Université de Nice-Sophia Antipolis | Polytech'Nice-Sophia

SI3

2010–2011

Examen Langages Formels et Automates
du 31 mai 2011

Durée : 2 heures

Document autorisés : tous document imprimé.
Si vous pensez que le texte d'une question est ambigu (voire erroné) faites une hypothèse raisonnable et écrivez la sur votre copie.
Le total des points est supérieur à 20, ce qui vous laisse un certain choix (la note finale ne dépassera pas 20). Les problèmes (exercices 9 et 10) traités intégralement se verront attribuer un bonus de deux points supplémentaires.

Première partie - questions rapides

Justifiez vos réponses.

1 Est-ce rationnel ? [1 point]

L est un langage rationnel. Est-ce que $L - L^2$ est rationnel ?

Comme L est rationnel, $L^2 = L.L$ l'est aussi. De même pour $\bar{L}^2$. Ainsi $L - L^2 = L \cap \bar{L}^2$ est rationnel comme l'intersection de deux langages rationnels.

---

2 Ambigüe ? [1 point]

Est-ce que la grammaire $S \to SS \mid aSb \mid ab \mid ba$ est ambigüe ?

Oui. En effet nous avons $S \to aSb \to abab$ et aussi $S \to SS \to abS \to abab$.

---

3 Exemples [1 point]

1. Donner un exemple de langages L_1 rationnel et L_2 non rationnel tels que $L_1 \cup L_2$ rationnel.

   $L_1 = \Sigma^*$ et L_2 non rationnel quelconque.

   ---

2. Donner un exemple de langages L_1 rationnel et L_2 non rationnel tels que $L_1 \cap L_2$ rationnel et non-vide.

   $L_1 = a^*$ et $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid n,m \geq 0 =$ et dans ce cas $L_1 \cap L_2 = L_1$.

   ---

4 Grammaire linéaire [1 point]

Soit L un langage engendré par une grammaire linéaire gauche.

1. Est-ce que L est rationnel ?

Oui. Si on prend les symmétriques des règles, on obtient une grammaire linéaire droite, donc un langage rationnelle. Comme le mirroir du langage est rationnelle, le langage l'est aussi.

2. Est-ce que L est algébrique ?

Comme le langage est rationnelle, le langage est aussi algébrique.

5 Expressions rationnelles [1 point]

Soit $\Sigma = \{a,b\}$ et soit L le langage sur Σ des mots ne contenant pas le facteur aaa.

1. L'expression $(a+b)^\star(a+aa)^\star(a+b)^\star$ décrit L.

Non. En effet il est facile de voir que $aaa \in$ **(i)**.

2. L'expression $(b+ab+aab)^\star(\epsilon+a+aa)$ décrit L.

Oui. Entre chaque b on a au plus deux a. De même au début et à la fin.

3. L'expression $(\epsilon+a+aa)(b+ba+baa)^\star$ décrit L.

Oui. Comme on l'a vu à plusieurs reprises ($A(BA)^\star = (AB)^\star A$).

6 Langages et grammaires [1 point]

Soit $\Sigma = \{a,b\}$ et soit $L = \{a^n w a^n \mid w \in \Sigma^\star, n \geq 1\}$. Considérez les affirmations suivantes :

1. L'expression rationnelle $a^\star(a+b)^\star a^\star$ décrit L ?

Non, car un mot de L ne peut pas commencer par un b.

2. Le langage L est rationnel ?

Oui, car $L = a(a+b)^\star a$.

3. Le langage L est engendré par la grammaire $\begin{cases} N = \{S\} \\ T = \{a,b\} \\ P = \ \{\ S \to aSa \mid aS \mid bS \mid aa\ \} \\ S \end{cases}$?

Non, car un mot de L ne peut pas commencer par un b.

4. Le langage L est engendré par la grammaire $\begin{cases} N = \{S,X\} \\ T = \{a,b\} \\ P = \left\{ \begin{array}{l} S \to aSa \mid aXa \\ X \to aX \mid bX \end{array} \right\} \\ S \end{cases}$?

Non, car le langage engendré est le langage vide (aucune variable productive).

7 Quel type de langage ? [1 points]

Est-ce que les langages suivants sont rationnels et/ou algébriques :

1. $L_1 = \{ww \mid w \in (a+b)^*\}$.

Ce langage n'est pas algébrique (donc pas rationnel non plus). Il suffit de faire l'intersection $L_1 \cap a^+b^+a^+b^+ = \{a^nb^ma^nb^m \mid n,m > 0\}$ pour conclure.

---

2. $L_2 = \{w \mid w \in (a+b)^*,\ |w|_a = |w|_b\ et\ |w| \leq 1024\}$.

Ce langage est fini (moins de $2^{2^{10}}$ mots), donc il est rationnel, donc algébrique.

---

8 Automate fini [2 points]

Soit A un automate fini déterministe, ayant n états. Montrez que si le langage accepté n'est pas Σ^* alors il existe un mot de longueur au plus n qui n'est pas dans L.

Le plus simple est de considérer le contraposé. Supposons donc que l'automate accepte tous les mots de longueur au plus n, et soit m de Σ^* un plus court mot non accepté par l'automate. Nous avons $m = m_1a$ avec $a \in \Sigma$. Comme m_1 est plus court que m, il est accepté par l'automate. Soit p l'état de l'automate après lecture de m_1. Dans ce cas, soit le successeur de p par un a n'est pas final, soit p n'a pas de successeur par un a. Par ailleurs, comme p est accessible, il y a un mot m_2 "sans boucles" qui mènent de l'état initial à p, donc de longueur au plus $n-1$. Mais dans ce cas m_2a est de longueur au plus n et il n'est pas accepté par l'automate, donc contradiction.

---

9 Grammaire algébrique [2 points]

Donner une grammaire algébrique engendrant le langage L composé de tous les mots w sur l'alphabet $\{a,b\}$ qui vérifient toutes les propriétés suivantes :

- w a autant de a que de b,
- w commence par $bbab$,
- w se termine par a.

Il est facile de réaliser que $L = bbabL'a$ avec $L' = \{w \mid |w|_a = |w|_b+1\}$. Nous obtenons ainsi la grammaire :

$$\begin{cases} N = \{S,T,X,Y\} \\ T = \{a,b\} \\ P = \left\{ \begin{array}{l} S \to bbabXa \\ X \to aT \mid bXX \mid a \\ T \to bX \mid aY \\ Y \to bT \mid aTT \mid b \end{array} \right\}. \\ S \end{cases}$$

Deuxième partie - problèmes

10 Les conjugués [6 points]

Soit Σ un alphabet fini. Deux mots $w,w' \in \Sigma^\star$ sont conjugués s'il existe deux mots $u,v \in \Sigma^\star$ tels que $w = uv$ et $w' = vu$ (c.à.d. si on peut obtenir l'un de l'autre par une permutation circulaire). Dans la suite, on note $C(w)$ l'ensemble des conjugués du mot $w \in \Sigma^\star$. De même, pour un langage $L \subset \Sigma^\star$, on note $C(L) = \bigcup_{w \in L} C(w)$ l'ensemble des conjugués des mots de L.

1. Donner $C(aabaab)$.

$C(aabaab) = \{aabaab,abaaba,baabaa\}$.

---

2. Donner $C(\{a^n b^n | n > 0\})$.

$C(\{a^n b^n | n > 0\}) = (\{a^i b^n a^{n-i} | i,n > 0\} \cup (\{b^i a^n b^{n-i} | i,n > 0\}$

---

3. Quel est le nombre minimum et maximum de conjugués qu'un mot de longueur n peut avoir ?

Minimum 1 ((par exemple a^n) et maximum n (toutes les permutations différentes).

---

4. Prouvez que si L est un langage rationnel alors $C(L)$ l'est aussi.

Cela revient à parcourir d'abord un chemin d'un état vers un état final, puis de l'état initial vers l'état de départ. Il faut donc "combiner" des automates ainsi obtenus et ce pour chaque état de départ possible (chaque état accessible de l'automate).

---

11 Langage algébrique [5 points]

On définit le langage de l'addition sur l'alphabet $\{a,b\}$, $L_+ = \{a^m b a^n b a^{m+n} \mid m,n \geq 0\}$ et le langage de la multiplication $L_* = \{a^m b a^n b a^{mn} \mid m,n \geq 0\}$.

1. Montrez que le langage L_+ n'est pas rationnel.

Il suffit d'appliquer le lemme de l'étoile. L'idée est que comme la partie "'gonflée"' ne peut pas contenir de b, donc ne peut contenir que des a, ce qui permet de perturber la propriété.
En détails : soit n donnée par le lemme. Soit $w = a^n b a b a^{n+1}$. Si on a une factorisation $w = xyz$ avec $|y| > 0$ et $|xy| \leq n$.Ainsi y ne peut contenir que des a. Par contre, comme $xz \notin L_+$ on peut conclure que le langage n'est pas rationnel.

---

2. Donnez une grammaire algébrique qui engendre L_+.

Par exemple, la grammaire : $\left\{ \begin{array}{l} N = \{S,X\} \\ T = \{a,b\} \\ P = \left\{ \begin{array}{l} S \to aSa \mid bX \\ X \to aXa \mid b \end{array} \right\} \\ S \end{array} \right.$.

---

3. Le langage L_* est-il algébrique ? Justifiez.

Non. Pour justifier il suffit d'utiliser le lemme de la pompe. En effet, même si on peut augmenter le nombre de a à deux endroits, cela ne suffit pas pour assurer que uv^2wx^2y et uv^3wx^3y ne soient pas tous les deux dans L_*.
