学号：________ 姓名：________ 专业年级：________ 授课教师：________ 考场教室号：________ 座号：________

装 订 线

中国海洋大学全日制本科课程期末考试试卷

2020 年 春 季学期 考试科目： 概率统计 学院： 数学科学学院

试卷类型： A 卷 命题人： 概率统计教研组 审核人： 赵文章

考试说明：本课程为闭卷考试，共 3 页，除考场规定的必需用品外还可携带的文具有________。

题号	一	二	三	总分
得分				

一、 填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 已知事件 A 和 B 互斥，$P(B)=0.3, P(A-B)=0.2$，则 $P(A\cup B)=$ ____________.

2. 三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，则三人中至少有一人能破译此密码的概率是________.

3. 设打车等待时间 X (分钟) 在 $(0,10)$ 上服从均匀分布，某人周一至周五均打车上班，则至少有一天等待时间大于 5 分钟的概率为 ________.

4. 二维正态分布的参数形式为 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^{\ 2},\sigma_2^{\ 2},\rho)$，若随机变量 $(X,Y)\sim N(1,2,4,1,0)$，则 $2X-3Y$ 服从________分布（要求分布包括参数）.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的样本，则 C = ________时，$Y=\dfrac{C(X_1+X_2)}{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)^{1/2}}$ 服从 t 分布.

6. 设某产品的某项质量指标服从正态分布，已知其标准差是 σ。从中随机抽取 n 名，$\bar{X}$是样本均值，则该质量指标平均值的置信水平为 95% 的双侧置信区间为__________.

二、单项选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 下列说法不正确的是（ ）.

A. 设 X 是连续型随机变量，a 是一个实数，则 $P\{X=a\}=0$;

B. 设连续型随机变量 X 的概率密度为$f(x)$，则$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=1$

C. 设随机变量 X 的分布函数是$F(x)$，则 $F(x)$是连续的;

D. 设离散型随机变量 X 的分布律是$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots$，则$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$;

2. 若协方差$Cov(X,Y)=0$，以下哪个选项不是其充分且必要条件（　　）.

(A) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$　　(B) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

(C) $E(XY)=E(X)E(Y)$　　(D) $\rho_{XY}=0$

3. 随机变量X和Y的相关系数$\rho_{XY} = 0.5$, $Z=-2X+1$，则$\rho_{YZ} =$（　　）.

A. -0.5　　B. 0.5　　C. -1　　D. 1

4. 已知某班概率统计课程成绩的平均分是 80，方差是 16，利用切比雪夫不等式估算, 随机抽取一名学生其成绩及格 (在 60 到 100 分之间) 的概率至少是（　　）.

A. $\frac{16}{25}$;　　B. $\frac{24}{25}$;　　C. $\frac{15}{16}$;　　D. $\frac{3}{4}$

5. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为总体 $X \sim N(0,1)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则有（　　）.

(A) $\overline{X} \sim N(0,1)$;　　(B) $n\overline{X} \sim N(0,1)$;

(C) $\overline{X}/S \sim t(n-1)$;　　(D) $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$

对正态总体的数学期望μ进行假设检验，如果在显著性水平$a=0.05$下，接受H_0: $\mu=\mu_0$，那么在显著性水平$a=0.01$下，下列结论中正确的是( ).

A. 必接受H_0

B. 可能接受，也可能拒绝H_0

C. 必拒绝H_0

D. 不接受，也不拒绝H_0

题目有问题？点我反馈

答案解析

A

6. 假设检验中，关于显著性检验，下列说法错误的是（　　）.

A. 显著性检验的基本思想是“小概率原则”，即小概率事件在一次实验中是几乎不可能发生.

B. 显著性水平 α 是该检验犯第一类错误的最大概率，即“拒真”概率.

C. 如果在$\alpha = 0.01$ 下拒绝H_0，那么在$\alpha = 0.05$下一定拒绝 H_0. .

D. 如果在$\alpha = 0.05$ 下拒绝H_0，那么在$\alpha = 0.01$下一定拒绝 H_0.

直接由a的概率意义可以断定正确选项是A.

事实上，$a=P\{否定H_0|H_0成立\}$，即在H_0成立的条件下否定H_0的概率，因此a越小，否定H_0的概率越小，接受H_0的概率越大，因此在同样容量，检验统计量及否定域形式下，所以在$a=0.05$下接受H_0，那么在$a=0.01$下必接受H_0. 故本题选A.

三、 计算题(共 6 题，共 64 分, 解答写在答题纸上)

1. (8 分) 对感染某肺炎病毒的人进行检测显示阳性的概率是 0.95，而对未感染者进行检测显示阳性的概率为 0.01。某群体中感染该肺炎病毒的概率是 1%,

4' (1) 若在该群体中随机选择一人进行检测，则结果显示阳性的概率是多少？

4' (2) 若一人的检测结果为阳性，则此人确实感染该肺炎病毒的概率是多少？

2. (16 分) 设二维随机变量(X,Y)在单位圆上服从均匀分布，具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, x^2+y^2\le 1\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$$

4′ (1) 求$P\{X>Y\}$

4′ (2) 求(X,Y)分别关于X和Y的边缘概率密度；

4′ (3) X与Y是否相互独立，为什么？

4′ (4) 求条件概率密度$f_{X|Y}(x\mid y)$和$P\left\{X<\dfrac{1}{2}\middle|Y=0\right\}$

3. (8 分)保险公司有 10000 个投保人，每个投保人索赔金额的数学期望为 200 元，标准差为 800 元，利用中心极限定理求索赔总金额少于 1800 000 的概率 (答案可含有$\Phi(\cdot)$，其中$\Phi(x)$是标准正态分布的分布函数) 。

4. (12 分)设总体X服从均匀分布$U(\theta,2\theta)$，其中θ为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体X的简单随机样本。求：

4′ (1) 求θ的矩估计$\hat{\theta}_1$，

4′ (2) 判断$\hat{\theta}_1$是否为无偏估计，说明原因.

4′ (2) 求θ的最大似然估计$\hat{\theta}_2$.

5. (12 分)设某种稀有化工原料的市场需求量为随机变量 X（吨），已知 X 在区间[20，40]上服从均匀分布，设每销售一吨可挣得 3 万元；若滞销囤积于仓库，则每吨亏损保养费 1 万元。

8′ (1)(8 分)若以$a\in[20,40]$表示准备生产的该原料的数量，求利润的期望值(表示为a的函数).

4′ (2)(4 分)要使利润的期望值最大，应生产多少该原料？

8′ 6. (8 分)某地区年龄在 20-30 岁之间的男性的体重服从正态分布，从中随机地抽取 36 位男性，算得平均体重 68 (kg)，样本标准差 10。问在显著水平 $\alpha=0.05$下，是否可认为此地 20-30 岁之间的男性的平均体重为 70 ？并给出检验过程。（附：$t_{0.025}(35)=2.030$, $t_{0.05}(35)=1.690$；$t_{0.025}(36)=2.028$, $t_{0.05}(36)=1.688$）

一. 1. A, B 互斥 $\Leftrightarrow AB=\varnothing \Rightarrow P(AB)=0$.

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)=0.2$, $P(B)=0.3$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.5$

2. $P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$ $\cancel{P(\bar{A})P(\bar{B}}$

$\overset{\text{独立性}}{=\!=}\ 1-P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})$

$=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$.

3. $X\sim U(0,10)$. $P\{X>5\}=\frac{1}{2}$ $\overset{\text{记为}}{=\!=}$ p:一天等待时间大于5分钟

A:至少有一天等待时间大于5分钟

$P(A)=1-P(\bar{A})=1-(1-p)^5=1-\frac{1}{2^5}=\frac{31}{32}$

4. $\because (X,Y)\sim N(1,2,4,1,0)$

$\therefore$ X与Y独立,且 $X\sim N(1,4)$, $Y\sim N(2,1)$

根据线性可加性,有: $2X-3Y\sim N(-4,25)$

5. $Z_1=X_1+X_2\sim N(0,2)$. $Z_2=X_3^2+X_4^2+X_5^2\sim\chi^2(3)$

且 Z_1与Z_2 相互独立

$$\Rightarrow \frac{Z_1/\sqrt{2}}{\sqrt{Z_2/3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot(X_1+X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}\sim t(3)$$

$$\Rightarrow C=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

6. 正态分布，方差 σ^2 已知．μ 的置信区间构造

$N(\mu, \sigma^2)$．

枢轴变量：$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$．

$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

区间：$\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{0.025},\ \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{0.025}\right)$．

二. 1. C，2. B. 3. A.

4. Chebyshev 不等式：$P\{|X-E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$

已知 $E(X)=80$，$D(X)=16$.

$P\{|X-80| \leq 20\} = P\{60 \leq X \leq 100\}$

$\geq 1 - \dfrac{16}{20^2} = \dfrac{384}{400} = \dfrac{96}{100} = \dfrac{24}{25}$. (B).

5. $\dfrac{\overline{X}}{1/\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cdot \overline{X} \sim N(0,1)$

(D).

$\dfrac{\overline{X}}{S_x/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$. $\dfrac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} = (n-1)S_x^2 \sim \chi^2(n-1)$.

6. (D).

三. 1. 感染者 A. 阳性：B.

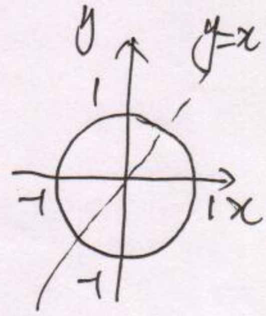
已知 $P(A)=0.01$，$P(B|A)=0.95$. $P(B|\overline{A})=0.01$.

(1) $P(B) = P(A)\cdot P(B|A) + P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A}) = 0.0194.$

$= 0.01 \times 0.95 + 0.99 \times 0.01 = 1.94 \times 0.01$

(2) $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)} = \dfrac{0.01\times 0.95}{0.0194} = \dfrac{95}{194}$

2\. (1) $P\{X<Y\} = \iint\limits_{x<y} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}$



(2) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$$= \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy = \frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

同理，$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{1-y^2}, & -1<y<1. \\ 0, & \text{others}. \end{cases}$

(3) $\because$ $f_X(x)\cdot f_Y(y) \neq f(x,y)$，$\therefore$ 不独立.

(4). 固定 $y\in(-1,1)$. 当 $Y=y$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2}<x<\sqrt{1-y^2} \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

$$P\{X<\tfrac{1}{2} \mid Y=0\} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_{X|Y}(x|0)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\,dx = \frac{3}{4}.$$

3. Sol: 设 X_k: 第k个人保险金额.

已知. $E(X_k)=200 \stackrel{记}{=} \mu$. $\sqrt{D(X_k)}=800 \stackrel{记}{=} \sigma$.

总金额 $X=\sum_{k=1}^{10000} X_k$, $E(X)=10000\mu$.

可认为 X_k 相互独立, 同分布, 则 $D(X)=10000\sigma^2$.

由独立同分布中心极限定理:

$$\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \stackrel{近似}{\sim} N(0,1)$$

即: $$\frac{X-10000\times 200}{100\times 800} \stackrel{近似}{\sim} N(0,1)$$

$$P\{X<1800000\}=P\left\{\frac{X-2000000}{80000}<\frac{-200000}{80000}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(-\frac{20}{8}\right)=1-\Phi(2.5)$$

4. (1). $E(X)=\frac{3}{2}\theta$. ~~令 $E(X)=\bar{X}$, 得 $\hat{\theta}_{矩}=\frac{2}{3}\bar{X}$~~.

令 $E(X)=\bar{X}$. 得 $\hat{\theta}_{矩}=\frac{2}{3}\bar{X}$.

(2) 易知 $E(\bar{X})=E(X)=\frac{3}{2}\theta$.

故 $E(\hat{\theta}_{矩})=\frac{2}{3}E(\bar{X})=\theta$. 所以 $\hat{\theta}_{矩}$ 是无偏的.

(3) 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是一组样本值, 则似然函数可写为:

$$L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & \theta<x_1,\cdots,x_n<2\theta\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

显然，$L(\theta)$ 只在非零段上是 θ 的单调递减函数。

因此最大值点为 $\frac{1}{2}\max\limits_{1\le i\le n} x_i$。

即：$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{1}{2}\cdot\max\limits_{1\le i\le n} X_i$。

5. Sol：设 Y 是利润，Y 依赖于进货量 a 及需求量 X。

$$Y=\begin{cases} a\le X: & 3a \\ a>X: & 3X-(a-X)=4X-a \end{cases} \quad \underline{\text{记为}}\ g(X)$$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f(x)dx$，其中 $f(x)$ 是 X 的概率密度。

即：$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{20}, & 20<x<40 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$

$$=\int_{20}^{a}(4x-a)\cdot\frac{1}{20}dx+\int_{a}^{40}3a\cdot\frac{1}{20}dx$$

$$=\frac{1}{20}\cdot(2x^2-ax)\Big|_{20}^{a}+\frac{3a}{20}\cdot(40-a)=-\frac{1}{10}a^2+7a-40.$$

$E(Y)$ 的最大值点：$a=-\dfrac{7}{2\times\left(-\frac{1}{10}\right)}=35$

6. 已知通道 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

显著性水平 $\alpha=0.05$，正态总体均值 μ 的双边检验：

$\begin{cases} H_0: \mu=70 \\ H_1: \mu\ne 70 \end{cases}$，且 σ 未知，采用 t 检验法。

检验统计量：$T=\dfrac{\bar{X}-70}{S/\sqrt{n}}$。

拒绝域：$|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.03$；代入观测值

$|t|=|-1.2|=1.2$

不在拒绝域，接受 H_0。