

# Systèmes d'équations et quotients

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n°3

7 mars 2008

1.

b) Le système d'équations de droite associé à l'automate est :

$$\begin{cases} Y_0 = 1Y_0 + 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 0Y_2 + 1Y_3 \\ Y_2 = \varepsilon + 0Y_1 + 1Y_2 \\ Y_3 = 0Y_1 + 1Y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_3 = 1^*0Y_1 \\ Y_0 = 1Y_0 + 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 0Y_2 + 1^+0Y_1 \\ Y_2 = \varepsilon + 0Y_1 + 1Y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_2 = 1^*(\varepsilon + 0Y_1) \\ Y_0 = 1^*0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 01^* + 01^*0Y_1 + 1^+0Y_1 = (\varepsilon + 01^*) + (01^*0 + 1^+0)Y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = (01^*0 + 1^+0)^*(\varepsilon + 01^*) \\ Y_0 = 1^*0Y_1 \end{cases}$$

D'où

$$L(B) = 1^*0(01^*0 + 1^+0)^*(\varepsilon + 01^*)$$

c) Le système d'équations de gauche associé à l'automate est :

$$\begin{cases} Z_0 = \varepsilon + Z_01 = 1^* \\ Z_1 = Z_00 + Z_30 + Z_20 = 1^*0 + (Z_2 + Z_3)0 \\ Z_2 = Z_10 + Z_21 = Z_101^* \\ Z_3 = Z_11 + Z_31 = Z_111^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = 1^*0 + (Z_101^* + Z_111^*)0 = 1^*0 + Z_1(01^*0 + 1^+0) \\ Z_2 = Z_101^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = 1^*0(01^*0 + 1^+0)^* \\ Z_2 = 1^*0(01^*0 + 1^+0)^*01^* \end{cases}$$

D'où

$$L(B) = (1^*0(01^*0 + 1^+0)^*)(01^* + \varepsilon)$$

Par hasard on vient d'obtenir le même résultat que dans l'autre version !

2. On obtient le système suivant

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon + Z_2a + Z_3b \\ Z_2 = Z_1a + Z_4b \\ Z_3 = Z_1b + Z_4a \\ Z_4 = Z_2b + Z_3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon + Z_1aa + Z_4ba + Z_1bb + Z_4ab = \varepsilon + Z_1(aa + bb) + Z_4(ab + ba) \\ Z_4 = Z_1ab + Z_4bb + Z_1ba + Z_4aa = Z_1(ab + ba) + Z_4(aa + bb) \end{cases}$$

$$\{ Z_4 = Z_1(ab + ba)(aa + bb)^* \}$$

$$\{ Z_1 = \varepsilon + Z_1((aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba)) \}$$

$$\{ Z_1 = ((aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^* \}$$

Un système d'équations de droite permettrait d'obtenir la même chose :

$$\begin{cases} Y_1 = \varepsilon + aY_2 + bY_3 \\ Y_2 = aY_1 + bY_4 \\ Y_3 = bY_1 + aY_4 \\ Y_4 = bY_2 + aY_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \varepsilon + aaY_1 + abY_4 + bbY_1 + baY_4 = \varepsilon + (aa + bb)Y_1 + (ab + ba)Y_4 \\ Y_4 = baY_1 + bbY_4 + abY_1 + aaY_4 = (aa + bb)Y_4 + (ab + ba)Y_1 \end{cases}$$

$$\{ Y_4 = (aa + bb)^*(ab + ba)Y_1 \}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \varepsilon + (aa + bb)Y_1 + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba)Y_1 \\ = \varepsilon + ((aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))Y_1 \end{cases}$$

$$\{ Y_1 = ((aa + bb) + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^* \}$$

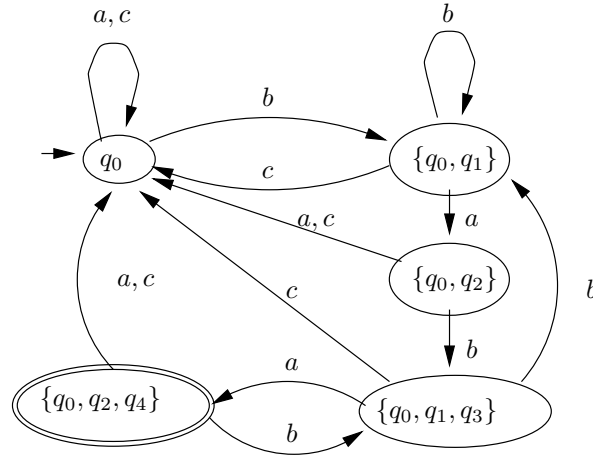
3.

a) Un automate non déterministe pour reconnaître  $L$  est

	$a$	$b$	$c$
$\rightarrow q_0$	$q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$q_0$
$q_1$	$q_2$		
$q_2$		$q_3$	
$q_3$	$q_4$		
$\leftarrow q_4$			

b) La détermination de cet automate est donnée ci-dessous :

	$a$	$b$	$c$
$\rightarrow q_0$	$q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$q_0$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$q_0$
$\{q_0, q_2\}$	$q_0$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$q_0$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_4\}$	$\{q_0, q_1\}$	$q_0$
$\leftarrow \{q_0, q_2, q_4\}$	$q_0$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$q_0$



c) Calcul de quotients gauches de  $L = (a + b + c)^*baba$  :

$$a^{-1}L = L$$

$$b^{-1}L = L + aba = M$$

$$c^{-1}L = L$$

On continue sur  $M$  :

$$a^{-1}(L + aba) = a^{-1}L + ba = L + ba = N$$

$$b^{-1}(L + aba) = b^{-1}L + \emptyset = M$$

$$c^{-1}(L + aba) = c^{-1}L + \emptyset = L$$

On continue sur  $N$  :

$$a^{-1}(L + ba) = a^{-1}L + \emptyset = L$$

$$b^{-1}(L + ba) = b^{-1}L + a = L + aba + a = O$$

$$c^{-1}(L + ba) = c^{-1}L + \emptyset = L$$

On continue sur  $O$  :

$$a^{-1}(L + aba + a) = a^{-1}L + ba + \varepsilon = L + ba + \varepsilon = P$$

$$b^{-1}(L + aba + a) = b^{-1}L + \emptyset + \emptyset = M$$

$$c^{-1}(L + aba + a) = c^{-1}L + \emptyset + \emptyset = L$$

On termine par le calcul sur  $P$  :

$$a^{-1}(L + ba + \varepsilon) = L + \emptyset + \emptyset = L$$

$$b^{-1}(L + ba + \varepsilon) = b^{-1}L + a + \emptyset = O$$

$$c^{-1}(L + ba + \varepsilon) = L + \emptyset + \emptyset = L$$

d) qui nous donne l'automate fini déterministe minimal suivant :

		$a$	$b$	$c$
$\rightarrow$	$L$	$L$	$M$	$L$
	$M$	$N$	$M$	$L$
	$N$	$L$	$O$	$L$
	$O$	$P$	$M$	$L$
$\leftarrow$	$P$	$L$	$O$	$L$

qui est celui que nous avons précédemment obtenu, à une renumérotation des états près.