



中国海洋大学
OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

数字逻辑 02 逻辑代数

逻辑代数基础

杨永全

计算机科学与技术学院

目录

1. 课程目标
2. 课程内容
3. 课堂练习
4. 课堂讨论
5. 课堂总结
6. 作业

1.课程目标

1. 目标

1. 通过一个例子了解《数字逻辑》课程需要解决的问题
2. 掌握逻辑函数及标准形式
3. 掌握逻辑函数的三种表现形式

2.课程内容

1. 一个例子 1.海大好声音

中国海洋大学将要举办一年一度的《海大好声音》大型音乐选秀活动。要求如下：

- 一共四位导师：杨老师、黄老师、王老师、刘老师，做为评委
- 学员演唱时，导师背对学员
- 学员演唱过程中，导师若认为学员表现合格，则按一下座位上的按钮，导师的椅子转过来，可以看到学员
- 有两位以上的导师为学员转身，表明该学员通过考核，可以进入导师选择阶段
- 请使用数字逻辑知识，设计一个电路，自动判断某个学员是否通过考核

1. 一个例子 2. 解决思路

- 每个人都有两个状态：冲或者不冲。对应二进制中的 0 和 1
- 假设转身为 1，不转身为 0。数字逻辑中（计算机体系中），只有两种状态，0 和 1，阴和阳，高电平与低电平。
- 一共有 2^4 种情况
- 学员会有两种结果：1 为通过，0 为不通过

1. 一个例子 3.列出所有的情况

杨老师	黄老师	王老师	刘老师	学员结果
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1
.....

1. 一个例子 4.用函数表达每一种情况

■ 第一种情况: $T = \overline{Y}H\overline{W}\overline{L}$

■ 第二种情况: $T = \overline{Y}H\overline{W}L$

■

将上述所有情况累加起来，得到的就是所有情况的最终结果。
再通过电路，将其实现。

2. 逻辑函数及标准形式 1. 逻辑代数基础

什么是逻辑代数？

定义

按一定的逻辑规律进行运算的代数。由逻辑变量集 K ，常量 0、1 及与、或、非三种运算符所构成的代数系统。

又称为布尔代数，最早是由英国数学家布尔 1850 年提出来的，现在适用于数字系统的布尔代数是美国贝尔实验室的香农于 1928 年提出的，为改进的布尔代数。

与课程关系

逻辑代数为分析设计数字逻辑电路提供了坚实的理论基础。

2. 逻辑函数及标准形式 2.逻辑变量和基本运算

逻辑变量

取值：逻辑 0、逻辑 1。

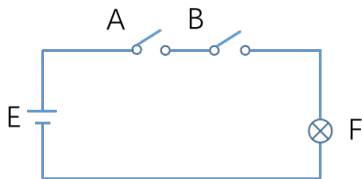
逻辑 0 和逻辑 1 不代表数值大小，仅表示相互矛盾、相互对立的两种逻辑状态

基本逻辑运算

与运算
或运算
非运算

2. 逻辑函数及标准形式 3.与逻辑

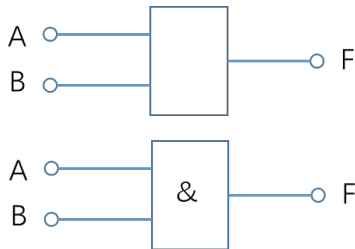
只有决定某一事件的所有条件全部具备，事件才能发生



开关 A	开关 B	灯 F	A	B	F
断	断	灭	0	0	0
断	合	灭	0	1	0
合	断	灭	1	0	0
合	合	亮	1	1	1

2. 逻辑函数及标准形式 3.与逻辑

只有决定某一事件的所有条件全部具备，事件才能发生



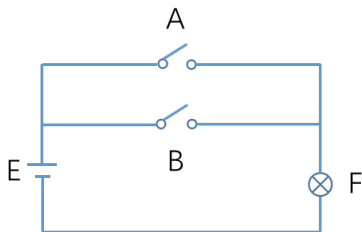
逻辑表达式:

$$F = A \cdot B = AB$$

也可以使用 $\&$ 、 \vee 、 \cap 、 \times 表示

2. 逻辑函数及标准形式 4.或逻辑

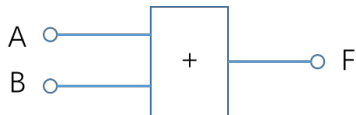
只要决定某一事件条件有一个及以上具备，事件就能发生



开关 A	开关 B	灯 F	A	B	F
断	断	灭	0	0	0
断	合	亮	0	1	1
合	断	亮	1	0	1
合	合	亮	1	1	1

2. 逻辑函数及标准形式 4.或逻辑

只要决定某一事件条件有一个及以上具备，事件就能发生



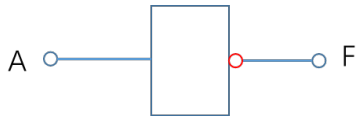
逻辑表达式：

$$F = A + B$$

也可以使用 \vee 、 \cup 表示

2. 逻辑函数及标准形式 5.非逻辑

当决定某一事件的条件满足时，事件不发生；反之发生

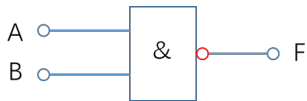


A	F
0	1
1	0

逻辑表达式: $F = \bar{A}$

2. 逻辑函数及标准形式 6.复合逻辑

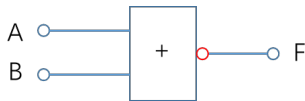
与非逻辑



逻辑表达式:

$$F = \overline{AB}$$

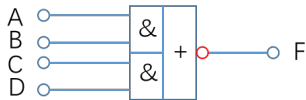
或非逻辑



逻辑表达式:

$$F = \overline{A + B}$$

与或非逻辑

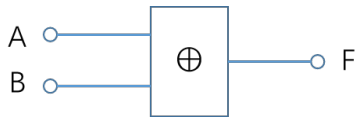


逻辑表达式:

$$F = \overline{AB + CD}$$

2. 逻辑函数及标准形式 6. 复合逻辑

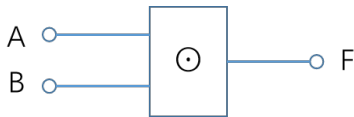
异或运算



逻辑表达式:

$$F = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

同或运算



逻辑表达式:

$$F = A \odot B = \overline{A \oplus B}$$

2. 逻辑函数及标准形式 7.逻辑函数

用有限个与、或、非逻辑运算符，按某种逻辑关系将逻辑变量 a_1 、 a_2 、 a_3 、... 连接起来，所得的表达式 $F = f(a_1, a_2, a_3, \dots)$ 称为逻辑函数。



输入变量逻辑变量 a_1 、 a_2 、 a_3 、... 确定后， F 的值就唯一确定。
 a_1 、 a_2 、 a_3 、... 是输入； F 是输出。

逻辑函数的标准形式共两种：最大项表达式和最小项表达式。
它们虽然形式不同，但是其实是一回事，表达的都是逻辑函数本身。

最小项表达式
最大项表达式

2. 逻辑函数及标准形式 9. 最小项表达式

最小项：n 个变量的逻辑函数中，包括**全部** n 个变量的乘积项（每个变量必须而且只能以原变量或反变量的形式出现一次）

n 个变量有 2^n 个最小项，记作 m_i
例如：3 个变量有 2^3 (8) 个最小项

最小项	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
二进制数	000	001	010	011	100	101	110	111
十进制数	0	1	2	3	4	5	6	7
编号	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7

2. 逻辑函数及标准形式 9. 最小项表达式

最小项的性质

- 任意一组变量取值，只有一个最小项的值为 1，其它最小项的值均为 0
- 同一组变量取值任意两个不同最小项的乘积为 0。即 $m_i \times m_j = 0 (i \neq j)$
- 全部最小项之和为 1，即

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1 \quad (1)$$

2. 逻辑函数及标准形式 9. 最小项表达式

A	B	C	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	F
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

2. 逻辑函数及标准形式 9.最小项表达式

最小项编号

- 最小项号：用 m 来表示最小项，把每个最小项的原变量用 1 表示，反变量用 0 表示所对应的二进制数的十进制值就是其最小项号。
- 例如：ABC 的最小项编号为 111 即 7，用 m_7 来表示。

2. 逻辑函数及标准形式 9. 最小项表达式

最小项表达式

- 定义：由最小项之和所构成的表达式。
- 任何一个逻辑函数都只有一个最小项表达式。
- 怎样得到最小项表达式：反复用 $X = X(Y + \bar{Y})$

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= A + \bar{B}C + \bar{A}BC \\ &= A(B + \bar{B}) + \bar{B}C + \bar{A}BC \\ &= AB + A\bar{B} + \bar{B}C(A + \bar{A}) + \bar{A}BC \\ &= AB(C + \bar{C}) + A\bar{B}(C + \bar{C}) + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC \\ &= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC \\ &= \sum(1, 3, 4, 5, 6, 7) \end{aligned} \tag{2}$$

2. 逻辑函数及标准形式 9. 最小项表达式

最小项表达式的性质

- m_i 为 $F(A_1, A_2 \dots A_n)$ 的一个最小项，则使 $m_i = 1$ 的一组变量取值使 $F = 1$ 。
- F_1 和 F_2 为 $A_1, A_2 \dots A_n$ 的函数，则 $F = F_1 + F_2$ 包含 F_1 和 F_2 中所有的最小项， $F = F_1 \cdot F_2$ 包含 F_1 和 F_2 中共有的最小项。
- 若 \bar{F} 是 F 的反函数， \bar{F} 包含 F 所包含最小项之外的所有最小项。

2. 逻辑函数及标准形式 10. 最大项表达式

- 最大项：为一个和项，并且每个变量以原变量或反变量的形式出现一次并且只出现一次。
- 用 M 来表示最大项，把每个最大项的原变量用 0 表示，反变量用 1 表示所对应的二进制数的十进制值就是其最大项号。
- 三个变量的最大项包括：
 $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ 、 $\bar{A} + \bar{B} + C$ 、 $\bar{A} + B + \bar{C}$ 、 $\bar{A} + B + C$ 、 $A + \bar{B} + \bar{C}$ 、 $A + \bar{B} + C$ 、 $A + B + \bar{C}$ 、 $A + B + C$

2. 逻辑函数及标准形式 10.最大项表达式

最大项的性质

- 每一个最大项只有一组取值可以使其值为 0。
- 任意两个最大项的和为 1。
- n 个变量的所有 2^n 个最大项之积为 0。

2. 逻辑函数及标准形式 10. 最大项表达式

最大项表达式

- 定义：由最大项之积所构成的表达式。
- 任何一个逻辑函数都只有一个最大项表达式。
- 怎样得到最大项表达式：反复用 $X + YZ = (X + Y)(X + Z)$

$$\begin{aligned} F &= A\bar{C} + B\bar{C} \\ &= \bar{C}(A + B) \\ &= (\bar{C} + A\bar{A} + B\bar{B})(A + B + C\bar{C}) \\ &= (A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(A + B + C) \\ &= \prod(0, 1, 3, 5, 7) \end{aligned} \tag{3}$$

2. 逻辑函数及标准形式 11. 最小项与最大项的关系

相同编号的最小项和最大项存在互补关系

$$m_i = \overline{M_i} \quad (4)$$

若干个最小项之和表示的表达式 F ，其反函数 \overline{F} 可用等同个与这些最小项相对应的最大项之积表示。

$$\begin{aligned} F &= m_1 + m_3 + m_5 + m_7 \\ \overline{F} &= \overline{m_1 + m_3 + m_5 + m_7} \\ &= \overline{m_1} \cdot \overline{m_3} \cdot \overline{m_5} \cdot \overline{m_7} \\ &= M_1 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_7 \end{aligned} \quad (5)$$

最小项表达式: 积之和范式
最大项表达式: 和之积范式

3. 逻辑函数的三种表现形式

逻辑函数有三种常见的表现形式：逻辑表达式、真值表、卡诺图。

逻辑表达式

用逻辑符号来表示函数式的运算关系。

真值表

输入变量不同取值组合与函数值间的对应关系列成表格。

卡诺图

是一种几何图形，由若干个小方格构成， n 个变量则有 2^n 个小方格，每个小方格代表逻辑变量的一种组合，方格的排列有一定的规律性。

3. 逻辑函数的三种表现形式 1. 逻辑表达式

直接用逻辑变量和逻辑运算符构成。

$$F = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

$$F = A \odot B = \overline{A \oplus B}$$

3. 逻辑函数的三种表现形式 2.真值表

是一种用表格表示逻辑函数的方法。由逻辑变量的所有取值组合及对应的逻辑函数值构成表格。

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

所代表的逻辑表达式为: $F = AB$

3. 逻辑函数的三种表现形式 3.卡诺图

是一种几何图形，由若干个小方格构成， n 个变量则有 2^n 个小方格，每个小方格代表逻辑变量的一种组合，方格的排列有一定的规律性。

$A \backslash B$	\bar{B}	B
\bar{A}	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

函数值为 1 时，对应的小方格标 1，例如 $F = AB$ 可表示为：

$A \backslash B$	\bar{B}	B
\bar{A}	0	0
A	0	1

3.课堂练习

1. 问题

写出下列逻辑的真值表

- 与非逻辑
- 或非逻辑
- 与或非逻辑
- 异或运算
- 同或运算

4.课堂讨论

1. 问题

讨论一个编码的问题

现在有 1000 瓶牛奶，其中一瓶是有毒的。中毒之后 20 小时毒发。在只有 10 只小白鼠的情况下，请在 24 小时内分辨出哪瓶牛奶是有毒的。

备注：

- 1、每瓶牛奶足够多。
- 2、牛奶在 24 小时后将会过期。
- 3、毒药的毒性足够强。

2. 一种可能的解决方案

	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10
M1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
M3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
M4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
M5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
M6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
M7	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
M8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
...

5.课堂总结

1. 课堂总结

笔记

现在可以总结自己的笔记，提炼大纲，回顾课程。

总结

还可以将课程的总结、心得记录在总结区。

6.作业

1. 题目

将下列表达式展开为最小项表达式和最大项表达式（6 分）

■ $Y = AB + BC$

■ $Y = AB + CD$

❗ 注意

- 1、需要有步骤，不能直接写答案
- 2、最后的结果，以最小项和最大项的标准形式结束
- 3、使用公式展开，不要使用其他方法



中国海洋大学
OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

问答环节