Université de Nice-Sophia Antipolis Ecole Polytech' Nice Sophia

SI3

2008–2009

Examen Langages Formels at Automates

du 17 Avril 2009

Durée : 50 minutes

1		2
2		6
3		4
4		5
5		3

Aucun document n'est autorisé.

Si vous pensez que le texte d'une question est ambigu (voire erroné) faites une hypothèse raisonnable et écrivez la sur votre copie.

1 Echauffement

Existe-t-il un langage rationnel L sur l'alphabet $\{a,b\}$, tel que pour tout mot $u \in L$ on a $|u|_a = |u|_b$ (u a autant de a que de b) ?

Oui, par exemple $\{(ab)^i; i \geq 0\}$.

---

2 Intuition ?

Les langages suivants sur l'alphabet $\{a,b\}$ sont-ils rationnels ou algébriques ? Justifiez chaque réponse très brièvement, dans l'espace prévue (uniquement).

1. $\{a^n a^m b^n b^p; n,m,p \geq 0\}$

   Oui rationnel, puisqu'il s'agit de $\{a^i b^j; i,j \geq 0\}$.

   ---

2. l'ensemble des mots qui ont plus de a que de b, et qui n'ont pas deux a consécutifs

   ---

   Oui rationnel, puisqu'il s'agit de $\{(ab)^i b; i \geq 0\}$.

   ---

3. X^2 si X est un langage rationnel

   Oui rationnel, car $X^2 = X.X$ et la concaténation de deux langages rationnels est rationnel.

   ---

4. X^2 si X est un langage algébrique

   Oui algébrique, car $X^2 = X.X$ et la concaténation de deux langages algébriques est algébrique (même preuve par automates que pour les rationnels).

   ---

5. $\{x^2 : x \in X\}$ si X est un langage fini

Oui rationnel, car si X est un langage fini alors $\{x^2 : x \in X\}$ l'est aussi et tout langage fini est rationnel.

---

6. $\{x^2 : x \in X\}$ si X est un langage rationnel sur l'alphabet $\{a\}$.

Oui rationnel. Une preuve simple consiste en la transformation de l'automate fini en remplacent chaque transition par un a par une transition par aa (à chaque fois on ajoute un nouvel état à cet effet).

---

3 Fibonacci

Soit L_{fib} le langage de Fibonacci défini par $\{1^{fib(i)} \mid i \geq 0\}$ où $fib(i)$ est le $i$ème nombre de Fibonacci. Est-ce que ce langage est rationnel ?

---

cf feuille 6 exercice 1a)

---

4 Formes normales

On dispose de la grammaire : $\langle N = \{S,X,Y,Z\},T = \{a,b\},S,P\rangle$: $P = \begin{cases} S \rightarrow XabY \mid SaX \\ X \rightarrow bS \mid aX \mid a \\ Y \rightarrow bY \mid ab \\ Z \rightarrow SaYbZXZ \mid a \end{cases}$

1. Mettre sous forme normale de Chomski la grammaire.

Tous les variables sont productifs. Par contre la variable Z n'est pas accessible, ce qui nous donne la nouvelle grammaire simplifiée :

$\langle N = \{S,X,Y,Z\},T = \{a,b\},S,P\rangle$: $P = \begin{cases} S \rightarrow XabY \mid SaX \\ X \rightarrow bS \mid aX \mid a \\ Y \rightarrow bY \mid ab \end{cases}$

On introduit de nouvelles variables pour obtenir la grammaire :

$\langle N = \{S,X,Y,T,U,V,A,B\},T = \{a,b\},S,P\rangle$: $P = \begin{cases} S \rightarrow XT \mid SU \\ T \rightarrow AV \\ U \rightarrow AX \\ A \rightarrow a \\ V \rightarrow BY \\ B \rightarrow b \\ X \rightarrow BS \mid AX \mid a \\ Y \rightarrow BY \mid AB \end{cases}$

---

2. Mettre sous forme normale de Greibach la grammaire.

---

5 Une grammaire

Trouvez le langage engendré par la grammaire $\langle N = \{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6,S_7,S_8\},T = \{a,b\},S_1,P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S_1 \rightarrow S_1 S_2 \mid S_2 \mid S_3 \\ S_2 \rightarrow bS_2 \mid aS_4 S_6 \mid \varepsilon \\ S_3 \rightarrow bS_3 \mid abS_5 \mid \varepsilon \\ S_4 \rightarrow bS_2 \mid S_3 S_4 \\ S_5 \rightarrow aS_6 S_3 \mid bS_2 S_7 S_8 \mid bS_2 S_7 \\ S_6 \rightarrow aS_7 \mid bS_7 S_8 \\ S_7 \rightarrow aS_7 b \mid aS_8 \\ S_8 \rightarrow S_5 S_3 \mid aS_8 S_6 \end{array} \right.$$

---

cf. feuille 9, exercice 3
