Automates finis - déterminisation et minimisation

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}4

13 mars 2008

1. On calcule l'équivalence de Nérode :

$$\begin{array}{ll}\approx_0 & \{1,2,3\}\{4,5,6,7\}\\ \approx_1 & \{1,3\}\{2\}\{4,5,6,7\}\\ \approx_2 & \{1,3\}\{2\}\{4,5,6,7\}\end{array}$$

Et nous obtenons, après renumérotation des états
Après minimisation et renommage nous obtenons :

δ	a	b
$\rightarrow 1$	2	1
2	2	3
$\leftarrow 3$	3	3

2. a) - b) iii) Un automate non-déterministe est :

δ	0	1
$\rightarrow 0$	0	$\{0,1\}$
1	2	2
2	3	3
$\leftarrow 3$	$-$	$-$

L'automate déterministe qu'on obtient est :

δ		0	1
$\rightarrow$	0	0	$\{0,1\}$
	$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1,2\}$
	$\{0,2\}$	$\{0,3\}$	$\{0,1,3\}$
	$\{0,1,2\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,3\}$	0	$\{0,1\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,3\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1,2\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	$\{0,3\}$	$\{0,1,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$

et en rénumérotant

δ		a	b
$\rightarrow$	0	0	1
	1	2	3
	2	4	5
	3	6	7
$\leftarrow$	4	0	1
$\leftarrow$	5	2	3
$\leftarrow$	6	4	5
$\leftarrow$	7	6	7

c) On peut remarquer qu'en suivant cette numérotation des états on obtient comme graphe des transitions un graphe bien connu - le graphe de *de Bruijn*. En effet, le successeur de l'état de numéro i par une transition étiquetée j (0 ou 1) est l'état numéro $2i + j \pmod{2^n}$. En fait cet automate un peu spécial est bien connu dans la litérature sous le nom d'automate universel. En effet, si nous considérons que le numéro de l'état n'est rien d'autre que la transformation de binaire en décimal de la suite des n derniers caractères lus, une transition consiste alors en un décalage obtenu par l'introduction d'une nouvelle lettre (ce qui justifie encore la formule $2i + j \pmod{2^n}$). Ainsi, dans le cas général nous aurons 2^n états.

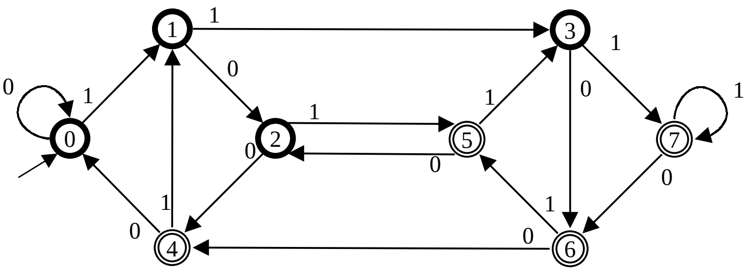


FIG. 1 – L'automate minimal

d)iii) Le procédé de calcul de l'équivalence de Nérode se déroule ainsi :

$$\begin{array}{ll} \approx_0 & \{0,1,2,3\}\{4,5,6,7\} \\ \approx_1 & \{0,1\}\{2,3\}\{4,5\}\{6,7\} \\ \approx_2 & \{0\}\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{5\}\{6\}\{7\} \end{array}$$

D'où la conclusion que notre automate était déjà minimal. On peut remarquer que c'est exactement la même chose qui se produira dans le cas général, avec $\sim_{n-1}$ comme équivalence de Nérode.
e) "Intuitivement" il faut mémoriser le mot composé des n dernières lettres lues dans le mot traité, soit 2^n possibilités donc 2^n états.
Plus précisemment, supposons qu'un AFD $\mathcal{A}$, ayant strictement moins de 2^n états reconnaîsse notre langage. Comme il y a 2^n mots de longueur n, il en existe (au moins) 2, m et m', tels que :
1) $m = u0v$ et $m' = u'1v'$ avec $|u| = |u'| = l$ (et donc $|v| = |v'|$! !)
2) m et m' mènent dans le même état q à partir de l'état initial dans $\mathcal{A}$.
Ceci conduit immédiatement à une contradiction. En effet, pour w un mot quelconque de longueur l, la lecture par l'automate de $m.w$ est la même que celle de $m'.w$. Or, d'après la définition du langage, $m'.w$ est un mot du langage alors que $m.w$ non.

3. a) L'automate non-déterministe complet est :

δ	a	b
$\rightarrow 0$	1	3
1	4	$\{0,2\}$
$\leftarrow 2$	0	4
3	0	4
4	4	4

L'automate déterministe qu'on obtient est :

δ		a	b
$\rightarrow$	0	1	3
	1	4	$\{0,2\}$
	3	0	4
	4	4	4
$\leftarrow$	$\{0,2\}$	$\{0,1\}$	$\{3,4\}$
	$\{0,1\}$	$\{1,4\}$	$\{0,2,3\}$
	$\{3,4\}$	$\{0,4\}$	4
	$\{1,4\}$	4	$\{0,2,4\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1\}$	$\{3,4\}$
	$\{0,4\}$	$\{1,4\}$	$\{3,4\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,4\}$	$\{0,1,4\}$	$\{3,4\}$
	$\{0,1,4\}$	$\{1,4\}$	$\{0,2,3,4\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3,4\}$	$\{0,1,4\}$	$\{3,4\}$

et en rénumérotant

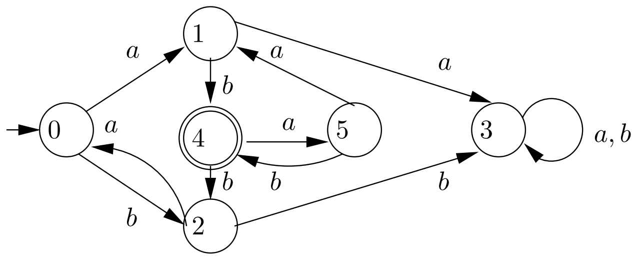
δ		a	b
$\rightarrow$	0	1	2
	1	3	4
	2	0	3
	3	3	3
$\leftarrow$	4	5	6
	5	7	8
	6	9	3
	7	3	10
$\leftarrow$	8	5	6
	9	7	6
$\leftarrow$	10	11	6
	11	7	12
$\leftarrow$	12	11	6

Le procédé de calcul de l'équivalence de Nérode se déroule ainsi :

$$\begin{array}{ll}
\approx_0 & \{0,1,2,3,5,6,7,9,11\}\{4,8,10,12\} \\
\approx_1 & \{0,2,3,6,9\}\{1,5,7,11\}\{4,8,10,12\} \\
\approx_2 & \{0,9\}\{1,7\}\{2,3,6\}\{4,8,10,12\}\{5,11\} \\
\approx_3 & \{0,9\}\{1,7\}\{2,6\}\{3\}\{4,8,10,12\}\{5,11\} \\
\approx_4 & \{0,9\}\{1,7\}\{2,6\}\{3\}\{4,8,10,12\}\{5,11\}
\end{array}$$

Ainsi, nous obtenons après renumérotation des états, l'automate minimal suivant :

δ	a	b
$\leftarrow 0$	1	2
1	3	4
2	0	3
3	3	3
$\rightarrow 4$	5	2
5	1	4



b) On obtient l'automate déterministe suivant :

δ		a	b
$\rightarrow$	0	1	3
	1		$\{0,2\}$
$\leftarrow$	$\{0,2\}$	$\{0,1\}$	3
	3	0	
	$\{0,1\}$	1	$\{0,2,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1\}$	3

et en complétant et rénumérotant

δ		a	b
$\rightarrow$	0	1	2
	1	3	4
	2	0	3
	3	3	3
$\leftarrow$	4	5	2
	5	1	6
$\leftarrow$	6	5	2

Le procédé de calcul de l'équivalence de Nérode se déroule ainsi :

$$\begin{array}{ll}
\approx_0 & \{0,1,2,5,3\}\{4,6\} \\
\approx_1 & \{0,2,3\}\{1,5\}\{4,6\} \\
\approx_2 & \{0\}\{1\}\{2,3\}\{4,6\}\{5\} \\
\approx_3 & \{0\}\{1\}\{2\}\{3\}\{4,6\}\{5\} \\
\approx_4 & \{0\}\{1\}\{2\}\{3\}\{4,6\}\{5\}
\end{array}$$

Et nous obtenons, après renumérotation des états, le même automate minimal qu'en **a)**.