МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №2
по курсу «Нейроинформатика»

Выполнил: Кузьмичев А. Н.
Группа: 8О-406Б
Преподаватели: Н. П. Аносова

Москва, 2021

Линейная нейронная сеть. Правило обучения Уидроу-Хоффа

Цель работы: Исследование свойств линейной нейронной сети и алгоритмов ее обучения, применение сети в задачах аппроксимации и фильтрации.

Основные этапы работы:

1. Использовать линейную нейронную сеть с задержками для аппроксимации функции. В качестве метода обучения использовать адаптацию.

2. Использовать линейную нейронную сеть с задержками для аппроксимации функции и выполнения многошагового прогноза.

3. Использовать линейную нейронную сеть в качестве адаптивного фильтра для подавления помех. Для настройки весовых коэффициентов использовать метод наименьших квадратов.

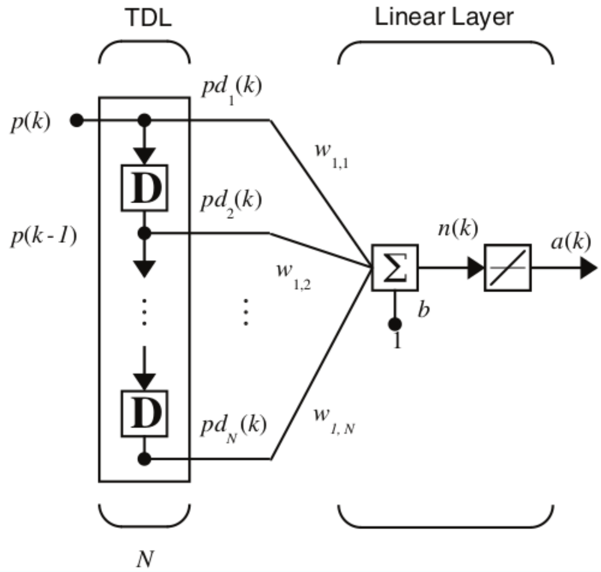
Входные сигналы:

1. $x = \sin\left(-3t^2 + 10t - 5\right),\ t \in [0.5, 4],\ h = 0.01$
2. $x = \sin\left(2t^2 - 6t + 3\right),\ t \in [0, 5],\ h = 0.02$

Выходной сигнал: $y = \dfrac{1}{2}\sin\left(2t^2 - 6t - \pi\right)$

1 Структура модели

Для решения этой задачи необходимо воспользоваться фльтратором, который состоит из *TDL блока* и *Линейного слоя* и имеет следующую структуру:



Чтобы реализовать линейный слой (хотя в данной работе можно ограничиться лишь одним нейроном) можно воспользоваться представлением весов и смещений перцептронов как марицу $(n+1) \times m$, где n - число входов, а m - число выходов. При этом в качестве выходов я использую функцию $net = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i + b$, а ошибку измеряю с помощью метрики $MSE = \frac{\sum_{i=1}^{N}(t_i - a_i)^2}{N}$.

Реализация линейного слоя:

```
class LinearLayer:
    def __init__(self, steps = 50, lr = 0.0001, stop_err=0.0):
        self.steps = steps
        self.w = None
        self.rate = lr
        self.stop_err = stop_err

    def fit(self, X, y):
        # add column for bias and transpose data for comphort operations:
        X_t = np.append(X, np.ones((X.shape[0], 1)), axis = 1)
        y_t = np.array(y)
```

```python

        #init weights:
        if self.w is None:
            self.w = np.random.random((X_t.shape[1], y_t.shape[1]))

        # main loop:
        for step in tqdm(range(self.steps)):
            for i in range(X_t.shape[0]):
                e = y_t[i] - X_t[i].dot(self.w) # compute error
                # change weights:
                self.w += self.rate * \
                    X_t[i].reshape(
                        X_t.shape[1], 1
                    ).dot(
                        e.reshape(1, y_t.shape[1])
                    )
            mse = ((y_t - X_t.dot(self.w))**2).mean()
            if mse < self.stop_err:
                break

        return self # return trained model

    def set_steps(self, steps):
        self.steps = steps

    def set_learning_rate(self, rate):
        self.rate = rate

    # Predict answers
    def predict(self, X):
        X_t = np.append(X, np.ones((X.shape[0], 1)), axis = 1)
        return X_t.dot(self.w)

    def display(self):
        ans = "Input(n," + str(self.w.shape[0] - 1) + ") --> "
        ans += "Linear_Layer(" + str(self.w.shape[1]) + ") --> "
        ans += "Output(n, " + str(self.w.shape[1]) + ") --> "
        return ans

    def weights(self):
        return self.w[:-1]

    def bias(self):
        return self.w[-1]

    # RMSE
    def score(self, X, y):
        X_t = np.append(X, np.ones((X.shape[0], 1)), axis = 1)
        y_t = np.array(y)
```

```
        return ((y_t - X_t.dot(self.w))**2).mean()**0.5
```

Как можно заметить, я использую правило *Уидроу-Хоффа* для обучения, которое практически идентично классическому стохачтическому градиентному спуску, за исключением того, что выбор объекта из выборки для корректировки значений в данном случае берется в определенной последовательности, а не случайным образом. Основная идея этого метода заключается в корректировке весов в сторону наискорейшего убывания функции ошибки, а именно в направлении антиградиента этой ошибки. Также при обучении предусмотрена остановка при достижении заданного значения ошибки.

Реализация TDL довольно банальна, за исключением интересного момента - наличия текущего состояния для генерации нового вектора. Также не стоит особого уделения внимания и класс самого фильтра. Поэтому просто приведу их реализации:

```
class TDL:
    def __init__(self, D = 1, pad_zeros=True):
        self.depth = D
        self.padding = pad_zeros
        self.queue = np.zeros(D)

    def fit(self, X, Y = None):
        # init train data such as in self.predict method
        if self.padding:
            in_arr = np.append(np.zeros(self.depth - 1), X)
            result = np.zeros((len(X) - 1, self.depth))
            if Y is None:
                Y = X[-len(X) + 1:]
            else:
                Y = Y[-len(X) + 1:]
        else:
            if len(X) < self.depth:
                return None
            in_arr = np.array(X)
            result = np.zeros((len(X) - self.depth, self.depth))
            if Y is None:
                Y = X[-len(X) + self.depth:]
            else:
                Y = Y[-len(X) + self.depth:]

        for i in range(in_arr.shape[0] - self.depth):
            result[i] = in_arr[i:i + self.depth]

        return result, Y

    def tdl_init(self, values):
        if values.shape[0] != self.depth - 1:
            raise ValueError("You should give " + str(self.depth - 1) + " values for
```

```
                init")
        self.queue = np.append(np.zeros(1), np.array(values))


    def tdl_init_zeros(self):
        self.queue = np.zeros(self.depth)


    def predict(self, X):
        # init delay line and alloc mem
        in_arr = np.append(self.queue[1:], X)
        result = np.zeros((len(X), self.depth))

        # fill memory buffer by values of line
        for i in range(in_arr.shape[0] - self.depth + 1):
            result[i] = in_arr[i:i + self.depth]
        # update queue
        self.queue = in_arr[-self.depth:]
        return result


    def display(self):
        ans = "TDL(" + str(self.depth) + ") --> "
        return ans


class Filtrator:
    def __init__(self, D = 1, pad_zeros = False, steps = 50, l_r=0.001, stop_err=0.0):
        self.tdl = TDL(D, pad_zeros)
        self.linlr = LinearLayer(steps, l_r, stop_err)
        self.tld_initialized = pad_zeros
        self.last_predict = None

    def fit(self, X, Y = None):
        X1, Y1 = self.tdl.fit(X, Y)
        Y1 = np.array(Y1).reshape(len(Y1), 1)
        self.linlr.fit(X1, Y1)
        return self

    def tdl_init(self, values):
        self.tdl.tdl_init(values)
        self.tld_initialized = True

    def tdl_init_zeros(self):
        self.tdl.tdl_init_zeros()

    def predict(self, x):
        if not self.tld_initialized:
            raise ValueError("You should init input before predict")
```

```
        ans = self.linlr.predict(self.tdl.predict(x)).ravel()
        self.last_predict = ans[-1]
        return ans

    def display(self):
        return self.tdl.display() + self.linlr.display()

    def score_value(Y_t, Y_p):
        return ((Y_t - Y_p)**2).mean()**0.5

    def gen_values(self, num, inpt = None):
        if inpt is not None:
            self.last_predict = inpt
        if self.last_predict is None:
            raise ValueError("Last predict doesn‘t know. " +
                             "Please set last predicted value or make prediction.")
        for i in range(num):
            yield self.predict(np.array([self.last_predict]))[0]
```

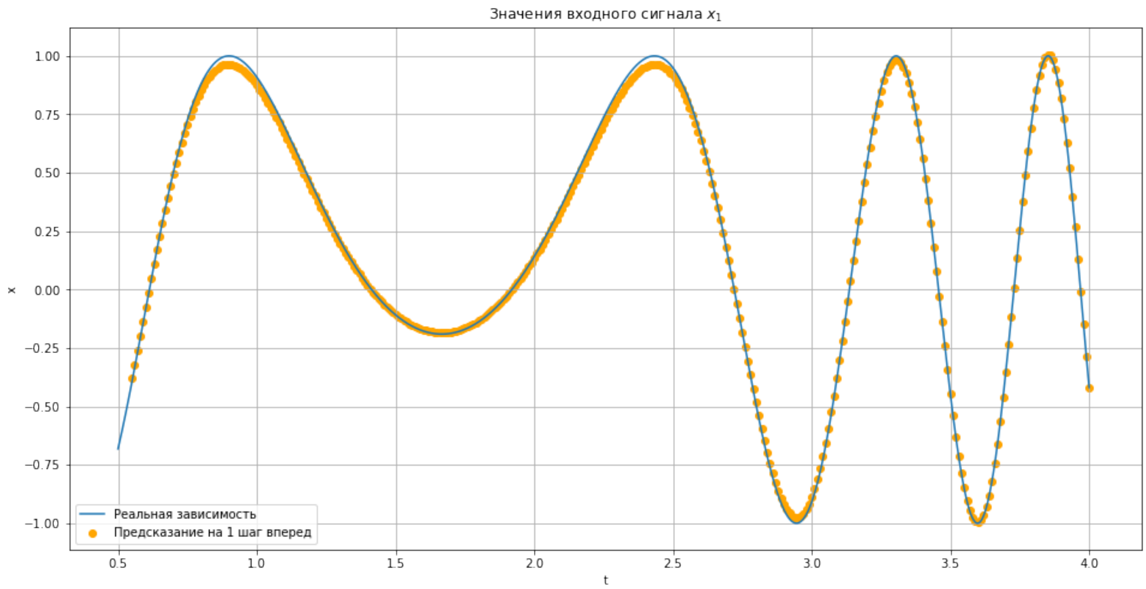
2 Ход работы

Я сгенерировал обучающее множество на основе заданного шага и интервала значений t и передал его для обучению модели фильтратора, который был инициализирован значениями, требуемыми по заданию:

```
T = np.append(np.arange(*t_lim1, h1), t_lim1[1])
X = x1_t(T)

D = 5
steps = 50
learn_rate = 0.01

model = Filtrator(D, False, steps, learn_rate).fit(X)
print(model.display())

>>> TDL(5) --> Input(n,5) --> Linear_Layer(1) --> Output(n, 1) -->
```

Далее я инициализировал модель первыми $D = 5$ значениями и сделал одношаговый прогноз на обучающих данных, после чего сравнил полученный результат с эталонным:

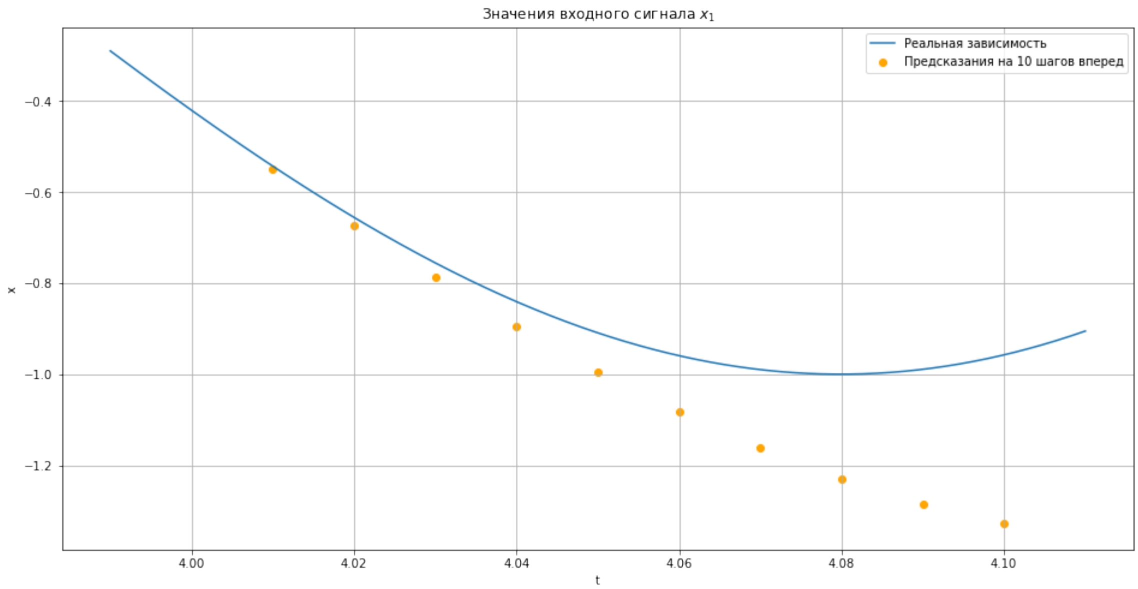
```
X_init = X[:D - 1]
X_test = X[D - 1:-1]
X_ans = X[D:]

model.tdl_init(X_init)
X_pred = model.predict(X_test)

t = np.arange(*t_lim1, 0.0001)
x = x1_t(t)
plt.figure(figsize=(16, 8))
plt.plot(t, x, label=" ")
#plt.scatter(T, X, label=" ")
plt.scatter(T[D:], X_pred, color="orange", label="  1  ")
plt.title("   $x_1$")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("x")
plt.grid()
plt.legend()

print("RMSE =", model.score_value(X_ans, X_pred))

>>> RMSE = 0.01860670996085224
```



Далее для второго задания я практически полностью повторил описанные выше шаги (только с другими парпаметрами модели, требуемыми по заданию), после чего попробовал сделать многошаговый прогноз за пределы заданного интервала на $K = 10$ шагов вперед:

```
K = 10
X_pred = np.array(list(model.gen_values(K)))

T_pred = []
for i in range(1, K + 1):
    T_pred.append(t_lim1[1] + i*h1)

T_pred = np.array(T_pred)
X_ans = x1_t(T_pred)

t = np.arange(t_lim1[1] - h1, t_lim1[1] + h1*11, 0.0001)
x = x1_t(t)
plt.figure(figsize=(16, 8))
plt.plot(t, x, label=" ")
#plt.scatter(T, X, label=" ")
plt.scatter(T_pred, X_pred, color="orange", label="  10  ")
plt.title("   $x_1$")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("x")
plt.grid()
plt.legend()

print("RMSE =", model.score_value(X_ans, X_pred))

```

```
>>> RMSE = 0.18256148130858663
```



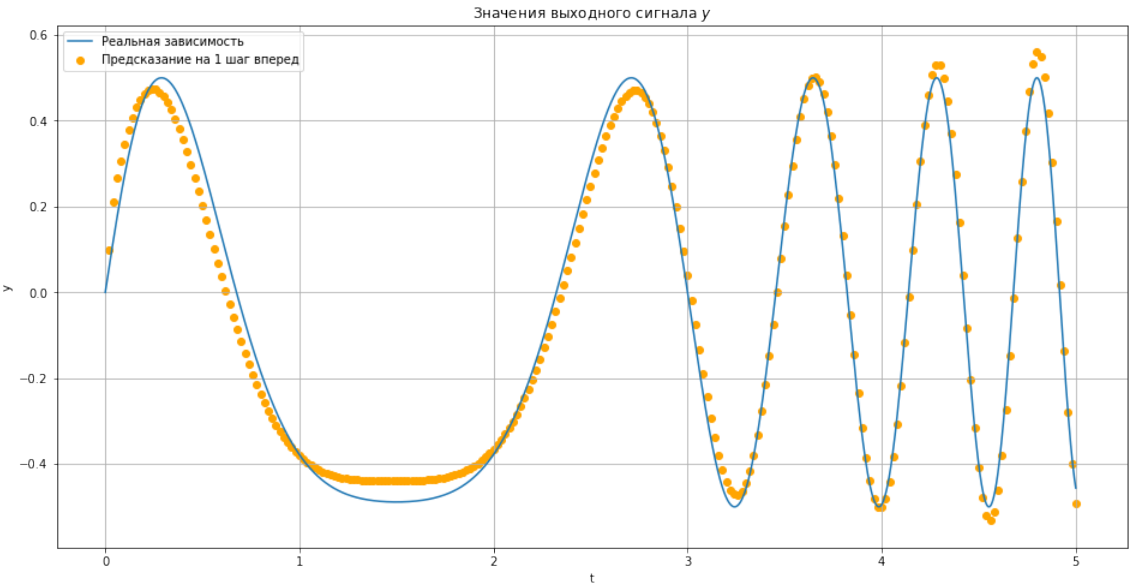
После этого я перешел к последнему заданию, в котором в качестве входных данных для обучения я использовал входное множество №2, дополненное нулями для генерации в качестве входов для линейного слоя не задержки, а погружение временного ряда. В качестве целевой переменной выступает не значение следующего по порядку входного сигнала, а значениие шумового выходного сигнала. В остальном же обучение фильтра мало чем отличается от обучения в первых двух заданиях:

```
T = np.append(np.arange(*t_lim2, h2), t_lim2[1])
X = x2_t(T)
Y = y_t(T)

D = 4
steps = 500
learn_rate = 0.0025
stop_val = 10e-6

model = Filtrator(D, True, steps, learn_rate, stop_val).fit(X, Y)
```

Для предсказания шумового значения я инициализировал модель нулевыми значениями, после чего сделал предсказание модели и оценил его:

```
X_test = X[:-1]
X_ans = X[1:]
Y_ans = Y[1:]

model.tdl_init_zeros()

```

```
Y_pred = model.predict(X_test)

t = np.arange(*t_lim2, 0.0001)
x = y_t(t)
plt.figure(figsize=(16, 8))
plt.plot(t, x, label=" ")
#plt.scatter(T, X, label=" ")
plt.scatter(T[1:], Y_pred, color="orange", label="  1  ")
plt.title("   $y$")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("y")
plt.grid()
plt.legend()

print("RMSE =", model.score_value(Y_ans, Y_pred))

>>> RMSE = 0.041820303477404716
```



3 Выводы

Выполнив вторую лабораторную работу по курсу «Нейроинформатика», я узнал о линейных слоях, правилах их обучения, а также узнал где и как они применяются на примере создания адаптивного фильтратора.

Полученные результаты сообщают, что рассматренная нами модель хорошо справляется с одношаговыми прогнозами, но начинает терять динамику изменения функции при небольшом увеличении шагов предсказания. Это связанно во многом с тем, что обученная по четырёхточечному входу модель научиась определять первую производную прогнозируемой функции (что видно по совпадающему направлению прогнозируемых точек) и слабо определять характер второй (это видно по изменению направления последних точек предсказания), но не может по 4 входным точкам определять зависмость в целом. Недаром для аппроксимации первых производных используют трехточечные схемы.

Линейный слой наиболее поход на современные слои нейронных сетей, в том числе алгоритмом Уидроу-Хоффа обучения, который очень напоминает стохастический градиентный спуск.

Эта работа была интересной, но оказалась не такой простой, как первая лабораторная, но я с ней справился, и в будущем я ожидаю более трудных и интересных задач.