Université de Nice-Sophia Antipolis Ecole Polytech' Nice Sophia

SI3

2008–2009

Examen Langages Formels at Automates
du 14 mai 2009

Durée : 50 minutes

1		11
2		9

Aucun document n'est autorisé.

Si vous pensez que le texte d'une question est ambigu (voire erroné) faites une hypothèse raisonnable et écrivez la sur votre copie.

1 Grammaire - à partir d'automate à pile

Soit M l'automate à pile suivante : $M = [Q = \{q_0,q_1,q_2\},\Sigma = \{a,b\},\Gamma = \{A,B,Z\},q_0,\{q_1\},Z,\delta]$ avec la table de transition :

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	a	Z	q_0	AZ
q_0	a	A	q_0	AA
q_0	a	B	q_0	AB
q_0	a	Z	q_0	BZ
q_0	a	A	q_0	BA
q_0	a	B	q_0	BB
q_0	b	A	q_0	$-$
q_0	ϵ	B	q_0	$-$
q_0	ϵ	Z	q_1	Z

.

Le langage reconnu est celui des préfixes des mots de Dyck (a représente la paranthèse ouvrante et b la fermante).

1) Décrivez le fonctionnement de l'automate à pile pour accepter le mot aba.

2) L'automate à pile N est obtenu à partir de M en supprimant les transitions qui ne sont pas utilisés dans la question précédente. Transformez N (qui accepte par état final), en un automate P qui accepte par pile vide.

3) Calculez la grammaire qui engendre le langage reconnu par P.

4) Nettoyez et simplifiez la grammaire.

5) Quel est le langage reconnu par P ?

---

1) Pour accepter aba on passe par les configurations suivantes (état, reste du mot à lire, contenu de la pile) :
(q_0,aba,Z) transition 1
(q_0,ba,AZ) transition 7
(q_0,a,Z) transition 4
$(q_0,-,BZ)$ transition 8
$(q_0,-,Z)$ transition 9
$(q_1,-,Z)$.

2) On obtient donc l'automate à pile N suivant : $N = [Q = \{q_0,q_1\},\Sigma = \{a,b\},\Gamma = \{A,B,Z\},q_0,\{q_1\},Z,\delta]$ avec la table de transition :

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	a	Z	q_0	AZ
q_0	a	Z	q_0	BZ
q_0	b	A	q_0	$-$
q_0	ϵ	B	q_0	$-$
q_0	ϵ	Z	q_1	Z

.

On transforme N en P, en ajoutant de l'état final des transitions vers un état où on vide la pile : $P = [Q = \{q_0,q_1,q_2\},\Sigma = \{a,b\},\Gamma = \{A,B,Z\},q_0,\emptyset,Z,\delta]$ avec la table de transition :

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	a	Z	q_0	AZ
q_0	a	Z	q_0	BZ
q_0	b	A	q_0	$-$
q_0	ϵ	B	q_0	$-$
q_0	ϵ	Z	q_1	Z
q_1	ϵ	Z	q_2	$-$
q_1	ϵ	A	q_2	$-$
q_1	ϵ	B	q_2	$-$
q_2	ϵ	Z	q_2	$-$
q_2	ϵ	A	q_2	$-$
q_2	ϵ	B	q_2	$-$

.

3) Comme nous avons 3 symbôles de pile et 3 états nous aurons dans la grammaire $1 + 3 \times 3 \times 3 = 28$ variables et $3 + 9 + 9 + 3 + 8 = 32$ règles.

- Pour l'axiome
  $S \rightarrow\ (0,Z,0) \mid (0,Z,1) \mid (0,Z,2)$
- A partir de la transition 1
  $(0,Z,0) \rightarrow\ a(0,A,0)(0,Z,0) \mid a(0,A,1)(1,Z,0) \mid a(0,A,2)(2,Z,0)$
  $(0,Z,1) \rightarrow\ a(0,A,0)(0,Z,1) \mid a(0,A,1)(1,Z,1) \mid a(0,A,2)(2,Z,1)$
  $(0,Z,2) \rightarrow\ a(0,A,0)(0,Z,2) \mid a(0,A,1)(1,Z,2) \mid a(0,A,2)(2,Z,2)$
- A partir de la transition 2
  $(0,Z,0) \rightarrow\ a(0,B,0)(0,Z,0) \mid a(0,B,1)(1,Z,0) \mid a(0,B,2)(2,Z,0)$
  $(0,Z,1) \rightarrow\ a(0,B,0)(0,Z,1) \mid a(0,B,1)(1,Z,1) \mid a(0,B,2)(2,Z,1)$
  $(0,Z,2) \rightarrow\ a(0,B,0)(0,Z,2) \mid a(0,B,1)(1,Z,2) \mid a(0,B,2)(2,Z,2)$
- A partir de la transition 3
  $(0,A,0) \rightarrow\ b$
- A partir de la transition 4
  $(0,B,0) \rightarrow\ \epsilon$
- A partir de la transition 5
  $(0,Z,0) \rightarrow\ (1,Z,0)$
  $(0,Z,1) \rightarrow\ (1,Z,1)$
  $(0,Z,2) \rightarrow\ (1,Z,2)$
- A partir de la transition 6
  $(1,Z,2) \rightarrow\ \epsilon$
- A partir de la transition 7
  $(1,A,2) \rightarrow\ \epsilon$
- A partir de la transition 8
  $(1,B,2) \rightarrow\ \epsilon$
- A partir de la transition 9
  $(2,Z,2) \rightarrow\ \epsilon$
- A partir de la transition 10
  $(2,A,2) \rightarrow\ \epsilon$
- A partir de la transition 11
  $(2,B,2) \rightarrow\ \epsilon$

4) On constate que seulement 12 variables admettent des règles et sont donc susceptibles d'être productives. On supprime les autres pour obtenir :

$$\begin{cases} S \to \ (0,Z,0) \mid (0,Z,1) \mid (0,Z,2) \\ (0,Z,0) \to \ a(0,A,0)(0,Z,0) \mid a(0,B,0)(0,Z,0) \\ (0,Z,1) \to \ a(0,A,0)(0,Z,1) \mid a(0,B,0)(0,Z,1) \\ (0,Z,2) \to \ a(0,A,0)(0,Z,2) \mid a(0,B,0)(0,Z,2) \mid (1,Z,2) \\ (0,A,0) \to \ b \\ (0,B,0) \to \ \epsilon \\ (1,Z,2) \to \ \epsilon \\ (1,A,2) \to \ \epsilon \\ (1,B,2) \to \ \epsilon \\ (2,Z,2) \to \ \epsilon \\ (2,A,2) \to \ \epsilon \\ (2,B,2) \to \ \epsilon \end{cases}$$

On substitue les variables $(0,A,0)$,$(0,B,0)$,$(1,Z,2)$,$(1,A,2)$,$(1,B,2)$,$(2,Z,2)$,$(2,A,2)$,$(2,B,2)$ pour obtenir :

$$\begin{cases} S \to \ (0,Z,0) \mid (0,Z,1) \mid (0,Z,2) \\ (0,Z,0) \to \ ab(0,Z,0) \mid a(0,Z,0) \\ (0,Z,1) \to \ ab(0,Z,1) \mid a(0,Z,1) \\ (0,Z,2) \to \ ab(0,Z,2) \mid a(0,Z,2) \mid \epsilon \end{cases}$$

Il est temps de constater de $(0,Z,0)$ et $(0,Z,1)$ ne sont pas productifs et on obtient :

$$\begin{cases} S \to \ (0,Z,2) \\ (0,Z,2) \to \ ab(0,Z,2) \mid a(0,Z,2) \mid \epsilon \end{cases}$$

Comme on a $S = (0,Z,2)$, nous avons :

$$S \to \ abS \mid aS \mid \epsilon$$

5) A partir du grammaire simplifié il est facile de déduire $L = (a + ab)^\star$

On pouvait obtenir le même résultat, en réalisant qu'au lieu de passer en état final on peut vider la pile sur place, ce qui permet d'arriver à un automate qui n'a qu'un seul état et accepte par pile vide. Ainsi la démarche est plus courte, même si elle ne s'applique pas toujours.

---

2 Automate à pile

Donner un automate à pile qui accepte le langage suivant :

$$L = \{w \in (a+b+c)^\star \mid |w|_a + |w|_b = |w|_c \ et \ |w|_a \equiv |w|_c (mod\ 2)\}$$

Donner un exemple d'exécution, choisi de manière à mettre en valeur vos choix de conception.

_ L'idée est d'utiliser les états pour vérifier que la parité des a est le même que la parité des c et utiliser la pile pour vérifier que le le nombre de a et b est égal au nombre de c.

$M = [Q = \{q_0,q_1\},\Sigma = \{a,b,c\},\Gamma = \{A,C,Z\},q_0,\emptyset,Z,\delta]$ avec la table de transition :

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	a	Z	q_1	AZ
q_0	b	Z	q_0	AZ
q_0	c	Z	q_1	CZ
q_0	a	A	q_1	AA
q_0	b	A	q_0	AA
q_0	c	A	q_1	$-$
q_0	a	C	q_1	$-$
q_0	b	C	q_0	$-$
q_0	c	C	q_1	CC

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_1	a	Z	q_0	AZ
q_1	b	Z	q_1	AZ
q_1	c	Z	q_0	CZ
q_1	a	A	q_0	AA
q_1	b	A	q_1	AA
q_1	c	A	q_0	$-$
q_1	a	C	q_0	$-$
q_1	b	C	q_1	$-$
q_1	c	C	q_0	CC
q_0	ϵ	Z	q_0	$-$

Un exemple d'exécution :

état	reste à lire	pile
q_0	$abcbcc$	Z
q_1	$bcbcc$	AZ
q_1	$cbcc$	AAZ
q_0	bcc	AZ
q_0	cc	AAZ
q_1	c	AZ
q_0	$-$	Z
q_0	$-$	$-$

On remarque que cet automate ne diffère que peu de celui qu'on pouvait obtenir par le produit d'un automate à pile et un automate fini.
