Bibliographie

- Danièle BEAUQUIER, Jean BERSTEL et Philippe CHRETIENNE:

Eléments d'algorithmique, Masson 1992

(ce livre est épuisé, mais téléchargeable sur le Web à l'adresse http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Elements/Elements.html)

Il comporte plusieurs chapitres qui peuvent (doivent ?) vous intéresser à différents titres (cours d'algorithmique, maths discrètes) et le chapitre 9 qui concerne les automates.

1

Bibliographie

- John HOPCROFT, Jeffrey ULLMAN : *Introduction to Automata Theory and Computation*, Addison Wesley, 1979.

Nouvelle édition, revue et corrigée :

- John HOPCROFT, Rajeev MOTWANI, Jeffrey ULLMAN : *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Addison Wesley, 2001.

2

Bibliographie

- Michael SIPSER : *Introduction to the Theory of Computation*, PWS publishing comp. 1997.
- Jacques STERN : *Fondements mathématiques de l'informatique*, McGraw Hill, 1990.
- Pierre WOLPER : *Introduction à la calculabilité*, Inter Éditions 1991 (deuxième édition : Dunod, 2001).

3

Bibliographie

- Pierre WOLPER : *Introduction à la calculabilité*, Inter Éditions 1991 (deuxième édition : Dunod, 2001).

4

Concaténation

- Σ^* = collection de tous les mots finis sur Σ
  = ensemble de tous les mots finis
- Opération interne associée: concaténation "."

$$\Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$$
$$(u,v) \rightarrow u.v$$

u=ES, v=SI, $u.v$= ESSI

- Élément neutre: mot vide $m.\varepsilon = \varepsilon.m = m$
- concaténation = opération associative :

$$(u.v).w = u.(v.w)$$

- $(\Sigma^*,.)$ est un monoïde

5

Monoïde

de Wikipédia :

- Un **monoïde** est une structure algébrique consis-tant en un ensemble muni d'une loi de compo-sition interne associative et d'un élément neutre.
- En d'autres termes, (E, *) est un **monoïde** si :
  - $\forall$ x,y $\in$ E, x*y $\in$ E (composition interne)
  - $\forall$ x,y,z $\in$ E, x*(y*z) = (x*y)*z (associativité)
  - $\exists$ e $\in$ E t.q. : $\forall$ x $\in$ E, x*e=e*x=x

6

Autre vision des langages

- Langage = ensemble de mots (infini?)
- Langage = sous-ensemble de Σ^*

ensemble des nombres ordinaires

ensemble des programmes Java (syntaxiquement corrects)

- Langage vide $L = \{\ \} = \emptyset \neq \{\varepsilon\}$
- $L = \{\varepsilon\}$, langage du mot vide
- Langage fini de mots finis

L={*ab,ba,aca*}

- Langage infini dénombrable de mots finis

L={mots binaires pairs}

Opération * de Kleene

- L un langage, L^* = concaténation de mots de L

$L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^1 = L$, $L^{i+1} = L^i . L \quad \forall i \geq 0$

$L^* = \cup_{i \geq 0} L^i$, $\quad L^+ = \cup_{i \geq 1} L^i$

- L={a,0}

L^2={aa,a0,0a,00}

L^3={aaa,aa0,a0a,a00,0aa,0a0,00a,000}

- L^* = plus petit langage de Σ^* clos pour la concaténation contenant ε et L.

C'est un sous-monoïde de Σ^*

- Opération idempotente: $(L^*)^* = L^*$

Langages rationnels

- Intérêt particulier pour la suite
- sous-ensemble de l'ensemble des langages
- définition inductive
- Notation simplifiée par expressions rationnelles (recherche sur le Web, etc…)

Définition inductive

- Base :
  - $\emptyset$ est un langage rationnel
  - $\{\varepsilon\}$ est un langage rationnel
  - $\forall a \in \Sigma$, {a} est un langage rationnel
- Induction :
  - Si R et S sont deux langages rationnels,

$R \cup S$, $R . S$ et R^*

sont aussi rationnels

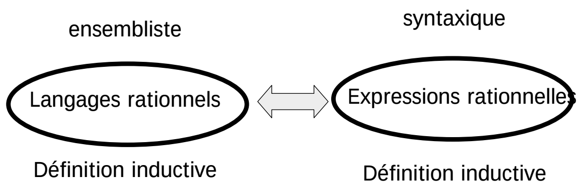
Expressions rationnelles (ER)

- Base :
  - $\emptyset$ est une expression rationnelle (ER)
  - ε est une ER qui représente $\{\varepsilon\}$
  - $\forall a \in \Sigma$, a est un ER qui représente {a} (le mot a)
- Induction : Si r et s sont des ER,
  - $(r + s)$ est une ER qui représente $R \cup S$
  - (rs) est une ER qui représente $R.S$
  - (r^*) est une ER qui représente R^*

Exemples

- (a+b)* tous les mots avec des a et des b
- (a+b)*ab(a+b)*=(b*a*)*ab(a+b)*
- (b+ba)* mots sans facteur aa et qui ne commencent pas par un a
- (a+ε)(b+ba)* mots sans facteur aa

Résumé



Le théorème de Kleene

Théorème de Kleene

- Rat(Σ*)=classe des ER sur Σ
- Rec(Σ*)=classe des langages reconnus par AF sur Σ

Théorème : Un langage sur Σ est rationnel si et seulement si il est reconnu par un automate fini.

- On veut montrer que Rat(Σ*)⊆ Rec(Σ*)
  i.e. étant donnée une ER, on peut construire un AF qui la reconnaît
- Et que Rec(Σ*) ⊆ Rat(Σ*)
  i.e. étant donné un AF, on peut trouver une ER qui le dénote (prochaine fois)

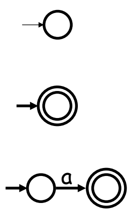
Preuve Rat(Σ*)⊆ Rec(Σ*)

- Par induction sur le nombre d'opérateurs de l'ER
- Base

  - ∅ est une ER,

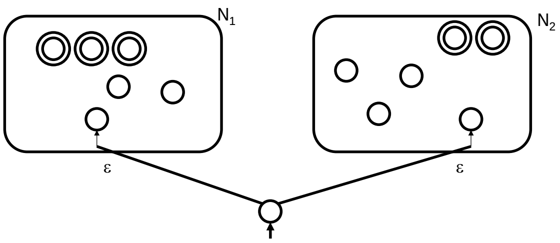
  - ε est une ER,

  - ∀a∈S, a est une ER



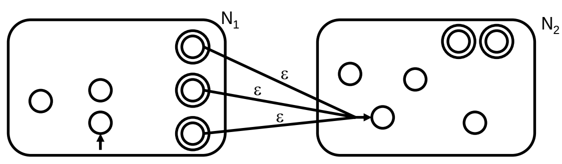
Preuve pour t=(r+s)

- r et s ont strictement moins d'opérateurs que t; par HR, il existe N_1 et N_2, deux AFND tq $L(N_1)$=r et $L(N_2)$=s.



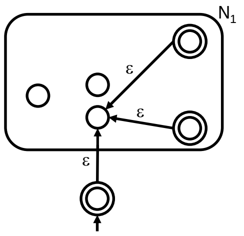
Preuve pour t=(r.s)

- r et s ont strictement moins d'opérateurs que t; par HR, il existe N_1 et N_2, deux AFND tq $L(N_1)$=r et $L(N_2)$=s.



Preuve pour t=(r)*

- r a strictement moins d'opérateurs que t; par HR, il existe N_1 un AFND tq $L(N_1)$=r.



Le théorème de Kleene

- Rec(Σ*) = langages reconnus par AF
- Rat(Σ*) = ensemble des ER (construit inductivement)
  - Base : ∅, ε, et $a \in \Sigma$ sont des ER
  - Induction : *r* et *s* des ER, (*r+s*), (*r.s*) et (*r*)* sont des ER

Théorème : Un langage sur Σ est rationnel si et seulement si il est reconnu par un automate fini.

- On a montré (cours 2) que Rat(Σ*) ⊆ Rec(Σ*)
  (étant donnée une ER, on peut construire un AF qui la reconnaît)
- On montre la réciproque : Rec(Σ*) ⊆ Rat(Σ*)
  (étant donné un AF, on peut trouver une ER qui le dénote)

Le problème

- **Donnée** : *A* un automate fini déterministe
- **Problème** : trouver une expression rationnelle qui représente le langage reconnu par *A*, L(*A*).

Idée de résolution

Étant donné un AFD

- On considère les chemins de *i* vers tout *t* ∈ *T*
- L'ER correspondant à chacun de ces chemins est obtenue en concaténant les étiquettes des transitions en traitant les boucles par une *
- L'ER finale est l'union des différentes ER ainsi obtenues.

Idée de résolution (suite)

- Arcs étiquetés par des lettres et il faut prendre en compte les boucles.
- Mots reconnus en partant de *i* et arrivant dans l'état *j* en ne passant que par les états {1,2,…,*k*} :

$R_{ij}^{k} = \{m \in \Sigma^* \mid \delta(i,m) = j \text{ et } \forall p <_{pref} m,\ \delta(i,p)=n,\ n \leq k\}$

- Algorithme de McNaughton-Yamada

Intuitivement

R_{ij}^{k} = ensemble des mots permettant d'aller de *i* à *j* en ne passant que par {1,…,k}. Ces mots sont soit

- dans R_{ij}^{k-1} i.e. ils ne passent que par états ≤ *k*-1
- composés de R_{ik}^{k-1}
  (mènent *A* dans l'état *k* pour la première fois)
  suivis de l'itération des mots de R_{kk}^{k-1}
  (forment un cycle pour *k* sans passer par des états d'un numéro supérieur à *k*)
  suivis des mots de R_{kj}^{k-1}
  (qui mènent *A* de l'état *k* à l'état *j*).

Définition inductive des R_{ij}^k

- **Base** :
  - $R_{ij}^0 = \{a \mid \delta(i,a)=j\}$ pour $i \neq j$
    R_{ij}^0 peut être $\emptyset$ si la transition n'est pas définie
  - $R_{ii}^0 = \{a \mid \delta(i,a)=i\} \cup \{\varepsilon\}$
    $R_{ii}^0 = \varepsilon$ si i sans boucle
- **Règle** :
  - $R_{ij}^k = R_{ik}^{k-1}(R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1} \cup R_{ij}^{k-1}$

Reste à prouver que les R_{ij}^k sont rationnels !

les R_{ij}^k sont rationnels

$R_{ij}^0 = \{a : \delta(i,a)=j\}$ pour $i \neq j$
$R_{ii}^0 = \{a : \delta(i,a)=i\} \cup \{\varepsilon\}$
$R_{ij}^k = R_{ik}^{k-1}(R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1} \cup R_{ij}^{k-1}$

- On montre par induction sur ***k*** que, pour chaque *i,j,**k*** il existe r_{ij}^k, ER qui représente le langage R_{ij}^k
- **Base** : R_{ij}^0 : ensemble fini de chaînes composées soit de $a \in \Sigma$ soit de ε
  - pour i=j : $r_{ii}^0 = \varepsilon + a_1 + \ldots + a_p$ (ε, s'il n'y a pas de boucle sur i)
  - pour $i \neq j$: $r_{ij}^0 = a_1 + \ldots + a_p$ $\{a_1, \ldots, a_p\} = \{a \in \Sigma : \delta(i,a)=j\}$
    ($\emptyset$, s'il n'y a pas de transition de i vers j.)

les R_{ij}^k sont rationnels

$R_{ij}^0 = \{a : \delta(i,a)=j\}$ pour $i \neq j$
$R_{ii}^0 = \{a : \delta(i,a)=i\} \cup \{\varepsilon\}$
$R_{ij}^k = R_{ik}^{k-1}(R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1} \cup R_{ij}^{k-1}$

- **Induction** (HR) : pour tout l et m r_{lm}^{k-1}, est une ER qui représente R_{lm}^{k-1}. L'ER pour r_{ij}^k est

$$r_{ij}^k = r_{ik}^{k-1}.(r_{kk}^{k-1})^*.\ r_{kj}^{k-1} + r_{ij}^{k-1}$$

- R_{1j}^n représente les chemins qui conduisent de l'état initial (état 1) vers les états de reconnaissance de A, l'ER qui représente L(A) est :

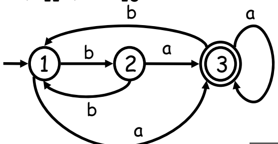
$$\Sigma_{m \in F}\, r_{1m}^n$$

	k=0	k=1	k=2	k=3
r_{11}^k				
r_{12}^k				
r_{13}^k				
r_{21}^k				
r_{22}^k				
r_{23}^k				
r_{31}^k				
r_{32}^k				
r_{33}^k				

Exemple

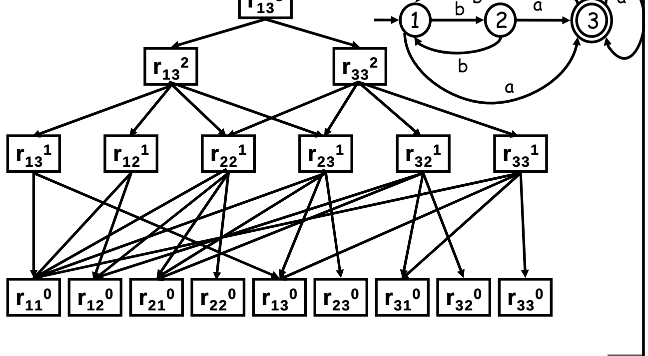
$R_{ij}^0 = \{a : \delta(i,a)=j\}$ pour $i \neq j$
$R_{ii}^0 = \{a : \delta(i,a)=i\} \cup \{\varepsilon\}$
$R_{ij}^k = R_{ik}^{k-1}(R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1} \cup R_{ij}^{k-1}$

- $r_{13}^3 = r_{13}^2(r_{33}^2)^* r_{33}^2 + r_{13}^2 = r_{13}^2((r_{33}^2)^+ + \varepsilon) = r_{13}^2(r_{33}^2)^*$
- $r_{13}^2 = r_{12}^1(r_{22}^1)^*\ r_{23}^1 + r_{13}^1$
- $r_{33}^2 = r_{32}^1(r_{22}^1)^*\ r_{23}^1 + r_{33}^1$
- $r_{12}^1 = r_{11}^0(r_{11}^0)^*\ r_{12}^0 + r_{12}^0 = (r_{11}^0)^*\ r_{12}^0$
- $r_{13}^1 = r_{11}^0(r_{11}^0)^*\ r_{13}^0 + r_{13}^0 = (r_{11}^0)^*\ r_{13}^0$
- $r_{22}^1 = r_{21}^0(r_{11}^0)^*\ r_{12}^0 + r_{22}^0$
- $r_{23}^1 = r_{21}^0(r_{11}^0)^*\ r_{13}^0 + r_{23}^0$
- $r_{32}^1 = r_{31}^0(r_{11}^0)^*\ r_{12}^0 + r_{32}^0$
- $r_{33}^1 = r_{31}^0(r_{11}^0)^*\ r_{13}^0 + r_{33}^0$



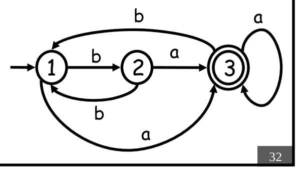
Exemple

$R_{ij}^0 = \{a : \delta(i,a)=j\}$ pour $i \neq j$
$R_{ii}^0 = \{a : \delta(i,a)=i\} \cup \{\varepsilon\}$
$R_{ij}^k = R_{ik}^{k-1}(R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1} \cup R_{ij}^{k-1}$



	k=0	k=1	k=2	k=3
r_{11}^k				
r_{12}^k				
r_{13}^k				
r_{21}^k				
r_{22}^k				
r_{23}^k				
r_{31}^k				
r_{32}^k				
r_{33}^k				

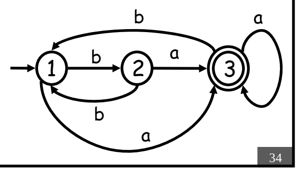
- **Base :** R_{ij}^{0} : ensemble fini de chaînes composées soit de $a\in\Sigma$ soit de ε
  - pour i=j : $r_{ii}^{0}=\varepsilon+a_1+\ldots+a_p$ (ε, s'il n'y a pas de boucle sur *i*)
  - pour i≠j : $r_{ij}^{0} = a_1+\ldots+a_p$ $\{a_1,\ldots,a_p\} = \{a \in\Sigma : \delta(i,a)=j\}$ ($\varnothing$, s'il n'y a pas de transition de *i* vers *j*.)
- On obtient :
  - $r_{32}^0 = \varnothing$
  - $r_{11}^0 = r_{22}^0 = \varepsilon$
  - $r_{13}^0 = r_{23}^0 = a$
  - $r_{12}^0 = r_{21}^0 = r_{31}^0 = b$
  - $r_{33}^0 = \varepsilon+a$



	k=0	k=1	k=2	k=3
r_{11}^k	ε			
r_{12}^k	b			
r_{13}^k	a			
r_{21}^k	b			
r_{22}^k	ε			
r_{23}^k	a			
r_{31}^k	b			
r_{32}^k	∅			
r_{33}^k	ε+a			

$$r_{ij}^{k} = r_{ik}^{k-1}.(r_{kk}^{k-1})^*.\ r_{kj}^{k-1} + r_{ij}^{k-1}$$

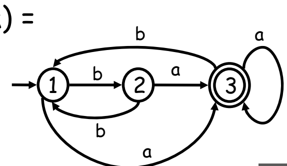
- $r_{12}^1 = (r_{11}^0)^*\ r_{12}^0 = \varepsilon^*b = b$
- $r_{13}^1 = (r_{11}^0)^*\ r_{13}^0 = \varepsilon^*a = a$
- $r_{22}^1 = r_{21}^0(r_{11}^0)^*\ r_{12}^0 + r_{22}^0 = b\varepsilon^*b+\varepsilon\ =\ \varepsilon+bb$
- $r_{23}^1 = r_{21}^0(r_{11}^0)^*\ r_{13}^0 + r_{23}^0 = b\varepsilon^*a+a\ =\ \mathbf{a}+ba$
- $r_{32}^1 = r_{31}^0(r_{11}^0)^*\ r_{12}^0 + r_{32}^0 = b\varepsilon^*b+\varnothing = bb$
- $r_{33}^1 = r_{31}^0(r_{11}^0)^*\ r_{13}^0 + r_{33}^0 = b\varepsilon^*a+\varepsilon+a = \varepsilon+a+ba$



	k=0	k=1	k=2	k=3
r_{11}^k	ε			
r_{12}^k	b	b		
r_{13}^k	a	a		
r_{21}^k	b			
r_{22}^k	ε	ε+bb		
r_{23}^k	a	a+ba		
r_{31}^k	b			
r_{32}^k	∅	bb		
r_{33}^k	ε+a	ε+a+ba		

$$r_{ij}^{k} = r_{ik}^{k-1}.(r_{kk}^{k-1})^*.\ r_{kj}^{k-1} + r_{ij}^{k-1}$$

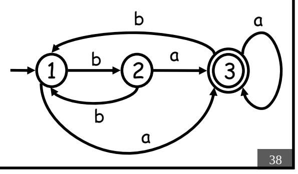
- $r_{13}^2 = r_{12}^1(r_{22}^1)^*\ r_{23}^1 + r_{13}^1 =$
  $b(\varepsilon+bb)^*(a+ba)+a =$
  $b(bb)^*(\varepsilon+b)a+a =$
  $b^+a+a =$
  $(b^++\varepsilon)a = b^*a$
- $r_{33}^2 = r_{32}^1(r_{22}^1)^*\ r_{23}^1 + r_{33}^1 =$
  $bb(\varepsilon+bb)^*(a+ba)+(\varepsilon+a+ba) =$
  $b^*ba+ba+a+\varepsilon\ =$
  $b^*a+\varepsilon$



	k=0	k=1	k=2	k=3
r_{11}^k	ε			
r_{12}^k	b	b		
r_{13}^k	a	a	b*a	
r_{21}^k	b			
r_{22}^k	ε	ε+bb		
r_{23}^k	a	a+ba		
r_{31}^k	b			
r_{32}^k	∅	bb		
r_{33}^k	ε+a	ε+a+ba	ε+b*a	

$$r_{ij}^k = r_{ik}^{k-1}.(r_{kk}^{k-1})^*.\ r_{kj}^{k-1} + r_{ij}^{k-1}$$

- $r_{13}^3 = r_{13}^2(r_{33}^2)^* =$
  $b^*a\ (\varepsilon+b^*a)^* =$
  $(b^*a)^+$



	k=0	k=1	k=2	k=3
r_{11}^k	ε			
r_{12}^k	b	b		
r_{13}^k	a	a	b*a	b*a⁺
r_{21}^k	b			
r_{22}^k	ε	ε+bb		
r_{23}^k	a	a+ba		
r_{31}^k	b			
r_{32}^k	∅	bb		
r_{33}^k	ε+a	ε+a+ba	ε+b*a	

Complexité

- Il faut calculer pour k=0,1,2,…,*n*
  - Pour chaque paire d'états
    $$R_{ij}^k = R_{ik}^{k-1}(R_{kk}^{k-1})^*\ R_{kj}^{k-1} \cup R_{ij}^{k-1}$$
- Soit *n* fois pour chaque paire d'états
- Au total n^3 opérations

- Complexité $O(n^3)$

(p.e. le cas où il y a O(n) états d'acceptation …)

Questions

- Est-ce que l'ER dépend de la numérotation des états?

- Est-ce qu'il faut tout calculer?

Non, puisqu'on parcourt la totalité du graphe

Seulement ce qui nous sert…

Rec(Σ*) = Rat (Σ*)

- On a donc montré que les langages rationnels sont reconnus par AF et seulement par ceux-ci

- Les AF **caractérisent** les langages rationnels