41. **Aufgabe:**
Zeigen sie folgende Aussagen direkt:

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a, 0 < b$. Z.z.: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

(b) Zeigen Sie, dass sich jede ungerade Primzahl als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lässt.

Lösung:

(a) ...
(b) Sei x eine beliebige ungerade Primzahl.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x = 1 \cdot x && \text{| x ist ungerade} \\
&\Rightarrow \exists a \in \mathbb{N} : x = 1 \cdot (2 \cdot a + 1) && \text{| Sei b = a + 1} \\
&\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N} : x = 1 \cdot (a + b) && \text{| da b = a + 1} \\
&\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N} : x = (b - a) \cdot (a + b) && \text{| Binomische Formel} \\
&\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N} : x = a^2 - b^2 && \square
\end{aligned}$$

42. **Aufgabe:**
Beweisen Sie die folgenden Sätze indirekt (mittels Widerspruch):

(a) Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist $n + (n + 1) + (n + 2)$ durch 3 teilbar.

(b) $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[2]{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Lösung:

(a) ...

(b) Annahme: $\sqrt[2]{ab} > \frac{a+b}{2}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow ab > (\frac{a+b}{2})^2 && \text{| Binomische Formel} \\
&\Rightarrow ab > \frac{a^2 + 2 \cdot ab + b^2}{4} && \text{| Bruch auflösen} \\
&\Rightarrow ab > \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{ab}{2} && |\ ab = 2 \cdot \frac{ab}{2} \\
&\Rightarrow \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} > \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{ab}{2} && |\ - \frac{ab}{2} \\
&\Rightarrow \frac{2ab}{4} > \frac{a^2 + b^2}{4} && |\ \cdot 4 \\
&\Rightarrow 2ab > a^2 + b^2
\end{aligned}$$

Fall 1: $a = b$

$$\begin{aligned}
&2ab > a^2 + b^2 && \mid \text{Fallbedingung}\\
\Rightarrow &2a \cdot a > a^2 + a^2 &&\\
\Rightarrow &2a^2 > 2a^2 && \lightning
\end{aligned}$$

Fall 2: Da a und b vertauschbar sind, sind die Fälle $a > b$ und $b > a$ identisch. Es sei $a > b$:

$$\begin{aligned}
&2ab > a^2 + b^2 &&\\
\Rightarrow &2ab > ab + a \cdot (a-b) + ab - b \cdot (a-b) && \mid \text{Distributivg.}\\
\Rightarrow &2ab > 2ab + a \cdot (a-b) - b \cdot (a-b) && \mid \text{Distributivg.}\\
\Rightarrow &2ab > 2ab + (a-b) \cdot (a-b) && \lightning\text{, da } a > b \text{ und daher } (a-b) > 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Da die Annahme widerlegt wurde, gilt die Aussage.

43. **Aufgabe:**
Beweisen Sie mittels Kontraposition:

(a) Sei $x \in \mathbb{Z}$: Wenn $x^2 - 6x + 5$ gerade ist, dann ist x ungerade.

(b) Seien $f : A \mapsto B, g : B \mapsto C$ Abbildungen. Wenn $g \circ f$ bijektiv ist, dann ist f injektiv und g surjektiv.

Lösung:

(a) ...

(b) Es wird die Kontraposition zur Aussage, Wenn f nicht injektiv oder g nicht surjektiv ist, dann ist $g \circ f$ nicht bijektiv.
f ist nicht injektiv.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &\exists a_1, a_2 \in A \exists b_1 \in B : f(a_1) = b_1 = f(a_2) && \mid g \text{ auf } b_1 \text{ anwenden}\\
\Rightarrow &\exists a_1, a_2 \in A \exists b_1 \in B \exists c_1 \in C : f(a_1) = b_1 = f(a_2) \wedge g(b_1) = c_1 && \mid g \circ f \text{ anwenden}\\
\Rightarrow &\exists a_1, a_2 \in A \exists c_1 \in C : g \circ f(a_1) = c_1 = f(a_2) &&\\
\Rightarrow &g \circ f \text{ ist nicht injektiv und daher nicht bijektiv.} &&
\end{aligned}$$

g ist nicht surjektiv.

$$\Rightarrow \exists c_1 \in C \nexists b_1 \in B : g(b_1) = c_1 \qquad | \; f \text{anwenden}$$
$$\Rightarrow \nexists a_1 \nexists b_1 \exists c_1 : f(a_1) = b_1 \wedge g(b_1) = c_1 \qquad | \; g \circ f \text{anwenden}$$
$$\Rightarrow \nexists a_1 \exists c_1 : g \circ f(a_1) = c_1$$
$\Rightarrow g \circ f$ ist nicht surjektiv und daher nicht bijektiv.

$\Rightarrow$ Da die Kontraposition zur Aussage gilt, gilt auch die Aussage.

44. **Aufgabe:**
Sei $M = 1, 2, 3, \ldots, 2n$ und $A \subseteq M$ mit $\#A = n + 1$. Zeigen Sie, dass gilt:
$\exists a, b \in A : a \neq b \wedge a|b$
Lösung:
Da es unter den natürlichen Zahlen bis $2n$ n gerade und n ungerade Zahlen gibt und 1 nicht in A genommen werden kann, da sie alle anderen natürlichen Zahlen teilt, muss es mindestens zwei gerade Zahlen in A geben. Diese haben entweder nur gerade Faktoren oder einen geraden und einen ungeraden Faktor. Zahlen die nur gerade Faktoren haben sind zweier Potenzen. Da sich alle zweier Potenzen gegenseitig teilen, können nicht zwei Zahlen aus ausschließlich geraden Zahlen gewählt werden. Es muss eine gerade Zahl mit einem ungeradem Teiler gewählt werden. Dieser Teiler kann dann nicht mehr in A sein. Es muss also mindestens eine gerade Zahl mehr gewählt werden. Für diese Zahl gelten die selben Regeln wie zuvor. Zusätlich dürfen die bereits gestrichenen ungeraden Zahlen kein Teiler der Zahl sein. Die neue gerade Zahl muss also einen noch nicht gestrichenen ungeraden Faktor haben. Auch dieser muss dann gestrichen werden und wie zuvor immer weiter durch eine gerade Zahl ersetzt werden. Sind so alle ungeraden Zahlen bis n gestrichen worden, kann keine gerade Zahl mehr gewählt werden, die nur nicht gestrichene Teiler hat, da die Zahl kleiner oder gleich $2n$ sein muss, n also der gößte ungerade Teiler sein kann. Es muss also eine Zahl gewählt werden, die einen Teiler hat, der bereits in A ist. Es lässt sich daher keine Menge bilden für die die Aussage wahr ist.