(3) $\begin{cases} \frac{1}{4}+A_0 \cancel{x_0} = 1 \\ A_0 x_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{3}{4} \\ x_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$

$f(x)=1$，左$=1$，右$=1$，左$=$右；$f(x)=x$，左$=$右$=\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2$，左$=$右$=\frac{1}{3}$，$f(x)=x^3$，左$=\frac{1}{4}$，右$=\frac{2}{9}\neq$右

$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}f(0)+\frac{3}{4}f(\frac{2}{3})$ 有2次代数精度

4. $f(x)=1$，左$=$右$=3$；$f(x)=x$，左$=$右$=\frac{9}{2}$

$f(x)=x^2$，左$=$右$=9$；$f(x)=x^3$，左$=$右$=\frac{81}{4}$

$f(x)=x^4$，左$=\frac{243}{5}$，右$=\frac{99}{2}\neq$右

$\int_0^3 f(x)dx=\frac{3}{8}[f(0)+3f(1)+3f(2)+f(3)]$ 有3次代数精度

7. $\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 准确成立

要证 $\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_k[\alpha f(x_k)+\beta g(x_k)]$

$\sum_{k=0}^{n}A_k[\alpha f(x_k)+\beta g(x_k)] = \alpha\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)+\beta\sum_{k=0}^{n}A_k g(x_k)$

$=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$

$=\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)dx$ 成立

m次多项式 $P_m(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ 可分解为

x^k 的和 $(k=0,1,\cdots,m)$

习题二

2. $f(x)=1$, 左 = 右 = 1

$f(x)=x$, 左 = 右 = $\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2$, 左 = 右 = $\frac{1}{3}$

$f(x)=x^3$, 左 = $\frac{1}{4}$, 右 = $\frac{3}{4}\times\frac{1}{27}+\frac{1}{4}\neq\frac{1}{4}$

$\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{4}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{4}f(1)$ 有2阶代数精度

3.(1) $\begin{cases} A_0+A_1+A_2=2h \\ -hA_0 \quad +hA_2=0 \\ h^2A_0 \quad +h^2A_2=\frac{2h^3}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_0=\frac{h}{3} \\ A_1=\frac{4h}{3} \\ A_2=\frac{h}{3} \end{cases}$

$f(x)=1, x^2$, 左 = 右

$f(x)=x, x^3$, 由对称性, 左 = 右 = 0

$f(x)=x^4$, 左 = $\frac{2}{5}h^5$, 右 = $\frac{2}{3}h^5\neq$ 左

$\int_{-h}^{h} f(x)dx=A_0f(-h)+A_1f(0)+A_2f(h)$ 有3次代数精度

(2) $\begin{cases} A_0+A_1+A_2=1 \\ \frac{1}{4}A_0+\frac{1}{2}A_1+\frac{3}{4}A_2=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{16}A_0+\frac{1}{4}A_1+\frac{9}{16}A_2=\frac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_0=\frac{2}{3} \\ A_1=-\frac{1}{3} \\ A_2=\frac{2}{3} \end{cases}$

$\int_0^1 f(x)=\frac{2}{3}f(\frac{1}{4})-\frac{1}{3}f(\frac{1}{2})+\frac{2}{3}f(\frac{3}{4})$ 有3次代数精度

~~$f(x)=1, x^2$, 左 = 右~~

~~$f(x)=x, x^3$, 由对称性, 左 = 右 =~~

$f(x)=1$, 左 = 右 = 1; $f(x)=x$, 左 = 右 = $\frac{1}{2}$; $f(x)=x^2$, 左 = 右 = $\frac{1}{3}$

$f(x)=x^3$, 左 = $\frac{1}{4}$, 右 = $\frac{7}{24}-\frac{1}{24}=\frac{1}{4}$ = 左, $f(x)=x^4$, 左 = $\frac{1}{5}$, 右 = $\frac{41}{128}-\frac{1}{48}\neq$ 左

~~8. $S=\frac{0.4}{6}\times(1.1\times3.0042+1.3\times4\times3.6693+1.5\times4.4817)=1.94$~~

~~$T=\frac{0.2}{2}\times(1.1\times3.0042+1.3\times2\times3.6693+1.5\times4.4817)=$~~

8. $S=\frac{0.4}{6}\times(3.0042+4\times3.6693+4.4817)=1.47754$

$T=\frac{0.2}{2}\times(3.0042+2\times3.6693+4.4817)=1.48245$

~~16. 令 $x=t+2$, $\int_{-1}^{1}f(t+2)dt=\frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}(\sqrt{\frac{3}{5}})$~~

16. 令 $x=t+2$, $g(x)=f(x+2)$

$$\int_{-1}^{1}g(t)dt=\frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

是三点高斯公式，因此

$$\int_{1}^{3}f(x)dx=\frac{5}{9}f(2-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}f(2)+\frac{5}{9}f(2+\sqrt{\frac{3}{5}})$$ 成立

20. (1) $f(x)=1$, 左=右; $f(x)=x$, 左=右=1

$f(x)=x^2$, 左$=f'(a)=2a$, 右$=2a+h\neq$左.

前差公式有1阶代数精度.

(2) $f(x)=1, x$, 左=右; $f(x)=x^2$, 左$=2a$, 右$=2a-h\neq$右

后差公式有1阶代数精度

(3) $f(x)=1, x$, 左=右; $f(x)=x^2$, 左$=2a$, 右$=2a=$左

$f(x)=x^3$, 左$=3a^2$, 右$=3a^2+h^2\neq$左, 中差公式有2阶代数精度