

# Langages rationnels

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n°5  
9 mars 2009

1. On considère que  $L = L_1 \cap L_2$  avec  $L_1 = (aa)^*$  et  $L_2 = (aaa)^*(a + aa)$ . On construit un automate  $A_1$  pour reconnaître  $L_1$  puis un automate  $A_2$  pour reconnaître  $L_2$  :

$\delta_{A_1}$	$a$
$\leftrightarrow 0$	1
1	0

$\delta_{A_2}$	$a$
$\rightarrow 1$	2
$\leftarrow 2$	3
$\leftarrow 3$	1

Et un automate produit pour reconnaître l'intersection :

$\delta_{A_1 \times A_2}$	$a$
$\rightarrow 01$	12
12	03
$\leftarrow 03$	11
11	02
$\leftarrow 02$	13
13	01

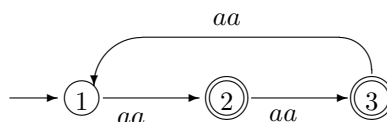
renuméroté

$\delta$	$a$
$\rightarrow 0$	1
1	2
$\leftarrow 2$	3
3	4
$\leftarrow 4$	5
5	0

d'où le système :

$$\begin{cases} Z_0 = Z_5a + \varepsilon \\ Z_1 = Z_0a \\ Z_2 = Z_1a \\ Z_3 = Z_2a \\ Z_4 = Z_3a \\ Z_5 = Z_4a \end{cases}$$

D'où  $Z_0 = Z_4aa + \varepsilon$ ,  $Z_2 = Z_0aa$  et  $Z_4 = Z_2aa$ . Nous pouvons remarquer que cela correspond à l'automate : obtenu par substitution de  $aa$  à la place du  $a$ .



La suite des substitutions donne :  $Z_0 = Z_0a^6 + \varepsilon$ ,  $Z_2 = Z_0a^2$  et  $Z_4 = Z_0a^4$ . Ainsi nous obtenons la solution :  $Z_0 = (a^6)^*$ ,  $Z_2 = (a^6)^*a^2$  et  $Z_4 = (a^6)^*a^4$  d'où  $L = (aaaaaa)^*(aa + aaaa)$ .

Nous aurions pu déduire cette expression par la substitution dans de  $aa$  à  $a$  dans l'expression rationnelle du deuxième langage.

Une autre manière de procéder est :

$$\begin{aligned} L_1 &= (aa)^* = \{a^i : i \equiv 0 \pmod{2}\} = \{a^i : i \equiv 0, 2 \text{ ou } 4 \pmod{6}\} \\ L_2 &= (aaa)^*(a + aa) = \{a^i : i \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod{3}\} = \{a^i : i \equiv 1, 2, 4 \text{ ou } 5 \pmod{6}\} \\ L_1 \cap L_2 &= \{a^i : i \equiv 2 \text{ ou } 4 \pmod{6}\} = (aaaaaa)^*(aa + aaaa) \end{aligned}$$

2. On procède de manière analogue à l'exercice précédent : Soit  $A_1$  un automate qui reconnaît  $L_1 = (0 + 11)^*$  et  $A_2$  qui reconnaît  $L_2 = (01 + 10)^*$ .

$\delta_{A_1}$	0	1
$\leftrightarrow 0$	0	1
1	—	0

$\delta_{A_2}$	0	1
$\leftrightarrow 1$	2	3
2	—	1
3	1	—

L'automate produit correspondant (et sa renumérotation) est :

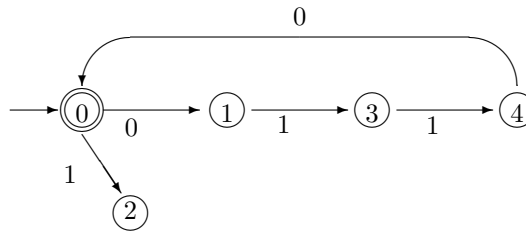
$\delta_{A_1 \times A_2}$	0	1	nouveau n°
$\leftrightarrow 01$	02	13	0
02	—	11	1
13	—	—	2
11	—	03	3
03	01	—	4

renuméroté :

$\delta$	0	1
$\leftrightarrow 0$	1	2
1	—	3
2	—	—
3	—	4
4	0	—

système :

$$\begin{cases} Z_0 = Z_4 0 + \varepsilon \\ Z_1 = Z_0 0 \\ Z_2 = Z_0 1 \\ Z_3 = Z_1 1 \\ Z_4 = Z_3 1 \end{cases}$$



Nous obtenons donc  $Z_0 = Z_0 0110 + \varepsilon \Rightarrow Z_0 = (0110)^*$ . Donc  $L = (0110)^*$ .

3. On reconnaît ici les deux langages de l'exercice précédent. La différence est qu'au lieu de faire l'intersection, on effectue une différence ensembliste i.e. on s'intéresse aux mots de  $L_1$  qui ne sont pas dans  $L_2$ , autrement dit aux mots qui sont à la fois dans  $L_1$  et dans le complémentaire de  $L_2$ .

On construit donc un automate qui reconnaît  $L_2^C$  déduit de  $A_2$  de l'exercice précédent dûment complété :

$\delta_{A_2^C}$	0	1
$\rightarrow 1$	2	3
$\leftarrow 2$	4	1
$\leftarrow 3$	1	4
$\leftarrow 4$	4	4

L'automate produit est alors :

$\delta_{A_1 \times A_2}$	0	1	
$\rightarrow 01$	02	13	0
$\leftarrow 02$	04	11	1
13	—	04	2
$\leftarrow 04$	04	14	3
11	—	03	4
14	—	04	5
$\leftarrow 03$	01	14	6

renuméroté

$\delta$	0	1
$\rightarrow 0$	1	2
$\leftarrow 1$	3	4
2	—	3
$\leftarrow 3$	3	5
4	—	6
5	—	3
$\leftarrow 6$	0	5

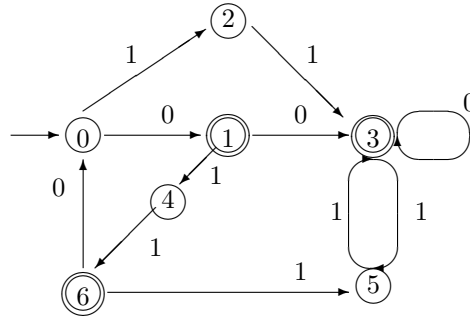
d'où le système :

$$\begin{cases} Z_0 = Z_6 0 + \varepsilon \\ Z_1 = Z_0 0 \\ Z_2 = Z_0 1 \\ Z_3 = Z_1 0 + Z_2 1 + Z_3 0 + Z_5 1 \\ Z_4 = Z_1 1 \\ Z_5 = Z_3 1 + Z_6 1 \\ Z_6 = Z_4 1 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} Z_1 = Z_6 00 + 0 \\ Z_3 = Z_1 0 + Z_3(0 + 11) + Z_6(011 + 11) + 11 \\ Z_6 = Z_1 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = Z_1 1100 + 0 = 0(1100)^* = (0110)^* 0 \\ Z_3 = Z_3(0 + 11) + Z_1(0 + 11011 + 1111) + 11 \\ Z_6 = (0110)^* 011 \end{cases}$$

Ainsi nous avons  $Z_3 = [(0110)^*(00 + 011011 + 01111) + 11](0 + 11)^*$



Ce qui donne l'expression rationnelle correspondant au langage :

$$L = [(0110)^*(00 + 011011 + 01111) + 11](0 + 11)^* + (0110)^*0 + (0110)^*011$$

Cette expression peut être simplifiée, car si on note  $T = 0110$  nous avons :

$$T^*(00 + T11 + 01111) + 11 = T^*(00 + 01111) + (T^*T11 + 11) = T^*(00 + 01111) + T^*11 = T^*(00 + 11 + 01111)$$

et nous obtenons :

$$L = (0110)^*[(11 + 00 + 01111)(0 + 11)^* + 0 + 011]$$

En minimisant, on constate que les états 2 et 5 sont équivalents. On peut donc les fusionner.

**4.** Il suffit de combiner ce qu'on a vu jusqu'ici. En effet, on peut construire l'automate non déterministe qui reconnaît le langage, et ce de la manière décrite dans la preuve du Théorème de Kleene. Ensuite on détermine et on minimise, puis il suffit de vérifier est-ce qu'on est dans un des cas suivants :

- Un automate avec un seul état - qui est la poubelle (cas  $L = \emptyset$ ).
- Un automate à deux états, avec l'initial état d'acceptation et l'autre poubelle, vers lequel mènent toutes les transactions ( $L = \{\varepsilon\}$ ).
- Un automate avec un seul état qui est d'acceptation ( $L = \Sigma^*$ ).