SI 3 — **Année 2007-2008**
Informatique théorique — **Langages Formels et Automates**

Grammaires et automates à piles

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}10

28 avril 2008

1. $M = [Q = \{q\}, \Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{A, S\}, q, \emptyset, S, \delta]$ avec la table de transition :

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q	a	S	q	AA
q	a	A	q	S
q	b	A	q	S
q	a	A	q	$-$

2. Une grammaire intuitive (on construit l'égalité du centre vers les extrémités) est la suivante :

$N = \{S\},\ T = \{1, 2, =, +\},\ S$

$P\ \{\ S \rightarrow 1 + S + 1 \mid 1 + 1 + S + 2 \mid 2 + S + 1 + 1 \mid 2 + S + 2 \mid 1 = 1 \mid 1 + 1 = 2 \mid 2 = 1 + 1 \mid 2 = 2$

Hélas elle ne permet pas de reconnaître un mot comme $1 + 2 + 2 = 2 + 1 + 2$. On la corrige en la grammaire suivante :

$N = \{S, L, R\},\ T = \{1, 2, =, +\},\ S$

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 1 + S + 1 \mid 2 + S + 2 \mid 1 + L + 2 \mid 2 + R + 1 \mid 1 = 1 \mid 1 + 1 = 2 \mid 2 = 1 + 1 \mid 2 = 2 \\ L \rightarrow 1 + S \mid 2 + R \mid 2 = 1 \\ R \rightarrow S + 1 \mid L + 2 \mid 1 = 2 \end{array} \right.$$

Pour construire un automate à pile nous utilisons la grammaire suivante obtenue à partir de la grammaire intuitive :

$N = \{S, L, P, U, R, E, D\},\ T = \{1, 2, =, +\},\ S$

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 1PSPU \mid 2PSPD \mid 1PLPD \mid 2PRPU \mid 1EU \mid 1PUED \mid 2EUPU \mid 2ED \\ L \rightarrow 1PS \mid 2PR \mid 2EU \\ P \rightarrow + \\ U \rightarrow 1 \\ R \rightarrow SPU \mid LPD \mid 1ED \\ E \rightarrow = \\ D \rightarrow 2 \end{array} \right.$$

Nous obtenons : $M = [\{q\}, \{1, 2, +, =\}, \{S, L, R, P, U, E, D\}, q, \emptyset, S, \delta]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q	1	S	q	$PSPU$
q	2	S	q	$PSPD$
q	1	S	q	$PLPD$
q	2	S	q	$PRPU$
q	1	S	q	EU
q	1	S	q	$PUED$
q	2	S	q	$EUPU$
q	2	S	q	ED
q	1	L	q	PS

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q	2	L	q	PR
q	2	L	q	EU
q	ε	R	q	SPU
q	ε	R	q	LPD
q	1	R	q	ED
q	$+$	P	q	$-$
q	1	U	q	$-$
q	$=$	E	q	$-$
q	2	D	q	$-$

Remarque : Un automate à pile plus simple à obtenir est basé sur l'idée d'empiler la valeur du membre gauche de l'égalité. Ainsi on calcule la somme par le nombre de lettres empilées (c.a.d. pour un 1 on empile un symbole, pour un 2 deux symboles) :

$M = [\{q_0, q_1, q_2\}, \{1, 2, +, =\}, \{Z, X\}, q_0, \{q_1\}, Z, \delta]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	1	Z	q_0	XZ
q_0	2	Z	q_0	XXZ
q_0	$+$	X	q_0	X
q_0	1	X	q_0	XX
q_0	2	X	q_0	XXX

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	$=$	X	q_1	X
q_1	1	X	q_1	$-$
q_1	2	X	q_2	$-$
q_2	ε	X	q_1	$-$

Malheureusement cet automate présente quelques imprécisions. En effet, on peut avoir plusieurs "$+$" consécutifs. De même, on peut avoir plusieurs chiffres (1 ou 2) consécutifs. Par ailleurs, l'acceptation est compliquée, car se fait par état q_1 **et** pile ne contenant que Z. Comme il serait intéressant de vérifier le résultat, nous proposons de changer l'automate, pour obtenir :

$M = [\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{1, 2, +, =\}, \{Z, X, Y\}, q_0, \emptyset, Z, \delta]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	1	Z	q_0	YZ
q_0	2	Z	q_0	YXZ
q_0	$+$	Y	q_0	X
q_0	1	X	q_0	YX
q_0	2	X	q_0	YXX
q_0	$=$	Y	q_1	X

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_1	1	X	q_3	$-$
q_3	ε	X	q_1	Y
q_1	2	X	q_2	$-$
q_2	ε	X	q_3	$-$
q_1	$+$	Y	q_1	X
q_3	ε	Z	q_3	$-$

Observons que nous avons préferé introduire de nouveaux symboles plutôt que de nouveaux états pour faciliter une vérification.

3. On peut remarquer qu'un mot sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ appartient à L soit parce qu'il n'est pas un mot de $a^\star b^\star c^\star$, soit parce que les deux conditions requises ne sont pas respectées. Ainsi, on a :

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ avec $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i \geq j\}$, $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid j \geq k\}$, $L_3 = \{w \in (a+b+c)^\star \mid w \notin a^\star b^\star c^\star\}$.

Nous construisons d'abord des automates à pile pour chacun des trois langages.

- Pour L_1 : $M_1 = [\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{Z, A\}, q_1, \{q_3\}, Z, \delta_1]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_1	a	Z	q_1	AZ
q_1	a	A	q_1	AA
q_1	ε	A	q_2	A
q_1	ε	Z	q_2	Z

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_2	b	A	q_2	$-$
q_2	ε	A	q_2	$-$
q_2	ε	Z	q_3	Z
q_3	c	Z	q_3	Z

- Pour L_2 : $M_2 = [\{q_4, q_5\}, \{a, b, c\}, \{V, B\}, q_4, \{q_5\}, V, \delta_2]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_4	a	V	q_4	V
q_4	b	V	q_4	BV
q_4	b	B	q_4	BB

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_4	ε	V	q_5	V
q_4	ε	B	q_5	B
q_5	c	B	q_5	$-$

- Pour L_3 : $M_3 = [\{q_6, q_7, q_8, q_9\}, \{a, b, c\}, \{W\}, q_6, \{q_9\}, W, \delta_3]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_6	a	W	q_6	W
q_6	b	W	q_7	W
q_6	c	W	q_8	W
q_7	a	W	q_9	W
q_7	b	W	q_7	W
q_7	c	W	q_8	W

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_8	a	W	q_9	W
q_8	b	W	q_9	W
q_8	c	W	q_8	W
q_9	a	W	q_9	W
q_9	b	W	q_9	W
q_9	c	W	q_9	W

Ainsi nous obtenons l'automate à pile suivant :

$M = [\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9\}, \{a, b, c\}, \{X, Z, V, W, A, B\}, q_0, \{q_3, q_5, q_9\}, X, \delta]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	ε	X	q_1	Z
q_0	ε	X	q_4	V
q_0	ε	X	q_6	W
q_1	a	Z	q_1	AZ
q_1	a	A	q_1	AA
q_1	ε	A	q_2	A
q_1	ε	Z	q_2	Z
q_2	b	A	q_2	$-$
q_2	ε	A	q_2	$-$
q_2	ε	Z	q_3	Z
q_3	c	Z	q_3	Z
q_4	a	V	q_4	V
q_4	b	V	q_4	BV
q_4	b	B	q_4	BB
q_4	ε	V	q_5	V

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_4	ε	B	q_5	B
q_5	c	B	q_5	$-$
q_6	a	W	q_6	W
q_6	b	W	q_7	W
q_6	c	W	q_8	W
q_7	a	W	q_9	W
q_7	b	W	q_7	W
q_7	c	W	q_8	W
q_8	a	W	q_9	W
q_8	b	W	q_9	W
q_8	c	W	q_8	W
q_9	a	W	q_9	W
q_9	b	W	q_9	W
q_9	c	W	q_9	W