

Université de Nice-Sophia Antipolis
Polytech' Nice Sophia
SI3
2011–2012

Examen Langages Formels at Automates
du 8 juin 2012

Note :

Nom : _____
Prénom : _____
Groupe : _____

Durée : 2 heures

Exo	1	2	3	4	5	6
points	4	2	2	4	5	8

Document autorisés : tous document imprimé et notes de TD manuscrites.

Si vous pensez que le texte d'une question est ambigu (voire erroné) faites une hypothèse raisonnable et écrivez la sur votre copie. Le total des points est de 25, ce qui vous laisse un certain choix (la note finale ne dépassera pas 20). Les problèmes (exercices 5 et 6) traités intégralement se verront attribuer un bonus d'au plus un point supplémentaire par problème traité.

Première partie - questions rapides

1 Propriétés de clôture [4 points]

Soit Σ un alphabet et L_1 et L_2 deux langages sur cet alphabet, tels que $L_1 \cup L_2$ est rationnel. Que peut-on dire de L_2 (rationnel ou pas) dans les cas suivants :

1. L_1 est fini.

2. L_1 est fini et $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

3. L_1 est rationnel.

4. L_1 est rationnel et $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

2 Quotients [2 points]

Soit $L = \{w \in (a+b)^* : |w|_a = |w|_b\}$. Prouver que l'ensemble des quotients gauches $Q(L)$ est infini. Que peut-on en déduire?

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are approximately 20 lines visible. The paper has a slight shadow on the right side, suggesting it's resting on a surface.

3 Vrai ou faux [2 points]

Est-ce que les affirmations suivantes sont vraie ou fausse. Justifiez.

1. Si L est un langage rationnel et $L' \subset L$ alors L' est rationnel.

2. Si les langages L_n sont rationnels, alors $\bigcup_{n \geq 0} L_n$ est rationnel.

[illegible]

4 Algébriques [4 points]

Soit L le langage $\{w \in (a+b)^* : |w|_a \neq |w|_b\}$.

1. Donner un automate à pile avec deux états qui accepte L par pile vide.

[illegible]

2. Calculez la grammaire qui engendre le langage à partir de l'automate à pile et simplifiez-le.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are approximately 20 lines visible. The paper has a slight shadow on the right side, suggesting it's resting on a surface. There is no handwriting or other markings on the paper.

Deuxième partie - problèmes

5 Langages minces [5 points]

Soit Σ un alphabet. Soient u, v et w des mots sur Σ^* . On appelle itératif tout langage du type $\{u\}\{v\}^*\{w\}$ que l'on notera plus simplement uv^*w . On dit qu'un langage est mince lorsqu'il est une union finie de langages itératifs.

1. Un langage itératif peut-il être fini?

2. Un langage mince est-il rationnel?

3. Montrer que si L est un langage mince, alors il existe un constant c tel que pour tout $n \geq 0$, le nombre de mots de longueur n de L est inférieur à c .

4. Tout langage rationnel est-il mince?

6 Echangeur? [8 points]

On considère dans ce problème l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. On définit une application ϕ de Σ^* dans Σ^* de la façon suivante :

- $flip(\epsilon) = \epsilon$;
- si un mot u de longueur $2k > 0$ s'écrit $u = u_1u_2 \dots u_{2k-1}u_{2k}$ où, pour $i \in \{1, 2, \dots, 2k\}$, $u_i \in \Sigma$, alors $flip(u) = u_2u_1u_4u_3 \dots u_{2k}u_{2k-1}$;
- si un mot u de longueur $2k + 1 > 0$ s'écrit $u = u_1u_2 \dots u_{2k}u_{2k+1}$ où, pour $i \in \{1, 2, \dots, 2k, 2k + 1\}$, $u_i \in \Sigma$, alors $flip(u) = u_2u_1u_4u_3 \dots u_{2k}u_{2k-1}u_{2k+1}$.

La fonction $flip$ agit donc en échangeant chaque lettre d'indice pair avec la lettre (d'indice impair) qui la précède immédiatement.

1. Calculer $flip(a)$, $flip(abba)$, $flip(aabab)$.

2. Soit u un mot dans Σ^* , énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que, quel que soit le mot v dans Σ^* , l'égalité $flip(uv) = flip(u)flip(v)$ soit vérifiée.

3. Que vaut $flip(flip(L))$?

4. On note L_1 l'ensemble des mots u tels que $flip(u) \neq u$. Donner une expression rationnelle simple pour L_1 . Justifier brièvement la réponse.

5. On note L_2 le langage a^*b^* . Donner une expression rationnelle pour $flip(L_2)$. Justifier brièvement la réponse.

- [illegible]

-
- This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are approximately 20 lines visible. The paper has a slight shadow on its right side, suggesting it's resting on a surface. There is no handwriting or other markings on the paper.

- [illegible]

-
-
-
-

-
-
-
-

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]