Sei R ~~die Relation~~ eine Relation über $\mathbb{R}$ mit

$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

Gesucht ist ihr transitiver Abschluss

Der transitive Abschluss lässt sich wie folgt bilden:

Sei S_0 eine Relation, dann ist ihr transitiver Abschluss S_T:

$1\le i\le n \quad S_i=(S_{i-1})\circ(S_{i-1})$

$S_T=(\bigcup_{i=1}^{n} S_i)\cup S_0$

Gilt für ~~einen~~ einen Wert für i $S_i=S_{i-1}=(S_{i-1})\circ(S_{i-1})$, so ist jeder ~~weitere~~ höheren Wert für selbes gültig.

Beweis: ~~$P_i = S_{i-1}$~~

per Def: $((S_{i-1})\circ(S_{i-1}))\circ((S_{i-1})\circ(S_{i-1})) = S_i$ | Gleichheit S_{i-1}

$S_{i-1}\circ S_{i-1} = S_i$ | Gleichheit S_{i-1}

$S_{i-1} = S_i$ □

Finde ich also ein R_i, sodass ~~$R_{i-1}\circ R$~~ $R_i=R_i\circ R_i$, handelt es sich bei R_i um den transitiven Abschluss.

Sei $R_0=R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$

$R_1=(R_0\circ R_0^{\#})\cup R_0$ | R_0 symmetrisch

$R_1=(R_0\circ R_0^{-1})\cup R_0$ | Def.

~~$= \{(x,x$~~

$\Leftrightarrow$ $R_1=(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}\circ\{(y,x)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\})\cup R_0$

$\Leftrightarrow$ ~~$R_1=(\{(x,x)\in\mathbb{R}^2\mid \exists y\in\mathbb{R}: x^2+y^2=1\}$~~

$\Leftrightarrow$ $R_1=(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid\exists z: x^2+z^2=1\wedge y^2+z^2=1\})\cup R_0$

$\Leftrightarrow$ $R_1=(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid -x^2+1=z^2 \wedge y^2=1-z^2\})\cup R_0$

$\Leftrightarrow$ $R_1=(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid z^2+x^2=1 \; y^2=1-(-x^2+1)\})\cup R_0$

$\Leftrightarrow$ $R_1=(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y^2=x^2\wedge x^2+z^2=1\})\cup R_0$

$\Rightarrow$ $R_1=(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y^2=x^2\wedge x^2<1\})\cup R_0$

$\Rightarrow$ $R_1=(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y^2=x^2\wedge x^2<1\wedge y^2<1\})\cup R_0$

$\Leftrightarrow$ $R_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y^2+x^2=1\vee(y^2=x^2\wedge x^2<1\wedge y^2<1)\}$

Überprüfung Transitivität von R_1:

$\cancel{a^2+b^2=1}$

$aRb \wedge bRc$

1\. Fall: $a^2+b^2=1 \quad b^2=c^2$

$\Rightarrow a^2+c^2=1$

$\Rightarrow aRc$ ✓

2\. Fall: $a^2+b^2=1 \quad b^2+c^2=1$

$\Rightarrow a^2+b^2=1 \quad b^2=1-c^2$

$\Rightarrow a^2+1-c^2=1 \quad b^2=1-c^2$

$\Rightarrow a^2=c^2$

$\Rightarrow aRc$ ✓

3\. Fall: $a^2=b^2 \quad b^2=c^2$

$\Rightarrow a^2=c^2$

$\Rightarrow aRc$ ✓

4\. Fall: $a^2=b^2 \quad b^2+c^2=1$

$\Rightarrow a^2+c^2=1$

$\Rightarrow aRc$ ✓

Keine anderen Fälle

$\Rightarrow aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

$\Rightarrow R_1$ ist transitiv

$\Rightarrow R_1=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1 \vee (x^2=y^2 \wedge x^2<1 \wedge y^2<1)\}$

ist der transitive Abschluss ~~über~~ von R.

Der transitive Abschluss von $K'=\{(x,y) \mid x+y=1 \wedge x\geq y\geq 0\}$ ist K' selbst. Es ist geben, dass x und y positiv sein müssen. Daraus folgt auch, dass x und y zwischen 0 und 1 liegen müssen. Da $x\geq y$ sein soll, muss x zwischen (eingeschlossen) 0,5 und 1 liegen und y zwischen 0 und 0,5. x und y können also als gemeinsamen Wert nur 0,5 annehmen. Der einzig transitive Fall muss also folgendes erfüllen:

$(a,0{,}5)\in K' \wedge (0{,}5,b)\in K' \Rightarrow (a,b)$. Da a, b 0,5 sein müssen ist die Aussage wa und K' transitiv