Automates à piles & grammaires

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}11

4 mai 2009

1. $G = [V, T, P, S]$, avec
$V = \{S, (q_0, Z, q_0), (q_0, Z, q_1), (q_0, X, q_0), (q_0, X, q_1), (q_1, Z, q_0), (q_1, Z, q_1), (q_1, X, q_0), (q_1, X, q_1)\}$,
$T = \{0, 1\}$, et P contenant les règles :

- Pour l'axiome
  $S \to (q_0, Z, q_0) \mid (q_0, Z, q_1)$
- A partir de la transition 1
  $(q_0, Z, q_0) \to\ 1(q_0, X, q_0)(q_0, Z, q_0) \mid 1(q_0, X, q_1)(q_1, Z, q_0)$
  $(q_0, Z, q_1) \to\ 1(q_0, X, q_0)(q_0, Z, q_1) \mid 1(q_0, X, q_1)(q_1, Z, q_1)$
- A partir de la transition 2
  $(q_0, X, q_0) \to\ 1(q_0, X, q_0)(q_0, X, q_0) \mid 1(q_0, X, q_1)(q_1, X, q_0)$
  $(q_0, X, q_1) \to\ 1(q_0, X, q_0)(q_0, X, q_1) \mid 1(q_0, X, q_1)(q_1, X, q_1)$
- A partir de la transition 3
  $(q_0, X, q_0) \to\ 0(q_1, X, q_0)$
  $(q_0, X, q_1) \to\ 0(q_1, X, q_1)$
- A partir de la transition 4
  $(q_0, Z, q_0) \to \varepsilon$
- A partir de la transition 5
  $(q_1, X, q_1) \to 1$
- A partir de la transition 6
  $(q_1, Z, q_0) \to 0(q_0, Z, q_0)$
  $(q_1, Z, q_1) \to\ 0(q_0, Z, q_1)$

En notant $A = (q_0, Z, q_0)$; $B = (q_0, Z, q_1)$; $C = (q_0, X, q_0)$; $D = (q_0, X, q_1)$; $E = (q_1, Z, q_0)$; $F = (q_1, Z, q_1)$; $G = (q_1, X, q_0)$; $H = (q_1, X, q_1)$ nous obtenons :

$N = \{S, A, B, C, D, E, F, H\},\ T = \{0, 1\},\ S$

$$P \begin{cases} S \to A \mid B \\ A \to 1CA \mid 1DE \mid \varepsilon \\ B \to 1CB \mid 1DF \\ C \to 0G \mid 1CC \mid 1DG \\ D \to 0H \mid 1CD \mid 1DH \\ E \to 0A \\ F \to 0B \\ H \to 1 \end{cases}$$

Les variables productives sont : $\{A, H, S, D, E\}$, ce qui permet de supprimer B, C, F, G et nous obtenons :

$N = \{S, A, D, E, H\},\ T = \{0, 1\},\ S$

$$P \begin{cases} S \to A \\ A \to 1DE \mid \varepsilon \\ D \to 0H \mid 1DH \\ E \to 0A \\ H \to 1 \end{cases}$$

Tous les variables sont accessibles. On peut supprimer A (renommage) et substituer H et E pour obtenir :

$N = \{S, D\},\ T = \{0, 1\},\ S$

$$P \begin{cases} S \to 1D0S \mid \varepsilon \\ D \to 01 \mid 1D1 \end{cases}$$

D engendre $L_D = \{1^k01^{k+1} \mid k \geq 0\}$, ainsi $1D0$ engendre $L_{1D0} = \{1^{k+1}01^{k+1}0 \mid k \geq 0\}$. Ainsi, S engendre $L^\star_{1D0}$.

2. Un automate à pile du TD précédent était : $M = [\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{1, 2, +, =\}, \{Z, X, Y\}, q_0, \emptyset, Z, \delta]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	1	Z	q_0	YZ
q_0	2	Z	q_0	YXZ
q_0	$+$	Y	q_0	X
q_0	1	X	q_0	YX
q_0	2	X	q_0	YXX
q_0	$=$	Y	q_1	X

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_1	1	X	q_3	$-$
q_3	ε	X	q_1	Y
q_1	2	X	q_2	$-$
q_2	ε	X	q_3	$-$
q_1	$+$	Y	q_1	X
q_3	ε	Z	q_3	$-$

Quelle est la grammaire qui correspond à cet automate à pile ? $G = [V, T, P, S]$, avec $V = \{S, Z_{i,j}, X_{i,j}, Y_{i,j}\}$ où $Z_{i,j}$ désigne (q_i, Z, q_j), $X_{i,j}$ désigne (q_i, X, q_j) et $Y_{i,j}$ désigne (q_i, Y, q_j). $T = \{1, 2, +, =\}$, et P :

- Pour l'axiome
  $S \to\ Z_{0,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 1
  $Z_{0,i} \to\ 1Y_{0,j}Z_{j,i}$ pour $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 2
  $Z_{0,i} \to\ 2Y_{0,j}X_{j,k}Z_{k,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 3
  $Y_{0,i} \to\ +X_{0,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 4
  $X_{0,i} \to\ 1Y_{0,j}X_{j,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 5
  $X_{0,i} \to\ 2Y_{0,j}X_{j,k}X_{k,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 6
  $Y_{0,i} \to = X_{1,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 7
  $X_{1,3} \to\ 1$
- A partir de la transition 8
  $X_{3,i} \to\ Y_{1,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 9
  $X_{1,2} \to\ 2$
- A partir de la transition 10
  $X_{2,3} \to\ \varepsilon$
- A partir de la transition 11
  $Y_{1,i} \to\ +X_{1,i}$pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 12
  $Z_{3,3} \to\ \varepsilon$

Les variables productives sont : $\{S, X_{0,2}, X_{0,3}, X_{1,2}, X_{1,3}, X_{2,3}, X_{3,2}, X_{3,3}, Y_{0,2}, Y_{0,3}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Z_{0,3}, Z_{3,3}\}$:

$N=\{S,X_{0,2},X_{0,3},X_{1,2},X_{1,3},X_{2,3},X_{3,2},X_{3,3},Y_{0,2},Y_{0,3},Y_{1,2},Y_{1,3},Z_{0,3},Z_{3,3}\},\ T=\{1,2,+,=\},\ S$

$$P\begin{cases} S\rightarrow Z_{0,3}\\ Z_{0,3}\rightarrow\ 1Y_{0,3}Z_{3,3}\mid 2Y_{0,2}X_{2,3}Z_{3,3}\mid 2Y_{0,3}X_{3,3}Z_{3,3}\\ Y_{0,2}\rightarrow\ +X_{0,2}\mid\ =X_{1,2}\\ Y_{0,3}\rightarrow\ +X_{0,3}\mid\ =X_{1,3}\\ X_{0,2}\rightarrow\ 1Y_{0,3}X_{3,2}\mid 2Y_{0,2}X_{2,3}X_{3,2}\mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,2}\\ X_{0,3}\rightarrow\ 1Y_{0,2}X_{2,3}\mid 1Y_{0,3}X_{3,3}\mid 2Y_{0,2}X_{2,3}X_{3,3}\mid 2Y_{0,3}X_{3,2}X_{2,3}\mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,3}\\ X_{1,3}\rightarrow\ 1\\ X_{3,2}\rightarrow\ Y_{1,2}\\ X_{3,3}\rightarrow\ Y_{1,3}\\ X_{1,2}\rightarrow\ 2\\ X_{2,3}\rightarrow\ \varepsilon\\ Y_{1,2}\rightarrow\ +X_{1,2}\\ Y_{1,3}\rightarrow\ +X_{1,3}\\ Z_{3,3}\rightarrow\ \varepsilon \end{cases}$$

Toutes les variables sont accessibles. Après suppression des ε-productions, des renommages et quelques substitutions :

$N=\{S,X_{0,2},X_{0,3},X_{3,2},X_{3,3},Y_{0,2},Y_{0,3}\},\ T=\{1,2,+,=\},\ S$

$$P\begin{cases} S\rightarrow\ 1Y_{0,3}\mid 2Y_{0,2}\mid 2Y_{0,3}X_{3,3}\\ Y_{0,2}\rightarrow\ +X_{0,2}\mid\ =2\\ Y_{0,3}\rightarrow\ +X_{0,3}\mid\ =1\\ X_{0,2}\rightarrow\ 1Y_{0,3}X_{3,2}\mid 2Y_{0,2}X_{3,2}\mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,2}\\ X_{0,3}\rightarrow\ 1Y_{0,2}\mid 1Y_{0,3}X_{3,3}\mid 2Y_{0,2}X_{3,3}\mid 2Y_{0,3}X_{3,2}\mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,3}\\ X_{3,2}\rightarrow\ +2\\ X_{3,3}\rightarrow\ +1 \end{cases}$$

Après le renommage $A=Y_{0,2}$, $B=Y_{0,3}$, $C=X_{0,2}$, $D=X_{0,3}$, $E=X_{3,2}$, $F=X_{3,3}$ nous obtenons :

$N=\{S,A,B,C,D,E,F\},\ T=\{1,2,+,=\},\ S$

$$P\begin{cases} S\rightarrow\ 1B\mid 2A\mid 2BF & A\rightarrow\ +C\mid\ =2\\ B\rightarrow\ +D\mid\ =1 & C\rightarrow\ 1BE\mid 2AE\mid 2BFE\\ D\rightarrow\ 1A\mid 1BF\mid 2AF\mid 2BFF\mid 2BE & E\rightarrow\ +2\\ F\rightarrow\ +1 \end{cases}$$

On peut remarquer que cela se simplifie en

$N=\{S,A,B,C,D\},\ T=\{1,2,+,=\},\ S$

$$P\begin{cases} S\rightarrow\ 1B\mid 2A\mid 2B+1 & A\rightarrow\ +C\mid\ =2\\ B\rightarrow\ +D\mid\ =1 & C\rightarrow\ S+2\\ D\rightarrow\ 1A\mid S+1\mid 2B+2 \end{cases}$$

Et en simplifiant encore

$N=\{S,D\},\ T=\{1,2,+,=\},\ S$

$$P\begin{cases} S\rightarrow\ 1=1\mid 2=2\mid 2=1+1\mid 2+S+2\mid 1+D\mid 2+D+1\\ D\rightarrow\ S+1\mid 1+S+2\mid 1=2\mid 2+D+2\mid 2=1+2 \end{cases}$$

Il serait intéressant de voir si elle est équivalente à celle du TD 11, mais on ne peut décider si deux grammaires engendrent le même langage. En effet nous ne disposons pas de mécanisme pour vérifier l'équivalence de deux grammaires.