

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie  
Wydział Matematyki i Informatyki

Pola Kyzioł

Nr albumu: 1092406

# Algorytmy dynamiczne po dekompozycji drzewowej dla problemów grafowych o spójnych rozwiązaniach.

Praca magisterska  
na kierunku Informatyka Analityczna

Praca wykonana pod kierunkiem  
dr hab. Tomasz Krawczyk  
Instytut Informatyki Analitycznej

Kraków 2019

## Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

.....  
Kraków, dnia

.....  
Podpis autora pracy

## Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

.....  
Kraków, dnia

.....  
Podpis kierującego pracą

# Spis treści

# Rozdział 1

## Dekompozycja drzewowa

### 1.1 Definicja dekompozycji i szerokości drzewowej

Dekompozycją drzewową grafu  $G$  nazywamy parę  $\mathcal{T} = (T, \{X_t : t \in V(T)\})$ , gdzie  $T$  jest drzewem, a  $\{X_t : t \in V(T)\}$  zawiera zbiory wierzchołków grafu  $G$  i spełnia następujące warunki:

- Dla każdej krawędzi  $\{u, v\} \in E(G)$ , istnieje węzeł  $t \in V(T)$ , taki że  $u \in X_t$  i  $v \in X_t$ .
- Dla każdego wierzchołka  $v \in V(G)$ , zbiór  $\{t \in V(T) : v \in X_t\}$  jest poddrzewem drzewa  $T$ .

Od tej pory wierzchołki grafu wyjściowego  $G$  będą nazywane po prostu *wierzchołkami*, natomiast węzły drzewa  $T$  będą nazywane *kubelkami*.

Szerokość drzewowa dekompozycji drzewowej  $\mathcal{T}$  jest zdefiniowana następująco:

$sd_{\mathcal{T}} = \max_{t \in V(T)} |X_t - 1|$ . Natomiast szerokość drzewowa grafu  $G$  jest minimalną szerokością drzewową wziętą po wszystkich możliwych dekompozycjach drzewowych  $G$ :

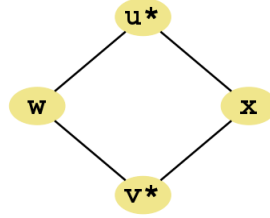
$sd_G = \min\{sd_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \text{ jest dekompozycją drzewową } G\}$ .

### 1.2 Ładna dekompozycja drzewowa

Dla uproszczenia posługiwania się dekompozycją drzewową przy definiowaniu algorytmów dynamicznych, będziemy używać tzw. *ładnej dekompozycji drzewowej*, która została po raz pierwszy wprowadzona przez Kloks [?].

*Ładna dekompozycja drzewowa*  $\mathcal{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$  musi spełniać następujące warunki:

- $T$  jest ukorzenione.
- Każdy *kubetek*  $T$  ma co najwyżej dwoje dzieci.
- Jeśli *kubetek*  $t$  ma dwoje dzieci  $p$  i  $q$ , wtedy  $X_t = X_p = X_q$ .



Rysunek 1.1: Przykładowy graf  $G$ .

- Jeśli *kubetek*  $t$  ma jedno dziecko  $p$ , to  $|X_t| = |X_p| + 1$  oraz  $X_p \subset X_t$  albo  $|X_t| = |X_p| - 1$  oraz  $X_t \subset X_p$ .

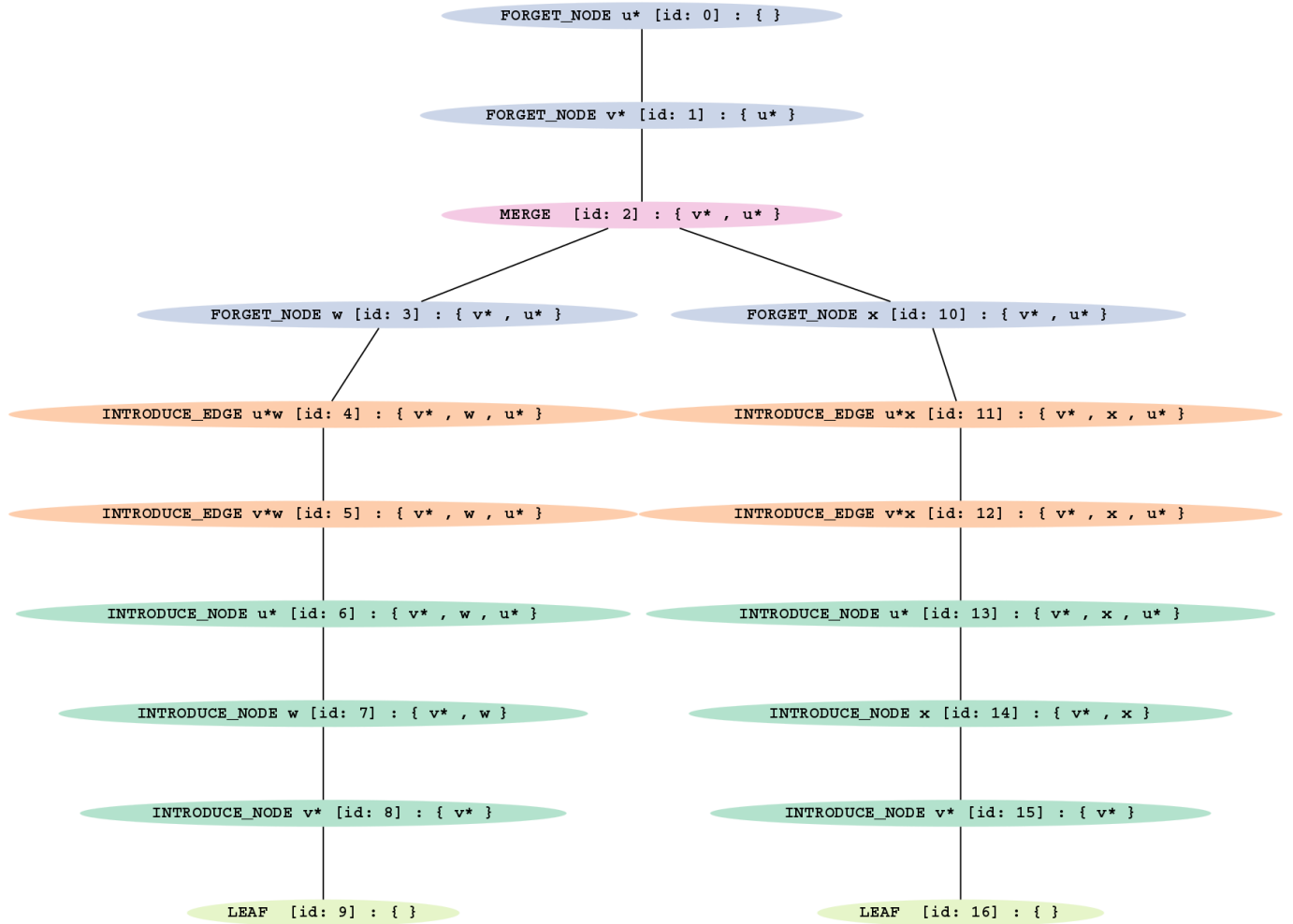
Ponieważ w ładnej dekompozycji drzewowej, *kubетки* różnią się od siebie o co najwyżej jeden *wierzchołek*, każde przejście między jednym a drugim *kubetkiem* odpowiada dokładnie jednej operacji na grafie wyjściowym  $G$ . Każdy *kubetek* ma jeden z następujących pięciu typów:

- **WPROWADZAJĄCY  $v$**  - *kubetek* ten ma o jeden *wierzchołek* więcej niż jego jedyne dziecko:  $X_p \cup \{v\} = X_t$ . Każdy *wierzchołek*  $v \in V(G)$ , ma co najmniej jeden *kubetek* wprowadzający.
- **ZAPOMINAJĄCY  $v$**  - *kubetek* o jednym *wierzchołku* mniej niż jedgo jedyne dziecko:  $X_t \cup \{v\} = X_p$ . Jego specjalnym reprezentantem jest korzeń. Dla każdego *wierzchołka*  $v \in V(G)$ , istnieje dokładnie jeden *kubetek* zapominający.
- **SCALAJĄCY** - jedyny *kubetek* posiadający dwoje dzieci:  $X_t = X_p = X_q$ , scala dwa podgrafy o przecięciu  $X_t$ .
- **LIŚĆ** - dla  $t$  będącego liściem:  $X_t = \emptyset$ .
- **UZUPEŁNIAJĄCY  $uv$**  - *kubetek*, który nie pojawił się w pierwotnej definicji ładnej dekompozycji drzewowej, ale ułatwia definiowanie algorytmów operujących na dekompozycjach drzewowych. *Kubetek* uzupełniający wprowadza krawędź  $uv \in E(G)$  (uzupełnia krawędziami reprezentację grafu  $G$  w drzewie  $T$ ). *Kubetek*  $t$  **UZUPEŁNIAJĄCY  $uv$**  zawiera oba *wierzchołki* krawędzi:  $u \in X_t$  i  $v \in X_t$ . Dla każdego  $uv$  istnieje dokładnie jeden *kubetek* uzupełniający i - przyjmując bez straty ogólności  $t(u)$  jest przodkiem  $t(v)$  (gdzie  $t(v)$  to najwyższy *kubetek*, taki że  $v \in X_{t(v)}$ ) - znajduje się on pomiędzy  $t(v)$  a **ZAPOMINAJĄCY  $v$** .

Na rysunku ?? przedstawiam ładną dekompozycję drzewową dla grafu przedstawionego na rysunku ??.

### 1.3 Obliczanie dekompozycji drzewowej

Problem obliczania dekompozycji drzewowej należy do klasy problemów FPT. Odkąd Robertson i Seymour [?] wprowadzili w latach osiemdziesiątych definicję dekompozycji drzewowej i jako pierwsi podali parametryzowany algorytm znajdowania dekompozycji drzewowej rozmiaru  $O(k)$  (dla pewnej stałej  $k$ ) o czasie działania  $O(n^{f(k)})$  na grafie  $n$ -wierzchołkowym



Rysunek 1.2: Ładna dekompozycja drzewowa grafu  $G$  z rys. ??.

( $f(k)$  nigdy nie obliczyli), zostało opublikowanych wiele nowych, wielomianowych algorytmów parametryzowanych o znacznie lepszych złożonościach czasowych. Jednakże Bodlaender [?] jako pierwszy podał liniowy algorytm znajdowania dekompozycji drzewowej o szerokości  $k$  (o ile taka dekompozycja istnieje).

**Twierdzenie 1** (Bodlaender). *Dla wszystkich  $k \in \mathbb{N}$  istnieje algorytm działający w czasie liniowym, który dla danego grafu  $G = (V, E)$  sprawdza, czy szerokość drzewowa tego grafu wynosi co najwyżej  $k$  oraz - jeśli tak - oblicza dekompozycję drzewową  $G$  o szerokości drzewowej co najwyżej  $k$ .*

Ponadto Kloks [?] pokazał, że dla każdego grafu o szerokości drzewowej  $k$  istnieje ładna dekompozycja drzewowa, którą można skonstruować w czasie liniowym od ilości wierzchołków grafu wyjściowego  $G$ .

**Lemat 1** (Kloks). *Każdy graf  $G$  o szerokości drzewowej  $k$  posiada ładną dekompozycję drzewową o szerokości  $k$ . Ponadto, jeśli  $G$  jest grafem  $n$ -wierzchołkowym, to istnieje ładna dekompozycja drzewowa grafu  $G$  o co najwyżej  $4n$  kubelkach.*

*Dowód indukcyjny.* Graf  $G$  ma szerokość drzewową  $k$ , wobec czego ma co najmniej  $k + 1$  wierzchołki. Ponadto każdy graf o szerokości drzewowej  $k$  da się striangulować do postaci  $k$ -drzewa. Triangulacja grafu  $G$  do  $k$ -drzewa opiera się na znalezieniu zrównoważonej dekompozycji drzewowej  $\mathcal{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ , w której dla każdego  $t \in V(T)$ :  $|X_t| = k + 1$  oraz dla każdej krawędzi  $(t, p) \in E(T)$ :  $|X_t \cap X_p| = k$ , a następnie na dodaniu do  $G$  krawędzi między każdą parą wierzchołków  $(u, v)$ , dla której istnieje kubełek nowo powstałej dekompozycji  $t$ :  $u \in X_t \wedge v \in X_t$ . Algorytm równoważenia dekompozycji drzewowej został przedstawiony przez Bodlaender [?] i działa on w czasie liniowym. Niech  $H$  będzie striangulowanym grafem  $G$  o  $n$  wierzchołkach. Indukcyjnie można pokazać, że istnieje ładna dekompozycja grafu  $H$  o szerokości drzewowej  $k$  (w tym twierdzeniu ładna dekompozycja nie zakłada, że liście są puste).

**Dla  $n = k + 1$ ,** możemy wziąć trywialną dekompozycję drzewową, tj. umieścić wszystkie wierzchołki w jednym kubelku.

**Dla  $n > k + 1$ ,**  $H$  posiada wierzchołek  $v$ , którego sąsiedzi tworzą klikę. Niech  $H'$  będzie grafem otrzymanym z  $H$  poprzez usunięcie wierzchołka  $v$ . Z indukcji dostajemy, że istnieje ładna dekompozycja drzewowa  $H'$  o co najwyżej  $4(n - 1)$  kubelkach. Niech  $S$  oznacza zbiór sąsiadów wierzchołka  $v$ . Ponieważ  $S$  jest kliką (rozmiaru  $k$ ), musi istnieć kubełek  $X_t$  ładnej dekompozycji drzewowej, który zawiera  $S$ . Rozważmy trzy następujące przypadki dotyczące kubelka  $t$ :

1.  $t$  ma dwoje dzieci  $p$  i  $q$ , wobec czego  $X_t = X_p = X_q$ . Schodzimy w dół drzewa do dowolnego z dzieci i kontynuujemy aż nie znajdziemy się w kubelku  $p$  o co najwyżej jednym dziecku.
2.  $p$  jest liściem. Jeśli  $X_p = S$ , tworzymy nowy kubełek  $a$ :  $X_a = S \cup \{v\}$ , który staje się dzieckiem  $p$ . Wpp.  $X_p \neq S$ , niech  $z \in X_p \setminus S$ ,  $p$  dostaje nowe dziecko  $a$ :  $X_a = X_p \setminus \{z\}$ . Ponieważ  $S \subset X_p$  i  $k = |S| \leq k + 1$ ,  $X_a = S$ . Dodajemy kolejny kubełek  $b$  jako dziecko  $a$ :  $X_b = S \cup v$ .

3.  $p$  ma jedno dziecko  $q$ . Usuwamy krawędź  $(p, q)$  z drzewa. Tworzymy nowy kubełek  $a$ :  $X_a = X_p$  i dodajemy go do drzewa jako dziecko  $p$ , natomiast  $q$  podpinamy jako dziecko  $a$ . Tworzymy kolejny nowy kubełek  $b$ :  $X_b = X_p$  i podpinamy  $b$  jako dziecko  $p$  (drugie dziecko). Schodzimy w dół drzewa do kubełka  $b$ , który jest liściem i postępujemy zgodnie z ???. Łatwo zauważyć, że wprowadzimy co najwyżej 4 nowe wierzchołki.

Ponieważ dekompozycja drzewowa dla  $H'$  ma co najwyżej  $4(n-1)$  wierzchołki, dekompozycja drzewowa dla  $H$  ma co najwyżej  $4n$  wierzchołki, co kończy dowód.

□

**Lemat 2** (Kloks). *Dla stałej  $k$ , mając daną dekompozycję drzewową grafu  $G$  o szerokości  $k$  i  $O(n)$  wierzchołkach, gdzie  $n$  jest liczbą wierzchołków grafu  $G$ , da się skonstruować ładną dekompozycję drzewową grafu  $G$  o szerokości  $k$  i co najwyżej  $4n$  kubełkach w czasie  $O(n)$ .*

*Dowód.* Dowód opiera się na konstrukcji przedstawionej w dowodzie lematu ???. Konstrukcja ta wymaga na wejściu striangulowanego grafu  $G$  do postaci  $k$ -drzewa, triangulacja wymaga czasu liniowego. Szukanie odpowiedniej kolejności usuwania kubełków z  $k$ -drzewa  $H$ , czyli takiej w której sąsiedzi usuwanego kubełka indukują klikę, jest również liniowe. Dowód lematu wynika już teraz bezpośrednio z konstrukcji przedstawionej w dowodzie lematu ???. □



# Rozdział 2

## Klasyczne algorytmy dynamiczne

### 2.1 Drzewo Steinera

Niniejszy algorytm został przedstawiony w [?]. Mamy dany nieskierowany graf  $G$  oraz zbiór wierzchołków  $K$  będący podzbiorem  $V(G)$ ,  $K \subset V(G)$ . Wierzchołki te nazywane są terminalami. Naszym zadaniem jest znalezienie dla grafu  $G$  takiego jego spójnego podgrafu  $H$ , który zawiera wszystkie terminale i jego rozmiar jest minimalny. Zakładamy, że mamy daną ładną dekompozycję drzewową grafu wyjściowego  $G : \mathcal{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ . Dodatkowo, dla uproszczenia samego algorytmu, przyjmujemy, że każdy *kubek* zawiera przynajmniej jeden terminal. Możemy to łatwo osiągnąć - wybieramy dowolny wierzchołek  $v^*$  będący terminalem (terminale będą dla ułatwienia dodatkowo oznaczane przez  $*$ ) i dodajemy go do każdego kubka, usuwamy WPROWADZAJĄCY  $v$  i ZAPOMINAJĄCY  $v$ , własność ładnej dekompozycji drzewowej jest zachowana z tą małą modyfikacją, że liście i korzeń nie są puste.

Zanim przejdziemy do zdefiniowania algorytmu dynamicznego dla problemu Steinera, wprowadźmy kilka dodatkowych oznaczeń. Dla kubka  $t$ , definiujemy:

$V_t$  : suma wszystkich kubków w poddrzewie ukorzenionym w  $t$ , włączając  $X_t$ , inaczej mówiąc wszystkie wierzchołki grafu wyjściowego  $G$ , które pojawiły się w danym poddrzewie

$E_t$  : wszystkie krawędzie  $(u, v)$ , które zostały zrealizowane w poddrzewie ukorzenionym w  $t$ , czyli dla których istnieje kubek  $p$ :  $u \in X_p \wedge v \in X_p$

$G_t = (V_t, E_t)$

Niech  $H$  będzie szukanym drzewem Steinera łączącym wszystkie terminale  $K$ , a  $t$  jednym z kubków  $\mathcal{T}$ . Przecięcie  $H$  i  $G_t$  tworzy las  $F$ , który nigdy nie jest pusty, ponieważ zawiera przynajmniej jeden wierzchołek  $v^*$  wprowadzony na początku do każdego kubka. Szukane  $H$  jest spójne oraz  $X_t$  zawiera terminal, co implikuje, że każde drzewo należące do  $F$  musi przecinać  $X_t$ . Ponadto każdy terminal z  $K \cap V_t$  musi należeć do jednego z drzew  $F$  - każdy terminal musi należeć do  $F$  od momentu pojawienia się w  $V_t$ . Żeby utrzymać powyższe niezmienniki, trzeba w każdym kubku rozważać wszystkie możliwe przecięcia  $X_t$  z  $V(F)$ :  $X \subset X_t$  oraz wszystkie partycje  $X$ :  $\mathcal{P}$  odpowiadające drzewom (komponentom)  $F$  - oznaczonym jako  $C_1, \dots, C_z$  - i wybierać tylko te, które spełniają następujące warunki:

1.  $K \cap V_t \subseteq V(F)$ ,  $F$  zawiera wszystkie dotychczas wprowadzone terminale
2.  $V(F) \cap X_t = X$ ,  $X$  reprezentuje w danym kubelku to, co bierzemy do drzewa Steinera
3. dla wierzchołków należących do przecięcia  $V(F) \cap X_t$ ,  $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_z\}$  reprezentuje dokładnie ich przynależność do poszczególnych spójnych komponentów  $F$ , gdzie dla każdego  $y \in \{1, \dots, z\}$ :  $\mathcal{P}_y = V(C_y) \cap X_t$

Dla każdej trójki  $(t, X, \mathcal{P})$  trzymamy w  $c[t][X][\mathcal{P}]$  rozmiar (liczbę krawędzi) najmniejszego  $F$  w  $G_t$ , dla którego powyższe warunki są spełnione (własność optymalnej podstruktury). Jeśli dana trójka nie spełnia wszystkich warunków  $c[t][X][\mathcal{P}] = \infty$ . Musimy na bieżąco śledzić partycję  $\mathcal{P}$ , ponieważ może się ona zmieniać wraz z każdym nowo przetwarzanym kubelkiem. Kubelki typu SCALAJĄCY lub UZUPEŁNIAJĄCY uv mogą zepsuć wcześniej poprawną partycję, tworząc cykl. Wynik końcowy odpowiada wartości  $c[r][\{\{v*\}\}][\{\{v*\}\}]$ , gdzie  $r$  jest korzeniem. Poniżej prezentuję formuły rekurencyjne obliczania wartości  $c$  ze względu na typ kubelka  $t$ . Dla wszystkich nie wymienionych przypadków,  $c$  przyjmuje wartość  $\infty$ .

LIŚĆ - każdy liść odpowiada następującemu przypadkowi:

$$c[t][\{\{v*\}\}][\{\{v*\}\}] = 0$$

WPROWADZAJĄCY  $u$  - w związku z tym, że  $t$  jest WPROWADZAJĄCY, przyjmijmy następujące oznaczenia  $X_t = X_{t'} \cup u$ , gdzie  $t'$  jest dzieckiem  $t$ . Zauważmy, że  $u$  nie należał do żadnego z kubelków - przodków  $t$ , wobec czego krawędzie incydentne z  $u$  nie zostały jeszcze wprowadzone poprzez wierzchołki UZUPEŁNIAJĄCE i  $u$  jest wierzchołkiem izolowanym. Warunki, które muszą być spełnione:

- (i)  $u$  jest izolowany
- (ii) jeśli  $u$  jest terminalem, musi się znaleźć w  $X$
- (iii)  $u$  jako wierzchołek izolowany musi mieć swój własny, jednoelementowy komponent w  $\mathcal{P}$

Jeśli któryś z powyższych warunków nie jest spełniony,  $c[t][X][\mathcal{P}] = \infty$ , wpp.

$$c[t][X][\mathcal{P}] = \begin{cases} c[t'][X \setminus \{u\}][\mathcal{P} \setminus \{\{u\}\}] & \text{jeśli } u \in X, \\ c[t'][X][\mathcal{P}] & \text{wpp.} \end{cases}$$

UZUPEŁNIAJĄCY  $uw$  - iterując się po wszystkich trójkach  $(t, X, \mathcal{P})$  mamy do czynienia z 3 przypadkami, które musimy rozpatrzyć osobno:

1.  $u \notin X \vee w \notin X$
2.  $u \in X \wedge w \in X$  oraz  $u$  i  $w$  są w różnych komponentach  $\mathcal{P}$  ( $u \in \mathcal{P}_i$ ,  $w \in \mathcal{P}_j$ ,  $i \neq j$ )
3.  $u \in X \wedge w \in X$  oraz  $u$  i  $w$  są w tych samych komponentach  $\mathcal{P}$  ( $u, w \in \mathcal{P}_i$ )

W przypadkach ?? oraz ?? krawędź  $uw$  nie może należeć do rozwiązania. Natomiast w przypadku ?? mamy spełnione warunki, by włączyć krawędź do rozwiązania, mamy zatem dwie możliwości - albo ją bierzemy, albo nie. Jeśli nie dorzucamy krawędzi do naszego aktualnego rozwiązania, przepisujemy częściowy wynik z  $t'$  dla tej samej partycji. W przeciwnym przypadku, nowo dodawana krawędź musiała połączyć dwa rozłączne bloki partycji  $t'$ . Ponieważ optymalizujemy po rozmiarze częściowego wyniku, iterujemy się po wszystkich partycjach  $\mathcal{P}'$  kubelka  $t'$ , gdzie  $u \in \mathcal{P}_i$  i  $w \in \mathcal{P}_j$  nie należą do tego samego komponentu ( $i \neq j$ ), inaczej powstałby cykl, ale po połączeniu  $\mathcal{P}_i$  z  $\mathcal{P}_j$  dają partycję  $\mathcal{P}$ . Możemy to zapisać następująco:

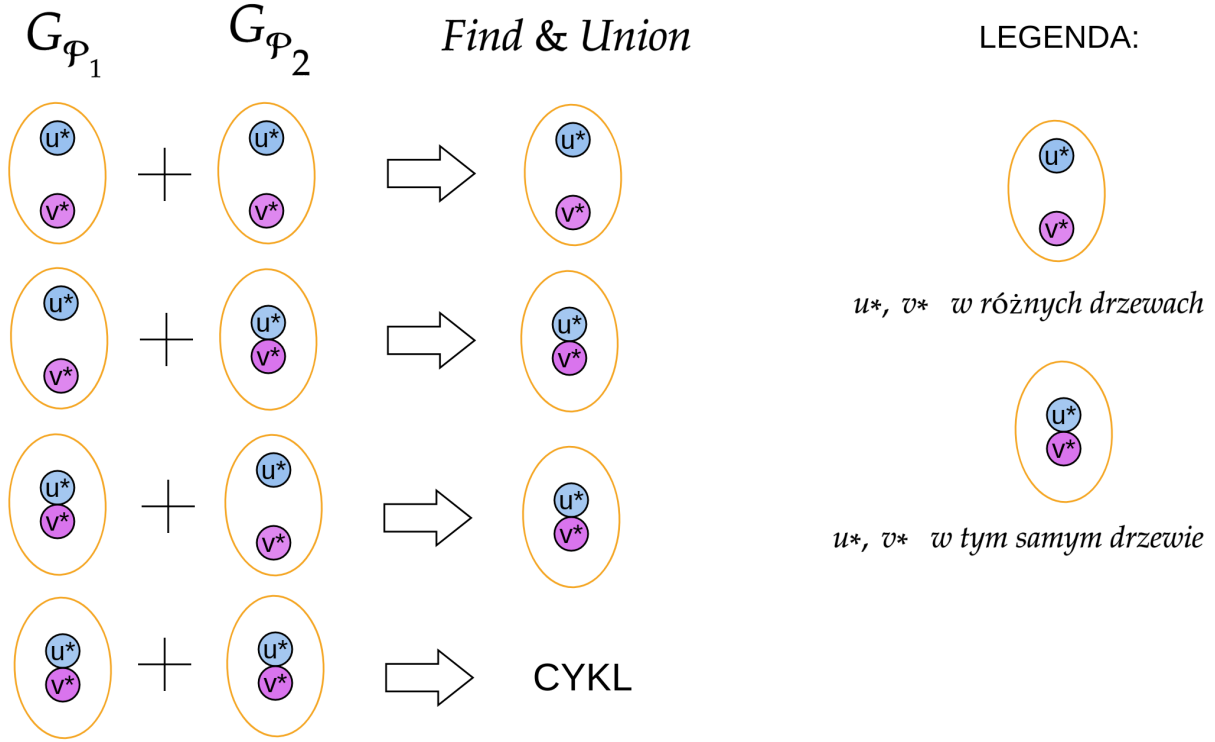
$$c[t][X][\mathcal{P}] = \min \left\{ \min_{\mathcal{P}'} c[t'][X][\mathcal{P}'] + 1, \quad c[t'][X][\mathcal{P}] \right\}$$

**ZAPOMINAJĄCY**  $u$  - niech  $X_t = X_{t'} \setminus \{u\}$ . Wierzchołek  $u$  może być incydentny z częściowym rozwiązaniem, wtedy trzeba popatrzeć na te partycje  $\mathcal{P}'$  kubelka  $t'$ , które go zawierają, a po jego usunięciu dają nam  $\mathcal{P}$ . Jednakże tylko te, w których nie jest on singletonem, w przeciwnym przypadku nasze częściowe rozwiązanie nigdy nie stałoby się spójnym drzewem Steinera (wszystkie krawędzie incydentne z zapominanym wierzchołkiem są wprowadzane przed jego zapomnieniem i tylko wtedy mogą one zostać dodane do rozwiązania). Iterujemy się po wszystkich  $\mathcal{P}'$  otrzymanych z  $\mathcal{P}$  poprzez dodanie  $u$  do jednego z już istniejących bloków, biorąc minimum. Jednocześnie musimy pamiętać, że wierzchołek  $u$  może nie należeć do końcowego rozwiązania, wtedy możemy przepisać wynik dla  $t'$ , nie zmieniając parametrów. Kluczową obserwacją dla tego przypadku jest fakt, że jeśli  $u$  był terminalem, nie istnieją częściowe rozwiązania dla  $t'$  nie uwzględniające  $u$  (tzn. ich wynikiem jest  $\infty$ ).

$$c[t][X][\mathcal{P}] = \min \left\{ \min_{\mathcal{P}'} c[t'][X \cup \{u\}][\mathcal{P}'], \quad c[t'][X][\mathcal{P}] \right\}$$

**SCALAJĄCY** - kubełek scalający ma zawsze dwoje dzieci, dla których  $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$ . Dla tego typu kubelków musimy połączyć dwa częściowe rozwiązania - jedno pochodzące z poddrzewa  $G_{t_1}$ , drugie z poddrzewa  $G_{t_2}$ . Poniżej znajduje się kilka spostrzeżeń kluczowych dla obliczania nowego częściowego rozwiązania:

- (a)  $V_{t_1} \cap V_{t_2} = X$
- (b)  $E_{t_1} \cap E_{t_2} = \emptyset$ , ponieważ krawędzie wprowadzane są najpóźniej jak to możliwe, tj. przed kubelkami typu **ZAPOMINAJĄCY**. Zakładając nie wprost, że istnieje krawędź  $uw$  zarówno w  $E_{t_1}$  jak i w  $E_{t_2}$ , muszą również istnieć dwa kubelki - bez straty ogólności - **ZAPOMINAJĄCY**  $u$ , jeden w jednym poddrzewie, drugi w drugim poddrzewie lub naddrzewie (w zależności od tego, czy dla drugiego poddrzewa **ZAPOMINAJĄCY**  $u$  jest przodkiem **ZAPOMINAJĄCY**  $w$ ). W obu przypadkach dostajemy sprzeczność, ponieważ dla każdego wierzchołka  $u$  może istnieć tylko jeden **ZAPOMINAJĄCY**  $u$  (z definicji dekompozycji drzewowej).
- (c) Połączenie  $G_{t_1}$  z  $G_{t_2}$  może zawierać cykl. By uniknąć cykli autorzy algorytmu wprowadzają pomocniczą strukturę  $G_{\mathcal{P}}$ , która jest lasem o zbiorze wierzchołków  $X$  oraz której drzewa korespondują z podziałem  $\mathcal{P}$ . Problem łączenia dwóch rozwiązań częściowych (dla  $t_1$  oraz dla  $t_2$ ) sprowadza się do problemu łączenia dwóch lasów  $G_{\mathcal{P}_1} \cup G_{\mathcal{P}_2}$ . Za-uważmy, że z perspektywy wyliczania poprawnego rozwiązania dla kubelka  $t$ , nie jest ważne, jaki kształt mają poszczególne drzewa, istotny jest fakt, że drzewo jest grafem spójnym (między dowolną parą wierzchołków do niego należących, istnieje ścieżka).



Rysunek 2.1: Rezultaty otrzymane w wyniku połączenia poszczególnych lasów  $G_{\mathcal{P}_1}$ ,  $G_{\mathcal{P}_2}$  w kubelku SCALAJĄCYM z rys. ??.

Warunki, które muszą zostać spełnione przy scalaniu dwóch rozwiązań są następujące:

- (i)  $G_{\mathcal{P}_1} \cup G_{\mathcal{P}_2}$  nie zawiera cyklu.
- (ii)  $G_{\mathcal{P}_1} \cup G_{\mathcal{P}_2}$  odpowiada  $G_{\mathcal{P}}$  z dokładnością do kształtu poszczególnych drzew.

W implementacji powyższego algorytmu do reprezentowania problemu łączenia lasów  $G_{\mathcal{P}_1}$ ,  $G_{\mathcal{P}_2}$  wykorzystałam strukturę zbiorów rozłącznych z łączeniem według rangi i kompresją ścieżek. Dzięki niej łatwo wykryć cykl oraz zbadać, które wierzchołki są w tych samych, spójnych komponentach  $\mathcal{P}$ . Rysunek ?? przedstawia wszystkie możliwe lasy  $G_{\mathcal{P}_1}$ ,  $G_{\mathcal{P}_2}$  dla kubelka SCALAJĄCEGO z rysunku ?? wraz z rezultatami połączenia lasów. Końcowe rozwiązanie dla kubelka SCALAJĄCEGO wyliczamy na podstawie poniższego wzoru:

$$c[t][X][\mathcal{P}] = \min_{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2} c[t_1][X][\mathcal{P}_1] + c[t_2][X][\mathcal{P}_2]$$

Przedstawione zostały formuły rekurencyjne dla wszystkich typów kubelków. Przejdźmy zatem do wyliczenia złożoności czasowej standardowego algorytmu dynamicznego po dekompozycji drzewowej dla problemu drzewa Steinera. Poniżej znajdują się istotne spostrzeżenia:

- Każdy kubełek ma co najwyżej  $k + 2$  wierzchołki.
- Wszystkich  $X \subseteq X_t$  jest  $2^{|X_t|}$  a zatem nie więcej niż  $2^{k+2}$ .
- Wszystkich partycji  $X$  jest  $|X|^{|X|}$  a zatem nie więcej niż  $(k + 2)^{k+2}$

- Dla każdego kubelka mamy  $2^{k+2} \cdot (k+2)^{k+2} = k^{O(k)}$ .
- Wartości dla każdego kubelka wyliczamy w czasie  $(k^{O(k)})^2$ .

**Twierdzenie 2.** *Mając dany  $n$ -wierzchołkowy graf  $G$  razem ze zbiorem terminali  $K \subseteq V(G)$  oraz dekompozycją drzewową o szerokości drzewowej nie większej niż  $k$ , można wyliczyć rozmiar minimalnego drzewa Steinerja w czasie  $k^{O(k)} \cdot n$ .*

## 2.2 Cykl Hamiltona

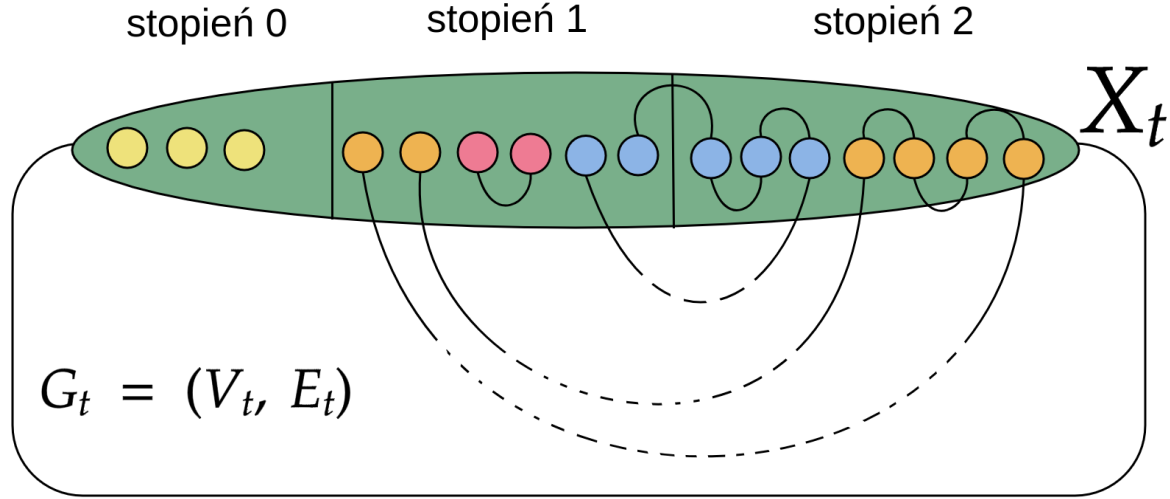
Mamy dany graf  $G = (V, E)$ . Spacer definiujemy jako naprzemienną sekwencję wierzchołków należących do  $V(G)$  i krawędzi należących do  $E(G)$ , której początkiem i końcem są wierzchołki oraz w której każda występująca krawędź jest incydentna z wierzchołkiem poprzedzającym i następującym. Ścieżką nazywamy spacer, w którym wierzchołki się nie powtarzają. Pytamy, czy istnieje taka ścieżka  $H$ , która zaczyna i kończy się w tym samym wierzchołku (problem decyzyjny). Zakładamy, że mamy daną ładną dekompozycję drzewową lekko zmodyfikowanego grafu  $G' : \mathcal{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ . Modyfikacja polega na tym, że kopiujemy wierzchołek  $v$ , będący w korzeniu dekompozycji drzewowej grafu  $G$  (ZAPOMINAJĄCY  $v$ ) wraz z jego krawędziami, tj. dla z każdej krawędzi  $uv \in E(G)$ , dostajemy dwie krawędzie  $uv_1$  i  $uv_2$ , gdzie  $v_1$  jest byłym wierzchołkiem  $v$ , a  $v_2$  jego kopią.  $(T)$  nie zawiera kubelków ZAPOMINAJĄCY  $v_1$  oraz ZAPOMINAJĄCY  $v_2$ . Problem szukania cyklu Hamiltona modyfikujemy do problemu szukania ścieżki Hamiltona o końcach  $v_1$  i  $v_2$ .

Niech  $H$  będzie szukanym cyklem Hamiltona. Przecięcie  $H$  i  $G_t$  składa się z wielu rozłącznych i wierzchołkowo, i krawędziowo ścieżek (również jednoelementowych, będących wierzchołkami izolowanymi), oznaczmy je jako  $F$ . Przecięcie to poza liśćmi nigdy nie jest puste, ponieważ wszystkie wprowadzone wierzchołki muszą należeć do częściowego rozwiązania. Szukane  $H$  jest spójne, co implikuje, że każda ścieżka  $C_1, \dots, C_z$  z  $F$  przecina  $X_t$ . Ponadto musi ona przecinać  $X_t$  oboma swoimi końcami, wpp. nie dostalibyśmy spójnego rozwiązania końcowego. Biorąc pod uwagę powyższe wymagania, dostajemy że dla każdej pary  $(X_t, F)$ , możemy utworzyć trzy klasy wierzchołków należących do  $X_t$  (rys. ??):

- wierzchołki izolowane w  $F$  (o stopniu 0)
- wierzchołki będące końcami ścieżek  $C_1, \dots, C_z$  (o stopniu 1)
- wierzchołki należące do ścieżek  $C_1, \dots, C_z$  i nie będące ich końcami (o stopniu 2)

By utrzymać powyższe niezmienniki, w każdym kubelku  $t$  musimy rozważyć wszystkie możliwe podziały zbioru  $X_t$  na trzy podzbiory  $\mathcal{D} = (X_{t\_0}, X_{t\_1}, X_{t\_2})$ , odpowiadające stopniom wierzchołków, które się w nich znajdują. Ponadto by w kubelkach SCALAJĄCY oraz UZUPEŁNIAJĄCY uw, nie otrzymać cyklu, musimy się przeiterować po wszystkich możliwych skojarzeniach  $M$  wierzchołków ze zbioru  $X_{t\_1}$ . Rozwiązanie częściowe jest poprawne, jeśli spełnione są następujące warunki:

1.  $V(F) = V_t$  (wszystkie wierzchołki muszą należeć do rozwiązania)



Rysunek 2.2: Jedno z możliwych rozwiązań częściowego problemu znajdowania ścieżki Hamiltona dla kubelka  $t$ .

2.  $u \in X_{t\_i} \Leftrightarrow u \in X_t$  i wierzchołek  $u$  ma stopień  $i$  w  $F$
3.  $|X_{t\_1}| \equiv 0 \pmod{2}$
4.  $u$  jest skojarzone z  $w$  ( $u, w \in M$ )  $\Leftrightarrow u \in X_{t\_1} \wedge w \in X_{t\_1} \wedge \exists y : u \in C_y \wedge w \in C_y$  ( $u$  i  $w$  są końcami ścieżki  $C_y$ )

Dla każdej trójki  $(t, \mathcal{D}, M)$  trzymamy w  $c[t][\mathcal{D}][M]$  0 lub 1 w zależności od tego, czy powyższe warunki są spełnione. Musimy na bieżąco śledzić skojarzenie  $M$ , ponieważ kubelki typu **SCALAJĄCY** oraz **UZUPEŁNIAJĄCY** uw mogą utworzyć cykl. Wynik końcowy odpowiada wartości  $c[r][[(\emptyset, \{v_1, v_2\}, \emptyset)][\{v_1, v_2\}]]$ , gdzie  $r$  jest korzeniem. Poniżej prezentuję formuły rekurencyjne obliczania wartości  $c$  ze względu na typ kubelka  $t$ .

**LIŚĆ** - każdy liść odpowiada następującemu przypadkowi:

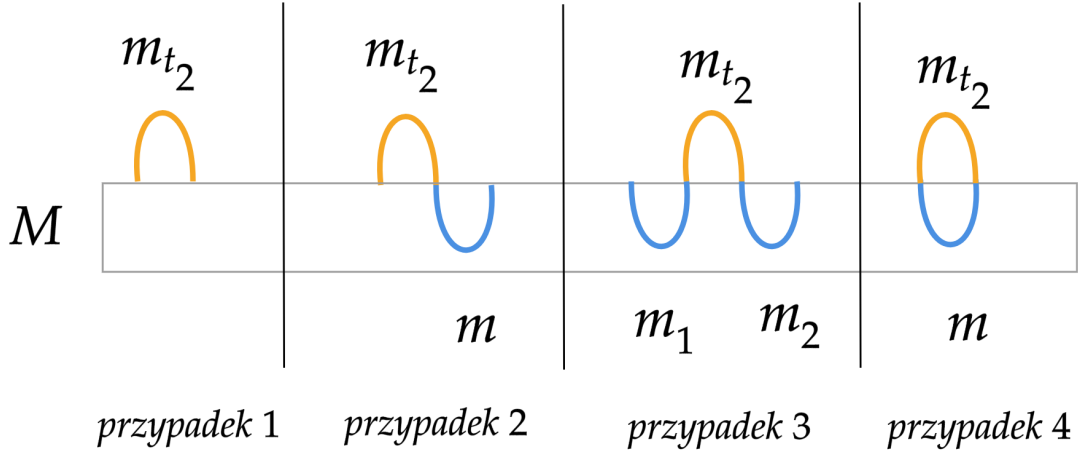
$$c[t][[(\emptyset, \emptyset, \emptyset)][\emptyset]] = 1$$

**WPROWADZAJĄCY**  $u$  - zauważmy, że w momencie dodawania wierzchołka do  $F$  jego stopień musi wynosić 0, ponieważ żadna z incydentnych do niego krawędzi nie została jeszcze wprowadzona:

$$c[t][(X_{t\_0}, X_{t\_1}, X_{t\_2})][M] = \begin{cases} c[t'][(X_{t\_0} \setminus \{u\}, X_{t\_1}, X_{t\_2})][M] & \text{jeśli } u \in X_{t\_0}, \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

**ZAPOMINAJĄCY**  $u$  - wszystkie krawędzie incydentne do zapominanego wierzchołka zostały już wprowadzone, wobec czego zapominany wierzchołek musi mieć stopień 2 w  $F$ :

$$c[t][(X_{t\_0}, X_{t\_1}, X_{t\_2})][M] = c[t'][(X_{t\_0}, X_{t\_1}, X_{t\_2} \cup \{u\})][M]$$



Rysunek 2.3: Dodawanie nowej krawędzi  $m_{t_2}$  do skojarzenia  $M$ .

**UZUPEŁNIAJĄCY**  $uw$  - dodawanie krawędzi incydentnej do wierzchołka zwiększa jego stopień o 1, wobec czego możemy dodawać krawędź, jeśli  $u \in X_{t_0} \vee u \in X_{t_1}$  oraz  $w \in X_{t_0} \vee w \in X_{t_1}$ . Nie jest to jednak warunek wystarczający, ponieważ nie gwarantuje nam, że nie dostaniemy cyklu. Jeśli  $u \in X_{t_1} \wedge w \in X_{t_1}$  oraz  $\exists m : m \in M \wedge u \in m \wedge w \in m$ , nie możemy wziąć krawędzi  $uw$ . Niezależnie od tego, czy krawędź może zostać dodana do rozwiązania, czy nie, dla każdej trójki  $(t, \mathcal{D}, M)$  możemy jej nie brać, dlatego bierzemy alternatywę  $c[t'][(X_{t_0}, X_{t_1}, X_{t_2})][M]$  i poniższych wartości:

$$c[t][(X_{t_0}, X_{t_1}, X_{t_2})][M] = \begin{cases} \text{jeśli } u \in X_{t_1} \wedge w \in X_{t_1}: \\ c[t'][(X_{t_0} \cup \{u, w\}, X_{t_1} \setminus \{u, w\}, X_{t_2})][M \cup \{u, w\}] \\ \\ \text{jeśli } u \in X_{t_1} \wedge w \in X_{t_2}: \\ c[t'][(X_{t_0} \cup \{u\}, X_{t_1} \setminus \{u\} \cup \{w\}, X_{t_2} \setminus \{w\})][M \cup \{u, w\}] \\ \\ \text{jeśli } u \in X_{t_2} \wedge w \in X_{t_1}: \\ c[t'][(X_{t_0} \cup \{w\}, X_{t_1} \setminus \{w\} \cup \{u\}, X_{t_2} \setminus \{u\})][M \cup \{u, w\}] \\ \\ \text{jeśli } u \in X_{t_2} \wedge w \in X_{t_2}: \\ c[t'][(X_{t_0}, X_{t_1} \cup \{u, w\}, X_{t_2} \setminus \{u, w\})][M \cup \{u, w\}] \\ \\ 0 \text{ wpp.} \end{cases}$$

**SCALAJĄCY** - zauważmy, że scalane  $F_{t_1}$  oraz  $F_{t_2}$  nie mają wspólnych krawędzi, jedynie wierzchołki. Z powyższego wynika, że dla każdego wierzchołka  $u$  należącego do  $X_t$ :  $\deg_t(u) = \deg_{t_1}(u) + \deg_{t_2}(u)$ . Zauważmy, że musi być spełniony warunek  $\deg_t(u) \leq 2$ . Jeśli  $\mathcal{D}_{t_1}$  i  $\mathcal{D}_{t_2}$  nie spełniają tego warunku, nie rozpatrujemy ich. Jednakże nie jest to warunek wystarczający, by rozwiązanie częściowe w kubku  $t$  było poprawne. Może się zdarzyć (jak przy dodawaniu krawędzi), że scalanie utworzy nam cykl. Scalając  $M_{t_1}$  i  $M_{t_2}$  uzupełniamy nasze obecne  $M$

najpierw skojarzonymi wierzchołkami  $m_{t_1} \in M_{t_1}$ , by następnie pojednczo dodawać  $m_{t_2} \in M_{t_2}$ . Dla każdego nowo dodawanego  $m_{t_2} = \{u, w\}$ , sprawdzamy wszystkie  $m \in M$ , rozważając następujące przypadki (zobrazowane na rys. ??):

1.  $\forall m \in M : m_{t_2} \cap m = \emptyset$ , do skojarzenia  $M$  dorzucamy  $m_{t_2}$ .
2.  $\exists m = \{v, z\} \in M : |m_{t_2} \cap m| = 1 \wedge \forall m' \in M, m' \neq m : m_{t_2} \cap m' = \emptyset$  - bez straty ogólności założmy, że  $u = v$ , czyli  $m_{t_2} \cap m = \{u\}$ , z  $M$  usuwamy  $m$  i dorzucamy nowe skojarzenie  $\{w, z\}$ .
3.  $\exists m_1 = \{v_1, z_1\} \in M : |m_{t_2} \cap m_1| = 1 \wedge \exists m_2 = \{v_2, z_2\} \in M, m_2 \neq m_1 : |m_{t_2} \cap m_2| = 1$  - bez straty ogólności założmy, że  $u = v_1$  i  $w = v_2$  (istotnym spostrzeżeniem jest fakt, że  $m_{t_2} \cap m_1 \neq m_{t_2} \cap m_2$ ), usuwamy  $m_1$  i  $m_2$  z  $M$  oraz dodajemy nowe skojarzenie  $\{z_1, z_2\}$ .
4.  $\exists m \in M : |m_{t_2} \cap m| = 2$  - CYKL,  $M_{t_1}$  i  $M_{t_2}$  nie utworzą nam poprawnego rozwiązania.

Końcowy wynik dla trójki  $(t, \mathcal{D}, M)$  jest alternatywą po wszystkich  $(t_1, \mathcal{D}_{t_1}, M_{t_1})$  i  $(t_2, \mathcal{D}_{t_2}, M_{t_2})$ , które spełniają wyżej wymienione warunki:

$$c[t][\mathcal{D}][M] = \bigvee_{\mathcal{D}_{t_1}, \mathcal{D}_{t_2}, M_{t_1}, M_{t_2}} c[t_1][\mathcal{D}_{t_1}][M_{t_1}] \wedge c[t_2][\mathcal{D}_{t_2}][M_{t_2}]$$

Dla każdego kubełka mamy nie więcej niż  $3^k \cdot k^k$  stanów. Zatem złożoność czasowa standardowego algorytmu dynamicznego po dekompozycji drzewowej dla problemu istnienia cyklu Hamiltona wynosi  $k^{O(k)} \cdot n$ , gdzie  $n$  jest liczbą wierzchołków grafu  $G$  danego na wejściu.



## Rozdział 3

# Algorytmy dynamiczne z zastosowaniem techniki Cut & Count

W poprzednim rozdziale zostały przedstawione klasyczne algorytmy dynamiczne po dekompozycji drzewowej dla dwóch problemów decyzyjnych: drzewa Steinera oraz cyklu Hamiltona. Złożoność czasowa obu tych algorytmów jest niesatysfakcjonująca, gdyż zależy od  $k^{O(k)}$  (gdzie  $k$  jest szerokością drzewową). Czynnikiem ten jest następstwem trzymania odpowiednio: wszystkich możliwych podziałów cząstkowego drzewa Steinera na spójne poddrzewa oraz wszystkich możliwych skojarzeń wierzchołków wiszących w pary reprezentujące ścieżki będące częścią szukanego cyklu Hamiltona. W tym rozdziale przedstawię dynamiczne algorytmy randomizowane (po dekompozycji drzewowej), bazujące na technice Cut & Count opublikowanej w [?], która znosi konieczność śledzenia podziału na partycje czy skojarzenia, tym samym znacznie poprawiając złożoność czasową w stosunku do klasycznych algorytmów dynamicznych. Technika Cut & Count redukuje problemy decyzyjne do problemów zliczania wszystkich możliwych rozwiązań modulo 2, jednocześnie dopuszczając rozwiązania niespójne (las w przypadku drzewa Steinera, zbiór cykli w przypadku cyklu Hamiltona). Technika Cut & Count bazuje na tymczasowym poluzowywaniu ograniczeń dotyczących spójności szukanых rozwiązań, z tego względu znajduje ona uniwersalne zastosowanie tylko do problemów o spójnych rozwiązaniach. Niech  $\mathcal{S} \subset 2^U$  będzie zbiorem szukanых rozwiązań, a  $U$  naszym uniwersum (zazwyczaj jest to zbiór wierzchołków lub krawędzi grafu danego na wejściu). Pytamy, czy  $\mathcal{S}$  jest pusty. Na technikę Cut & Count składają się dwa kroki:

Cut - poluzuj wymagania dotyczące spójności szukanego rozwiązania, tj. na tym etapie dopuszczamy rozwiązania niespójne należące do zbioru  $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{S}$ . Ponadto rozważamy zbiór  $\mathcal{C}$  składający się z par  $(X, C)$ , gdzie  $X \in \mathcal{R}$  a  $C$  jest partycją podzbioru wierzchołków grafu wejściowego  $(V_1, V_2)$ , z którą  $X$  jest kompatybilny (żadna spójna składowa nie ma niepustego przecięcia zarówno z  $V_1$ , jak i  $V_2$ ).

Count - wyizoluj jedno z możliwych rozwiązań (o ile takie istnieje) poprzez przypisanie losowych wag elementom z uniwersum  $U$ . Rozbij zbiór  $\mathcal{C}$  ze względu na wagi  $w = w(X)$ , a następnie oblicz parzystości zbiorów  $|\mathcal{C}_w|$  używając formuł rekurencyjnych. To pozwoli odrzucić wszystkie niepoprawne rozwiązania (niespójne), tj.  $X \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$ , ponieważ każde niespójne rozwiązanie jest kompatybilne z parzystą ilością partycji. Istnienie spójnego, wyizolowanego rozwiązania sprawi, że jedna z wartości  $|\mathcal{C}_w|$  będzie równa 1.

### 3.1 Drzewo Steinera

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, mamy dany graf  $G$  wraz ze zbiorem terminali  $K \subseteq V(G)$  oraz jego dekompozycję drzewową  $\mathcal{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ . Dodatkowo dostajemy liczbę naturalną  $\ell$ . Pytamy, czy istnieje drzewo Steiner o rozmiarze co najwyżej  $\ell$ , innymi słowy: czy istnieje spójny graf acykliczny łączący wszystkie terminale, o co najwyżej  $\ell$  krawędziach. Dążymy do udowodnienia następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 3.** *Istnieje algorytm Monte Carlo z jednostronnym błędem (odpowiedź fałszywie negatywna), który rozwiązuje problem drzewa Steinera w czasie  $3^k \cdot n^{O(1)}$  mając na wejściu daną dekompozycję drzewową grafu o szerokości drzewowej  $k$ .*

*Dowód.* Jak już zostało wspomniane, sprowadzamy problem decyzyjny do problemu parzystości ilości poprawnych, spójnych rozwiązań. Jednakże nie liczymy jej bezpośrednio, a uwzględniając rozwiązania niespójne - jak zostanie to pokazane, każde z nich wliczamy do końcowego wyniku parzystą liczbę razy, dzięki czemu wynik końcowy jest poprawny.

Powołując się na [?], zdefiniujemy dwa zbiory -  $\mathcal{R}$  niech będzie zbiorem „lasów Steinera”, tj. zbiorem acyklicznych podgrafów  $G$ , które sumarycznie składają się z co najwyżej  $\ell$  krawędzi i zawierają  $K$ ,  $\mathcal{S}$  niech zawiera te podgrafy z  $\mathcal{R}$ , które są dodatkowo spójne, innymi słowy  $\mathcal{S}$  składa się z drzew Steinera:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{H \subseteq G : |E(H)| \leq \ell, K \subseteq V(H)\} \\ \mathcal{S} &= \{H \in \mathcal{R} : H \text{ jest spójny}\}\end{aligned}$$

Chcemy, by każdy element z  $\mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$  został zliczony parzystą liczbę razy, natomiast każdy element ze zbioru  $\mathcal{S}$  nieparzystą liczbę razy. W tym celu definiujemy rodzinę przecięć, które są podziałami  $V(H)$  na dwa podzbiory  $V^1$  i  $V^2$ . Mówimy, że podgraf  $H$  grafu  $G$  jest kompatybilny z przecięciem  $(V^1, V^2)$ , jeśli żadna z krawędzi  $H$  nie ma końców po obu stronach przecięcia, tj. wtedy gdy  $E(H) \subseteq \binom{V^1}{2} \cup \binom{V^2}{2}$ , gdzie  $\binom{X}{2}$  oznacza wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru  $X$ .

Zastanówmy się, jak wiele przecięć jest kompatybilnych z danym grafem  $H$ . Skoro żadna z krawędzi nie może być rozpięta pomiędzy  $V^1$  i  $V^2$ , każdy spójny komponent  $H$  musi być w całości w  $V^1$  lub w  $V^2$ . Z powyższego dostajemy, że dla danego  $H$  mamy  $2^c$  kompatybilnych przecięć, gdzie  $c$  jest liczbą spójnych składowych  $H$ . Prawie mamy już to, co chcieliśmy - każde niespójne  $H$  (z więcej niż jedną spójną składową) jest kompatybilne z parzystą liczbą przecięć. Niestety spójne rozwiązania są również kompatybilne z parzystą liczbą przecięć, a precyzując - każde z dokładnie dwoma. Możemy to naprawić, wybierając dowolny wierzchołek  $v_1 \in K$  i przypisać go na stałe tylko do  $V^1$ . Zapiszmy formalnie definicję przecięć kompatybilnych z  $H$ :

$$\text{cuts}(V(H), v_1) := \{(V^1, V^2) : V^1 \cup V^2 = V(H) \wedge V^1 \cap V^2 = \emptyset \wedge v_1 \in V^1\}$$

Pokażmy teraz, że zamiast liczyć parzystość  $|\mathcal{S}|$ , możemy policzyć parzystość zbioru składającego się z podzbiorów należących do  $\mathcal{R}$  wraz z wszystkimi kompatybilnymi do nich przecięciami:

$$\mathcal{C} = \{(H, (V^1, V^2)) \in \mathcal{R} \times \text{cuts}(V(H), v_1) : H \text{ jest kompatybilny z } (V^1, V^2)\}$$

**Lemat 3.** *Parzystość  $|\mathcal{C}|$  jest równa parzystości  $|\mathcal{S}|$ .*

*Dowód.* Rozważmy graf  $H$  należący do  $\mathcal{R}$ , który ma  $c$  spójnych składowych. Każda spójna składowa musi się znaleźć w całości w  $V^1$  albo w  $V^2$ , wpp. mielibyśmy krawędź przechodzącą przez przecięcie. Jednakże spójna składowa zawierająca  $v_1$  może się znaleźć tylko po stronie  $V^1$ . Z tego powodu  $H$  jest kompatybilny z  $2^{c-1}$  przecięciami. Dla  $H \in \mathcal{S}$  liczba ta jest nieparzysta, natomiast dla  $H \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$  parzysta.  $\square$

Wobec powyższego lematu, pozostaje pokazać algorytm obliczania parzystości  $\mathcal{C}$ . Okazuje się, że możemy to zrobić bez spamiętywania wszystkich dotychczasowo poprawnych stanów rozwiązań cząstkowych, tj. bez ich podziałów na partycje. Dzięki temu dostaniemy algorytm o złożoności  $2^{O(k)}$ .

Dla każdego kubelka  $t \in V(T)$ , liczby naturalnej  $i \leq l$  i funkcji  $f : X_t \rightarrow \{0, 1, 2\}$  obliczamy  $c[t][f][i]$  będące liczbą par  $(H, (V^1, V^2))$ , takich że:

1.  $H$  jest podgrafem  $(V_t, E_t)$  o dokładnie  $i$  krawędziach oraz  $H$  zawiera wszystkie terminale dotychczasowo wprowadzone w bieżącym poddrzewie, tj.  $K \cap V_t$
2.  $(V^1, V^2)$  jest przecięciem kompatybilnym z  $H$ , tj.  $V^1 \cup V^2 = V(H)$ ,  $V^1 \cap V^2 = \emptyset$ ,  $v_1 \notin V^2$
3. przecięcie  $H$  z wierzchołkami należącymi do kubelka  $t$  jest równe  $V(H) \cap X_t = f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2)$
4. funkcja  $f$  opisuje przynależność wierzchołków ze zbioru  $X_t \setminus f^{-1}(0)$  do  $V^1$  i  $V^2$ , tj.  $V^j \cap V(H) \cap X_t = f^{-1}(j)$  gdzie  $j \in \{1, 2\}$

Zanim przejdę do rekurencyjnych formuł obliczania wartości  $c[t][f][i]$ , pokażę w jaki sposób problem parzystości  $\mathcal{C}$  redukuje się do problemu istnienia drzewa Steinera. Oczywiście jest, że mogą istnieć dwa różne (parzyście wiele różnych) drzewa Steinera o tej samej liczbie krawędzi. Problem ten rozwiążemy poprzez wprowadzenie wag na krawędziach grafu  $G$ , które pozwolą nam rozróżniać poszczególne rozwiązania. Dla odpowiednio dużego  $N$ , losowo (niezależnie i z równym prawdopodobieństwem) wybieramy wagi ze zbioru  $\{1, 2, \dots, N\}$  i przyporządkowujemy je krawędziom należącym do  $E(G) : \mathbf{w}(e) \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Zdefiniujmy wagę podgrafu  $H$  następująco  $\mathbf{w}(H) = \sum_{e \in E(H)} \mathbf{w}(e)$ . Dla liczby naturalnej  $w$ , niech  $\mathcal{R}_w = \{H \in \mathcal{R} : \mathbf{w}(H) = w\}$ . Podobnie definiujemy  $\mathcal{S}_w$  i  $\mathcal{C}_w$ . Z oczywistych względów  $|\mathcal{S}_w| \bmod 2 = |\mathcal{C}_w| \bmod 2$ . Intuicyjnie, wystarczająco duże  $N$  powinno porozrzucać poprawne rozwiązania do różnych  $\mathcal{S}_w$ , dzięki czemu implikacja  $\exists_w : |\mathcal{S}_w| \bmod 2 = 1 \implies \text{istnieje drzewo Steiner o } i \leq l \text{ krawędziach}$  z wysokim prawdopodobieństwem zachodzi w obie strony. Autorzy udowadniają za pomocą tzw. lematu izolującego coś znacznie silniejszego - mianowicie wystarczy wziąć  $N = \Omega(|E(G)|)$ , żeby ze stałym prawdopodobieństwem otrzymać co najmniej jeden zbiór  $\mathcal{S}_w$  rozmiaru dokładnie 1.

**Definicja 1.** *Funkcja  $\mathbf{w} : U \rightarrow \mathbb{Z}$  izoluje rodzinę zbiorów  $\mathcal{F} \subseteq 2^U$  jeśli istnieje unikalne  $S' \in \mathcal{F}$ , takie że  $\mathbf{w}(S') = \min_{S \in \mathcal{F}} \mathbf{w}(S)$ . W naszym przypadku  $\mathbf{w}(X) = \sum_{u \in X} \mathbf{w}(u)$ .*

**Lemat 4** (Lemat izolujący). Niech  $\mathcal{F} \subseteq 2^U$  będzie rodziną zbiorów w uniwersum  $U$ , gdzie  $|\mathcal{F}| > 0$ . Dla każdego  $u \in U$ , wybieramy  $\mathbf{w}(u) \in \{1, 2, \dots, N\}$  z jednakowym prawdopodobieństwem, niezależnie. Wtedy

$$Pr(\mathbf{w} \text{ izoluje } \mathcal{F}) \geq 1 - \frac{|U|}{N}$$

*Dowód.* Niech  $u \in U$  będzie dowolnym elementem z uniwersum  $U$ , który znajduje się w co najmniej jednym zbiorze z  $\mathcal{F}$  i w co najmniej jednym z nich się nie pojawia - taki element nie musi istnieć. Definiujemy:

$$\alpha(u) = \min_{S \in \mathcal{F}, u \notin S} \mathbf{w}(S) - \min_{S \in \mathcal{F}, u \in S} \mathbf{w}(S \setminus \{u\})$$

Zauważmy, że  $\alpha(u)$  jest niezależne od  $\mathbf{w}(u)$ . Dostajemy, że

$$Pr(\alpha(u) = \mathbf{w}(u)) \leq \frac{1}{N}, \quad (3.1)$$

ponieważ wagę  $\mathbf{w}(u)$  możemy wylosować na sam koniec, kiedy wszystkie inne wagi są już ustalone. Załóżmy, że mamy dwa zbiory  $A, B \in \mathcal{F}$  o minimalnej wadze. Musi je rozróżniać co najmniej jeden element, tzn. istnieje  $x \in A \setminus B$ . Dostajemy

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \min_{S \in \mathcal{F}, x \notin S} \mathbf{w}(S) - \min_{S \in \mathcal{F}, x \in S} \mathbf{w}(S \setminus \{x\}) \\ &= \mathbf{w}(B) - (\mathbf{w}(A) - \mathbf{w}(x)) \\ &= \mathbf{w}(x) \end{aligned}$$

Jeśli  $W$  nie izoluje  $\mathcal{F}$ , wtedy istnieje element  $x$  i zbiory  $A, B \in \mathcal{F}$  takie że  $x \in A \setminus B$  i  $\alpha(x) = \mathbf{w}(x)$ . Jednakże na podstawie ??, to się zdarza z prawdopodobieństwem nie większym niż  $\frac{|U|}{N}$ .  $\square$

Naszim uniwersum są krawędzie grafu wejściowego  $G$  ( $U = E(G)$ ), natomiast  $\mathcal{F} = \{E(H) : H \in S\}$ . Wagi na krawędziach losujemy ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 2|U|\}$ , a następnie liczymy parzystość ilości rozwiązań dla poszczególnych  $\mathcal{C}_w$ . Musimy nieznacznie zmodyfikować, dla jakich parametrów liczymy rozwiązania cząstkowe  $c[t][f][i]$  wspomniane powyżej. tj. dorzucamy jeszcze jeden parametr  $w$  i liczymy, ile jest podgrafów  $H$  o wadze  $w$ ,  $i$  krawędziach, kompatybilnych z podziałem  $(V_1, V_2)$ . Poniżej przedstawiam rekurencyjne formuły zależne od typu kubelka  $t$ . Rozwiązanie końcowe zależy od tego, czy istnieje  $i \leq l$  oraz  $w \leq 2|E|l$ , dla których  $c[r][0][i][w] \bmod 2 = 1$ . Jeśli tak, to istnieje drzewo Steinera o  $i$  krawędziach. Jeśli nie, to z prawdopodobieństwem co najmniej  $\frac{1}{2}$  nie istnieje drzewo Steinera o co najwyżej  $l$  krawędziach.

**LIŚĆ u** - dla wszystkich liści  $c[t][\emptyset][0][0] = 1$ , ponieważ  $H$  nie ma jeszcze wprowadzonych żadnych wierzchołków ani krawędzi.

**WPROWADZAJĄCY u** - zauważmy, że  $u \in K \implies f(u) \neq 0$  oraz  $u = v_1 \implies f(u) = 1$ . Jeśli któryś z wymienionych warunków nie jest spełniony  $c[t][f][i][w] = 0$ , wpp.

$$c[t][f][i][w] = c[t']\left[f|_{X_{t'}}\right][i][w]$$

**ZAPOMINAJĄCY**  $u$  - dla kubelka zapominającego dodajemy wyniki cząstkowe przyjmując, że w dziecku wierzchołek  $u$  mógł mieć odpowiednio przypisane wartości funkcji  $f(u)$ : 0, 1, 2.

$$c[t][f][i][w] = \begin{aligned} & c[t'][f \cup \{u\} \rightarrow \{0\}][i][w] \\ & + c[t'][f \cup \{u\} \rightarrow \{1\}][i][w] \\ & + c[t'][f \cup \{u\} \rightarrow \{2\}][i][w] \end{aligned}$$

**UZUPEŁNIAJĄCY**  $uv$  - zauważmy, że dla kubelka uzupełniającego  $uv$  musi zachodzić  $f(u) = f(v) \neq 0$ , ponieważ żadna krawędź nie może przechodzić przez przecięcie oraz wierzchołki izolowane ( $f(u) = 0$ ) nie mogą być incydentne z jakąkolwiek krawędzią. Jeśli powyższe warunki nie są spełnione  $c[t][f][i][w] = c[t'][f][i][w]$ , innymi słowy nie włączamy krawędzi  $uv$  do bieżącego rozwiązania, wpp.

$$c[t][f][i][w] = c[t'][f][i-1][w-w_{uv}]$$

**SCALAJĄCY** - dla kubelka scalającego sumujemy po wszystkich parach rozwiązań cząstkowych, gdzie  $w(H_1) + w(H_2) = w(H)$  oraz  $|E(H_1)| + |E(H_2)| = |E(H)|$

$$c[t][f][i][w] = \sum_{i_1+i_2=i, w_1+w_2=w} c[t_1][f][i_1][w_1] + c[t_2][f][i_2][w_2]$$

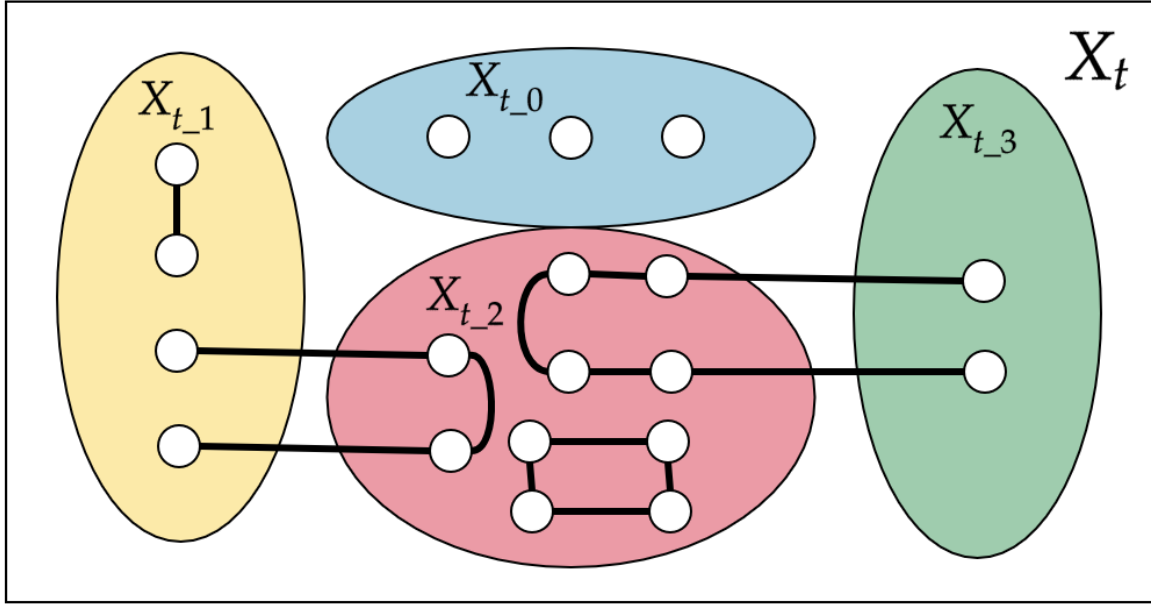
Złożoność powyższego algorytmu wynosi  $3^k \cdot n^{O(1)}$ , czyli zależność złożoności czasowej od szerokości drzewowej jest rzędu  $2^{O(k)}$ , a nie jak w przypadku standardowego algorytmu dynamicznego  $k^{O(k)}$ , co kończy dowód twierdzenia ??.

## 3.2 Cykl Hamiltona

Zastanówmy się, jak można zastosować technikę Cut & Count w celu rozwiązania problemu istnienia cyklu Hamiltona (przedstawionego w poprzednim rozdziale) oraz jak bardzo pozwoli nam ona zbić złożoność czasową w stosunku do standardowego algorytmu po dekompozycji drzewowej. Ponieważ aspekty techniczne w większości pokrywają się z tym, co zostało przedstawione w poprzednim paragrafie w kontekście drzewa Steinera, skupię się wyłącznie na różnicach, niuansach charakterystycznych dla cyklu Hamiltona.

Po pierwsze skupmy się na dopuszczalnych rozwiązaniach. Pominiecie wymogu spójności redukuje problem cyklu Hamiltona do problemu pokrycia wierzchołkowego grafu  $k$  cyklami, gdzie w naszym przypadku  $k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor\}$ . Zbiór  $\mathcal{R}$  zawiera wszystkie takie pokrycia  $H$ , które składają się z cykli zawierających co najmniej dwa wierzchołki oraz które sumarycznie pokrywają wszystkie wierzchołki grafu wejściowego  $G$ :

$$\mathcal{R} = \{H \subseteq G : V(H) = V(G), \forall u \in V(H) : \deg(u) = 2\}$$



Rysunek 3.1: Wizualizacja czterech stanów, w jakich mogą się znajdować wierzchołki z  $X_t$ .

$$\mathcal{S} = \{H \in \mathcal{R} : H \text{ jest spójny}\}$$

Po drugie zauważmy, że o ile w przypadku liczenia częściowych rozwiązań dla drzewa Steinera, mamy zachowany niezmiennik, że częściowe rozwiązanie składa się z drzew, o tyle w przypadku cyklu Hamiltona podobny niezmiennik nie zachodzi. Rozwiązanie dla bieżącego podgrafu  $G_t$  niekoniecznie składa się z cykli, ponieważ może zawierać także ścieżki. Zliczamy takie rozwiązania, dopóki istnieje możliwość domknięcia wszystkich ścieżek (tzn. w wierzchołku ZAPOMINAJĄCY u wymagamy, by  $\deg(u) = 2$ ).

Zbiór  $\mathcal{C}$  definiujemy podobnie jak dla drzewa Steinera, z dwiema drobnymi modyfikacjami. Jedna z nich dotyczy  $v_1$ , który dla cyklu Hamiltona jest dowolnym, ale ustalonym wierzchołkiem ze zbioru  $V(G)$ . Druga natomiast dotyczy podziału  $(V^1, V^2)$ , który definiujemy tylko na wierzchołkach o stopniu 1.

$$\text{cuts}(V_{\deg_1}(H), v_1) := \{(V^1, V^2) : V^1 \cup V^2 = V_{\deg_1}(H) \wedge V^1 \cap V^2 = \emptyset \wedge v_1 \in V^1\}$$

$$\mathcal{C} = \{(H, (V^1, V^2)) \in \mathcal{R} \times \text{cuts}(V_{\deg_1}(H), v_1) : H \text{ jest kompatybilny z } (V^1, V^2)\}$$

Losowanie wag na krawędziach i definiowanie  $\mathcal{R}_w$ ,  $\mathcal{S}_w$  oraz  $\mathcal{C}_w$  nie ulega zmianie. Jedyne nad czym musimy się pochylić, to jak trzymamy bieżący stan (tj. dla jakich parametrów wyliczamy wartości  $c$ ) oraz jak definiujemy funkcje rekurencyjne.

Dla każdego kubłka  $t \in V(T)$ , funkcji  $f : X_t \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  oraz wagi  $w$  obliczamy  $c[t][f][w]$  będące liczbą par  $(H, (V^1, V^2))$ , takich że:

1.  $H$  jest podgrafem  $(V_t, E_t)$  oraz  $H$  zawiera wszystkie wierzchołki dotychczasowo wprowadzone w bieżącym poddrzewie, tj.  $V(H) = V_t$

2.  $(V^1, V^2)$  jest przecięciem kompatybilnym z  $H$ , tj.  $V^1 \cup V^2 = V_{deg_1}(H)$ ,  $V^1 \cap V^2 = \emptyset$ ,  $v_1 \notin V^2$
3. przecięcie  $H$  z wierzchołkami należącymi do kubełka  $t$  jest równe  $V(H) \cap X_t = X_t = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2) \cup f^{-1}(3)$
4. funkcja  $f$  opisuje przynależność wierzchołków ze zbioru  $X_t$  do podzbiorów  $X_{t\_0}, X_{t\_1}, X_{t\_2}, X_{t\_3}$ , tj.  $X_{t\_j} \cap V(H) = f^{-1}(j)$ , gdzie  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$
5.  $V^1 \cup V^2$  nie ma wierzchołków poza  $X_t$ , innymi słowy  $V_{deg_1}(H) \cap X_t = V_{deg_1}(H)$ , inaczej nieodwołalnie zostawilibyśmy niedomknięty cykl
6.  $X_{t\_1} = V^1$  oraz  $X_{t\_3} = V^2$
7.  $u \in X_{t\_i} \implies deg(u) = i$  dla  $i \in \{0, 1, 2\}$
8.  $u \in X_{t\_3} \implies deg(u) = 1$
9.  $\sum_{e \in E(H)} \mathbf{w}(e) = w$

Podsumowując, mamy cztery stany, które reprezentują wierzchołki  $u \in X_t$ , zostały one zobrazowane na rys. ??:

$X_{t\_0}$ : stan reprezentujący wierzchołki o stopniu 0

$X_{t\_1}$ : stan reprezentujący wierzchołki o stopniu 1, które znalazły się po stronie  $V^1$  przecięcia

$X_{t\_3}$ : stan reprezentujący wierzchołki o stopniu 1, które znalazły się po stronie  $V^2$  przecięcia

$X_{t\_2}$ : stan reprezentujący wierzchołki o stopniu 2

Zauważmy, że każdy wierzchołek musi przechodzić przez następujące stany  $0 \rightarrow \{1 \text{ lub } 3\} \rightarrow 2$  (wyjątkiem jest  $v_1$ , które nigdy nie będzie należało do  $X_{t\_3}$ ). Poniżej przedstawiam definicje rekurencyjne obliczania wartości  $c[t][f][w]$ . Algorytm zwraca, że istnieje cykl Hamiltona, jeśli  $\exists_{w \leq nN} : c[r][0][w] \bmod 2 = 1$ , gdzie  $r$  jest korzeniem dekompozycji drzewowej, a  $n = |V(G)|$ .

LIŚĆ  $u$  - dla wszystkich liści  $c[t][\emptyset][0] = 1$

WPROWADZAJĄCY  $u$  - wierzchołek  $u$  w momencie wprowadzania nie jest incydentny z żadną krawędzią, zatem jeśli  $f(u) \neq 0$ , to  $c[t][f][w] = 0$ , wpp.

$$c[t][f][w] = c[t'] [f|_{X_{t'}}] [i][w]$$

ZAPOMINAJĄCY  $u$  - wierzchołek może zostać zapomniany wtw. gdy znajduje się w  $X_{t_2}$ , czyli ma dwie incydentne krawędzie, jeśli  $f(u) \neq 2$ , to  $c[t][f][w] = 0$ , wpp.

$$c[t][f][w] = c[t'] [f \cup \{u\} \rightarrow \{2\}][w]$$

	$X_{t'_0}$	$X_{t'_1}$	$X_{t'_2}$	$X_{t'_3}$
$X_{t'_0}$	$(1, 1) \vee (3, 3)$	$(1, 2)$	$\emptyset$	$(3, 2)$
$X_{t'_1}$	$(2, 1)$	$(2, 2)$	$\emptyset$	$\emptyset$
$X_{t'_2}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$X_{t'_3}$	$(2, 3)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(2, 2)$

Tablica 3.1: Możliwe zmiany stanu w przypadku dodawania krawędzi. Tabelę należy rozumieć w następujący sposób:  $tab[f'(u)][f'(v)] = (f(u), f(v))$ ,  $i$  jest tożsame z  $X_{t_i}$ .

	$X_{t_2_0}$	$X_{t_2_1}$	$X_{t_2_2}$	$X_{t_2_3}$
$X_{t_1_0}$	0	1	2	3
$X_{t_1_1}$	1	2	—	—
$X_{t_1_2}$	2	—	—	—
$X_{t_1_3}$	3	—	—	2

Tablica 3.2: Zmiana stanu wierzchołka po scaleniu dwóch cząstkowych rozwiązań. Tabelę należy interpretować następująco:  $tab[f_1(u)][f_2(u)] = f(u)$ ,  $i$  jest tożsame z  $X_{t_i}$ .

**UZUPEŁNIAJĄCY**  $uv$  - po pierwsze możemy nie dodawać krawędzi  $uv$  do rozwiązania, wtedy  $c[t][f][w] = c[t'][f][w]$ . Zastanówmy się, jakie warunki muszą być spełnione, żeby można było wstawić krawędź  $uv$ :

- $deg(u) < 2$  oraz  $deg(v) < 2$
- oba wierzchołki były/są po tej samej stronie przecięcia  $(V^1, V^2)$ .
- tabela ?? pokazuje jakie są możliwe zmiany stanu w przypadku dodawania krawędzi. Tabelę należy rozumieć w następujący sposób:  $tab[f'(u)][f'(v)] = (f(u), f(v))$ ,  $i$  jest tożsame z  $X_{t_i}$ .

$$c[t][f][w] = \begin{cases} \text{jeśli spełnione są powyższe warunki} \\ \text{oraz} \\ f(u), f(v), f'(u) \text{ i } f'(v) \text{ są w relacji opisanej za pomocą tabeli ??} \\ c[t'][f'][w - w_{uv}], \\ \text{wpp. 0} \end{cases}$$

**SCALAJĄCY** - podobnie jak w przypadku dodawania krawędzi, aby scalanie dwóch cząstkowych rozwiązań było możliwe, muszą być spełnione następujące wymagania:

- $deg_{t_1}(u) + deg_{t_2}(u) \leq 2$ , dla każdego  $u \in X_t$



- jeśli  $u \in X_{t_1-1}$ , to  $u \notin X_{t_2-3}$ , dla każdego  $u \in X_t$  ( $u$  nie może być po dwóch różnych stronach przecięcia)
- tabela ?? pokazuje, jak zmienia się stan  $u$  po scaleniu dwóch cząstkowych rozwiązań. Tabelę należy interpretować następująco:  $tab[f_1(u)][f_2(u)] = f(u)$ ,  $i$  jest tożsame z  $X_{t-i}$ .

$$c[t][f][w] = \begin{cases} \text{jeśli spełnione są powyższe warunki} \\ \text{oraz } \forall u \in X_t \\ f(u), f_1(u) \text{ i } f_2(u) \text{ są w relacji opisanej za pomocą tabeli ??} \\ \sum_{w_1+w_2=w} c[t_1][f_1][w_1] + c[t_2][f_2][w_2], \\ \text{wpp. 0} \end{cases}$$

Złożoność powyższego algorytmu wynosi  $4^k \cdot n^{O(1)}$ , czyli zależność złożoności czasowej od szerokości drzewowej jest rzędu  $2^{O(k)}$ , a nie jak w przypadku standardowego algorytmu dynamicznego  $k^{O(k)}$ .

# Bibliografia

- [1] T. Kloks. *Treewidth. Computations and approximations*. Lecture Notes in Computer Science, 842, 1994.
- [2] H. L. Bodlaender. *A linear-time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth*. SIAM J. Comput. 25:6 (1996) 1305-1317
- [3] N. Robertson and P. D. Seymour. *Graph Minors II. Algorithmic aspects of treewidth*. J. Algorithms 7 (1986) 309-322
- [4] M. Cygan, F. V. Fomin, Ł. Kowalik, D. Lokshtanov, D. Marx, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk, S. Saurabh *Parameterized Algorithms*.
- [5] Knuth: Computers and Typesetting,  
<http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/abcde.html>