

# Automates finis et expressions rationnelles

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n°2

29 février 2008

1. a) On obtient l'automate non-déterministe :

$\delta$	$\varepsilon$	$a$	$b$
$\rightarrow 1$	2, 7		
2	3, 4		
3		5	
4			6
5	2, 7		
6	2, 7		
7		8	
8	9		
9			10
10	11		
$\leftarrow 11$	12		
12	13, 14		
13		15	
14			16
$\leftarrow 15$	12		
$\leftarrow 16$	12		

b) On obtient l'automate non-déterministe :

$\delta$	$\varepsilon$	$a$	$b$
$\rightarrow 1$	2, 8		
2	3, 5		
3			4
4	3, 5		
5	6, 8		
6		7	
7	2, 6, 8		
8		9	
9	10		
10			11
11	12		
$\leftarrow 12$	13		
13	14, 15		
14		16	
15			17
$\leftarrow 16$	13		
$\leftarrow 17$	13		

2. a) On calcule d'abord la fermeture par des  $\varepsilon$ -transitions :

$\delta$	$\varepsilon - \text{fermeture}$
1	1, 2, 3, 4, 7
2	2, 3, 4
3	3
4	4
5	2, 3, 4, 5, 7
6	2, 3, 4, 6, 7
7	7
8	8, 9
9	9
10	10, 11, 12, 13, 14
11	11, 12, 13, 14
12	12, 13, 14
13	13
14	14
15	12, 13, 14, 15
16	12, 13, 14, 16

Ensuite on détermine

$\delta$	$a$	$\text{fermeture}$	$b$	$\text{fermeture}$
1, 2, 3, 4, 7	5, 8	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9	6	2, 3, 4, 6, 7
2, 3, 4, 5, 7, 8, 9	5, 8	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9	6, 10	2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14
2, 3, 4, 6, 7	5, 8	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9	6	2, 3, 4, 6, 7
2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14	5, 8, 15	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15	6, 16	2, 3, 4, 6, 7, 12, 13, 14, 16
2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15	5, 8, 15	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15	6, 10, 16	2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 16
2, 3, 4, 6, 7, 12, 13, 14, 16	5, 8, 15	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15	6, 16	2, 3, 4, 6, 7, 12, 13, 14, 16
2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 16	5, 8, 15	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15	6, 16	2, 3, 4, 6, 7, 12, 13, 14, 16

Il suffit de rénuméroter et marquer les états spéciaux (initial et d'acceptation) pour obtenir l'automate résultat :

$\delta$	$a$	$b$
$\rightarrow 1$	2	3
2	2	4
3	2	3
$\leftarrow 4$	5	6
$\leftarrow 5$	5	7
$\leftarrow 6$	5	6
$\leftarrow 7$	5	6

b) On calcule d'abord la fermeture par des  $\varepsilon$ -transitions :

$\delta$	$\varepsilon - \text{fermeture}$
1	1, 2, 3, 5, 6, 8
2	2, 3, 5, 6, 8
3	3
4	3, 4, 5, 6, 8
5	5, 6, 8
6	6
7	2, 3, 5, 6, 7, 8
8	8
9	9, 10
10	10
11	11, 12, 13, 14, 15
12	12, 13, 14, 15
13	13, 14, 15
14	14
15	15
16	13, 14, 15, 16
17	13, 14, 15, 17

Ensuite on détermine

$\delta$	$a$	$\text{fermeture}$	$b$	$\text{fermeture}$
1, 2, 3, 5, 6, 8	7, 9	2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10	4	3, 4, 5, 6, 8
2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10	7, 9	2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10	4, 11	3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15
3, 4, 5, 6, 8	7, 9	2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10	4	3, 4, 5, 6, 8
3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15	7, 9, 16	2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16	4, 17	3, 4, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 17
2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16	7, 9, 16	2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16	4, 11, 17	3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17
3, 4, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 17	7, 9, 16	2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16	4, 17	3, 4, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 17
3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17	7, 9, 16	2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16	4, 17	3, 4, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 17

Il suffit de rénumérer et marquer les états spéciaux (initial et d'acceptation) pour obtenir l'automate résultat :

$\delta$	$a$	$b$
$\rightarrow 1$	2	3
2	2	4
3	2	3
$\leftarrow 4$	5	6
$\leftarrow 5$	5	7
$\leftarrow 6$	5	6
$\leftarrow 7$	5	6

On remarque qu'on vient d'obtenir le même automate qu'en a). Ceci est le fruit du hasard (car ces automates ne sont pas minimales) et ceci malgré le fait qu'il s'agit bien de deux expressions rationnelles pour le même langage.

3.

Le tableau des  $r_{i,j}^k$  se présente ainsi :

$k$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$r_{1,1}^k$	$\varepsilon$			
$r_{1,2}^k$	0	0	$0(00)^*$	$0(00)^* + 0^*1((0+1)0^*1)^*(0+1)(00)^*$
$r_{1,3}^k$	1	1	$0^*1$	$0^*1((0+1)0^*1)^*$
$r_{2,1}^k$	0			
$r_{2,2}^k$	$\varepsilon$	$\varepsilon + 00$		
$r_{2,3}^k$	1	$1 + 01$		
$r_{3,1}^k$	$\emptyset$			
$r_{3,2}^k$	$\Sigma$	$\Sigma$	$(0+1)(00)^*$	
$r_{3,3}^k$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon + (0+1)0^*1$	

Ce qui permet de conclure que l'expression rationnelle cherchée est :

$$L(A) = r_{12}^3 + r_{13}^3 = 0(00)^* + 0^*1((0+1)0^*1)^*(0+1)(00)^* + 0^*1((0+1)0^*1)^*$$