

## 数字逻辑 03 逻辑代数

逻辑代数常用公式及化简

杨永全

计算机科学与技术学院

## <u>目录</u>

- 1. 课程目标
- 2. 课程内容
- 3. 课堂练习
- 4. 课堂讨论
- 5. 课堂总结
- 6. 作业

# 1.课程目标

## 1. 目标

- 1. 掌握逻辑函数三种常见表现形式之间的关系
- 2. 掌握逻辑代数的基本公式
- 3. 掌握逻辑代数的主要定理
- 4. 掌握逻辑代数的常用公式
- 5. 掌握逻辑函数的代数化简方法
- 6. 熟练掌握逻辑函数的卡诺图化简方法

# 2.课程内容

## 1. 逻辑函数三种表示方法 1.三种表示方法的关系

逻辑函数三种表示方法之间的关系

真值表:逻辑函数的本质(较为复杂)

■ 逻辑表达式:逻辑函数的数学描述(便于化简、运算)

■ 卡诺图:逻辑函数的图形表示(复杂,直观,可用于化简)

## **1. 逻辑函数三种表示方法** 1.三种表示方法的关系

逻辑函数三种表示方法之间的关系

■ 三种表示法存在——对应的关系

#### 逻辑函数相等的概念

#### 两个函数:

$$F = f(A_1, A_2, ...A_n)$$
  
 $G = g(A_1, A_2, ...A_n)$ 

对任一组 A1.A2..An 的取值 F=G. 则两函数相等。

怎样判断 (三个条件是一样的):

- 标准表达式相同
- 直值表相同
- 卡诺图相同

#### 0-1律

$$A \cdot 0 = 0 \quad A + 1 = 1$$

$$A \cdot 1 = A \quad A + 0 = A$$

$$\mathbf{P} \cdot 0 = 0 \quad 0 + 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1 \quad 1 + 1 = 1$$

$$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$$

#### 重叠律

$$A \cdot A = A \quad A + A = A$$

#### 互补律

$$\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = 0 \quad \mathbf{A} + \overline{\mathbf{A}} = 1$$

### 对合律

$$\overline{\overline{A}} = A$$

#### 交换律

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

#### 结合律

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- (A + B) + C = A + (B + C)

#### 分配律

- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

#### 德·摩根定理

$$\overline{X_1 + X_2 + \cdots + X_n} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \cdots \cdot \overline{X_n}$$

$$\overline{X_1 \cdot X_2 \cdot \cdot \cdot \cdot X_n} = \overline{X_1} + \overline{X_2} \cdot \cdot \cdot + \overline{X_n}$$

证明过程、留在讨论环节。

#### 对偶定理

对偶函数的概念:

对于任意一个逻辑函数, 做如下处理:

- 把式中的运算符"·"换成"+", "+"换成"·"
- 常量"0"换成"1", "1"换成"0"

得到新函数式为原函数式 F 的对偶式 F' 也称对偶函数

#### 对偶定理

例如:

$$F = \overline{AB + \overline{AC}} + 1 \cdot B \tag{1}$$

的对偶式为:

$$F' = \overline{(A+B) \cdot (\overline{A}+C)} \cdot (0+B)$$
 (2)

#### 对偶定理

$$F'(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_n, 0, 1, +, \cdot) = \overline{F}(\overline{\mathbf{x}_1}, \overline{\mathbf{x}_2} \cdots \overline{\mathbf{x}_n}, 0, 1, +, \cdot)$$
(3)

- 一个函数的对偶函数, 可通过原函数的所有变量取反, 再对整个函数求反而得到。
  - 推理 1:

$$(F')' = F \tag{4}$$

■ 推理 2:

$$F = G, F' = G' \tag{5}$$

#### 展开定理

$$F(x_1, \cdots x_i, \cdots x_n) = x_i \cdot F(x_1, \cdots 1, \cdots x_n) + \overline{x_i} \cdot F(x_1, \cdots 0, \cdots x_n)$$
 (6)

$$F(x_1, \cdots x_i, \cdots x_n) = [x_i + F(x_1, \cdots 0, \cdots x_n)] \cdot [\overline{x_i} + F(x_1, \cdots 1, \cdots x_n)]$$
 (7)

## 4. 逻辑代数的常用公式

#### 吸收律

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$$

$$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$$

$$A + A \cdot B = A$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

$$A + \overline{A} \cdot B = A + B$$

$$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$$

## 4. 逻辑代数的常用公式

### 包含律

$$ightharpoonup AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

## 5. 逻辑函数的化简

#### 最简式定义

- 该式中乘积项最少
- 每个乘积项再不能用变量更少的乘积项代替

#### 代数法化简

■ 并项: 利用  $AB + A\overline{B} = A$  将两项并为一项,且消去一个变量 B

■ 消项:利用 A + AB = A 消去多余的项 AB

■ 消元: 利用  $A + \overline{A}B = A + B$  消去多余变量  $\overline{A}$ 

■ 配项: 利用  $AB + \overline{AC} + BC = AB + \overline{AC}$  和互补律、重叠律先增添项,再消去 多余项 BC

$$F = AC + \overline{A}D + \overline{B}D + B\overline{C}$$

$$= AC + B\overline{C} + D(\overline{A} + \overline{B})$$

$$= AC + B\overline{C} + D\overline{A}\overline{B}$$

$$= AC + B\overline{C} + AB + D\overline{A}\overline{B}$$

$$= AC + B\overline{C} + AB + D$$

$$= AC + B\overline{C} + D$$

$$= AC + B\overline{C} + D$$
(8)

$$F = AB + \overline{A}\overline{C} + B\overline{C}$$

$$= AB + \overline{A}\overline{C} + B\overline{C}(A + \overline{A})$$

$$= AB + \overline{A}\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

$$= AB + \overline{A}\overline{C}$$
(9)

$$F = \overline{AB + \overline{C}} + A\overline{C} + B$$

$$= (\overline{A} + \overline{B}) \cdot C + A\overline{C} + B$$

$$= \overline{AC} + \overline{BC} + A\overline{C} + B$$

$$= B + C + \overline{AC} + A\overline{C}$$

$$= B + C + A\overline{C}$$

$$= B + C + A$$
(10)

$$F = AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{C}$$

$$= A\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{C}$$

$$= \overline{C} + \overline{A}BC$$

$$= \overline{C} + \overline{A}B$$
(11)

$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$$

$$= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$$

$$= \overline{A}(\overline{B} + B\overline{C}) + A\overline{B}\overline{C}$$

$$= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$$

$$= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C} + B\overline{C}$$

$$= \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C} + B\overline{C}$$
(12)

#### 代数法化简的问题

- 对各种公式、定理熟练掌握
- 化简过程可能很冗长,不能出错
- 无法判断最后的表达式是否最简

#### 人们迫切的需要一个新的方法进行化简

#### 卡诺图化简

有一个逻辑函数: $F(A,B,C) = AB + \overline{A}C$ , 画出它的卡诺图。 先表示成最小项表达式:

$$F = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C = \sum (1, 3, 6, 7)$$

	$\overline{B} \overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$		1	3	
$\boldsymbol{A}$			7	6

#### 图中的一小格对应真值表中的一行,即对应一个最小项

Α	В	С	F
0	0	0	$m_0$
0	0	1	$m_1$
0	1	0	$m_2$
0	1	1	$m_3$
1	0	0	$m_4$
1	0	1	$m_5$
1	1	0	$m_6$
1	1	1	$m_7$

	$\overline{B}\overline{C}$	$\overline{B}C$	ВС	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	0	1	3	2
A	4	5	7	6

	$\overline{B}\overline{C}$	$\overline{B}C$	ВС	ВC
$\overline{A}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
A	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$

#### 请大家听我的,把这两个卡诺图记住

	$\overline{B}\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	ВC
$\overline{A}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
A	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$

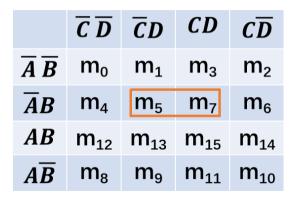
	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$\overline{A}B$	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
AB	$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{15}$	$m_{14}$
$A\overline{B}$	$m_8$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{10}$

#### 卡诺图化简

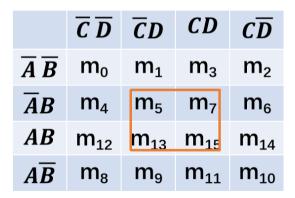
卡诺图化简函数规则:

几何相邻的  $2^{i}$ (i = 1、2、3...n) 个小格可合并在一起构成正方形或矩形圈,消去i 个变量,而用含 (n - i) 个变量的积项标注该圈。

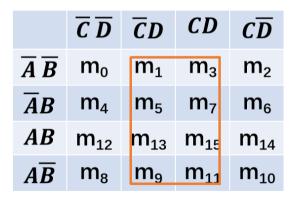
#### **ABD**



BD



D



#### 需要思考的几个问题

- 变量的位置有没有关系?
- 最小项的编号为什么这么奇怪?
- ▶ 为什么圈起来之后,能够化简?

	$\overline{B}\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	В¯С
$\overline{A}$	0	1	3	2
A	4	5	7	6

# 3.课堂练习

## 1. 问题

#### 请画出下列函数的真值表和卡诺图

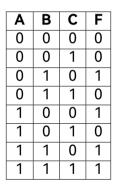
$$F = \sum (2, 4, 6, 7)$$

### 请证明分配律

$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$$

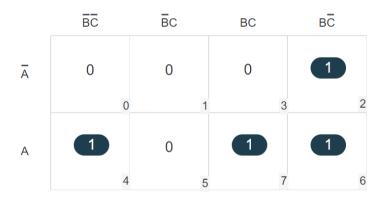
## 2. 答案

### 真值表



## 2. 答案

## 卡诺图



# 4.课堂讨论

## 1. 问题

#### 证明德摩根定理。

使用数学归纳法证明德摩根定理。

# 5.课堂总结

## 1. 课堂总结

□ 笔记

现在可以总结自己的笔记,提炼大纲,回顾课程。

● 总结

还可以将课程的总结、心得记录在总结区。

# 6.作业

## 1. 题目

#### 证明下述函数为自对偶函数(4分)

- 注意
- 1、先写出正确的对偶函数
- 2、要有步骤,不能直接得出结论



# 问答环节