

Université de Nice-Sophia Antipolis
Ecole Polytech' Nice Sophia
SI3
2008–2009

Examen Langages Formels et Automates
du 3 juin 2009

Nom : _____
Prénom : _____
Groupe: _____

Note :

Durée : 2 heures

1		1
2		1
3		1
4		1
5		1
6		1
7		2
8		2
9		7
10		6

Document autorisés : tous document imprimé et notes de TD manuscrites.

Si vous pensez que le texte d'une question est ambigu (voire erroné) faites une hypothèse raisonnable et écrivez la sur votre copie.

Le total des points est de 23, ce qui vous laisse un certain choix (la note finale ne dépassera pas 20). Les problèmes (exercices 9 et 10) traités intégralement se verront attribuer un bonus de deux points supplémentaires.

Première partie - questions rapides

1 r_i^k [1 point]

Calculez $r_{1,3}^6$, lorsque vous disposez des informations suivants : $r_{1,3}^3 = \emptyset$, $r_{1,3}^4 = a$, $r_{1,3}^5 = ab^*$, $r_{1,5}^5 = a + c$, $r_{1,6}^5 = d$, $r_{1,5}^6 = a + b$, $r_{5,5}^6 = ba^*$, $r_{6,6}^5 = ca^*$, $r_{5,3}^6 = ab + ba$, $r_{6,3}^5 = b^*c$ (s'il vous manque de données, précisez lesquelles).

2 Quotients [1 point]

Calculez le quotient gauche par ab du langage $L = (a + b)^*(ab^*a + ba^*b)$.

3 Opérations [1 point]

Soient L_1 , L_2 et L_3 des langages sur un même alphabet fini Σ . On sait que :

- L_1 contient tout les mots de longueur au moins 20;
- L_2 est accepté par un automate fini nondéterministe;
- L_3 est accepté par un automate à pile nondéterministe.

Prouvez que $L_1(L_2 \cup L_3)$ est un langage algébrique.

4 Grammaire linéaire [1 point]

Soit L un langage engendré par une grammaire linéaire gauche et considérez les affirmations suivantes :

- (i) L est un langage rationnel;
- (ii) L est un langage algébrique.

Laquelle des réponses suivantes est correcte?

- (a) Seulement l'affirmation (i) est correcte.
- (b) Seulement l'affirmation (ii) est correcte.
- (c) Toutes les affirmations sont correctes.
- (d) Aucune affirmation n'est correcte.

5 Expressions rationnelles [1 point]

Soit $\Sigma = \{a, b\}$ et soit L le langage sur Σ des mots ne contenant pas le facteur aaa . Considérez les expressions rationnelles suivantes :

- (i) $(a + b)^*(a + aa)^*(a + b)^*$;
- (ii) $(b + ab + aab)^*(\epsilon + a + aa)$;
- (iii) $(\epsilon + a + aa)(b + ba + baa)^*$.

Laquelle des réponses suivantes est correcte?

- (a) Seulement l'expression (i) décrit L .
 - (b) Seulement l'expression (ii) décrit L .
 - (c) Seulement l'expression (iii) décrit L .
 - (d) Seulement les expressions (i) et (ii) décrivent L .
 - (e) Seulement les expressions (i) et (iii) décrivent L .
 - (f) Seulement les expressions (ii) et (iii) décrivent L .
 - (g) Toutes les trois expressions décrivent L .
 - (h) Aucune des trois expressions ne décrit L .
-

6 Langages et grammaires [1 point]

Soit $\Sigma = \{a, b\}$ et soit $L = \{a^n w a^n \mid w \in \Sigma^*, n \geq 1\}$. Considérez les affirmations suivantes :

- (i) L'expression rationnelle $a^*(a + b)^*a^*$ décrit L ;
- (ii) Le langage L n'est pas rationnel;
- (iii) Le langage L est engendré par la grammaire
$$\left\{ \begin{array}{l} N = \{S\} \\ T = \{a, b\} \\ P = \{ S \rightarrow aSa \mid aS \mid bS \mid aa \} \\ S \end{array} \right. ;$$
- (iv) Le langage L est engendré par la grammaire
$$\left\{ \begin{array}{l} N = \{S, X\} \\ T = \{a, b\} \\ P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSa \mid aXa \\ X \rightarrow aX \mid bX \end{array} \right\} \\ S \end{array} \right. .$$

Laquelle des réponses suivantes est correcte?

- (a) Seulement l'affirmation (i) est correcte.
 - (b) Seulement l'affirmation (ii) est correcte.
 - (c) Seulement l'affirmation (iii) est correcte.
 - (d) Seulement l'affirmation (iv) est correcte.
 - (e) Seulement les affirmations (i) et (iii) sont correctes.
 - (f) Seulement les affirmations (i) et (iv) sont correctes.
 - (g) Seulement les affirmations (ii) et (iii) sont correctes.
 - (h) Seulement les affirmations (ii) et (iv) sont correctes.
 - (i) Seulement les affirmations (ii), (iii) et (iv) sont correctes.
 - (j) Toutes les affirmations sont correctes.
 - (k) Aucune affirmation n'est correcte.
-

7 Automate à pile [2 points]

Soit $L = \{w \in (a+b)^* \mid |w|_a = 2|w|_b + 1\}$. Décrivez un automate à pile qui accepte ce langage.

[illegible]

8 Rationnel ou algébrique [2 points]

Est-ce que le langage $L = \{a^i b^j a^{i+j+k} b^k \mid i, j, k > 0\}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ est algébrique? Si oui, donnez une grammaire algébrique qui l'engendre (sans preuve) ou un automate à pile qui le reconnaît (sans preuve), sinon prouvez sa non algébricité.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Deuxième partie - problèmes

9 CDR [7 points]

Soit L un langage sur l'alphabet Σ . On définit

- le langage $CDR(L)$ comme l'ensemble des mots de L auxquels la première lettre a été enlevée
- le langage $BEGIN(L, a)$ comme l'ensemble des mots de L qui commence par a

a) Un exemple : Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$ et $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Quels sont les langages $CDR(L)$, $BEGIN(L, a)$ et $BEGIN(L, b)$.

b) Prouvez que si L est rationnel alors $CDR(L)$ l'est aussi.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

c) Prouvez que si L est algébrique alors $CDR(L)$ l'est aussi.

[illegible]

d) Prouvez que si L est rationnel alors $BEGIN(L,a)$ l'est aussi.

[illegible]

e) Prouvez que si L est algébrique alors $BEGIN(L, a)$ l'est aussi.

[illegible]

10 Les conjugués [6 points]

Soit Σ un alphabet fini. Deux mots $w, w' \in \Sigma^*$ sont conjugués s'il existe deux mots $u, v \in \Sigma^*$ tels que $w = uv$ et $w' = vu$ (c.à.d. si on peut obtenir l'un de l'autre par une permutation circulaire). Dans la suite, on note $C(w)$ l'ensemble des conjugués du mot $w \in \Sigma^*$. De même, pour un langage $L \subset \Sigma^*$, on note $C(L) = \bigcup_{w \in L} C(w)$ l'ensemble des conjugués des mots de L .

- a) Donner $C(aabaab)$.

- b) Donner $C(\{a^n b^n | n > 0\})$.

- c) Quel est le nombre minimum et maximum de conjugués qu'un mot de longueur n peut avoir?

- d) Prouvez que si L est un langage rationnel alors $C(L)$ l'est aussi.

[illegible]

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 28 horizontal blue or grey lines spaced evenly apart, typical of notebook paper. The lines extend across the entire width of the page, leaving small margins at the top and bottom. There are no vertical lines, text, or other markings on the page.