема этой части к объему исходного шара.

$$R = \frac{\frac{1}{2}(1-\delta^2)^{\frac{n}{2}}}{1^n} = \frac{1}{2} e^{\frac{n}{2}\log(1-\delta^2)} < \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}. \tag{4}$$

При $n \gg 1$ получаем, что $R \to 0$, что означает, что при больших n мы почти ничего не отрезаем, то есть вся концентрация содержится в узкой полосочке центра шара ширины δ. Аналогично можно сделать для левой части.

- **Отсекаемая площадь**

  Площадь гиперсферы в $n-$мерном пространстве равна nC_nR^{n-1} и отношение не меняется. Поэтому аналогичные выводы можно сделать и для площади $n-$мерного шара.

  $$\mathbb{P}_n(x \in \Omega_\delta) > 1 - 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}, \tag{5}$$

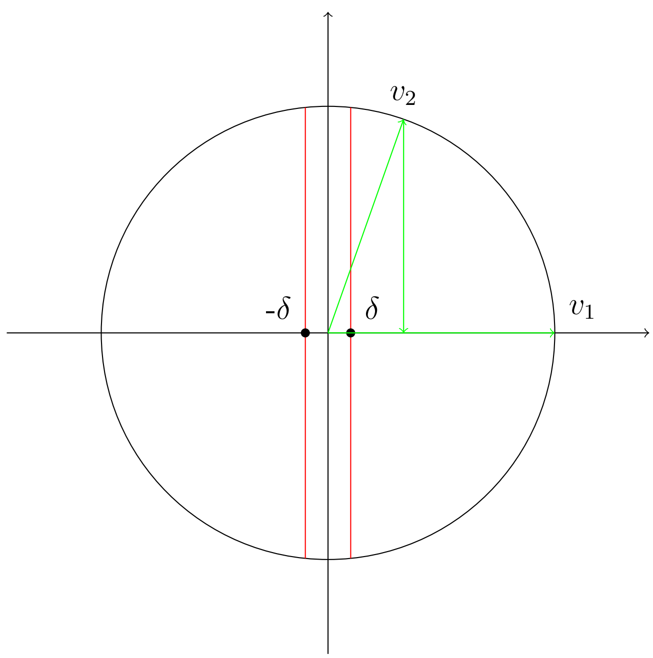
  где Ω_δ это полосочка ширины дельта вокруг центра шара.

- **Ортогональность пары векторов**

  Утверждается, что пара векторов в $n-$мерном единичном шаре "почти" ортогональны, то есть $\langle v_1, v_2 \rangle \approx 0$. Вектора выбираются из многомерного равномерного распределения, то есть каждая компонента вектора $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ это случайная величина распределенная, как $\mathcal{U}[0, 1]$. Распределение на шаре задается как отношение площядей, поэтому для получения результатом мы можем воспolльзоваться результатми полученными в предыдующих подпунктах.

  Итак, сначала мы фиксируем вектор v_1 как показано на картинке, и берем случайным вектор v_2 на единичном шаре. Оценим вероятность того, что скалярное произведение этих двух векторов больше, чем наперед заданная константа δ.

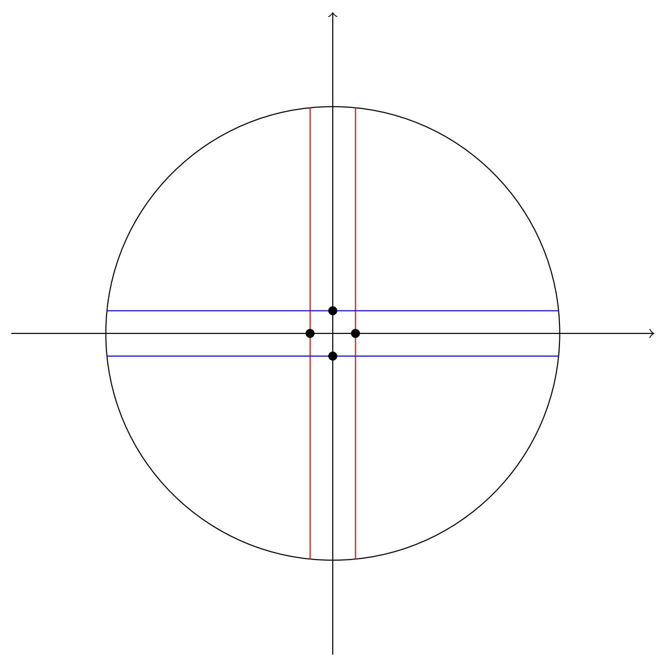
  $$\mathbb{P}_n(|\langle v_1, v_2 \rangle| > \delta) < 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}. \tag{6}$$

  Получается, что скалярное произведение двух случайных векторов в $n-$мерном пространстве больше, чем заданная δ с маленькой вероятностью.
  Рассмотрим несколько пар значений δ и n.

Q: Какова интуиция этого феномена?

Q: Что будет, если отрезать такую же полосочку сверху и снизу, как показано в картинке ниже? Парадокс в том, что "почти-весь-объем" не может быть одновременно и там, и там.



3 Нелинейный закон больших чисел (ЗБЧ)

- **Изопериметрическое неравенство**

Пусть имеем выпуклое тело D. Классические изоперметрические неравенства были получены после решения следующей оптимизационной задачи:

$$|\partial D| \to \min, \text{ s.t. } |D| = c \tag{7}$$

или, двойственную к ней

$$|D| \to \max, \text{ s.t. } |\partial D| = c \tag{8}$$

Известно, что решением этих задач является гиперсфера.
Определим D_ε как $\varepsilon-$раздутие тела D. О раздутии можно думать как о гомотетии с коэффициентом $1 + \varepsilon$. Рассматривается следующая задача

$$|D_\varepsilon \setminus D| \to \min, \quad \text{s.t. } |D| = c, \tag{9}$$

где $D-$ это какая-то область отрезанная сверху (выпуклая шапка сферы) сферы единичного радиуса.

Замечание. Заметим, что минимизация в обеих задачах идет по всевозможным выпуклым телам, поэтому является сложной, с точки зрения оптимизации, задачей.

Решением этой задачи является так называемая сферическая шапочка, то есть минимум заданной в (9) задачи достигается, если $D = A-$ сферическая шапочка с объемом c, то есть,

$$|A_\varepsilon \setminus A| \leq |D_\varepsilon \setminus D|, \ \forall D \tag{10}$$

Доказательство изопериметрического неравенства.*

Рассмотрим вероятностную меру на сфере и рассмотрим такую штуку, которая делит заданную единичную сферу пополам, то есть $\frac{1}{2} = |D| = |A|$. Возьмем $\varepsilon-$ раздутие заданного безобразия D и A. Мы уже знаем, что

$$|D_\varepsilon \setminus D| \geq |A_\varepsilon \setminus A|, \ \forall D. \tag{11}$$

С другой стороны, во втором разделе мы доказали, что мера концентрируется в $\delta-$ полосочке сферы, следовательно, получается, что в $\delta-$ окрестности медианной плоскости концентрируется почти вся площадь. Получается, что в $\varepsilon-$ окрестности медианной линии концентрируется вся площадь сферы, более того, чем медианная линия безобразная, тем больше площадь в рассмотренной окрестности.

- **Стабилизация значений*** Предыдущий результат можно обобщить вводя медианную функцию следующим образом. Пусть $f : S^n \to \mathbb{R}$, тогда медианная функция f обозначается M_f определяется таким образом

$$|\{x \in S^n \mid f(x) \geq M_f\}| \geq \frac{1}{2} \tag{12}$$

$$|\{x \in S^n \mid f(x) \leq M_f\}| \geq \frac{1}{2} \tag{13}$$

Теперь, предположим, что $f \in \mathrm{Lip}_1(S^n, \mathbb{R}), n \gg 1$.
Замечание. Липшицевость необязательно, можно ввести другие, более мягкие условия регулярности. Важно, чтобы функция не скакала, как функция Дирихле, например.

Утверждается, что для $x_1, x_2 \in S^n$ верно следующее $f(x_1) \approx f(x_2) \approx M_f$. Тогда,

$$\Pr\{|f(x) - M_f| > \delta\} < 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n} \tag{14}$$

Этот результат можно обобщить, если радиус сферы равен r, а $f \in \mathrm{Lip}_L(S^n, \mathbb{R})$ следующим образом

$$\Pr\{|f(x) - M_f| > \delta\} < 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{rL}\right)^2 n}. \tag{15}$$

Последнее известно, как нелинейный закон больших чисел, наблюдается стабилизация значений. Для сравнения напомним (линейный) закон больших чисел в обычном виде: Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ бесконечная последовательность одинаково распределенных некоррелированных случайных величин и $\mathbb{E}\xi_i = \mu$, тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu, \tag{16}$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \tag{17}$$

Пример. Температура в аудитории, с точки зрения наблюдателя, постоянна, хотя, на самом деле, она не постоянна.

В теории вероятностей очень важным объектом является следующая случайная величина $S_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_1 + \dots x_n\right)$. Рассмотрим сферу $x_1^2 + \dots x_n^2 = \sigma^2 n$. Очевидно, что функция S_n Липшицева, так как $|\nabla S_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} = L$ (константа Липшица). Радиус сферы $r_n = \sigma\sqrt{n}$, тогда имеем

$$\Pr\left\{|S_n - 0| > \delta\right\} < 2\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^2 n\right). \tag{18}$$

Последнее неравенство нам говорит, что типичные уклонения S_n от 0 будут наблюдаться при $\delta \asymp \frac{1}{\sqrt{n}}$. С выражением $\frac{1}{\sqrt{n}}$ в теории вероятностей связаны многие феномены, в частности, это типичная скорость сходимости. Если δ стремится к 0, с большей скоростью, скажем, $\frac{1}{n}$ или $\frac{1}{n^2}$, то в правой части мы получаем последовательность стремящееся к 0, следовательно такие уклонения очень редкие и не типичные.

4 Шар в $\mathbb{R}^n$. Центральная предельная теорема (ЦПТ)

- **ЦПТ**

  Напомним центральную предельную теорему в самом обычном и простом виде. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ i.i.d., при том $\mathbb{E}\xi_i = a, \mathbb{E}\xi_i^2 < \infty$ и $\mathbb{V}ar\xi = \sigma^2$, тогда

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - na}{\sigma\cdot\sqrt{n}} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0,1) \tag{19}$$

Рассмотрим сферу в $\mathbb{R}^n$ объема 1, тогда порядок радиуса $r_n \asymp \sqrt{n}$. Действительно,

$$|B^n(r_n)| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} r_n^n = 1, \tag{20}$$

тогда используя асимптотическое выражение для гамма функции в бесконечности и формулу Стирлинга, получаем

$$r_n = \frac{\sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{n}{2e}} \cdot \sqrt[n]{\pi n} \to \sqrt{\frac{n}{2\pi e}}, \text{ as } n \to \infty. \tag{21}$$

Грубо говоря, получается, что единичный шар оказывается огромным (в смысле линейных размеров), то есть $r_n \asymp \sqrt{n}$, а объем равен 1. Аналогичное утверждение верно и для единичного куба размера n, объем также равен 1, но главная диагональ имеет длину $\sqrt{n}$.

Попробуем дать физическое объяснение этому факту. В аудитории n молекул и они как-то двигаются, запишем их кинетическую энергию

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \ldots \frac{1}{2}mv_n^2 \asymp \sigma^2 n, \tag{22}$$

последнее приближение мотивировано тем фактом, что если и в этой, и в следующей аудитории n молекул, то если их брать вместе, то порядок будет пропорционален числу молекул, а то, что написано в (22) есть $3n-$ мерная сфера, радиус которой порядка $r \asymp \sigma\sqrt{n}$.

- **Проекция шара***

Q: Что можно сказать про проекцию шара и сферы на прямую?

5 Куб. $\mathbb{I}^n \subset \mathbb{R}^n$

Пусть у нас есть куб в $n-$ мерном пространстве. В третьем разделе мы обсудили стабилизацию значений на сфере, теперь перейдем к кубу. С кубом дела обстоят посложнее, потому что тут нарушается равноправность переменных $(x_1, \ldots, x_n)$. Имеется в виду следующее, если двигаться вдоль любой оси координат, то только одна переменная x_i будет меняться и влияние других переменных x_{-i} будет ничтожным. Равноправие этих переменных будет наблюдаться только в $\varepsilon-$ окрестности главной диагонали.

Рассмотрим проекцию вершин заданного куба на заданную прямую α. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ и $|\alpha| = 1$. Нас будет интересовать следующая вероятность $\Pr\{|\langle\alpha, x\rangle| > t\}$. Известна следующая оценка этой вероятности (неравенство Бернштейна)

$$\Pr\{|\langle\alpha, x\rangle| > t\} < 2 \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \tag{23}$$

Напомним, что в этом случае мы бегаем только по вершинам куба, причем куб задан таким образом $|x_i| = 1, \ \forall i \in [1, n]$. В случае, когда направление альфа совпадает с направлением оси x_i, тогда скалярное произведение больше чем 1 быть не может, следовательно не имеет смысла брать t больше 1, как следствие, $\Pr\left\{|\langle \alpha, x\rangle| > t\right\}$ не может быть ограничена маленьким числом.

Q: Когда можно брать t большим?

A: Есть смысл t брать большим, когда направление альфа совпадает с направлением главной диагонали куба, то есть когда $\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Рассмотрим, теперь, полный куб, то есть $x \in \mathbb{R}^n$ и $|x_i| \leq \frac{1}{2}, \ \forall i \in [1, n]$. В таком случае, рассмотренная ранее вероятность имеет следующую оценку

$$\Pr\left\{|\langle \alpha, x\rangle| > t\right\} < 2 \cdot \exp\left(-6t^2\right) \tag{24}$$

Q: Что можно сказать про концентрацию меры в кубе $\mathbb{I}^n$?

A: Из неравенства легко понять, что

6 Теория кодирования

7 Задача Гротендика и Теорема Дворецкого