SI 3 **Année 2008-2009**
Informatique théorique **Langages Formels et Automates**

Lemme de l'étoile

Feuille de travaux dirigés n^{o}6

9 – 13 mars 2009

On rappelle l'énoncé du lemme de l'étoile :
Lemme : Si L est un langage rationnel, alors il existe un entier n tel que, pour tout mot w de L tel que $|w| \geq n$, w peut être factorisé en $w = xyz$ de telle sorte que

1. pour tout $i \geq 0$, $xy^iz \in L$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq n$

1. En utilisant le lemme de l'étoile dire (et prouver ...) si les langages suivants sont rationnels :
a) L_1, l'ensemble des nombres premiers écrits en unaire.
b) $L_2 = \{0^m 1^n 0^{m+n} :\ m \geq 1 \text{ et } n \geq 1\}$.
c) $L_3 = \{a^i b^m c^m :\ i \geq 1,\ m \geq 1\}$.

2. Soient $L_1 = \{a^{2i} b^j c^j :\ i \geq 1,\ j \geq 0\}$ et $L_2 = b^\star c^\star$ et soit $L = L_1 \cup L_2$.
a) Montrer que L satisfait les conditions du lemme de l'étoile.
b) Montrer que L n'est pas rationnel.
c) Conclusion.

3. Soient $L_1 = \{a^i :\ i \text{ est un carré}\}$ et $L_2 = \{w \in (a+b+c)^\star :\ |w|_a + |w|_b \text{ est un carré}\}$.
a) Montrer en utilisant le lemme de pompage que L_1 n'est pas rationnel.
b) Montrer en utilisant des propriétés de cloture que L_2 n'est pas rationnel.

4. Les conjugués
Soit Σ un alphabet fini. Deux mots $w, w' \in \Sigma^\star$ sont conjugués s'il existe deux mots $u, v \in \Sigma^\star$ tels que $w = uv$ et $w' = vu$. Dans la suite, on note $C(w)$ l'ensemble des conjugués du mot $w \in \Sigma^\star$. De même, pour un langage $L \subset \Sigma^\star$, on note $C(L) = \bigcup_{w \in L} C(w)$ l'ensemble des conjugués des mots de L.
a) Donner $C(aabaab)$.
b) Donner $C(a^n b^n | n > 0)$.
c) Montrer que si L est un langage rationnel alors $C(L)$ l'est aussi, en adaptant l'automate fini qui reconnaît L.
d) Donner un exemple de votre construction.