Grammaires

Feuille de travaux dirigés n^{o}7

27–31 mars 2008

Devoir 7. Soit G la grammaire suivante :
$N = \{S\}$
$T = \{a, b\}$
$P = \left\{ \ S \rightarrow aSS \mid SSb \mid \varepsilon \ \right\}$
S

a) Trouvez une dérivation droite pour le mot $aabb$.
b) Trouvez une dérivation gauche pour le même mot.
c) On considère la suite de dérivation suivante : $\mathbf{S} \rightarrow aS\mathbf{S} \rightarrow aS\mathbf{S}Sb \rightarrow aSaS\mathbf{S}Sb \rightarrow a\mathbf{S}aSSSbSb \rightarrow aa\mathbf{S}SSbSb \rightarrow aaaSSSSb\mathbf{S}b \rightarrow aaaSS\mathbf{S}SbSSbb \rightarrow aaaSSSbS\mathbf{S}bb \rightarrow aaaS\mathbf{S}SbSSSbbb \rightarrow aaaS\mathbf{S}bSSSbbb \rightarrow aaa\mathbf{S}bSSSbbb \rightarrow aaabS\mathbf{S}Sbbb \rightarrow aaabS\mathbf{S}bbb \rightarrow aaab\mathbf{S}bbb \rightarrow aaabbbb$ (en gras la lettre dérivée).
Dessinez A, l'arbre de dérivations associée.
d) Combien de suites de dérivations différentes peut-on obtenir à partir de A ?

Corrigé partiel

a) $\mathbf{S} \rightarrow aS\mathbf{S} \rightarrow aSS\mathbf{S}b \rightarrow aSSS\mathbf{S}bb \rightarrow aSS\mathbf{S}bb \rightarrow aS\mathbf{S}bb \rightarrow a\mathbf{S}bb \rightarrow aaS\mathbf{S}bb \rightarrow aa\mathbf{S}bb \rightarrow aabb$

b) $\mathbf{S} \rightarrow a\mathbf{S}S \rightarrow aa\mathbf{S}SS \rightarrow aa\mathbf{S}S \rightarrow aa\mathbf{S} \rightarrow aa\mathbf{S}Sb \rightarrow aab\mathbf{S}b \rightarrow aabb\mathbf{S}Sbb \rightarrow aabb\mathbf{S}bb \rightarrow aabb$

d) Etant donné un arbre de dérivation A, on peut ne mettre dans A que les nuds d'étiquette une variable non terminale, ici il n'y a que S, et donc c'est un arbre binaire, tout nud à 2 fils S (car les deux productions issues de S sont aSS et bSS).
Etant donné un tel arbre de dérivation A, on met l'étiquette S_0 à la racine et si S_n est l'étiquette d'un nud, S_{n_0} est l'étiquette de son fils gauche et S_{n_1} celle de son fils droit. L'ensemble des suites de dérivations associées à A, est l'ensemble des mots que l'on peut écrire avec comme alphabet ces étiquettes et tels que S_n est écrit avant S_{n_p}, pour tout n et p mots sur 0—1 (en clair tout sommet est dérivé après ses ancêtres).
Alors, connaissant le nombre de dérivations possibles pour le fils gauche et le fils droit d'un noeud S_n, notons n_g et n_d respectivement ces deux nombres, comment calculer le nombre de dérivations possibles pour S_n ? Il suffit (et il faut ?) de connaitre en outre la longueur respective de chacune de ces dérivations (toutes les dérivations issues d'un noeud S_x donné ont la même longueur, c'est le nombre de noeuds du sous-arbre de racine S_x), notons l_g et l_d respectivement ces deux nombres.
Etant donnée une dérivation de S_{n_0} et une dérivation de S_{n_1}, il y a $\binom{n_g+n_d}{n_g}$ (c'est le nombre de combinaisons de n_g éléments d'un ensemble à $n_g + n_d$ éléments) manières possibles de les mélanger, et il y a $n_g \times n_d$ couples de dérivations possibles, donc le nombre de dérivations possibles pour S_n est $n_g \times n_d \times \binom{n_g+n_d}{n_g}$.
Par ailleurs la longueur des dérivations issues de S_n est $l_g + l_d + 1$ (+1 car il faut compter la dérivation de S_n). Pour les feuilles, on a 1 dérivation possible et la longueur de la dérivation est 1, on a ainsi un moyen (algorithme) pour compter le nombre de dérivations pour A quelqonque (pour cette grammaire) en partant des feuilles et en remontant à la racine.