Langages algébriques

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}13

15 mai 2009

1.

a) Supposons $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$ algébrique, donc il existe n du lemme. Soit $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$. Par le lemme z s'écrit sous la forme $uvwxy$. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx.
Fait : $p = 0$ ou $r = 0$ (à cause de la longueur de vwx).
On distingue les quatre cas suivants :
– $q \neq 0, p = 0$: $|uv^0wx^0y|_a = n$ et $|uv^0wx^0y|_b \leq n$ donc $uv^0wx^0y \notin L_1$.
– $q \neq 0, p \neq 0$: $r = 0$ et donc $|uv^2wx^2y|_c = n + 2$ et $|uv^2wx^2y|_b \geq n + 2$ donc $uv^2wx^2y \notin L_1$.
– $q = 0, p \neq 0$: $|uv^2wx^2y|_a \geq n + 1$ et $|uv^2wx^2y|_b = n + 1$ donc $uv^2wx^2y \notin L_1$.
– $q = 0, p = 0$: $r \neq 0$ (sinon $vx = \varepsilon$) donc $|uv^0wx^0y|_c \leq n + 1$ et $|uv^0wx^0y|_b = n + 1$ donc $uv^0wx^0y \notin L_1$.
Donc L_1 n'est pas algébrique.
Preuve utilisant le lemme d'Ogden : Supposons $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$ algébrique, donc il existe n du lemme d'Ogden. Soit $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$, avec les lettres a marquées. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx. Ainsi, nous avons $p > 0$. Par ailleurs, on remarque que ni v ni x ne peuvent contenir deux lettres différentes, sinon, avec $i > 1$, uv^iwx^iy contient plusieurs alternances entre les types de lettres. Ainsi nous avons $q = 0$ ou $r = 0$.
– $p \neq 0, q = 0$: $|uv^3wx^3y|_a \geq n + 2$ et $|uv^3wx^3y|_b = n + 1$ donc $uv^3wx^3y \notin L_1$.
– $p \neq 0, r = 0$: $|uv^3wx^3y|_a \geq n + 2$ et $|uv^3wx^3y|_c = n + 2$ donc $uv^3wx^3y \notin L_1$.
Donc L_1 n'est pas algébrique.
Autre preuve. Supposons $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$ algébrique, donc il existe n du lemme de l'étoile. Soit $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$. Par le lemme z s'écrit sous la forme $uvwxy$. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx. $|uv^iwx^iy|_a = n + (i-1)p$, $|uv^iwx^iy|_b = n + 1 + (i-1)q$ et $|uv^iwx^iy|_c = n + 2 + (i-1)r$. Pour $i = 0$, on a $p \geq q \geq r$ et, pour $i = 2$, $p \leq q \leq r$. On a donc $p = q = r$. Mais on doit avoir $p = 0$ ou $q = 0$, sinon $|vwx| \geq n + 3$. Donc $p = q = r = 0 \Rightarrow |vx| = 0$, une contradiction.

b) Supposons $L_2 = \{a^i b^j \mid j = i^2\}$ algébrique, donc il existe n du lemme de l'étoile. Soit $z = a^n b^{n^2}$. Par le lemme z s'écrit sous la forme $uvwxy$. Soit k (resp. l) le nombre de a (resp. b) dans vx. Comme on doit avoir $uv^iwx^iy \in L_2$, on doit avoir $\forall i \geq 0 : ((n-k) + ik)^2 = (n^2 - l) + il$, ce qui implique $\forall i \geq 0$: $2kn + (i-1)k^2 = l$ ce qui est impossible. Donc L_2 n'est pas algébrique.

c) Supposons $L_3 = \{a^k b^k c^l | k \leq l \leq 2k\}$ algébrique, donc il existe n du lemme de l'étoile. Soit $z = a^n b^n c^n$. Par le lemme z s'écrit sous la forme $uvwxy$. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx.
Fait : $p = 0$ ou $r = 0$ (à cause de la longueur de vwx).
– $r = 0$: $|uv^2wx^2y|_a > n$ ou $|uv^2wx^2y|_b > n$ alors que $|uv^2wx^2y|_c = n$ donc $uv^2wx^2y \notin L_3$.
– $r \neq 0$: donc $p = 0$ et ainsi $|uv^0wx^0y|_a = n$ et $|uv^0wx^0y|_c < n$ donc $uv^0wx^0y \notin L_3$.
Donc L_1 n'est pas algébrique.
Preuve utilisant le lemme d'Ogden : Supposons $L_3 = \{a^k b^k c^l \mid k \leq l \leq 2k\}$ algébrique, donc il existe n du lemme d'Ogden. Soit $z = a^n b^n c^n$, avec les lettres a du début de mot marquées. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx. Ainsi, nous avons $p > 0$. Par ailleurs, on remarque que ni v ni x ne peuvent contenir

deux lettres différentes, sinon, avec $i > 1$, uv^iwx^iy contient plusieurs alternances entre les types de lettres. Ainsi nous avons $q = 0$ ou $r = 0$.
- $p \neq 0$, $q = 0$: uv^0wx^0y contient moins de n fois a en tête et $|uv^0wx^0y|_b = n$ donc $uv^0wx^0y \notin L_3$.
- $p \neq 0$, $r = 0$: uv^2wx^2y contient a^{n+1} en préfixe et seulement a^n en suffixe donc $uv^2wx^2y \notin L_3$.

Donc L_3 n'est pas algébrique.

d) $L_4 = c^\star L_1$. Ce langage rappelle l'exemple du cours où il a fallu utiliser le lemme d'Ogden. On marque toutes les lettres sauf les c en tête du mot $z = c^k a^n b^{n+1} c^{n+2}$. On peut alors réutiliser la preuve de l'exercice 1 en raisonnant sur les lettres marquées.
Remarque : on aurait pu aussi utiliser le fait que $L_4 \cap a^\star b^\star c^\star = L_1$, d'où la conclusion : L_4 n'est pas algébrique.

e) $L_5 = \bar{L_1} \cap a^\star b^\star c^\star$. On observe que $L_5 = \{a^ib^jc^k \mid i \geq j \text{ ou } j \geq k\} = \{a^ib^j \mid i \geq j\}c^\star \cup a^\star\{b^jc^k \mid j \geq k\}$ ce qui prouve (c.f. propriétés de clôture) que ce langage **est algébrique** (l'intersection avec $a^\star b^\star c^\star$ ne sert que pour le tri des lettres).

f) Supposons $L_6 = \{ww^{-1}w \mid w \in (a+b)^\star\}$ algébrique. Soit R le langage rationnel $a^\star b^\star a^\star b^\star$. Soit $L_6' = L_6 \cap R$, i.e. le langage $\{a^ib^{2j}a^{2i}b^j \mid i \geq 0,\ j \geq 0\}$. On montre donc que L_6' n'est pas algébrique. Supposons L_6' algébrique, donc il existe n du lemme de l'étoile. Soit $z = a^nb^{2n}a^{2n}b^n$. Par le lemme, $z = uvwxy$ ou $z = ABCD$ avec $A = a^n$ $B = b^{2n}$ $C = a^{2n}$ $D = b^n$.
- vx contient un a : comme $|vwx| \leq n$, vwx ne peut pas intersecter à la fois A et C. Ainsi $uv^0wx^0y \notin L_6'$ car on supprime au moins un a du coté A ou du coté C.
- vx contient un b : comme $|vwx| \leq n$, vwx ne peut pas intersecter à la fois B et D. Ainsi $uv^0wx^0y \notin L_6'$ car on supprime au moins un b du coté B ou du coté D.

Donc L_6' n'est pas algébrique et L_6 n'est pas algébrique.

g) $L_7 = \{w \in (a+b+c)^\star : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$. Soit $R = a^\star b^\star c^\star$ rationnel. $L_7 \cap R = \{a^nb^nc^n : n \geq 0\}$ est non algébrique. Donc L_7 n'est pas algébrique.