中国海洋大学
OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

数字逻辑 03 逻辑代数

逻辑代数常用公式及化简

杨永全

计算机科学与技术学院

目录

1.课程目标

1. 目标

1. 掌握逻辑函数三种常见表现形式之间的关系
2. 掌握逻辑代数的基本公式
3. 掌握逻辑代数的主要定理
4. 掌握逻辑代数的常用公式
5. 掌握逻辑函数的代数化简方法
6. 熟练掌握逻辑函数的卡诺图化简方法

2.课程内容

逻辑函数三种表示方法之间的关系

- 真值表：逻辑函数的本质（较为复杂）
- 逻辑表达式：逻辑函数的数学描述（便于化简、运算）
- 卡诺图：逻辑函数的图形表示（复杂，直观，可用于化简）

逻辑函数三种表示方法之间的关系

- 三种表示法存在一一对应的关系

逻辑函数相等的概念

两个函数：

$F = f(A_1, A_2, ...A_n)$

$G = g(A_1, A_2, ...A_n)$

对任一组 A1,A2..An 的取值 F=G，则两函数相等。

怎样判断（三个条件是一样的）：

- 标准表达式相同
- 真值表相同
- 卡诺图相同

2. 逻辑代数基本公式

0–1 律

- $A \cdot 0 = 0 \quad A + 1 = 1$
- $A \cdot 1 = A \quad A + 0 = A$
- $0 \cdot 0 = 0 \quad 0 + 0 = 0$
- $1 \cdot 1 = 1 \quad 1 + 1 = 1$
- $0 + 1 = 1 + 0 = 1$
- $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$

2. 逻辑代数基本公式

重叠律

$A \cdot A = A \quad A + A = A$

互补律

$A \cdot \overline{A} = 0 \quad A + \overline{A} = 1$

2. 逻辑代数基本公式

对合律

- $\overline{\overline{A}} = A$

交换律

- $A + B = B + A$
- $A \cdot B = B \cdot A$

2. 逻辑代数基本公式

结合律

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$

分配律

- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

3. 逻辑代数的主要定理

德·摩根定理

- $\overline{X_1 + X_2 + \cdots + X_n} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdots \overline{X_n}$
- $\overline{X_1 \cdot X_2 \cdots \cdot X_n} = \overline{X_1} + \overline{X_2} \cdots + \overline{X_n}$

证明过程，留在讨论环节。

3. 逻辑代数的主要定理

对偶定理

对偶函数的概念:
对于任意一个逻辑函数，做如下处理:

- 把式中的运算符“$\cdot$”换成“$+$”, “$+$”换成“$\cdot$”
- 常量“0”换成“1”, “1”换成“0”

得到新函数式为原函数式 F 的对偶式 F'，也称对偶函数

对偶定理

例如:

$$F = \overline{AB + \overline{A}C} + 1 \cdot B \tag{1}$$

的对偶式为:

$$F' = \overline{(A + B) \cdot (\overline{A} + C)} \cdot (0 + B) \tag{2}$$

3. 逻辑代数的主要定理

对偶定理

$$F'(x_1, x_2 \cdots x_n, 0, 1, +, \cdot) = \overline{F}(\overline{x_1}, \overline{x_2} \cdots \overline{x_n}, 0, 1, +, \cdot) \tag{3}$$

一个函数的对偶函数，可通过原函数的所有变量取反，再对整个函数求反而得到。

- 推理 1:

$$(F')' = F \tag{4}$$

- 推理 2:

$$F = G, F' = G' \tag{5}$$

3. 逻辑代数的主要定理

展开定理

$$F(x_1, \cdots x_i, \cdots x_n) = x_i \cdot F(x_1, \cdots 1, \cdots x_n) + \overline{x_i} \cdot F(x_1, \cdots 0, \cdots x_n) \tag{6}$$

$$F(x_1, \cdots x_i, \cdots x_n) = [x_i + F(x_1, \cdots 0, \cdots x_n)] \cdot [\overline{x_i} + F(x_1, \cdots 1, \cdots x_n)] \tag{7}$$

4. 逻辑代数的常用公式

吸收律

- $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$
- $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$
- $A + A \cdot B = A$
- $A \cdot (A + B) = A$
- $A + \overline{A} \cdot B = A + B$
- $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

4. 逻辑代数的常用公式

包含律

$$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

5. 逻辑函数的化简

最简式定义

- 该式中乘积项最少
- 每个乘积项再不能用变量更少的乘积项代替

代数法化简

- 并项：利用 $AB+A\overline{B}=A$ 将两项并为一项，且消去一个变量 B
- 消项：利用 $A+AB=A$ 消去多余的项 AB
- 消元：利用 $A+\overline{A}B=A+B$ 消去多余变量 $\overline{A}$
- 配项：利用 $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$ 和互补律、重叠律先增添项，再消去多余项 BC

例 1

$$
\begin{aligned}
F &= AC + \overline{A}D + \overline{B}D + B\overline{C} \\
&= AC + B\overline{C} + D(\overline{A} + \overline{B}) \\
&= AC + B\overline{C} + D\overline{AB} \\
&= AC + B\overline{C} + AB + D\overline{AB} \\
&= AC + B\overline{C} + AB + D \\
&= AC + B\overline{C} + D
\end{aligned}
\tag{8}
$$

例 2

$$
\begin{aligned}
F &= AB + \overline{A}\,\overline{C} + B\overline{C} \\
&= AB + \overline{A}\,\overline{C} + B\overline{C}(A + \overline{A}) \\
&= AB + \overline{A}\,\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} \\
&= AB + \overline{A}\,\overline{C}
\end{aligned} \tag{9}
$$

例 3

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{AB+\overline{C}} + A\overline{C} + B \\
&= (\overline{A}+\overline{B}) \cdot C + A\overline{C} + B \\
&= \overline{A}C + \overline{B}C + A\overline{C} + B \\
&= B + C + \overline{A}C + A\overline{C} \\
&= B + C + A\overline{C} \\
&= B + C + A
\end{aligned}
\tag{10}
$$

例 4

$$
\begin{aligned}
F &= AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C} \\
&= A\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{C} \\
&= \overline{C} + \overline{A}BC \\
&= \overline{C} + \overline{A}B
\end{aligned}
\tag{11}
$$

例 5

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} \\
&= \overline{A}(\overline{B} + B\overline{C}) + A\overline{B}\,\overline{C} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}
\end{aligned} \tag{12}
$$

代数法化简的问题

- 对各种公式、定理熟练掌握
- 化简过程可能很冗长，不能出错
- 无法判断最后的表达式是否最简

人们迫切的需要一个新的方法进行化简

卡诺图化简

有一个逻辑函数:$F(A,B,C)=AB+\overline{A}C$，画出它的卡诺图。
先表示成最小项表达式:
$F=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}\overline{B}C=\sum(1,3,6,7)$

	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$		1	3	
A			7	6

图中的一小格对应真值表中的一行，即对应一个最小项

A	B	C	F
0	0	0	m_0
0	0	1	m_1
0	1	0	m_2
0	1	1	m_3
1	0	0	m_4
1	0	1	m_5
1	1	0	m_6
1	1	1	m_7

	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	0	1	3	2
A	4	5	7	6

	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	m_0	m_1	m_3	m_2
A	m_4	m_5	m_7	m_6

请大家听我的，把这两个卡诺图记住

	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	m_0	m_1	m_3	m_2
A	m_4	m_5	m_7	m_6

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	m_0	m_1	m_3	m_2
$\bar{A}B$	m_4	m_5	m_7	m_6
AB	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
$A\bar{B}$	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

卡诺图化简

卡诺图化简函数规则：
几何相邻的 2^i(i = 1、2、3...n) 个小格可合并在一起构成正方形或矩形圈，消去 i 个变量，而用含（n - i）个变量的积项标注该圈。

$\overline{A}BD$

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	m_0	m_1	m_3	m_2
$\overline{A}B$	m_4	m_5	m_7	m_6
AB	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
$A\overline{B}$	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

5. 逻辑函数的化简 2.卡诺图化简

BD

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	m_0	m_1	m_3	m_2
$\overline{A}B$	m_4	m_5	m_7	m_6
AB	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
$A\overline{B}$	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

D

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	m_0	m_1	m_3	m_2
$\overline{A}B$	m_4	m_5	m_7	m_6
AB	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
$A\overline{B}$	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

需要思考的几个问题

- 变量的位置有没有关系?
- 最小项的编号为什么这么奇怪?
- 为什么圈起来之后，能够化简?

	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	0	1	3	2
A	4	5	7	6

3.课堂练习

1. 问题

请画出下列函数的真值表和卡诺图

- $F = \sum(2, 4, 6, 7)$

请证明分配律

- $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

2. 答案

真值表

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

2. 答案

卡诺图

	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	0 (0)	0 (1)	0 (3)	1 (2)
A	1 (4)	0 (5)	1 (7)	1 (6)

4.课堂讨论

1. 问题

证明德摩根定理。

使用数学归纳法证明德摩根定理。

5.课堂总结

1. 课堂总结

笔记

现在可以总结自己的笔记，提炼大纲，回顾课程。

总结

还可以将课程的总结、心得记录在总结区。

6.作业

1. 题目

证明下述函数为自对偶函数（4 分）

- $F = C\overline{(A\overline{B} + \overline{A}B)} + \overline{C}(A\overline{B} + \overline{A}B)$

注意

1、先写出正确的对偶函数
2、要有步骤，不能直接得出结论

问答环节