МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

Похачевский Даниил Андреевич

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ (2 СЕМЕСТР)

Специальность 10.05.01 —
«Компьютерная безопасность [б]»

Собственные решения задач из задания

Иваново — 2016

Оглавление

Аннотация

Это моё второе задание по линейной алгебре. Летом, когда делать было совсем нечего - решил его затехать. Все равно (рано или поздно... лучше раньше) пришлось бы нарабатывать опыт в $\LaTeX$. Не знаю, хорошо ли получилось - первокурсники, думаю, оценят. Если кому-нибудь будет интересно, сколько это заняло времени, или кто-то захочет исправить опечатки - пишите письма (мелким почерком) на daniek9898@gmail.com. Желаю успехов в изучении линейной алгебры!

I. Структура линейного преобразования

1. Собственные векторы, собственные значения, диагонализируемость

24.13

$det(A - \lambda E) = 0 \Longleftrightarrow (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_{2k+1} - \lambda) = 0$ -
многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами $\Rightarrow$
$\exists n = \overline{1{,}2k+1} : \lambda_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ хотя бы один собственный вектор

24.14(1,2)

$\chi_\varphi(\lambda)$ - не зависит от выбора базиса.
$\triangleright$
$\varphi \underset{e,e}{\longmapsto} A \qquad |A - \lambda E| =^{?} |A' - \lambda E|$
$\varphi \underset{e',e'}{\longmapsto} A' \qquad A' = S^{-1}AS$
$\underline{|A' - \lambda E|} = |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}AS - S^{-1}(\lambda E)S| = |S^{-1}(A - \lambda E)S| = |S^{-1}| \cdot |S||A - \lambda E| = \underline{|A - \lambda E|}$
$|A - \lambda E| = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}tr(A)\cdot\lambda^{n-1} + \dots + det(A)$
по т. Виета: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = tr(A) \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = det(A) \end{cases}$

$\square$

24.18(2)

$L = L' \oplus L'', \lambda, V_\lambda -?$
Доказать, что φ имеет базис из собственных векторов.
2) φ - отражение в подпространство L' параллельно L''
$\forall a \in L$
$\varphi : L \longmapsto L \quad \varphi(a) = a_1 - a_2$, где $a_1 = proj_{L'}(a) \parallel L''$, $a_2 \in L''$
Пусть $L' = < e_1, \dots, e_k >$, $L'' = < e_{k+1}, \dots, e_n >$
$L = L' \oplus L'' = < e_1, \dots, e_n >$
$\varphi(e_1) = e_1; \quad \varphi(e_{k+1}) = -e_{k+1};$
$\vdots \qquad\qquad \vdots$
$\varphi(e_k) = e_k; \quad \varphi(e_n) = -e_n.$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow \exists$ базис из собственных векторов: $e = (e_1, \ldots, e_n)$;
$V_{\lambda_i} =< e_i >$

24.20(3)

$23.9(3) : \lambda, V_\lambda, diag(A) - ?$
φ - ортогональное проектирование V_3 на $L : x + y + z = 0$

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - pr_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} - \frac{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{n})}{\overrightarrow{n}^2} \overrightarrow{n}$$

Пусть в V_3 - ОНБ $e = (e_1, e_2, e_3)$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \; \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \; \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$A_\varphi = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$det(A - \lambda E) = 0 \Longleftrightarrow -27(1 - \lambda)^2 \lambda = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right.$$

$1)\lambda_1 = 1$

$A - E = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1| & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$V_{\lambda_1} =< \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} >$

2) $\lambda_2 = 0$

$A \sim \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$V_0 =< \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} >$

А в базисе $\left(\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right)$ матрица преобразования имеет вид: $diag(1, 1, 0)$

24.30(22, 29)

λ, $max\,dim(V_\lambda)$; если есть базис из с.в., то - матрица преобразования и геометрический смысл

22) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

$\chi_\varphi(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow det\begin{pmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix} = -\lambda(1+\lambda)^2 = 0$

$\left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = -1\end{array}\right.$

1) $\lambda_1 = 0$

$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow$

$V_{\lambda_0} =< \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} >, \quad dim(V_{\lambda_0}) = 0$

2) $\lambda_2 = -1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$V_{\lambda_2} =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$, $dim(V_{\lambda_2}) = 1 \Longrightarrow$ Нет базиса из собственных векторов.

29) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

$det(A - \lambda E) = 0 \Longleftrightarrow det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (\lambda - 1)(49 - \lambda^2 - 120 + 72) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda^2 = 1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}\right.$

1) $\lambda_1 = 1$

$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow V_{\lambda_1} =< \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$

2)$\lambda_2 = -1$

$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 5 & -9 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$V_{\lambda_2} =< \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} >$

$A = diag(1, 1, -1)$ в базисе $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$

24.42(1,2)

Оператор дифференцирования D. Найти собственные значения.

1) $P^n =< 1, x, \dots, x^n >$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$

$$A_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda E) = 0 \Longleftrightarrow det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\Longleftrightarrow (-1)^n \lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ - собственное значение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$V_\lambda =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} >$ - собственное подпространство

24.53

$\mathbb{M}_{n\times n}; \tau : A \longmapsto A^T$
$\tau-$ линейное, $\tau^2 = \iota$; λ, V_λ - ?
Доказать, что: $\mathbb{R}_{n\times n} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_m}$.
$\triangleright$ линейность - очевидна. по определению: $A^T = \lambda A$
1) на главной диангонали A $\exists a_{ii} \neq 0$.
тогда рассмотрим $\lambda = 1 : A^T = A$;
тогда возьмем стандартный базис в пространстве симметрических матриц $n \times n$
2) $\forall i\, a_{ii} = 0$;
$A^T = \lambda A$
Пусть $\exists i,j \in \mathbb{N}$:
$a = a_{ij} \neq 0$; $b = a_{ji} \neq 0$

Тогда:

$$\left.\begin{aligned} a = a^* = \lambda b \\ b = b^* = \lambda a \end{aligned}\right\} \Longrightarrow ab = \lambda^2 ab \Longrightarrow \lambda^2 = 1 \Longrightarrow \left[\begin{aligned} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{aligned}\right.$$

2.1) $\lambda_1 = 1$ - рассмотрено ранее
2.2) $\lambda_2 = -1 : A = -A^T$ - тогда рассмотрим базис в пространстве кососимметрических матриц $n \times n$.
Теперь разберемся с прямой суммой.
3) $A \in \mathbb{M}_{n\times n},\ B \in \mathbb{M}^+_{n\times n},\ C \in \mathbb{M}^-_{n\times n}$
$A = B + C$

$$\begin{cases} a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \\ a_{ji} = b_{ij} - c_{ij} \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} b_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \\ c_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} \end{aligned}$$

$B = \dfrac{A + A^T}{2}$
$C = \dfrac{A - A^T}{2}$

□

2. Инвариантные подпространства

24.69

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ - инвариантные подпространства относительно φ :
$\varphi(U_i) \subset U_i$
$\triangleright\ (U_1 + U_2 + \cdots + U_n) \supset \varphi(U_1 + U_2 + \cdots + U_n)$
$x \in U_1 \quad \varphi(x) \in U_1 \quad U_1 =< e_1, \ldots, e_k >$
$x \in U_2 \quad \varphi(x) \in U_2 \quad U_1 =< e_{k+1}, \ldots, e_m >$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
$x \in U_n \quad \varphi(x) \in U_n \quad U_n =< e_{l+1}, \ldots, e_n >$
$x \in (U_1 + U_2 + \cdots + U_n) \Longleftrightarrow x \in < e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_m, \ldots, e_{l+1}, \ldots, e_n >$
$\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(e_i) + \cdots + \sum\limits_{i=l+1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i),$
где каждая из сумм принадлежит соответственному U_i
$\Longrightarrow \varphi(x) \in (U_1 + U_2 + \cdots + U_n).$

□

24.70

$\varphi \in L(V,V)$
Доказать: $\forall U \leqslant V : Im\varphi \subset U; U$ - инвариантно относительно φ
$\rhd \forall x \in U : x \in V \Longrightarrow \varphi(x) \subset \varphi(V) = Im\varphi \subset U$

$\square$

II. Билинейные и квадратичные функции

32.2(3)

$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

32.3(5)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$

32.7(6)

$5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$

$e_1^{'} = e_1 + e_2 - 2\sqrt{2}e_3;$
$e_2^{'} = e_1 - e_2;$
$e_3^{'} = \sqrt{2}e_1 + \sqrt{2}e_2 + e_3;$
$e^{'} = eS;$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 5 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^{'} = S^T B \overline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 5 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4\sqrt{2} \\ 4 & -4 & 0 \\ 7\sqrt{2} & 7\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

$B' \underset{e'}{\longleftrightarrow} 20{x_1'}^2 + 8{x_2'}^2 + 35{x_3'}^2$

32.8(3, 8, 13)

$$3)\ -x_1x_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow {x_1'}^2 - {x_2'}^2$$

$8)\ x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$5{x_1'}^2 - 3{x_2'}^2 - {x_3'}^2$

$13)\ x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 2x_4x_3 + 2x_3^2 + 3x_4^2$

$(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + 2x_4^2 = {x_1'}^2 + {x_2'}^2 + {x_3'}^2 + {x_4'}^2$

32.10(2, 6)

$2) x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 \longleftrightarrow x_1(y_1 - y_2) - x_2(y_1 - y_2) \longleftrightarrow x_1'y_1'$

$6) x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 \longleftrightarrow$

$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_3^2 =$

$= {x_1'}^2 + {x_2'}^2 + {x_3'}^2$

32.16

Доказать: $sign\Delta_n = (-1)^n \Longleftrightarrow$ квадратичная форма отрицательно определена.

$\rhd$ k - отрицательно определена $\Longleftrightarrow b = -k$ - положительно определена

$$\exists \underset{e \longrightarrow e'}{S} : k \underset{e'}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_n \end{pmatrix}$$

$$b = -k \underset{e'}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -\gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_n \end{pmatrix} \text{ - положительно определена } \underset{\text{кр.Сильвестра}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases} |B_1'| > 0 \\ \quad\vdots \\ |B_n'| > 0 \end{cases} \quad |B_1'| > 0 \iff |B_1| > 0 \Longrightarrow -\gamma_1 > 0 \Longrightarrow |B_1| = \gamma_1 < 0$$

$\vdots$

$|B_n'| > 0 \iff |B_n| > 0 \Longrightarrow (-1)^n\gamma_1 \cdots \gamma_n > 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow sign|B_n| = sign(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = (-1)^n$

$\square$

III. Евклидовы пространства

1. Матрица Грама, ортоганальное дополнение, проекция, ортогонализация

25.7

$f, g \in \underset{[-1;1]}{C}$

$(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} fgdt$ - доказать, что это скалярное произведение

$\rhd(f,g) = (g, f)$ – очевидно

$(f_1 + f_2, g) = \int\limits_{-1}^{1} (f_1 + f_2)gdt = \int\limits_{-1}^{1} f_1 gdt + \int\limits_{-1}^{1} f_2 gdt = (f_1,g) + (f_2, g)$

$(\lambda f,g) = \int\limits_{-1}^{1} \lambda fgdt = \lambda \int\limits_{-1}^{1} fgdt = \lambda(f,g)$

$\square$

25.25(1)

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(a, b) = X^T G\overline{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

25.23

$e = (e_1 \dots e_n), \forall x \in V : (x, x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$
Доказать : e – ОНБ

$$\rhd \quad k \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_k,$$

$$(e_k, e_k) = \begin{pmatrix} 0 & \dots 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} g_{ik} = 1 - \forall k = \overline{1,n}$$

$\sum\limits_{i=1}^{n}(e_i, e_k) = 1 \Longleftrightarrow (e_1 + \dots + e_{k-1} + e_{k+1} + \dots + e_n, e_k) + (e_k, e_k) = 1$
$\Longrightarrow (e_1, e_k) + \dots + (e_{k-1}, e_k) + (e_{k+1}, e_k) + \dots + (e_n, e_k) = 0$
$\Longrightarrow (e_i, e_k) = \delta_{ik}\ \forall i,k \in \overline{1,n}$
$\Longrightarrow G = E_n \Longrightarrow e -$ ОНБ.

$\square$

26.13(4)

$e -$ ОНБ

$$L = < \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} >$$

а)матрица $L^{\perp}$?
б)базис $L^{\perp}$?

$\rhd$ а) Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in L^{\perp}$

$$\begin{cases} (x, a_1) = 0 \\ (x, a_2) = 0 \\ (x, a_3) = 0 \\ (x, a_4) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 15 & 5 & -10 \\ 2 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix};$

базис : $< \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} >$.

26.14(4)

Найти $L^{\perp}$.

$L = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -6 & 11 \\ 5 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 8 & 7 & 15 \end{pmatrix}$

Вполне очевидно, что строки порождающей системы будут являться координатными стоблцами векторов, образующих $L^{\perp}$. Поэтому:

$L^{\perp} =< \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} >$

Нужно выделить линейно независимую систему векторов из этой линейной оболочки. Это и будет искомый базис.

$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -6 & 11 \\ 5 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 8 & 7 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -39 & -39 & -72 \\ 0 & 13 & 13 & 4 \\ 1 & 8 & 7 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & 15 \\ 0 & 13 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ очевидно, что ранг данной матрицы $= 3$. Значит, исходная система линейно независимая, и ее можно принять за базисную.

26.27(3)

$3) e - \text{ОНБ}, L \leqslant V$

$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, L =< a_1 >$

$x = e\xi; \ \xi = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} >$.

Найти : $x^{\perp} \in L^{\perp}, x^{\shortparallel} \in L$

$\rhd \ x = x^{\perp} + x^{\shortparallel}$

$(x, a_1) = (x^{\shortparallel}, a_1) + (x^{\perp}, a_1) = (x^{\shortparallel}, a_1)$

$x^{\shortparallel} \in L \Longrightarrow x^{\shortparallel} = \alpha a_1$

$(x^{\shortparallel}, a_1) = \alpha(a_1, a_1) = (x, a_1) \Longrightarrow \alpha = \dfrac{(x, a_1)}{(a_1, a_1)} = \dfrac{20}{10} = 2$

$$x^{\perp} = x - x^{\shortparallel} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$x^{\shortparallel} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \square$$

26.28(4)

$4) e$ – ОНБ, $L \leqslant V$

$L = \{\xi : A\xi = 0\},\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$x = e\xi;\ \xi = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Найти : $x^{\perp} \in L^{\perp}, x^{\shortparallel} \in L$

$\rhd$ очевидно, исходя из задания $L, L^{\perp} = < \overset{a_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{a_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}} >$

$x = x^{\perp} + x^{\shortparallel}$

$x^{\perp} = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$

$(x^{\perp}, a_i) = \alpha_1(a_1, a_i) + \alpha_2(a_2, a_i) = (x, a_i)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (x, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1) \\ (x, a_2) = \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 39 & 52 & 78 \\ 52 & 71 & 104 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 6 \\ 52 & 71 & 104 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & 2 \\ 1 & \frac{71}{52} & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & 2 \\ 0 & \frac{5}{156} & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$x^{\perp} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \in L^{\perp}$$

$$x^{\shortparallel} = x - x^{\perp} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in L^{\shortparallel}$$

$\square$

26.42(4)

4) $\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \end{array}$

$h_1 = e_1$

$h_2 = e_2 - \dfrac{(e_2, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1$

$h_3 = e_3 - \dfrac{(e_3, h_2)}{(h_2, h_2)} h_2 - \dfrac{(e_3, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1$

$h_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$

26.44(4)

4) $\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \\ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \end{array} \quad G = A_{207} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$h_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(e_2, h_1) = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$

$(e_3, h_1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 24 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$

$$(h_1,h_1)=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=2$$

$$h_2=\begin{pmatrix}-8\\ 5\\ 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$(h_2,h_2)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=11$$

$$(e_3,h_2)=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 24 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=-22$$

$$h_3=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\ -8\\ -3\end{pmatrix}$$

$$(h_3,h_3)=\begin{pmatrix}19 & -8 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\ -8\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\ -8\\ -3\end{pmatrix}=22$$

$$\widetilde{h_1}=\frac{1}{|h_1|}h_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{h_2}=\frac{1}{|h_2|}h_2=\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{h_3}=\frac{1}{|h_3|}h_3=\frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}19\\ -8\\ -3\end{pmatrix}$$

T.9

$G=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ −может ли быть матрицей Грамма в каком-либо базисе?

$detG<0\Rightarrow G$ - не положительно определена, значит не может быть матрицей Грамма

2. Линейные преобразования евклидовых пространств. Самосопряженные и ортогональные преобразования

28.34(1)

Пусть $L \subset V$ - инвариантно относительно φ
Доказать: $L^{\perp}$ - инвариантно относительно φ^*

$\triangleright$ φ^* – сопряженное преобразование для φ
$(x, \varphi(y)) = (\varphi^*(x), y)$
$\forall y \in L : \quad \varphi(y) \subset L$
$\forall x \in L^{\perp} :$
$(x, \varphi(y)) = 0 = (\varphi^*(y), y) \Rightarrow \varphi^*(x) \in L^{\perp}$

$\square$

Т.11

1)$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
Предположим, что данная матрица действительно является матрицей с/с преобразования. Тогда, по основной теореме о с/с преобразованиях, у него должен существовать ОНБ из собственных векторов.
$det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 1+(1-\lambda)^2 = 0$ - нет корней $\Rightarrow$ предположение не верно; не может.
2)$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
$\chi_{\varphi}(\lambda) = 0$
$(2-\lambda)(4-\lambda) + 1 = 0$
$(\lambda - 3)^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 3$
Найдем собственные вектора:
$\lambda = 3 :$
$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{\lambda} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$ – собственное подпространство,
$dim V_{\lambda} = 1$
Но, алгебраическая кратность корня = 2
$\Longrightarrow \nexists$ базиса из собственных векторов $\Longrightarrow$ не может быть матрицей с/с преобразования.

29.19(4,8)

Найти матрицу перехода к ОНБ из собственных векторов
4)$A_{47} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

$\chi_\varphi(\lambda) = 0$
$(5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0$
$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$
$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = 4 \end{array}\right.$
$\lambda_1 = 9 : \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\lambda_2 = 4 : \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
очевидно, что $e_1 \perp e_2$
отнормируем найденный базис:
$h_1 = \frac{1}{|e_1|} e_1 = \frac{1}{\sqrt{1+4}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
$h_2 = \frac{1}{|e_2|} e_2 = \frac{1}{\sqrt{4+1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
$A' = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе (h_1, h_2)
$8) A_{280} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi_\varphi(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow$
$-\lambda(-\lambda(8-\lambda) - 4) - 2(-2\lambda - 2) + (4 - (8-\lambda)) = 0$
$-\lambda^3 + 8\lambda^2 + 4\lambda + 4\lambda + 4 + 4 - 8 + \lambda = 0$
$\lambda^3 - 8\lambda^2 - 9\lambda = 0$
$\lambda(\lambda+1)(\lambda-9) = 0$
$\left[\begin{array}{c} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 9 \end{array}\right.$
$1) \lambda_1 = 0$
$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$2) \lambda_2 = -1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3)$\lambda_3 = 9$

$$\begin{pmatrix} -9 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 0 & -5 & 20 \\ 0 & 20 & -80 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

У с/с преобразований собственные подпространства взаимно ортоганальны поэтому остается только отнормировать вектора:

$$h_1 = \frac{1}{|e_1|} e_1 = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h_2 = \frac{1}{|e_2|} e_2 = \frac{1}{\sqrt{1+1}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_3 = \frac{1}{|e_3|} e_3 = \frac{1}{\sqrt{1+16+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -3 & 1 \\ -1\sqrt{2} & 0 & 4 \\ 2\sqrt{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ в базисе } (h_1, h_2, h_3)$$

29.47(2,3)

φ переводит столбцы м. A в столбцы м. B

φ – ортоганальное?

2)$A = A_{44}, B = A_{34}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \varphi(x) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \varphi(y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(x, y) = -1; \quad (\varphi(x), \varphi(y)) = 3 \Longrightarrow \varphi -$ не ортоганальное преобразование

$$3)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$
\left.\begin{array}{llll}
x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\longrightarrow\varphi(x)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}(x,y)=0\\(\varphi(x),\varphi(y))=0\end{array} & \begin{array}{c}(x,x)=2\\(\varphi(x),\varphi(x))=2\end{array}\\
y\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\longrightarrow\varphi(y)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}(y,z)=9\\(\varphi(y),\varphi(z))=9\end{array} & \begin{array}{c}(y,y)=3\\(\varphi(y),\varphi(y))=3\end{array}\\
z\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix}\longrightarrow\varphi(y)\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix} & \begin{array}{c}(x,z)=3\\(\varphi(x),\varphi(z))=3\end{array} & \begin{array}{c}(z,z)=45\\(\varphi(z),\varphi(z))=45\end{array}
\end{array}\right|\Longrightarrow
$$

φ – ортоганальное преобразование

3. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах

32.27(3,19)

$$3)7x_1^2+4\sqrt{3}x_1x_2+3x_2^2=7(x_1^2+2\frac{2\sqrt{3}}{7}x_1x_2+\frac{12}{49}x_2^2)+\frac{9}{7}x_2^2=$$

$$=7(x_1+\frac{2\sqrt{3}}{7}x_2)^2+\frac{9}{7}x_2^2=7{x_1'}^2+9{x_2'}^2$$

$$A'=\begin{pmatrix}7&0\\0&9\end{pmatrix},S=\begin{pmatrix}\sqrt{7}&0\\\frac{2\sqrt{3}}{7}&\frac{1}{\sqrt{7}}\end{pmatrix}$$

$$19)2x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3+6x_2^2-6x_2x_3+2x_2x_4+6x_3^2+2x_3x_4+4x_4^2$$

Будем выполнять элем. преобразования строк-стоблцов
для приведения к диагональному виду

$$\begin{pmatrix}2&-2&2&0\\-2&6&-3&1\\2&-3&6&1\\0&1&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&4&-1&1\\2&-1&6&1\\0&1&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&4&-1&1\\0&-1&4&1\\0&1&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&4&0&1\\0&0&\frac{15}{4}&\frac{5}{4}\\0&1&\frac{5}{4}&4\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&\frac{15}{4}&\frac{5}{4}\\0&0&\frac{5}{4}&\frac{15}{4}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&\frac{15}{4}&0\\0&0&0&\frac{10}{3}\end{pmatrix}$$

Для нахождения базиса выполним те же преобразования стобцов над единичной матрицей

$$S = ES_1\dots S_k : \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-\frac{3}{4}&0\\0&1&\frac{1}{4}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&-\frac{3}{4}&0\\0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&1\end{pmatrix} = S$$

32.33(4)

$G = A_{207}$
$b : 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$
Найти матрицу присоединенного преобразования.
$\triangleright A-$ матрица присоединенного преобразования к билиннейной функции b
Тогда, $b(x,y) = (x, A(y)) \Longrightarrow B = GA \Longrightarrow A = G^{-1}B$

$$B = \begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}$$

Заметим хитрость: элементарное преобразование строк равносильно домножению слева на соответствующую элементраную матрицу.
Тогда: $(G|B) \underset{\text{элем.преобр.}}{\rightsquigarrow} (E|G^{-1}B)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&-1\\2&5&-2&2&-1&2\\0&-2&5&-1&2&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&-1\\0&1&-2&-2&-5&4\\0&1&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&-1&-1\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&-1\\0&1&-2&-2&-5&4\\0&0&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&4&-5\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&-1\\0&1&0&-12&-21&24\\0&0&1&-5&-8&10\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&26&44&-49\\0&1&0&-12&-21&24\\0&0&1&-5&-8&10\end{array}\right)$$

$$\text{Ответ} : A = \begin{pmatrix}26&44&-49\\-12&-21&24\\-5&-8&10\end{pmatrix}$$

$\square$

32.36(5,8)

5) $f = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$
$g = 17x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$
$f : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
Миноры $g : 17; 1 \Longrightarrow g -$ положительно определена
Примем g за м.Грамма $- G$
$det(F - \lambda G) = 0$ – обобщенное характеристическое уравнение
$$det \begin{pmatrix} 1 - 17\lambda & -1 - 4\lambda \\ -1 - 4\lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 1 - 17\lambda - \lambda + 17\lambda^2 - 1 - 16\lambda^2 - 8\lambda = \lambda(\lambda - 26)$$
$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 26 \end{array} \right.$$
$1)\lambda_1 = 0 : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$2)\lambda_2 = 26 : \begin{pmatrix} 1 - 17 \cdot 26 & -1 - 4 \cdot 26 \\ -1 - 4 \cdot 26 & 1 - 26 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -105 & -25 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 21 \end{pmatrix}$
$$(a_1, a_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 26$$
$$(a_2, a_2) = \begin{pmatrix} -5 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 21 \end{pmatrix} = 26$$
$$a_1^{'} = \frac{a_1}{|a_1|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$a_2^{'} = \frac{a_2}{|a_2|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 21 \end{pmatrix}$$
В этом базисе:
$$F^* \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$$
$$G^* \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$S = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}$$
8) $f = (1 + 2m\sqrt{a^2 + a})x_1^2 + 2\sqrt{a^2 + a}x_1x_2$
$g = (1 + m^2)x_1^2 + 2mx_1x_2 + x_2^2,\ m, a \in \mathbb{R};\ a^2 + a \geqslant 0$

$$f : \begin{pmatrix} 1 + 2m\sqrt{a^2 + a} & \sqrt{a^2 + a} \\ \sqrt{a^2 + a} & 0 \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} 1 + m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$$
Миноры $g : 1 + m^2; 1 \Longrightarrow g -$ положительно определена
Примем g за м.Грамма $- G$

$det(F-\lambda G)=0$ – обобщенное характеристическое уравнение
$det\begin{pmatrix}1+2m\sqrt{a^2+a}-\lambda-\lambda m^2 & \sqrt{a^2+a}-\lambda m\\ \sqrt{a^2+a}-\lambda m & -\lambda\end{pmatrix} = -\lambda-2m\lambda\sqrt{a^2+a}+$
$\lambda^2(1+m^2)-(a^2+a+\lambda^2m^2-2\lambda m\sqrt{a^2+a})=\lambda^2-\lambda-a^2-a=$
$=(\lambda-a)(\lambda+a)-(\lambda+a)=(\lambda+a)(\lambda-a-1)$
$\left[\begin{array}{l}\lambda_1=-a\\ \lambda_2=a+1\end{array}\right.$
$1)\lambda_1=-a:\begin{pmatrix}1+2m\sqrt{a^2+a}+a(1+m^2) & \sqrt{a^2+a}+am\\ \sqrt{a^2+a}+am & a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\sqrt{a^2+a}+am & a\end{pmatrix}\Longrightarrow$
$a_1=\begin{pmatrix}-a\\ \sqrt{a^2+a}+am\end{pmatrix}$
$2)\lambda_2=a+1:\begin{pmatrix}1+2m\sqrt{a^2+a}-(a+1)(1+m^2) & \sqrt{a^2+a}-(a+1)m\\ \sqrt{a^2+a}-(a+1)m & -(a+1)\end{pmatrix}\sim$
$\begin{pmatrix}\sqrt{a^2+a}-m(a+1) & -(a+1)\end{pmatrix}\Longrightarrow a_2=\begin{pmatrix}a+1\\ \sqrt{a^2+a}-m(a+1)\end{pmatrix}$
$(a_1,a_1)=\begin{pmatrix}-a & \sqrt{a^2+a}+am\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+m^2 & m\\ m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a\\ \sqrt{a^2+a}+am\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}-a+m\sqrt{a^2+a} & \sqrt{a^2+a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a\\ \sqrt{a^2+a}+am\end{pmatrix}=a(2a+1)$
$(a_2,a_2)=\begin{pmatrix}a+1 & \sqrt{a^2+a}-m(a+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+m^2 & m\\ m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+1\\ \sqrt{a^2+a}-m(a+1)\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}a+1+m\sqrt{a^2+a} & \sqrt{a^2+a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+1\\ \sqrt{a^2+a}-m(a+1)\end{pmatrix}=2a^2+3a+1=$
$(a+1)(2a+1)$
$a_1^{'}=\dfrac{a_1}{|a_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{a(2a+1)}}\begin{pmatrix}-a\\ \sqrt{a^2+a}+am\end{pmatrix}$
$a_2^{'}=\dfrac{a_2}{|a_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{(a+1)(2a+1)}}\begin{pmatrix}a+1\\ \sqrt{a^2+a}-m(a+1)\end{pmatrix}$
В этом базисе:
$F^*\longleftrightarrow\begin{pmatrix}-a & 0\\ 0 & a+1\end{pmatrix}$
$G^*\longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$S=\dfrac{1}{\sqrt{2a+1}}\begin{pmatrix}-\sqrt{a} & \sqrt{a+1}\\ \sqrt{a+1}+m\sqrt{a} & \sqrt{a}-m\sqrt{a+1}\end{pmatrix}$

32.39(2)

$f = 89x_1^2 - 42x_1x_2 + 5x_2^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 89 & -21 \\ -21 & 5 \end{pmatrix}$

$g = 41x_1^2 - 18x_1x_2 + 2x_2^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 41 & -9 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$

Миноры $g : 41; 1 \Longrightarrow g -$ положительно определена

Примем g за м.Грамма $- G$

$det(F - \lambda G) = 0\ -$ обобщенное характеристическое уравнение

$det \begin{pmatrix} 89 - 41\lambda & -21 + 9\lambda \\ -21 + 9\lambda & 5 - 2\lambda \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$

$(89 - 41\lambda)(5 - 2\lambda) - (9\lambda - 21)^2 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \end{array}\right.$

$F^* \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$G^* \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$