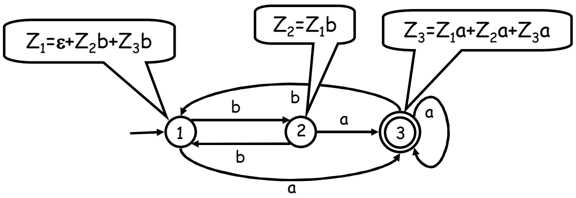
Systèmes d'équations linéaires

Méthode de résolution

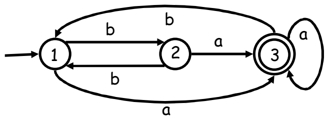
- Ramener le calcul d'une ER décrivant le langage reconnu à la résolution d'un système d'équations linéaires (à droite) dont les inconnues sont des langages.

Exemple



Z_i ={étiquettes des chemins reliant 1 à *i*}
Z_i ={$w \in \Sigma^*$: δ(init, w)=i}
On prend en compte tous les **arcs entrants**
On cherche à résoudre pour les Z_i: $i \in T$

Exemple



$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon+Z_2b+Z_3b \\ Z_2 = Z_1b \\ Z_3 = Z_1a+Z_2a+Z_3a \end{cases}$$

Z_i ={étiquettes des chemins reliant 1 à *i*}
Z_i ={$w \in \Sigma^*$: δ(init, w)=i}
On prend en compte tous les **arcs entrants**
On cherche à résoudre pour les Z_i: $i \in T$

Résolution

- On cherche une ER pour Z_3 i.e. les étiquettes qui conduisent de l'état initial à l'état terminal
- Il faut savoir résoudre
  Z=ZA+B

pour A et B des langages

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon+Z_2b+Z_3b \\ Z_2 = Z_1b \\ Z_3 = Z_1a+Z_2a+Z_3a \end{cases}$$

Ceci correspond à une résolution «classique» :
$Z(1-A)=B$
d'où
$Z=B \,.\, 1/(1-A) = B \,.\, A^*$

Résolution de Z=ZA+B

- Le langage BA^* est une solution de $Z=ZA+B$
- $X=BA^*$ est la plus petite solution. Alors,
  $BA^*=BA^*.A+B=BA^++B=B.(A^++\varepsilon)=BA^*$
- Si X solution de $Z=ZA+B$, alors $BA^* \subseteq X$ (plus petite solution); induction sur i: $BA^i \subseteq X$
  - $i=0$, $BA^0=B \subseteq X$ car $X=XA+B$
  - Vrai pour $i \leq n$.
    vérifions $Ba^{n+1} \subseteq X$: $Ba^{n+1}=(BA^n)A \subseteq (X).A \subseteq XA+B=X$

$\varepsilon \notin A \Rightarrow BA^*$ unique solution

- Si $\varepsilon \notin A$, BA^* unique solution de $Z=ZA+B$
- Supposons la non unicité de la solution et soit X une solution autre que BA^*.
  Soit $w \in X \backslash BA^*$ (BA^* est la plus petite solution) t.q. w est de longueur minimale.
  X solution $\Rightarrow w=v.u$ pour $v \in X$ et $u \in A$
  (car $w \notin BA^* \Rightarrow w \notin B$)
  $v \notin BA^*$ (sinon $w \in BA^*$) donc $v \in X \backslash BA^*$
  $|v|=|w|-|u|<|w|$, **contradiction**.

$\varepsilon \notin A \Rightarrow BA^*$ unique solution

Si $\varepsilon \in A$, alors pour tout $C \subseteq \Sigma^*$, une autre solution est

$$X=BA^*+CA^*$$

- $XA+B = (BA^*+CA^*)A+B=BA^++CA^++B=BA^*+ CA^+=X$ (car $\varepsilon \in A \Rightarrow A^+ = A^*$)

Exemple (suite)

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon+Z_2b+Z_3b \\ Z_2 = Z_1b \\ Z_3 = Z_1a+Z_2a+Z_3a \end{cases} \qquad \begin{cases} Z_1 = \varepsilon+Z_1bb+Z_3b \\ Z_3 = Z_1a+Z_1ba+Z_3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = (\varepsilon+Z_3b)(bb)^* \\ Z_3 = Z_1(a+ba)+Z_3a \end{cases} \qquad \{ Z_3 = (\varepsilon+Z_3b)(bb)^*\,(a+ba)+Z_3a$$

$$\{ Z_3 = Z_3(b(bb)^*(a+ba)+a)+(bb)^*(a+ba)$$

$$\{ Z_3 = (bb)^*(a+ba)(b(bb)^*(a+ba)+a)^*$$

Exemple (revisité)

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon+Z_2b+Z_3b \\ Z_2 = Z_1b \\ Z_3 = Z_1a+Z_2a+Z_3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_2 = b+Z_2bb+Z_3bb \\ Z_3 = a+Z_2ba+Z_3ba+ba+Z_2bba+Z_3bba+Z_3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_2 = (b+Z_3bb)(bb)^* \\ Z_3 = a+ba+Z_2(ba+bba)+Z_3(a+ba+bba) \end{cases}$$

$$\{ Z_3 = a+ba+\,(b+Z_3bb)(bb)^*(ba+bba)+Z_3(a+ba+bba)$$

$$\{ Z_3 = Z_3((bb)^+(ba+bba)+a+ba+bba)+b(bb)^*(ba+bba)+ba+a$$

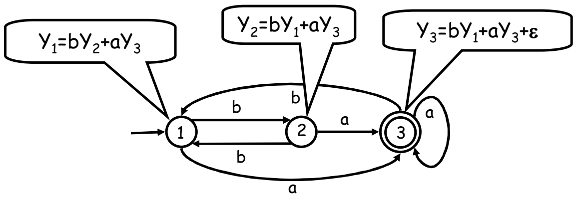
$$\{ Z_3 = Z_3b^*a+b^*a$$

$$\{ Z_3 = (b^*a)^*b^*a = (b^*a)^+$$

Méthode de résolution (bis)

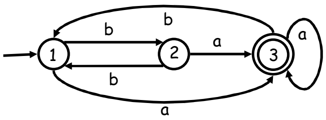
- Ramener le calcul d'une ER décrivant le langage reconnu à la résolution d'un système d'équations linéaires (à gauche) dont les inconnues sont des langages.

Exemple



Y_i ={étiquettes des chemins reliant i à un état d'acceptation}
$Y_i = \{w \in \Sigma^* : \delta(i, w) \in F\}$
On prend en compte tous les **arcs sortants**
On cherche à résoudre pour l'état initial *C*

Exemple



$$\begin{cases} Y_1 = bY_2+aY_3 \\ Y_2 = bY_1+aY_3 \\ Y_3 = bY_1+aY_3+\varepsilon \end{cases}$$

Y_i ={étiquettes des chemins reliant i à un état d'acceptation}
$Y_i = \{w \in \Sigma^* : \delta(i, w) \in F\}$
On prend en compte tous les **arcs sortants**
On cherche à résoudre pour l'état initial *C*

Résolution

- On cherche une ER pour Y_1 i.e. les étiquettes qui conduisent de l'état initial à l'état terminal
- Il faut savoir résoudre
  Y=AY+B

pour *A* et B des langages

$$\begin{cases} Y_1 = bY_2+aY_3 \\ Y_2 = bY_1+aY_3 \\ Y_3 = bY_1+aY_3+\varepsilon \end{cases}$$

Résolution de Y=AY+B

- Le langage A*B est une solution de Y=AY+B
- X=A*B est la plus petite solution. Alors,
  $A^*B=A.A^*B+B=A^+B+B=A^*B$
- Si X solution de Y=AY+B, alors $A^*B \subseteq X$ (plus petite solution); induction sur i: $A^iB \subseteq X$
  - i=0, $A^0B=B \subseteq X$ car X=AX+B
  - Vrai pour i≤n.
    vérifions $A^{n+1}B \subseteq X$: $A^{n+1}B=A(A^nB) \subseteq A.(X) \subseteq AX+B=X$

$\varepsilon \notin A \Rightarrow A^*B$ unique solution

- Si $\varepsilon \notin A$, A*B unique solution de Y=AY+B
- Supposons la non unicité de la solution et soit X une solution autre que A*B.
  Soit $w \in X \setminus A^*B$ (A*B est la plus petite solution) t.q. w est de longueur minimale.
  X solution $\Rightarrow$ w=v.u pour $v \in X$ et $u \in A$
  (car $w \notin A^*B \Rightarrow w \notin B$)
  $v \notin A^*B$ (sinon $w \in A^*B$) donc $v \in X \setminus A^*B$
  $|v|=|w|-|u|<|w|$, **contradiction**.

$\varepsilon \notin A \Rightarrow A^*B$ unique solution

Si $\varepsilon \in A$, alors pour tout $C \subseteq \Sigma^*$, une autre solution est

X=A*B+A*C

- $AX+B = A(A^*B+A^*C)+B=A^+B+A^+C+B=A^*B+A^+C=X$ (car $\varepsilon \in A \Rightarrow A^+ = A^*$)

Exemple (suite)

$$\begin{cases} Y_1 = bY_2+aY_3 \\ Y_2 = bY_1+aY_3 \\ Y_3 = bY_1+aY_3+\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = bbY_1+baY_3+aY_3 \\ Y_3 = bY_1+aY_3+\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = bbY_1+(ba+a)Y_3 \\ Y_3 = a^*(bY_1+\varepsilon) \end{cases}$$

$$\{\, Y_1 = bbY_1+(ba+a)a^*(bY_1+\varepsilon)$$

$$\{\, Y_1 = (bb+(ba+a)a^*b)Y_1+(ba+a)a^*$$

$$\{\, Y_1 = (bb+(ba+a)a^*b)^*(ba+a)a^*$$

Exemple (revisité)

$$\begin{cases} Y_1 = bY_2+aY_3 \\ Y_2 = bY_1+aY_3 \\ Y_3 = bY_1+aY_3+\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = bY_2+aY_3 \\ Y_2 = bY_1+aY_3 \\ Y_3 = a^*(bY_1+\varepsilon) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = bY_2+a^+(bY_1+\varepsilon) \\ Y_2 = bY_1+a^+(bY_1+\varepsilon) \end{cases}$$

$$\{ Y_1 = bbY_1+(b+\varepsilon)a^+(bY_1+\varepsilon)$$

$$\{ Y_1 = (bb+(b+\varepsilon)a^+b)Y_1+(b+\varepsilon)a^+$$

$$\{ Y_1 = (bb+(b+\varepsilon)a^+b)^*(b+\varepsilon)a^+$$

Comparaison des méthodes

- **Les trois méthodes donnent respectivement :**

$$(b^*a)^+$$

$$(bb)^*(a+ba)(b(bb)^*(a+ba)+a)^*$$

$$(bb+(ba+a)a^*b)^*(ba+a)a^*$$

$$(bb+(b+\varepsilon)a+b)^*(b+\varepsilon)a+$$

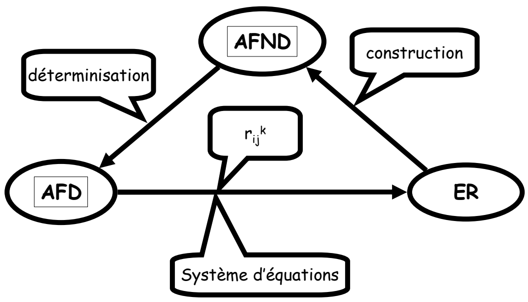
A-t-on fait une erreur de résolution ?

Les deux expressions rationnelles sont-elles identiques ?

A-t-on unicité de l'expression rationnelle décrivant un langage?

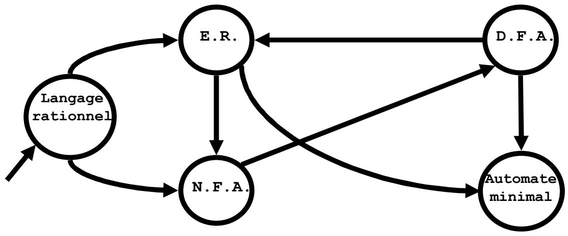
Les prochains cours vont répondre à ces questions.

Ce qu'on a vu



Automate minimal

Un méta-automate...



Théorème : Tout langage rationnel est reconnu par un unique automate déterministe minimal*.

* la minimalité porte sur **le nombre d'états** de l'automate

Automate réduit & minimal

- un automate déterministe *A* est réduit si pour tout couple d'états distincts *p* et *q* de *A*, *p* et *q* ne sont pas équivalents
- un automate (déterministe) réduit *A* est minimal s'il n'existe pas d'automate reconnaissant le même langage avec moins d'états.

Langage associé à un état

- soit un AFD $A = (\Sigma, Q, \delta, q_o, F)$,
  on appelle langage associé à q de Q et on note $L_q(A)$ le langage :
  $$L_q(A) = \{w \in \Sigma^*,\ \delta^*(q,w) \in F\}$$
- $L_q(A)$ est le langage reconnu par un automate dont l'état initial serait q et qui aurait F comme ensemble d'états finals.
  $$L(A) = L_{q_0}(A)$$

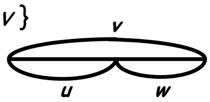
Problème 1

- Donnée : une expression rationnelle E
- Problème : construire un AFD minimal qui reconnaisse le langage décrit par E
- Idée : *les quotients gauches ...*

Quotients gauches

➢ obtenir les suffixes d'un mot

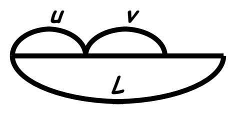
- Pour deux **mots** $u, v \in \Sigma^*$,
  $$u^{-1}v = \{w \in \Sigma^* \mid u.w = v\}$$



- Pour deux **langages** $X, Y \subseteq \Sigma^*$,
  $$X^{-1}Y = \cup_{x \in X} \cup_{y \in Y} x^{-1}y$$
- On va utiliser le quotient d'un langage L par un mot u :
  $$u^{-1}L = \{w \in \Sigma^* \mid u.w \in L\}$$

Propriétés

- $\varepsilon^{-1}L = L,\ \forall L \subseteq \Sigma^*$
- $a^{-1}\emptyset = a^{-1}\varepsilon = \emptyset$
- $a^{-1}a = \varepsilon$
- $a^{-1}b = \emptyset$ pour $a \neq b$



- $(u.v)^{-1} L = v^{-1}(u^{-1}L)$, $\forall L \subseteq \Sigma^*$
- $a^{-1}(X+Y) = a^{-1}X + a^{-1}Y$
- $a^{-1}X^* = (a^{-1}X).\ X^*$
- $a^{-1}(X.Y) = (a^{-1}X).Y + (X \cap \{\varepsilon\})\ a^{-1}Y$

Fondement de la minimisation

Théorème : si L est un langage rationnel, alors l'ensemble de ses quotients gauches

$$Q(L) = \{u^{-1}L \mid u \in \Sigma^*\} \text{ est fini.}$$

Proposition : soit $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ un AFD complet et dont tous les états sont accessibles, on a :

$$Q(L) = \{ L_q(A),\ q \in Q \}$$

Fondement de la minimisation

Le cardinal de l'ensemble des résiduels est borné par celui du nombre d'états.

- Pour $L \subseteq \Sigma^*$, on définit $A(L) = \big(Q(L), \Sigma, \delta, \{L\}, F(L)\big)$, l'**automate minimal*** de L où
  - $F(L) = \{ u^{-1}L \mid \{\varepsilon\} \in u^{-1}L\}$
  - $\delta(Y, a) = a^{-1}Y$ pour $Y \in Q(L)$, $a \in \Sigma$

* La minimalité sera justifiée plus tard ...

$Q(L) = \{L_q(A) \mid q\in Q\}$

- $Q(L) \subseteq \{L_q(A) \mid q \in Q\}$

  Soit $u\in\Sigma^*$ et $q=\delta(i,u)$.
  - q existe toujours (A complet et tous ses états sont accessibles).

  $$u.w \in L \Leftrightarrow w \in u^{-1}L \Leftrightarrow w \in Q(L) \Leftrightarrow \delta(i,u.w) \in F$$
  $$\Leftrightarrow \delta(q,w) \in F \Leftrightarrow w \in L_q(A)$$

Donc $u^{-1}L \subseteq L_q(A)$

31

$Q(L) = \{L_q(A) \mid q\in Q\}$

- $\{L_q(A) \mid q\in Q\} \subseteq Q(L)$

  Soit $q\in Q$ et $u \in\Sigma^*$ tels que $\delta(i,u) = q$.
  $u \in \Sigma^*$ existe toujours (A complet et tous ses états accessibles).

  $$L_q(A) \subseteq u^{-1}L$$

Tout ce qui est reconnu en partant de q correspond aux suffixes de mots de L.

32

Exemple : $Q(\Sigma^*ab\Sigma^*)$

$a^{-1}(X+Y)= a^{-1}X+ a^{-1}Y$
$a^{-1}X^*=(a^{-1}X).\ X^*$
$a^{-1}(X.Y)=(a^{-1}X)\ .Y+(X\cap\varepsilon)\ a^{-1}Y$

- $a^{-1}L = a^{-1} (\Sigma^*ab\ \Sigma^*)$

$= (a^{-1}\Sigma^*)\ ab\ \Sigma^*+ a^{-1} (ab\ \Sigma^*)$
$= (a^{-1}\Sigma)\ \Sigma^*\ ab\ \Sigma^*+ (a^{-1} a)b\ \Sigma^*+ \varnothing$
$a^{-1}L = \Sigma^*\ ab\ \Sigma^*+ b\ \Sigma^* = L + b\ \Sigma^*$ (nouveau)

- $b^{-1}L= b^{-1} (\Sigma^*ab\ \Sigma^*)$

$= (b^{-1}\Sigma^*)\ ab\ \Sigma^*+ b^{-1} (ab\ \Sigma^*)$
$= (b^{-1}\Sigma)\ \Sigma^*\ ab\ \Sigma^*+ (b^{-1} a)b\ \Sigma^*+ \varnothing$
$b^{-1}L = \Sigma^*\ ab\ \Sigma^* = L$ (pas nouveau)

33

Exemple : $Q(\Sigma^*ab\Sigma^*)$

$a^{-1}(X+Y)= a^{-1}X+ a^{-1}Y$
$a^{-1}X^*=(a^{-1}X).\ X^*$
$a^{-1}(X.Y)=(a^{-1}X)\ .Y+(X\cap\varepsilon)\ a^{-1}Y$

- $a^{-1}(a^{-1}L) = a^{-1}(L + b\ \Sigma^*) =$

$= a^{-1}L + a^{-1} (b\ \Sigma^*) = L + b\ \Sigma^*+ a^{-1}\ b\ \Sigma^*+ \varnothing = a^{-1}L$
$a^{-1}(a^{-1}L) = a^{-1}L$ (pas nouveau)

- $b^{-1}(a^{-1}L) = b^{-1}(L + b\ \Sigma^*) =$

$= b^{-1}L + b^{-1} (b\ \Sigma^*) = L + \Sigma^* = \Sigma^*$
$b^{-1}(a^{-1}L) = \Sigma^*$ (nouveau)

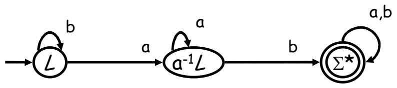
- $a^{-1}(b^{-1}(a^{-1}L)) = a^{-1}(\Sigma^*) = \Sigma^*$
- $b^{-1}(b^{-1}(a^{-1}L)) = b^{-1}(\Sigma^*) = \Sigma^*$

34

$Q(\Sigma^*ab\Sigma^*)$

- $a^{-1}L = L + b\ \Sigma^*$
- $b^{-1}L = \Sigma^*\ ab\ \Sigma^* = L$
- $a^{-1}(a^{-1}L) = a^{-1}L$
- $b^{-1}(a^{-1}L) = \Sigma^*$
- $a^{-1}(b^{-1}(a^{-1}L)) = \Sigma^*$
- $b^{-1}(b^{-1}(a^{-1}L)) = \Sigma^*$

δ	a	b
$\rightarrow L$	$a^{-1}L$	L
$a^{-1}L$	$a^{-1}L$	Σ^*
$\leftarrow \Sigma^*$	Σ^*	Σ^*



35