Propriétés de clôture

But

- Savoir quelles sont les opérations qui conservent la rationalité d'un langage.
- On connaît déjà plusieurs manières de considérer les langages rationnels
  - Par les expressions rationnelles
  - Par les automates

Clôture par complémentation

- La classe des langages rationnels est close par complémentation : $L \in Rat(\Sigma) \Rightarrow \Sigma^* \backslash L \in Rat(\Sigma)$,
- Preuve par automates :
  - $L \in Rat(\Sigma) \Rightarrow$ il existe A un AFD **complet**, $A = \langle Q, \Sigma, \delta, i, F \rangle$ t.q. $L(A) = L$
  - on définit A' à partir de A pour reconnaître $\Sigma^* \backslash L$:
    - $A' = \langle Q, \Sigma, \delta, i, Q \backslash F \rangle$
  - Tous les états non terminaux deviennent terminaux et vice versa

Clôture par l'intersection

- Si L et M sont deux langages rationnels alors $L \cap M$ est également rationnel.

$$L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$$

- <u>Preuve directe:</u>

  Comme l'ensemble des langages rationnels est clos pour la complémentation et l'union, il est clos pour l'intersection

Preuve par automates

- Soit $A = \langle Q, \Sigma, \delta, i, T \rangle$ tel que $L(A) = L$
- Soit $B = \langle Q', \Sigma, \delta', j, T' \rangle$ tel que $L(B) = M$

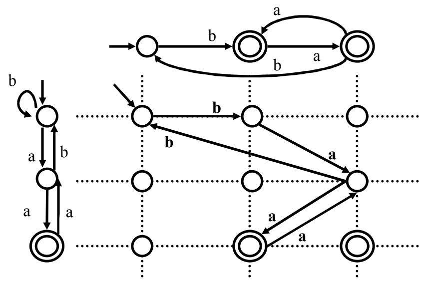
Alors, $C = \langle Q \times Q', \Sigma, \delta_C, [i,j], T \times T' \rangle$ pour

$$\delta_C([p,q]), a) = [\delta(p,a), \delta'(q,a)]$$

Pour tout $p \in Q$, $q \in Q'$ et $a \in \Sigma$

Reconnaît $L \cap M$

Exemple



Clôture par l'union

- La construction précédente permet également de prouver la clôture par l'union
- Si L et M sont deux langages rationnels alors $L \cup M$ est également rationnel.
- Preuve par automates :
  - Soit $A=\langle Q,\Sigma,\delta,i,F\rangle$ **complet** tel que $L(A)=L$
  - Soit $B=\langle Q',\Sigma,\delta',j,F'\rangle$ **complet** tel que $L(B)=M$

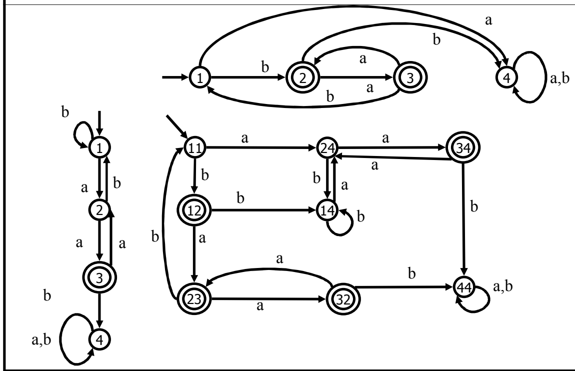
  Alors, $D=\langle Q \times Q',\Sigma,\delta_D,[i,j],\{[f,f'] \mid f \in F \text{ ou } f' \in F'\}\rangle$ pour

  $$\delta_D([p,q]),a)=[\delta(p,a), \delta'(q,a)]$$

  pour tout $p \in Q$, $q \in Q'$ et $a \in \Sigma$ reconnaît $L \cup M$

7

Exemple



8

Clôture par substitution

- À chaque lettre de l'alphabet d'une expression rationnelle on associe un langage rationnel: on substitue un langage à une lettre.

  $$f(\varepsilon)= \varepsilon \text{ et } f(ma)=f(m)f(a)$$

  m un mot et a une lettre

- Pour les langages:

  $$f(L) = \cup_{m \in L} f(m)$$

9

Exemple

- f(0)=a et f(1)=b*
- f(010)=ab*a
- Pour L=0*(0+1)1*, f(L)=a*(a+b*)(b*)*=a*b*

10

Clôture par substitution

- Soit $L \in Rat(\Sigma)$ et $\forall a \in \Sigma$, $R_a \in Rat(\Delta)$.
  Soit la substitution $f: \Sigma \rightarrow \Delta^*$, $f(a)=R_a$
  f remplace toute occurrence de a dans L par R_a.
- $f(L \cup M)=f(L) \cup f(M)$, $f(L.M)=f(L).f(M)$, $f(M^*)=f(M)^*$
- On montre par récurrence sur la structure de L que l'expression rationnelle obtenue représente bien f(L).

11

Récapitulatif

Union	Oui
Intersection	Oui
Etoile	Oui
Concaténation	Oui
Substitution	Oui

12

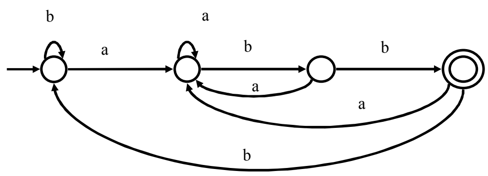
Clôture image miroir

- Si L est un langage rationnel alors le langage r(L), composé des images miroirs des mots de L est également rationnel.
- La preuve est facile. En effet, si l'automate A reconnaît L, alors l'automate inverse r(A), reconnaît r(L).

Exemple

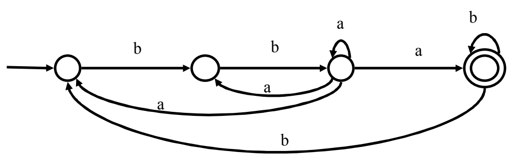
- Le langage des mots ayant abb comme suffixe
  (a+b)*abb

est reconnu par l'automate *A*



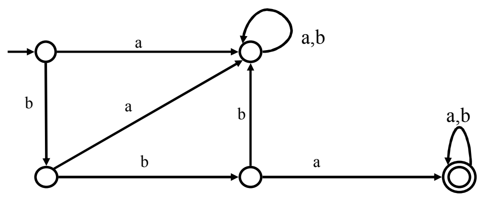
Exemple

Pour reconnaître le langage miroir, il suffit d'inverser l'orientation des arcs - r(*A*).



Exemple (suite)

- Mais, nous avons obtenu un automate *A'* non déterministe !
- Il faut donc déterminiser, pour obtenir d(*A'*)



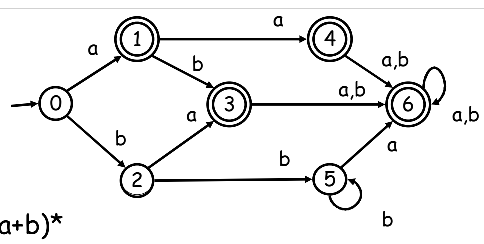
Quelques propriétés

Soit *A* un automate fini et *q* un état de *A*.

- Le **langage droit** (suffixe) de *q* est le langage $L_d(A,q)$ reconnu par l'automate $A_d(A,q)$ obtenu de *A* en fixant l'état initial *q*.
- Le **langage gauche** (préfixe) de *q* est le langage $L_g(A,q)$ reconnu par l'automate $A_g(q)$ obtenu de *A* en fixant l'état final (unique) *q*.

Quelques propriétés

- Exemple



- $L_d(A,3)=(a+b)^*$
- $L_g(A,3)=ab+ba$

Quelques propriétés

Propriété 1 : Un automate fini est déterministe si et seulement si les langages gauches de ses états sont deux à deux disjoints.

Preuve : sinon, on le choix …

19

Quelques propriétés

- **Propriété 2 :** Si le langage gauche (resp. droit) de *q* est $L_g(A,q)$ (resp. $L_d(A,q)$), alors le langage gauche (resp. droit) de q dans r(*A*) est $L_d(r(A),q)$ (resp. $L_g(r(A),q)$).

20

Quelques propriétés

- **Propriété 3 :** Le langage droit d'un état *q'* de d(*A*) est l'union des langages droits des états de *q* de *A* qui appartiennent à *q'*.

21

Quelques propriétés

- **Propriété 4 :** Un automate déterministe complet ayant toutes les états accessibles est minimal si et seulement si toutes ses langages droits sont différents.

22

Théorème de Brzozowski

- **Théorème (1962) :**

Soit *A* un automate (pas nécessairement déterministe) qui accepte le langage L. Alors l'automate d(r(d(r(*A*)))) est l'automate minimal qui reconnaît L.

23

Théorème de Brzozowski

- Par la construction, il s'agit d'un AFD complet ayant toutes les états accessibles. Comme on a vu, le langage accepté est L.
- Il reste à montrer que toutes les langages droits de drdr(A)sont différents.
- Par la propriété 1, les langages gauches de dr(A) sont deux à deux disjoints.
- Les langages droits de rdr(A) sont les langages gauches de dr(A). Ainsi, ils sont deux à deux disjoints.

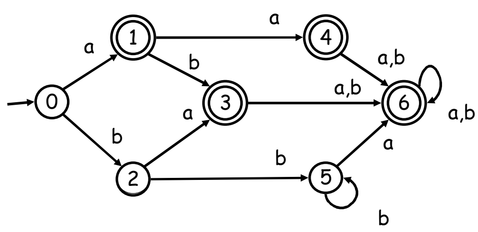
24

Théorème de Brzozowski

- Par la proposition 3, un langage droit de drdr(A) est l'union de langages droits de rdr(A). Comme les langages droits de rdr(A) sont deux à deux disjoints, les langages droits de drdr(A) sont différents.
- Donc drdr(A) est minimal.

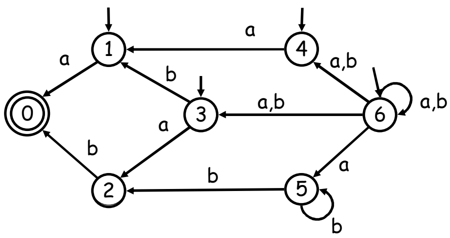
25

Exemple (l'automate)



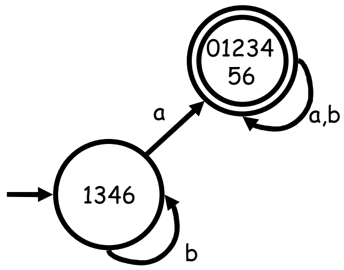
26

Exemple (l'inverse)



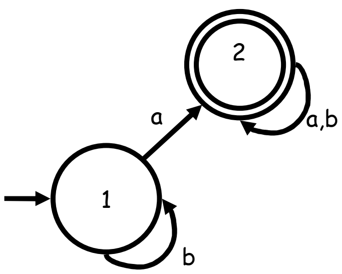
27

Exemple (détérminisé)



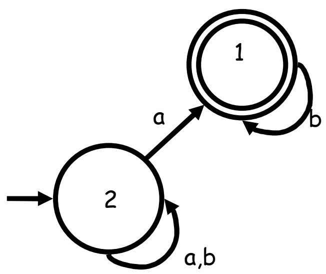
28

Exemple (renumeroté)



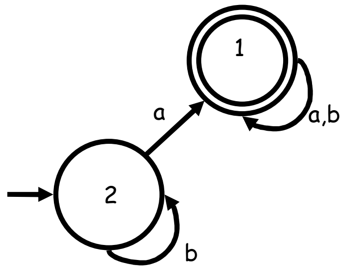
29

Exemple (inverse)



30

Exemple (détérminisé)



31

Problème de l'égalité d'expressions rationnelles

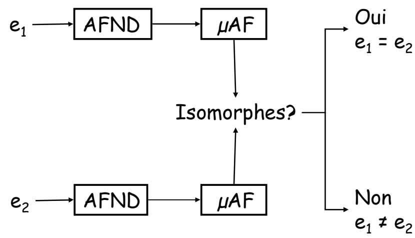
32

Égalité d'expressions rationnelles

- Problème
  - <u>Données</u> : e_1 et e_2 deux expressions rationnelles
  - <u>Question</u> : $e_1 = e_2$?
- Exemple
  - $(a^*b^*)^*(b^*a^*)^*bb((b^*a^*)^*+(b+a)^*)=(a+b)^*bb(a+b)^*$

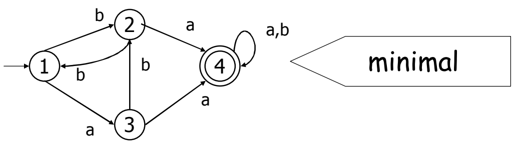
33

Fonctionnement



34

Exemple



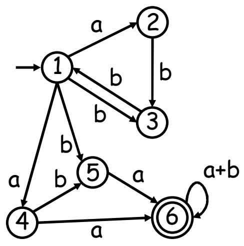
$L=[(bb)^*a((bb)^+a)^*(b(bb)^*a+a)+(bb)^*ba](a+b)^*$

$L'= (abb+bb)^*(aa+aba+ba)\ (a+b)^*$

35

Exemple

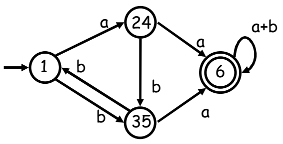
$L'= (abb+bb)^*(a+ab+b)a\ (a+b)^*$



	a	b
→1	24	35
2	-	3
3	-	1
4	6	5
5	6	-
←6	6	6

Exemple

L'= (abb+bb)*(a+ab+b)a (a+b)*



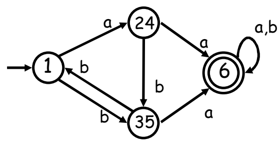
Minimal, à vue de nez…

	a	b
→1	24	35
2	-	3
3	-	1
4	6	5
5	6	-
←6	6	6

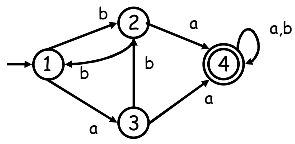
	a	b
→1	24	35
24	6	35
35	6	1
←6	6	6

Exemple

L'= (abb+bb)*(a+ab+b)a (a+b)*



isomorphes



L=[(bb)*a((bb) ⁺a)*(b(bb)*a+a)+(bb)*ba](a+b)*