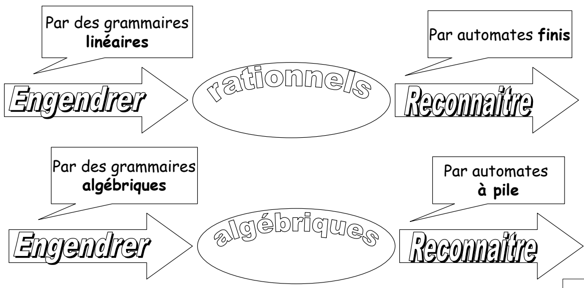
Automates à pile

Rationnels et Algébriques



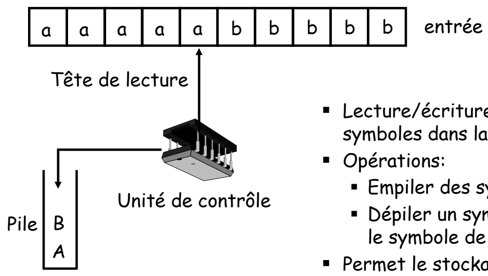
Automate Fini vs Automate à Pile

- Comparables aux AFND auxquels on a ajouté un composant supplémentaire : Une PILE
- La pile procure une mémoire additionnelle à celle finie de l 'unité de contrôle.
- On peut reconnaître les langages algébriques.

Théorème : Un langage est algébrique SSI il est reconnu par un automate à pile

- Permet de montrer l 'algébricité d 'un langage donné en sus de la construction d'une grammaire algébrique.

Schéma d'un Automate à pile



- Lecture/écriture de symboles dans la pile
- Opérations:
  - Empiler des symboles
  - Dépiler un symbole => Lire le symbole de sommet
- Permet le stockage de nombre illimité de symboles

Rappel

- Pourquoi un AF ne peut reconnaître $\{a^n b^n : n \geq 0\}$?
  - Impossibilité de mémoriser la valeur de n avec ses seuls états
  - On peut toujours trouver un mot trop grand qui « sature » la mémoire de l 'AF

- Alors qu'avec un AP peut mémoriser n dans sa pile et vérifier qu'il y a autant de a que de b.

Rappel

- **Scénario** :
  - À la lecture d'un a
    - Empiler un symbole
  - À la lecture du premier b
    - Dépiler un symbole et changer d'état
  - À la lecture d'un b
    - Dépiler un symbole

  - À la fin, la pile est vide.

Reconnaissance

- Comment AP accepte l'entrée ?
- À la fin de la lecture de l'entrée,
  - On est dans un état particulier
  - La pile est vide
- Deux manières de reconnaître un mot :
  - En atteignant un état de reconnaissance
  - Lorsque la pile est vide
- On verra l'équivalence de ces deux critères de reconnaissance.

7

Définition $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,i,Z,T)$

- Q : ensemble fini d'états
- Σ : alphabet fini des symboles d'entrée
- Γ : alphabet fini des symboles de pile
- i : état initial
- $Z\in\Gamma$: symbole de fond de pile
- $T\subseteq Q$: ensemble des états terminaux
- δ : $Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\to P(Q\times\Gamma^*)$

8

- $\delta : Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\to P(Q\times\Gamma^*)$

Lit l'état courant, le symbole courant, le sommet de la pile
- Renvoie un nouvel état, empile un mot
- La fonction de transition prend en compte
  - L 'état de l 'unité de contrôle
  - Le caractère lu par la tête de lecture
  - **Le** symbole au sommet de la pile
- Et doit pouvoir
  - Changer l 'état courant de l 'UC
  - Empiler **des** symboles

Remarque : L'image d 'un triplet (état, lettre, sommet de pile) est $P(Q\times\Gamma^*)$; on a donc un modèle a priori **non déterministe**

9

Déterminisme

Un AP est déterministe lorsque, à chaque instant, il n 'y a pas plus d'une transition applicable.

Plus formellement,

$\forall q\in Q$, $\forall Z\in\Gamma$, si $\delta(q,\varepsilon,Z)\neq\emptyset$, alors $\forall a\in\Sigma$, $\delta(q,a,Z)=\emptyset$

Retire le choix entre un déplacement indépendant de l'entrée et un déplacement consommant un symbole d 'entrée

$\forall q\in Q$, $\forall Z\in\Gamma$, $\forall a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$, $|\delta(q,a,Z)|<2$

Empêche d 'avoir un choix de déplacement pour un triplet donné.

10

Déterminisme

- Si, pour les AF, les AFD et les AFND acceptent les mêmes langages, ce n 'est plus vrai pour les AP
- Exemple :

  Le langage $\{ww^R : w\in\{0,1\}^+\}$ (palindromes)

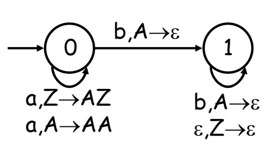
  Est accepté par un AP non déterministe

  N'est pas accepté par aucun AP déterministe

11

Exemple d'AP déterministe

état	lecture	pile	nouv. état	pile
0	a	Z	0	AZ
0	a	A	0	AA
0	b	A	1	ε
1	b	A	1	ε
1	ε	Z	1	ε

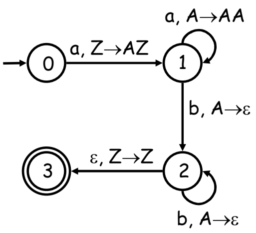


Reconnaît $\{a^nb^n : n>0\}$ par pile vide

12

Exemple d'AP déterministe

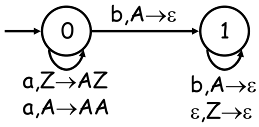
état	lecture	pile	nouv. état	pile
0	a	Z	1	AZ
1	a	A	1	AA
1	b	A	2	ε
2	b	A	2	ε
2	ε	Z	3	ε



Reconnaît $\{a^n b^n : n>0\}$ par état final (état 3)

Configuration et dérivation

- Une configuration représente
  - L'état courant, la partie du mot qui reste à lire, le contenu de la pile



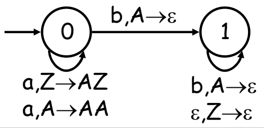
Exemple :
  - (0,aaabbb,Z) est la configuration initiale de notre exemple
  - (0,aabbb,AZ) est la configuration après une transition

Configuration et dérivation

- Une dérivation correspond à l'application de la fonction de transition
  - Entrée : une configuration
  - Sortie : {configurations} (l 'AP est a priori non déterministe)

    $(e,aw,P\gamma) \rightarrow (e',w,\alpha\gamma)$ Si $(e',\alpha) \in \delta(e,a,P)$

Exemple :
  - (0,aaabbb,Z)
  - (0,aabbb,AZ)
  - (0,abbb,AAZ)



Lecture d'un mot

Lecture = suite des configurations prises par l 'AP
  - Commence
    - Dans un état initial
    - Symbole de fond de pile
  - Termine soit
    - Dans un état terminal
    - Avec la pile vide

état	lecture	pile	nouv. état	pile
0	a	Z	0	AZ
0	a	A	0	AA
0	b	A	1	ε
1	b	A	1	ε
1	ε	Z	1	ε

$(0,aabb,Z) \rightarrow (0,abb,AZ) \rightarrow (0,bb,AAZ) \rightarrow (1,b,AZ) \rightarrow (1,\varepsilon,Z) \rightarrow (1,\varepsilon,\varepsilon)$

$(0,aabbb,Z) \rightarrow (0,abbb,AZ) \rightarrow (0,bbb,AAZ) \rightarrow (1,bb,AZ) \rightarrow (1,b,Z)$

Dérivation (réussie) de mots

Réussie : On étend la notion de dérivation aux mots
  - $(i,w,Z) \rightarrow^* (e,\varepsilon,\varepsilon)$ par pile vide
  - $(i,w,Z) \rightarrow^* (f,\varepsilon,\gamma)$ par état final

Exemple : $(0,aabb,Z) \rightarrow^* (1,\varepsilon,\varepsilon)$ accepte par pile vide

Dérivation (ratée) de mots

Ratée : il n 'existe pas de lecture réussie
- Soit parce que pour chaque lecture :
  - ❖On n'arrive pas à lire entièrement le mot (fonction de transition non définie)
  - ❖On n'arrive pas soit
    - ❖À terminer avec la pile vide
    - ❖À terminer dans un état de reconnaissance

Exemple :

❖$(0,aabbb,Z) \rightarrow^* (1,b,Z)$ (Pas de transition définie)

Dérivation de mots

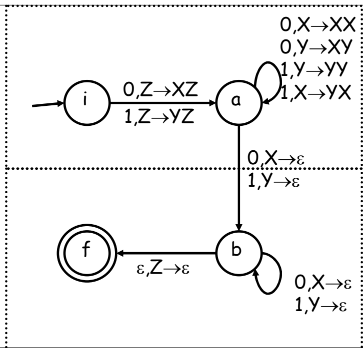
Pour M=(Q,Σ,Γ,δ,i,Z,T) un AP,

le langage accepté est

- $L_{PV}(M)=\{w\in\Sigma^*:(i,w,Z)\rightarrow^*(p,\varepsilon,\varepsilon),\ p\in Q\}$
- $L_{EF}(M)=\{w\in\Sigma^*:(i,w,Z)\rightarrow^*(p,\varepsilon,\gamma),\ p\in T,\ \gamma\in\Gamma^*\}$

19

Exemple



Le langage $\{ ww^R : w\in\{0,1\}^+\}$

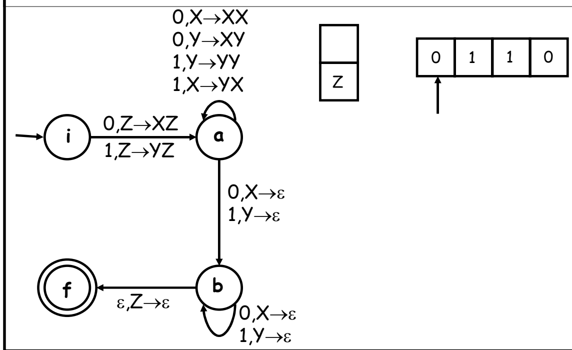
20

Exemple

- Le langage $\{ ww^R : w\in\{0,1\}^+\}$
- Scénario de fonctionnement
  - Sur la première moitié du mot (état moitié 1)
    - Lecture d 'un 0, empiler X, Lecture d 'un 1, empiler Y
  - Sur la seconde moitié (état moitié 2)
    - Lecture d 'un 0, dépiler X, Lecture d 'un 1, dépiler Y
  - Si pile vide accepte
- Le problème est de déterminer le milieu !
  - Résolu par le non déterminisme
    - On fait toutes les lectures possibles
    - Si une réussit, on accepte

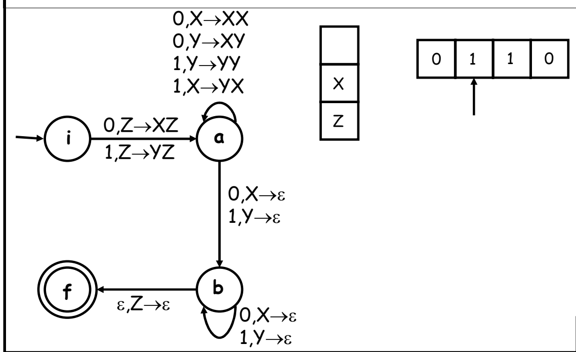
21

Exemple



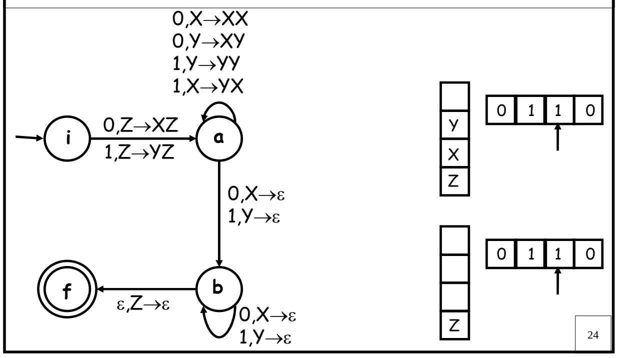
22

Exemple



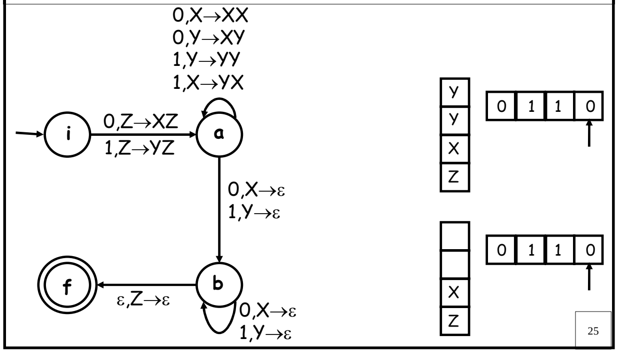
23

Exemple



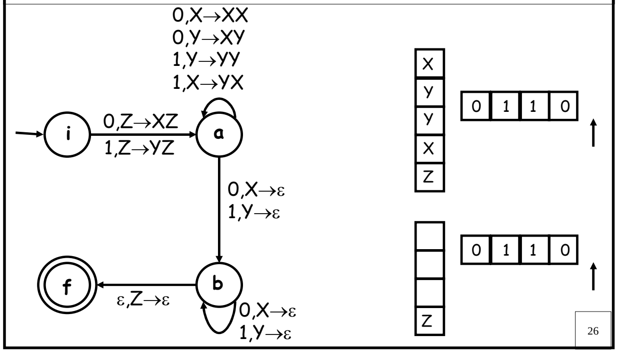
24

Exemple



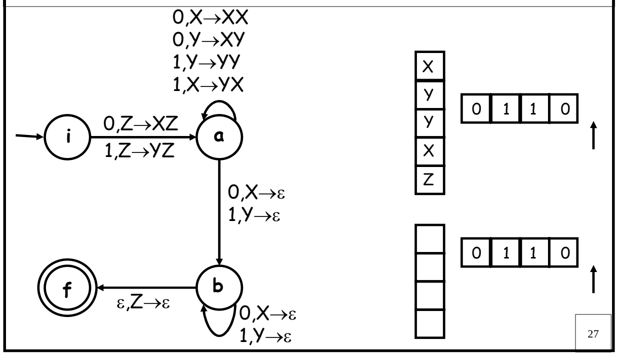
25

Exemple



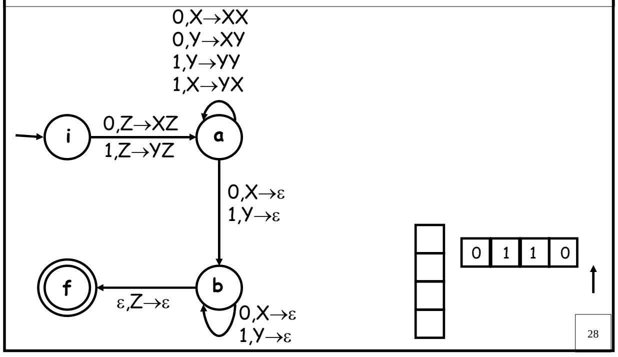
26

Exemple



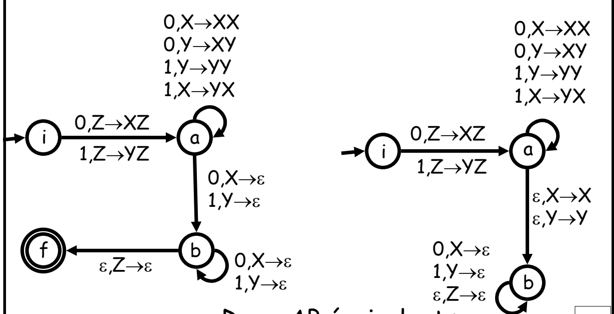
27

Exemple



28

Exemple



Deux AP équivalents

29

Remarque

- Un des AP précédents reconnaît par état final.
- L'autre reconnaît par pile vide.
- Mais tous deux reconnaissent le même langage.

- Ce n'est pas un cas particulier

Théorème [PV=EF] : Tout ce qui est reconnu par pile vide est reconnu par état final et réciproquement

30

EF→PV

- **Idée** : M' simule le fonctionnement de M jusqu'à la fin. Ensuite, M' termine le travail en vidant tout ce qui reste dans la pile.

$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,i,Z,T)$

$M'=(Q\cup\{i',e\},\Sigma,\Gamma\cup\{Z'\},\delta',i',Z',\varnothing)$

31

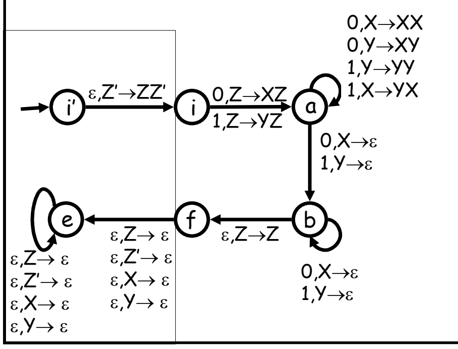
EF→PV

$M'=(Q\cup\{i',e\},\Sigma,\Gamma\cup\{Z'\},\delta',i',Z',\varnothing)$

- État e: sert à effacer le contenu de la pile
- État i': sert à passer dans l'état de M avec un symbole de pile différent au départ Z'
- Z': nouveau symbole de pile pour que M' n'accepte pas accidentellement si M vide sa pile trop tôt
- δ' simule le fonctionnement de δ et, de plus
  - $\delta'(i',\varepsilon,Z')=(i,ZZ')$
  - $\forall f\in T,\ \forall\ \gamma\in\Gamma\cup\{Z'\},\ \{(e,\varepsilon)\}\in\delta'(f,\varepsilon,\gamma)$
  - $\forall\ \gamma\in\Gamma\cup\{Z'\},\ \delta'(e,\varepsilon,\gamma)=(e,\varepsilon)$

32

Exemple



(i',0110,Z')
(i,0110,ZZ')
(a,110,XZZ')
(a,10,YXZZ')
(b,0,XZZ')
(b, ε,ZZ')
(f, ε,ZZ')
(e, ε,Z')
(e, ε, ε)

33

PV→EF

- Idée : l'automate à état final M' doit simuler le fonctionnement de l 'automate à pile vide M et détecter quand M efface le contenu de la pile. Il doit alors entrer dans un état final.

$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,i,Z,\varnothing)$

$M'=(Q\cup\{i',f\},\Sigma,\Gamma\cup\{Z'\},\delta',i',Z',\{f\})$

34

PV→EF

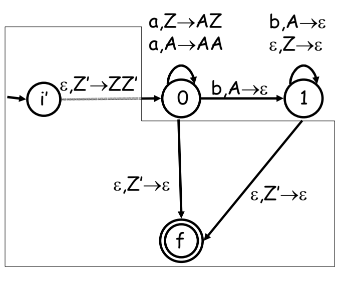
$M'=(Q\cup\{i',f\},\Sigma,\Gamma\cup\{Z'\},\delta',i',Z',\{f\})$

- État f: état final de M'
- État i': sert à passer dans l'état de M avec un symbole de pile différent au départ Z'
- Z': nouveau symbole de pile pour que M' puisse passer dans son état final à l 'apparition de Z' et accepter l 'entrée.
- δ' simule le fonctionnement de δ et, de plus
  - $\delta'(i',\varepsilon,Z')=(i,ZZ')$
  - $\forall q\in Q,\ \{(f,\varepsilon)\}\in\delta'(q,\varepsilon,Z')$

35

Exemple de $\{a^nb^n:n>0\}$

~~Reconnaît par pile vide~~
Reconnaît par état final



(i',aabb,Z')
(0,aabb,ZZ')
(0,abb,AZZ')
(0,bb,AAZZ')
(1,b,AZZ')
(1,ε,ZZ')
(1,ε,Z')
(f,ε,ε)

36