数值代数大作业报告

崔君玥 2100017794

1 问题描述

1.1 Stokes 方程

考虑 Stokes 方程

$$\begin{cases} -\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{F}, & (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \\ div\vec{u} = 0, & (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \end{cases} \tag{1}$$

边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = b, \quad y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = t, \quad y = 1,$$
$$\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = l, \quad x = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = r, \quad x = 1,$$
$$u = 0, \quad x = 0,1, \quad v = 0, \quad y = 0,1$$

其中$\vec{u} = (u,v)$ 为速度，p 为压力，$\vec{F} = (f,g)$ 为外力，$\vec{n}$ 为外法向方向。

1.2 交错网格上的 MAC 格式

下面我们用交错网格上的 MAC 格式离散 Stokes 方程 (1)，网格如图1所示。

关于 u 的方程：

(1) 当 $1 \le i \le N-1, 2 \le j \le N-1$，

$$-\frac{u_{i+1,j-\frac{1}{2}} - 2u_{i,j-\frac{1}{2}} + u_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{h^2} - \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j-\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{3}{2}}}{h^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h} = f_{i,j-\frac{1}{2}}$$

(2) 当 $1 \le i \le N-1 (j=1)$，

$$-\frac{u_{i,\frac{3}{2}} - u_{i,\frac{1}{2}}}{h^2} - \frac{b_{i,0}}{h} - \frac{u_{i+1,\frac{1}{2}} - 2u_{i,\frac{1}{2}} + u_{i-1,\frac{1}{2}}}{h^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}{h} = f_{i,\frac{1}{2}}$$

(3) 当 $1 \le i \le N-1 (j=N)$，

$$\frac{u_{i,N-\frac{1}{2}} - u_{i,N-\frac{3}{2}}}{h^2} - \frac{t_{i,N}}{h} - \frac{u_{i+1,N-\frac{1}{2}} - 2u_{i,N-\frac{1}{2}} + u_{i-1,N-\frac{1}{2}}}{h^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}}{h} = f_{i,N-\frac{1}{2}}$$

(4) 当 $i=0$ 和 $i=N$，$1 \le j \le N$，$u_{i,j-\frac{1}{2}} = 0$

关于 v 的方程：

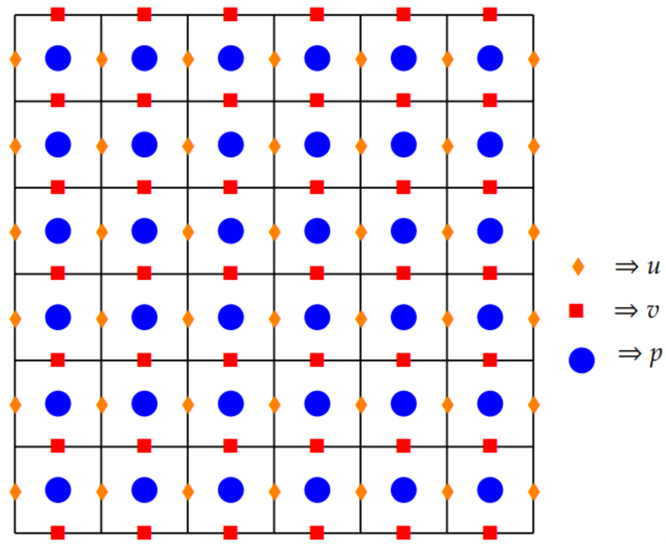

图 1: MAC 格式离散图示

(1) 当 $1 \le j \le N-1$，$2 \le i \le N-1$，

$$-\frac{v_{i+\frac{1}{2},j} - 2v_{i-\frac{1}{2},j} + v_{i-\frac{3}{2},j}}{h^2} - \frac{v_{i-\frac{1}{2},j+1} - 2v_{i-\frac{1}{2},j} + v_{i-\frac{1}{2},j-1}}{h^2} + \frac{p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h} = g_{i-\frac{1}{2},j}$$

(2) 当 $1 \le j \le N-1 (i=1)$，

$$-\frac{v_{\frac{3}{2},j} - v_{\frac{1}{2},j}}{h^2} - \frac{l_{0,j}}{h} - \frac{v_{\frac{1}{2},j+1} - 2v_{\frac{1}{2},j} + v_{\frac{1}{2},j-1}}{h^2} + \frac{p_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h} = g_{\frac{1}{2},j}$$

(3) 当 $1 \le j \le N-1 (i=N)$

$$\frac{v_{N-\frac{1}{2},j} - v_{N-\frac{3}{2},j}}{h^2} - \frac{r_{N,j}}{h} - \frac{v_{N-\frac{1}{2},j+1} - 2v_{N-\frac{1}{2}} + v_{N-\frac{1}{2},j-1}}{h^2} \frac{p_{N-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{N-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h} = g_{N-\frac{1}{2},j}$$

(4) 当 $j=0$ 和 $j=N, 1 \le i \le N$，$v_{i-\frac{1}{2},j} = 0$。

不可压条件 $(1 \le i \le N, 1 \le j \le N)$

$$\frac{u_{i,j-\frac{1}{2}} - u_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{h} + \frac{v_{i-\frac{1}{2},j} - v_{i-\frac{1}{2},j-1}}{h} = 0$$

将这些方程整理，可得到如下线性代数方程组：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

1.3 数值算例

在区域 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ 上，外力为

$$f(x,y) = -4\pi^2(2cos(2\pi x) - 1)sin(2\pi y) + x^2,$$
$$g(x,y) = 4\pi^2(2cos(2\pi y) - 1)sin(2\pi x).$$

Stokes 方程 (1) 的真解为

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= (1-cos(2\pi x))sin(2\pi y) \\
v(x,y) &= -(1-cos(2\pi y))sin(2\pi x) \\
p(x,y) &= \frac{x^3}{3}-\frac{1}{12}
\end{aligned} \tag{3}$$

由 (3)，可求得边界条件为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -2\pi(1-cos(2\pi x)), \quad y=0 \\
&\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 2\pi(1-cos(2\pi x)), \quad y=1 \\
&\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 2\pi(1-cos(2\pi y)), \quad x=0 \\
&\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = -2\pi(1-cos(2\pi y)), \quad x=1 \\
&u=0, \quad x=0,1, \quad v=0, \quad y=0,1
\end{aligned}$$

2 第 1 题

2.1 要求

分别取 $N=64,128,256,512,1024,2048$，以 DGS 为磨光子，用基于 V-cycle 的多重网格方法求解离散问题 (2)，停机标准为 $||r_h||_2/||r_0||_2 \le 10^{-8}$，对不同的 ν_1，ν_2，L，比较 V-cycle 的次数和 CPU 时间，并计算误差

$$e_N = h(\Sigma_{j=1}^{N}\Sigma_{i=1}^{N-1}|u_{i,j-\frac{1}{2}}-u(x_i,y_{j-\frac{1}{2}})|^2+\Sigma_{j=1}^{N-1}\Sigma_{i=1}^{N}|v_{i,j-\frac{1}{2}}-v(x_i,y_{j-\frac{1}{2}})|^2)^{\frac{1}{2}}$$

2.2 数值方法

2.2.1 DGS 迭代法

给定初始值 $U_0=(u_0^T,v_0^T)$ 和 P_0，令 $k=0, A=D_A-L_A-U_A$，DGS 迭代法定义如下：

1. 用 Gauss-Seidel 迭代方法更新速度分量

$$U_{k+\frac{1}{2}} = U_k + (D_A-L_A)^{-1}(F-BP_k-AU_k).$$

2. 对内部单元 (i,j)（四个顶点 $((i-1)h,(j-1)h),(ih,(j-1)h),(ih,jh),((i-1)h,jh)$），$2\le i,j\le N-1$，计算散度方程的残量

$$r_{i,j} = -\frac{u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}-u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}}{h}-\frac{v_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}-v_{i-\frac{1}{2},j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h},$$

并令 $\delta=\frac{r_{i,j}h}{4}$

3. 更新内部单元速度：

$$\begin{aligned}
&u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+1} = u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}-\delta, \quad u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1} = u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}+\delta, \\
&v_{i-\frac{1}{2},j-1}^{k+1} = v_{i-\frac{1}{2},j-1}^{k+\frac{1}{2}}-\delta, \quad v_{i-\frac{1}{2},j}^{k+1} = v_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}+\delta.
\end{aligned}$$

4. 更新内部单元的压力：

$$
\begin{aligned}
p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+1} &= p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k} + r_{i,j},\\
p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+1} &= p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k} - r_{i,j}/4,\\
p_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+1} &= p_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}^{k} - r_{i,j}/4,\\
p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+1} &= p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k} - r_{i,j}/4,\\
p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^{k+1} &= p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^{k} - r_{i,j}/4,
\end{aligned}
$$

5. 对边界单元 (i,N)，$2 \leq i \leq N-1$，先计算散度的残量 $r_{i,N}$，并令 $\delta = r_{i,N}h/3$。速度更新如下：

$$
\begin{aligned}
u_{i-1,N-\frac{1}{2}}^{k+1} = u_{i-1,N-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \delta, u_{i,N-\frac{1}{2}}^{k+1} &= u_{i,N-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \delta,\\
v_{i-\frac{1}{2},N-1}^{k+1} &= v_{i-\frac{1}{2},N-1}^{k+\frac{1}{2}} - \delta.
\end{aligned}
$$

6. 更新边界单元 (i,N) 的压力：

$$
\begin{aligned}
p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^{k+1} &= p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^{k} + r_{i,N},\\
p_{i+\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^{k+1} &= p_{i+\frac{1}{2},N-\frac{1}{2}}^{k} - r_{i,N}/3,\\
p_{i-\frac{3}{2},N-\frac{1}{2}}^{k+1} &= p_{i-\frac{3}{2},N-\frac{1}{2}}^{k} - r_{i,N}/3,\\
p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{3}{2}}^{k+1} &= p_{i-\frac{1}{2},N-\frac{3}{2}}^{k} - r_{i,N}/3,
\end{aligned}
$$

7. 类似更新边界单元 (N,j) 和 $(1,j), 2 \leq j \leq N-1$，$(i,1), 2 \leq i \leq N-1$ 的速度和压力。

8. 对顶点单元 $(1,1)$，计算散度残量 $r_{1,1}$。令 $\delta = r_{1,1}h/2$。更新速度如下：

$$
u_{1,\frac{1}{2}}^{k+1} = u_{1,\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \delta, \quad v_{\frac{1}{2},1}^{k+1} = v_{\frac{1}{2},1}^{k+\frac{1}{2}} + \delta.
$$

更新压力如下：

$$
\begin{aligned}
p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{k+1} &= p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{k} + r_{1,1},\\
p_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^{k+1} &= p_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^{k} + r_{1,1}/2,\\
p_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^{k+1} &= p_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^{k} + r_{1,1}/2.
\end{aligned}
$$

9. 对其他顶点单元 $(1,N),(N,1),(N,N)$，类似更新速度和压力。

2.2.2 V-cycle 多重网格方法

V-cycle 多重网格方法实现如下：

1. 在 Ω^h 上，以 $u_h^{(0)}$ 为初值，用 DGS 迭代法，对 $A_hU_h = F_h$，迭代 ν_1 次，得到 $u_h^{(v_1)}$，并计算残量

$$
r_h = F_h - A_h u_h^{(v_1)}
$$

2. 将残量限制到网格 Ω^{2h} 上，即

$$
F_{2h} = I_h^{2h} r_h
$$

3. 重复上述过程至底层网格。此时可直接对残量方程进行求解。

4. 将得到的误差提升至上一层网格，并用 Gauss-Seidel 迭代进行磨光，迭代 ν_2 次，得 $e_{(L-1)h}$。
5. 更新 $u_{(L-1)h}$ 为 $u_{(L-1)h}+e_{(L-1)h}$。
6. 重复步骤 4、5 直到回到网格 Ω^h。
7. 如果满足误差条件，则停止，否则回到步骤 2。

2.3 具体算法实现

选取不同的 ν_1，ν_2，L，以 DGS 迭代为磨光子的 V-cycle 多重网格对问题进行求解。

2.3.1 提升限制算子

提升限制算子选取方式如图2所示。

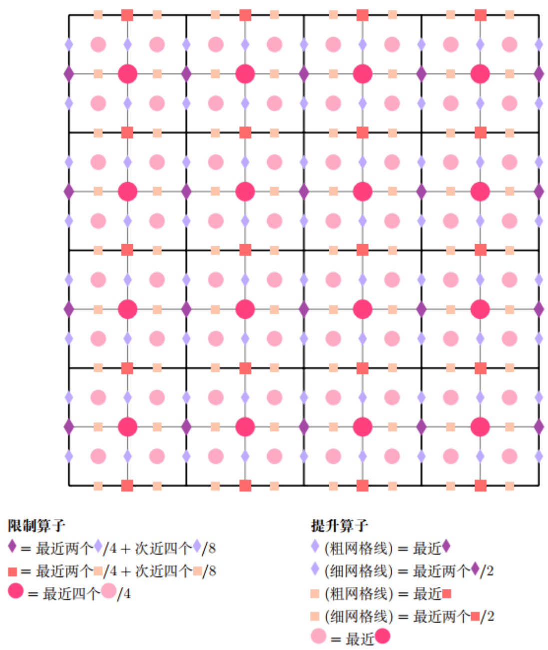

图 2: 提升限制算子

2.3.2 注意事项

1. 为提高程序运行速度，减小内存及存储开销，实现程序时不需要写出系数矩阵的显式表达式；U，P，F 等向量均用矩阵形式存储。
2. 对残量做提升或限制后，若得到的新线性方程组不满足数值散度为 0 的条件，此时散度方程的残量 $r_{i,j}$ 将变为

$$r_{i,j}=-\frac{u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}-u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}}{h}-\frac{v_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}-v_{i-\frac{1}{2},j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h}-d_{i,j}$$

3. 对方程组进行提升和限制不保系数矩阵结构，实际应用中直接利用在粗网格上的 MAC 离散 Stokes 方程得到的系数矩阵去近似提升及限制后的矩阵。

2.4 计算结果

2.4.1 误差

误差 e_N 如表1所示。

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
误差	0.0015	3.7363e-04	9.3399e-05	2.3349e-05	5.8396e-06	1.4714e-06

表 1: 误差 e_N

2.4.2 不同 DGS 磨光次数与底层网格大小的运行时间和 V-cycle 次数比较

表2至表7展示了选取不同的 ν_1，ν_2，L 时的运行时间及 V-cylce 次数。从表中我们可以读出，选取不同的磨光次数及不同的底层网格大小运行次数均在个位数，且运行时间相差不大。

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
V—cycle 次数	6	6	6	5	5	5
CPU 时间 (秒)	0.212133	0.205928	0.630789	2.254966	10.121553	43.446935

表 2: $\nu_1 = 6$，$\nu_2 = 6$，底层网格大小 2×2

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
V—cycle 次数	6	6	5	5	5	5
CPU 时间 (秒)	0.064016	0.156057	0.517285	2.254574	10.480062	46.020121

表 3: $\nu_1 = 6$，$\nu_2 = 6$，底层网格大小 4×4

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
V—cycle 次数	7	7	7	7	7	6
CPU 时间 (秒)	0.065178	0.130780	0.457179	2.396664	10.514629	38.996714

表 4: $\nu_1 = 4$，$\nu_2 = 4$，底层网格大小 2×2

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
V—cycle 次数	7	7	7	7	7	6
CPU 时间 (秒)	0.110582	0.227080	0.782407	3.352778	13.334998	39.117965

表 5: $\nu_1 = 4$，$\nu_2 = 4$，底层网格大小 4×4

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
V—cycle 次数	9	9	9	9	8	8
CPU 时间 (秒)	0.081131	0.096096	0.462840	2.432169	9.264816	40.127316

表 6: $\nu_1 = 3$，$\nu_2 = 3$，底层网格大小 2×2

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
V—cycle 次数	9	9	9	9	8	8
CPU 时间 (秒)	0.105416	0.144569	0.498297	2.417746	9.212262	39.325369

表 7: $\nu_1 = 3$，$\nu_2 = 3$，底层网格大小 4×4

3 第 2 题

3.1 要求

分别取 $N = 64\ 128\ 256\ 512$，以 Uzawa Iteration Method 求解离散问题 (2)，停机标准为 $||r_h||/||r_0||_2 \le 10^{-8}$，并计算误差

$$e_N = h(\Sigma_{j=1}^{N}\Sigma_{i=1}^{N-1}|u_{i,j-\frac{1}{2}} - u(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})|^2 + \Sigma_{j=1}^{N-1}\Sigma_{i=1}^{N}|v_{i,j-\frac{1}{2}} - v(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})|^2)^{\frac{1}{2}}$$

3.2 数值方法

3.2.1 Uzawa Iteration Method

给定 P_0，令 $k = 0$，Uzawa Iteration Method 实现如下：

1. 求解 $AU_{k+1} = F - BP_k$；
2. 更新压力 $P_{k+1} = P_k + \alpha(B^T U_{k+1})$；
3. 判断误差是否小于允许的值：如果小于，则停止迭代，否则回到第一步。

3.3 具体算法实现

3.3.1 参数的选取

因为

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k + \alpha(B^T A^{-1}(F - BP_k)) \\ &= (I - \alpha B^T A^{-1} B)P_k + \alpha B^T A^{-1} F \end{aligned}$$

因此，关于压力的更新方法，相当于下面的线性代数方程组

$$B^T A^{-1} BP = B^T A^{-1} F$$

的迭代格式。因而只需求解 α 使得谱半径 $\rho(I - \alpha B^T A^{-1} B)$ 最小。下证：最优参数为

$$\alpha_* = \frac{2}{\lambda_{min}(B^T A^{-1} B) + \lambda_{max}(B^T A^{-1} B)}$$

任取 $I - \alpha B^T A^{-1} B$ 的特征值 λ，设其对应的特征向量为 u，则有

$$\begin{aligned} (I - \alpha B^T A^{-1} B)u &= \lambda u \\ \alpha B^T A^{-1} Bu &= (1 - \lambda)u \end{aligned}$$

显然 $\alpha \neq 0$，故

$$B^T A^{-1} Bu = \frac{1 - \lambda}{\alpha} u$$

故 $\exists\mu$，μ 是 $B^TA^{-1}B$ 一特征值，$s.t.$

$$\lambda = 1 - \alpha\mu$$

故 $\rho(I-\alpha B^TA^{-1}B) = max(|\lambda|) = max(1-\alpha\mu_{min}, \alpha\mu_{max}-1)$
故 $1-\alpha\mu_{min} = \alpha\mu_{max}-1$，即

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_{min}(B^TA^{-1}B)+\lambda_{max}(B^TA^{-1}B)}$$

时，$\rho(I-\alpha B^TA^{-1}B)$ 取得最大值。因此最优参数为

$$\alpha_* = \frac{2}{\lambda_{min}(B^TA^{-1}B)+\lambda_{max}(B^TA^{-1}B)}$$

3.3.2 $B^TA^{-1}B$ 的特征值

下证 $B^TA^{-1}B$ 特征值只有 0，1。
设

$$B^TA^{-1}BP = \lambda P$$

则

$$\begin{cases} AU + BP = 0 \\ -B^TU = \lambda P \end{cases}$$

A，B，$-B^T$ 可以看作离散形式的 Δ，∇，div 算子，于是不妨考虑连续的特征值问题：

$$\begin{cases} -\Delta\vec{u} + \nabla\vec{p} = 0 \\ div\vec{u} = \lambda\vec{p} \end{cases}$$

故

$$\nabla div\vec{u} = \lambda\nabla\vec{u}$$

取 $\lambda = 0$，得 $div\vec{u} = 0$。此时取 $U = 0$，P 可取任意所有元素均相等的向量。
又注意到严格成立

$$AB = BB^TB$$

因此

$$B^TB = B^TA^{-1}BB^TB$$

因此 $B^TA^{-1}B$ 的非零特征值都是 1。
考虑 $B^TA^{-1}B$ 的非零特征子空间，可得最优参数 $\alpha = 1$。

3.4 数值结果

用 Uzawa Iterative Method 求解离散问题，误差如表8所示。

	N=64	N=128	N=256	N=512
误差	0.0015	3.7363e-04	9.3398e-05	2.3349e-05

表 8: Uzawa Iterative Method 误差

4 第 3 题

4.1 要求

分别取 $N = 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$，以 Inexact Uzawa Iteration Method 为迭代法求解离散问题 (2)，停机标准为 $||r_h||/||r_0||_2 \leq 10^{-8}$，其中以 V-cycle 多重网格方法为预条件子，利用共轭梯度法求解每一步的子问题 $AU_{k+1} = F - BP_k$，对不同的 $\alpha, \tau, \nu_1, \nu_2, L$，比较外循环的迭代次数和 CPU 时间，并计算误差

$$e_N = h(\Sigma_{j=1}^{N}\Sigma_{i=1}^{N-1}|u_{i,j-\frac{1}{2}} - u(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})|^2 + \Sigma_{j=1}^{N-1}\Sigma_{i=1}^{N}|v_{i,j-\frac{1}{2}} - v(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})|^2)^{\frac{1}{2}}$$

4.2 数值方法

4.2.1 Inexact Uzawa Iteration Method

给定 P_0，令 $k = 0$，Inexact Uzawa Iteration Method 实现如下：

1. 近似求解 $AU_{k+1} = F - BP_k$，得到近似解 $\hat{U}_{k+1}$；
2. 更新压力 $P_{k+1} = P_k + \alpha(B^T\hat{U}_{k+1})$；
3. 判断误差是否小于允许的值：如果小于，则停止迭代，否则回到第一步。

4.2.2 V-cycle 为预优子的预优共轭梯度法

用 V-cycle 作为预条件子的预优共轭梯度法实现如下：

1. 取 x 为初值，计算残量 $r = b - Ax$。
2. 使用 V-Cyle 多重网格方法对预条件件方程组 $Mz = r$ 进行求解，其中 M 为预处理矩阵，z 是修正后的残差向量。磨光子取为对称 Gauss-Seidel 迭代法。
3. 计算初始搜索方向 $p_0 = z_0$，其中 z_0 是初始修正后的残量。
4. 在每次共轭梯度法迭代中执行以下步骤：
   * 计算步长 $\alpha_k = \frac{r_k z_k}{p_k A p_k}$。
   * 更新解向量 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$。
   * 更新残量 $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$。
   * 求解预处理方程组 $Mz_{k+1} = r_{k+1}$ 以计算新的修正后误差 z_{k+1}。
   * 计算新的搜索方向 $p_{k+1} = z_{k+1} + \beta_k p_k$，其中 $\beta_k = \frac{r_{k+1} z_{k+1}}{r_k z_k}$
5. 迭代停止条件：达到允许误差，或达到允许最大迭代次数。

4.2.3 对称迭代方法

设 B 为 A 的近似逆，给定初始值 x_0，对称迭代格式如下：

$$x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + B(b - Ax_k)$$
$$x_{k+1} = x_{k+\frac{1}{2}} + B^T(b - Ax_{k+\frac{1}{2}})$$

4.3 具体算法实现

本题算法实现细节如下：

1. 预优矩阵取为 $M = A$。
2. 终止条件的选取
   * V-cycle 的终止条件取为 $||r||_2/||r_0||_2 < e-03$；
   * 预优共轭梯度法终止条件取为 $k >= kmaxor||r||_2 < max(\epsilon * ||r_0||_2, \tau||B^T\vec{U_k}||)$，其中 $kamx$ 取为矩阵阶数，ϵ 取为 1e-08;
   * Inexact Uzawa Method 终止条件取为 $||r||_2/||r_0||_2 < e-03$。
3. 对称迭代方法取为 Gauss-Seidel 的对称迭代方法。

4.4 数值结果

4.4.1 误差

用 Inexact Uzawa Iterative Method 求解离散问题，误差如表9所示。

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
误差	0.0015	3.7363e-04	9.3397e-05	2.3347e-05	5.8354e-06	1.4575e-06

表 9: Inexact Uzawa Iterative Method 误差

4.4.2 不同参数比较

对不同的 α，τ，ν_1，ν_2，L，外循环的迭代次数和 CPU 时间如表10至表19所示。

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
外循环次数	2	2	2	2	2	2
CPU 时间（秒）	0.234493	0.295032	0.872711	4.564005	18.978371	80.828009

表 10: $\alpha = 1$，$\tau = e-05$，$\nu_1 = 2$，$\nu_2 = 2$，底层网格 2×2

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
外循环次数	2	2	2	2	2	2
CPU 时间（秒）	0.127421	0.302889	0.854379	4.331761	19.654733	82.002355

表 11: $\alpha = 1$，$\tau = e-05$，$\nu_1 = 2$，$\nu_2 = 2$，底层网格 4×4

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
外循环次数	2	2	2	2	2	2
CPU 时间（秒）	0.172624	0.280932	0.935304	5.071924	22.581911	103.139609

表 12: $\alpha = 1$，$\tau = e-05$，$\nu_1 = 4$，$\nu_2 = 4$，底层网格 2×2

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
外循环次数	2	2	2	2	2	2
CPU 时间（秒）	0.145699	0.412698	1.435906	7.079350	27.566616	100.523872

表 13: $\alpha = 1$，$\tau = e - 05$，$\nu_1 = 4$，$\nu_2 = 4$，底层网格 4×4

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
外循环次数	2	2	2	2	2	2
CPU 时间（秒）	0.112782	0.253037	1.015662	5.087129	22.373364	93.457376

表 14: $\alpha = 1$，$\tau = e - 03$，$\nu_1 = 4$，$\nu_2 = 4$，底层网格 2×2

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
外循环次数	2	2	2	2	2	2
CPU 时间（秒）	0.197762	0.388130	1.214423	6.337482	28.952573	133.803458

表 15: $\alpha = 1$，$\tau = e - 03$，$\nu_1 = 4$，$\nu_2 = 4$，底层网格 4×4

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
外循环次数	6	6	6	6	5	5
CPU 时间（秒）	0.325266	0.800684	2.448431	11.104839	48.841570	203.387731

表 16: $\alpha = 0.95$，$\tau = e - 05$，$\nu_1 = 2$，$\nu_2 = 2$，底层网格 2×2

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
外循环次数	6	6	6	5	5	5
CPU 时间（秒）	0.300489	0.751684	2.481188	10.745040	48.987020	203.002153

表 17: $\alpha = 0.95$，$\tau = e - 05$，$\nu_1 = 2$，$\nu_2 = 2$，底层网格 4×4

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
外循环次数	2	2	2	2	2	2
CPU 时间（秒）	0.154322	0.382055	1.459680	7.106257	33.153454	143.538705

表 18: $\alpha = 1$，$\tau = e - 05$，$\nu_1 = 6$，$\nu_2 = 6$，底层网格 2×2

	N=64	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
外循环次数	2	2	2	2	2	2
CPU 时间（秒）	0.280457	0.556637	1.954146	14.621913	58.864457	223.541275

表 19: $\alpha = 1$，$\tau = e - 05$，$\nu_1 = 6$，$\nu_2 = 6$，底层网格 4×4