SI 3 **Année 2008-2009**
Informatique théorique **Langages Formels et Automates**

Systèmes d'équations et quotients

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}3

16 février 2009

1.

b) Le système d'équations de droite associé à l'automate est :

$$\begin{cases} Y_0 = 1Y_0 + 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 0Y_2 + 1Y_3 \\ Y_2 = \varepsilon + 0Y_1 + 1Y_2 \\ Y_3 = 0Y_1 + 1Y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_3 = 1^\star 0Y_1 \\ Y_0 = 1Y_0 + 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 0Y_2 + 1^+0Y_1 \\ Y_2 = \varepsilon + 0Y_1 + 1Y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_2 = 1^\star(\varepsilon + 0Y_1) \\ Y_0 = 1^\star 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 01^\star + 01^\star 0Y_1 + 1^+0Y_1 = (\varepsilon + 01^\star) + (01^\star 0 + 1^+0)Y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = (01^\star 0 + 1^+0)^\star(\varepsilon + 01^\star) \\ Y_0 = 1^\star 0Y_1 \end{cases}$$

D'où

$$L(B) = 1^\star 0(01^\star 0 + 1^+0)^\star(\varepsilon + 01^\star)$$

c) Le système d'équations de gauche associé à l'automate est :

$$\begin{cases} Z_0 = \varepsilon + Z_0 1 = 1^\star \\ Z_1 = Z_0 0 + Z_3 0 + Z_2 0 = 1^\star 0 + (Z_2 + Z_3)0 \\ Z_2 = Z_1 0 + Z_2 1 = Z_1 01^\star \\ Z_3 = Z_1 1 + Z_3 1 = Z_1 11^\star \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = 1^\star 0 + (Z_1 01^\star + Z_1 11^\star)0 = 1^\star 0 + Z_1(01^\star 0 + 1^+0) \\ Z_2 = Z_1 01^\star \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = 1^\star 0(01^\star 0 + 1^+0)^\star \\ Z_2 = 1^\star 0(01^\star 0 + 1^+0)^\star 01^\star \end{cases}$$

D'où

$$L(B) = \left(1^\star 0(01^\star 0 + 1^+0)^\star\right)(01^\star + \varepsilon)$$

Par hasard on vient d'obtenir le même résultat que dans l'autre version !

2. On obtient le système suivant

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon + Z_2a + Z_3b \\ Z_2 = Z_1a + Z_4b \\ Z_3 = Z_1b + Z_4a \\ Z_4 = Z_2b + Z_3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon + Z_1aa + Z_4ba + Z_1bb + Z_4ab = \varepsilon + Z_1(aa+bb) + Z_4(ab+ba) \\ Z_4 = Z_1ab + Z_4bb + Z_1ba + Z_4aa = Z_1(ab+ba) + Z_4(aa+bb) \end{cases}$$

$$\left\{ Z_4 = Z_1(ab+ba)(aa+bb)^\star \right.$$

$$\left\{ Z_1 = \varepsilon + Z_1((aa+bb) + (ab+ba)(aa+bb)^\star(ab+ba)) \right.$$

$$\left\{ Z_1 = ((aa+bb) + (ab+ba)(aa+bb)^\star(ab+ba))^\star \right.$$

Un système d'équations de droite permettait d'obtenir la même chose :

$$\begin{cases} Y_1 = \varepsilon + aY_2 + bY_3 \\ Y_2 = aY_1 + bY_4 \\ Y_3 = bY_1 + aY_4 \\ Y_4 = bY_2 + aY_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \varepsilon + aaY_1 + abY_4 + bbY_1 + baY_4 = \varepsilon + (aa+bb)Y_1 + (ab+ba)Y_4 \\ Y_4 = baY_1 + bbY_4 + abY_1 + aaY_4 = (aa+bb)Y_4 + (ab+ba)Y_1 \end{cases}$$

$$\left\{ Y_4 = (aa+bb)^\star(ab+ba)Y_1 \right.$$

$$\begin{cases} Y_1 = \varepsilon + (aa+bb)Y_1 + (ab+ba)(aa+bb)^\star(ab+ba)Y_1 \\ = \varepsilon + ((aa+bb) + (ab+ba)(aa+bb)^\star(ab+ba))Y_1 \end{cases}$$

$$\left\{ Y_1 = ((aa+bb) + (ab+ba)(aa+bb)^\star(ab+ba))^\star \right.$$

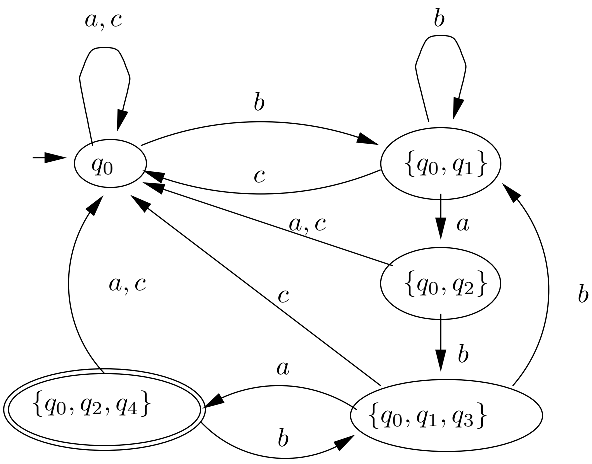
3.

a) Un automate non déterministe pour reconnaître L est

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
q_1	q_2		
q_2		q_3	
q_3	q_4		
$\leftarrow q_4$			

b) La déterminisation de cet automate est donnée ci-dessous :

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\{q_0, q_2\}$	q_0	$\{q_0, q_1, q_3\}$	q_0
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_4\}$	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\leftarrow \{q_0, q_2, q_4\}$	q_0	$\{q_0, q_1, q_3\}$	q_0



c) Calcul de quotients gauches de $L = (a + b + c)^\star baba$:

$a^{-1}L = \quad L$
$b^{-1}L = \quad L + aba = M$
$c^{-1}L = \quad L$

On continue sur M :

$a^{-1}(L + aba) = \quad a^{-1}L + ba = L + ba = N$
$b^{-1}(L + aba) = \quad b^{-1}L + \emptyset = M$
$c^{-1}(L + aba) = \quad c^{-1}L + \emptyset = L$

On continue sur N :

$a^{-1}(L + ba) = \quad a^{-1}L + \emptyset = L$
$b^{-1}(L + ba) = \quad b^{-1}L + a = L + aba + a = O$
$c^{-1}(L + ba) = \quad c^{-1}L + \emptyset = L$

On continue sur O :

$a^{-1}(L + aba + a) = \quad a^{-1}L + ba + \varepsilon = L + ba + \varepsilon = P$
$b^{-1}(L + aba + a) = \quad b^{-1}L + \emptyset + \emptyset = M$
$c^{-1}(L + aba + a) = \quad c^{-1}L + \emptyset + \emptyset = L$

On termine par le calcul sur P :

$a^{-1}(L + ba + \varepsilon) = \quad L + \emptyset + \emptyset = L$
$b^{-1}(L + ba + \varepsilon) = \quad b^{-1}L + a + \emptyset = O$
$c^{-1}(L + ba + \varepsilon) = \quad L + \emptyset + \emptyset = L$

d) qui nous donne l'automate fini déterministe minimal suivant :

		a	b	c
$\rightarrow$	L	L	M	L
	M	N	M	L
	N	L	O	L
	O	P	M	L
$\leftarrow$	P	L	O	L

qui est celui que nous avions précedemment obtenu, à une renumérotation des états près.