

Automates à piles & grammaires

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n°11

16 mai 2008

1. $G = [V, T, P, S]$, avec

$V = \{S, (q_0, Z, q_0), (q_0, Z, q_1), (q_0, X, q_0), (q_0, X, q_1), (q_1, Z, q_0), (q_1, Z, q_1), (q_1, X, q_0), (q_1, X, q_1)\}$,

$T = \{0, 1\}$, et P contenant les règles :

• Pour l'axiome

$S \rightarrow (q_0, Z, q_0) \mid (q_0, Z, q_1)$

• A partir de la transition 1

$(q_0, Z, q_0) \rightarrow 1(q_0, X, q_0)(q_0, Z, q_0) \mid 1(q_0, X, q_1)(q_1, Z, q_0)$

$(q_0, Z, q_1) \rightarrow 1(q_0, X, q_0)(q_0, Z, q_1) \mid 1(q_0, X, q_1)(q_1, Z, q_1)$

• A partir de la transition 2

$(q_0, X, q_0) \rightarrow 1(q_0, X, q_0)(q_0, X, q_0) \mid 1(q_0, X, q_1)(q_1, X, q_0)$

$(q_0, X, q_1) \rightarrow 1(q_0, X, q_0)(q_0, X, q_1) \mid 1(q_0, X, q_1)(q_1, X, q_1)$

• A partir de la transition 3

$(q_0, X, q_0) \rightarrow 0(q_1, X, q_0)$

$(q_0, X, q_1) \rightarrow 0(q_1, X, q_1)$

• A partir de la transition 4

$(q_0, Z, q_0) \rightarrow \varepsilon$

• A partir de la transition 5

$(q_1, X, q_1) \rightarrow 1$

• A partir de la transition 6

$(q_1, Z, q_0) \rightarrow 0(q_0, Z, q_0)$

$(q_1, Z, q_1) \rightarrow 0(q_0, Z, q_1)$

En notant $A = (q_0, Z, q_0)$; $B = (q_0, Z, q_1)$; $C = (q_0, X, q_0)$; $D = (q_0, X, q_1)$; $E = (q_1, Z, q_0)$; $F = (q_1, Z, q_1)$; $G = (q_1, X, q_0)$; $H = (q_1, X, q_1)$ nous obtenons :

$N = \{S, A, B, C, D, E, F, H\}$, $T = \{0, 1\}$, S

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow A \mid B \\ A \rightarrow 1CA \mid 1DE \mid \varepsilon \\ B \rightarrow 1CB \mid 1DF \\ C \rightarrow 0G \mid 1CC \mid 1DG \\ D \rightarrow 0H \mid 1CD \mid 1DH \\ E \rightarrow 0A \\ F \rightarrow 0B \\ H \rightarrow 1 \end{array} \right.$$

Les variables productives sont : $\{A, H, S, D, E\}$, ce qui permet de supprimer B, C, F, G et nous obtenons :

$$N = \{S, A, D, E, H\}, T = \{0, 1\}, S$$

$$P \begin{cases} S \rightarrow A \\ A \rightarrow 1DE \mid \varepsilon \\ D \rightarrow 0H \mid 1DH \\ E \rightarrow 0A \\ H \rightarrow 1 \end{cases}$$

Tous les variables sont accessibles. On peut supprimer A (renommage) et substituer H et E pour obtenir :

$$N = \{S, D\}, T = \{0, 1\}, S$$

$$P \begin{cases} S \rightarrow 1D0S \mid \varepsilon \\ D \rightarrow 01 \mid 1D1 \end{cases}$$

D engendre $L_D = \{1^k 01^{k+1} \mid k \geq 0\}$, ainsi $1D0$ engendre $L_{1D0} = \{1^{k+1} 01^{k+1} 0 \mid k \geq 0\}$. Ainsi, S engendre L_{1D0}^* .

2. Un automate à pile du TD précédent était : $M = [\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{1, 2, +, =\}, \{Z, X, Y\}, q_0, \emptyset, Z, \delta]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler	état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	1	Z	q_0	YZ	q_1	1	X	q_3	—
q_0	2	Z	q_0	YXZ	q_3	ε	X	q_1	Y
q_0	+	Y	q_0	X	q_1	2	X	q_2	—
q_0	1	X	q_0	YX	q_2	ε	X	q_3	—
q_0	2	X	q_0	YXX	q_1	+	Y	q_1	X
q_0	=	Y	q_1	X	q_3	ε	Z	q_3	—

Quelle est la grammaire qui correspond à cet automate à pile ? $G = [V, T, P, S]$, avec

$V = \{S, Z_{i,j}, X_{i,j}, Y_{i,j}\}$ où $Z_{i,j}$ désigne (q_i, Z, q_j) , $X_{i,j}$ désigne (q_i, X, q_j) et $Y_{i,j}$ désigne (q_i, Y, q_j) . $T = \{1, 2, +, =\}$, et P :

- Pour l'axiome
 $S \rightarrow Z_{0,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 1
 $Z_{0,i} \rightarrow 1Y_{0,j}Z_{j,i}$ pour $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 2
 $Z_{0,i} \rightarrow 2Y_{0,j}X_{j,k}Z_{k,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 3
 $Y_{0,i} \rightarrow +X_{0,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 4
 $X_{0,i} \rightarrow 1Y_{0,j}X_{j,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 5
 $X_{0,i} \rightarrow 2Y_{0,j}X_{j,k}X_{k,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 6
 $Y_{0,i} \rightarrow =X_{1,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 7
 $X_{1,3} \rightarrow 1$
- A partir de la transition 8
 $X_{3,i} \rightarrow Y_{1,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 9
 $X_{1,2} \rightarrow 2$
- A partir de la transition 10
 $X_{2,3} \rightarrow \varepsilon$
- A partir de la transition 11
 $Y_{1,i} \rightarrow +X_{1,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 12
 $Z_{3,3} \rightarrow \varepsilon$

Les variables productives sont : $\{S, X_{0,2}, X_{0,3}, X_{1,2}, X_{1,3}, X_{2,3}, X_{3,2}, X_{3,3}, Y_{0,2}, Y_{0,3}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Z_{0,3}, Z_{3,3}\}$:

$$N = \{S, X_{0,2}, X_{0,3}, X_{1,2}, X_{1,3}, X_{2,3}, X_{3,2}, X_{3,3}, Y_{0,2}, Y_{0,3}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Z_{0,3}, Z_{3,3}\}, T = \{1, 2, +, =\}, S$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow Z_{0,3} \\ Z_{0,3} \rightarrow 1Y_{0,3}Z_{3,3} \mid 2Y_{0,2}X_{2,3}Z_{3,3} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}Z_{3,3} \\ Y_{0,2} \rightarrow +X_{0,2} \mid = X_{1,2} \\ Y_{0,3} \rightarrow +X_{0,3} \mid = X_{1,3} \\ X_{0,2} \rightarrow 1Y_{0,3}X_{3,2} \mid 2Y_{0,2}X_{2,3}X_{3,2} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,2} \\ X_{0,3} \rightarrow 1Y_{0,2}X_{2,3} \mid 1Y_{0,3}X_{3,3} \mid 2Y_{0,2}X_{2,3}X_{3,3} \mid 2Y_{0,3}X_{3,2}X_{2,3} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,3} \\ X_{1,3} \rightarrow 1 \\ X_{3,2} \rightarrow Y_{1,2} \\ X_{3,3} \rightarrow Y_{1,3} \\ X_{1,2} \rightarrow 2 \\ X_{2,3} \rightarrow \varepsilon \\ Y_{1,2} \rightarrow +X_{1,2} \\ Y_{1,3} \rightarrow +X_{1,3} \\ Z_{3,3} \rightarrow \varepsilon \end{array} \right.$$

Toutes les variables sont accessibles. Après suppression des ε -productions, des renommages et quelques substitutions :

$$N = \{S, X_{0,2}, X_{0,3}, X_{3,2}, X_{3,3}, Y_{0,2}, Y_{0,3}\}, T = \{1, 2, +, =\}, S$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 1Y_{0,3} \mid 2Y_{0,2} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3} \\ Y_{0,2} \rightarrow +X_{0,2} \mid = 2 \\ Y_{0,3} \rightarrow +X_{0,3} \mid = 1 \\ X_{0,2} \rightarrow 1Y_{0,3}X_{3,2} \mid 2Y_{0,2}X_{3,2} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,2} \\ X_{0,3} \rightarrow 1Y_{0,2} \mid 1Y_{0,3}X_{3,3} \mid 2Y_{0,2}X_{3,3} \mid 2Y_{0,3}X_{3,2} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,3} \\ X_{3,2} \rightarrow +2 \\ X_{3,3} \rightarrow +1 \end{array} \right.$$

Après le renommage $A = Y_{0,2}, B = Y_{0,3}, C = X_{0,2}, D = X_{0,3}, E = X_{3,2}, F = X_{3,3}$ nous obtenons :

$$N = \{S, A, B, C, D, E, F\}, T = \{1, 2, +, =\}, S$$

$$P \left\{ \begin{array}{ll} S \rightarrow 1B \mid 2A \mid 2BF & A \rightarrow +C \mid = 2 \\ B \rightarrow +D \mid = 1 & C \rightarrow 1BE \mid 2AE \mid 2BFE \\ D \rightarrow 1A \mid 1BF \mid 2AF \mid 2BFF \mid 2BE & E \rightarrow +2 \\ F \rightarrow +1 & \end{array} \right.$$

On peut remarquer que cela se simplifie en

$$N = \{S, A, B, C, D\}, T = \{1, 2, +, =\}, S$$

$$P \left\{ \begin{array}{ll} S \rightarrow 1B \mid 2A \mid 2B + 1 & A \rightarrow +C \mid = 2 \\ B \rightarrow +D \mid = 1 & C \rightarrow S + 2 \\ D \rightarrow 1A \mid S + 1 \mid 2B + 2 & \end{array} \right.$$

Et en simplifiant encore

$$N = \{S, D\}, T = \{1, 2, +, =\}, S$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 1 = 1 \mid 2 = 2 \mid 2 = 1 + 1 \mid 2 + S + 2 \mid 1 + D \mid 2 + D + 1 \\ D \rightarrow S + 1 \mid 1 + S + 2 \mid 1 = 2 \mid 2 + D + 2 \mid 2 = 1 + 2 \end{array} \right.$$

Il serait intéressant de voir si elle est équivalente à celle du TD 11, mais on ne peut décider si deux grammaires engendrent le même langage. En effet nous ne disposons pas de mécanisme pour vérifier l'équivalence de deux grammaires.