学号：________ 姓名：________ 专业年级：________ 授课教师：________ 考场教室号：________ 座号：________

装 订 线

中国海洋大学全日制本科课程期末考试试卷

2019 年 秋 季学期　考试科目：概率统计　学院：数学科学学院

试卷类型：A 卷　命题人：概率统计教研组　审核人：赵元章

考试说明：本课程为闭卷考试，共 3 页，除考场规定的必需用品外还可携带的文具有________。

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、填空题(共6题，每题3分，共18分)

1. 已知 $P(B)=\frac{4}{5}, P(B\overline{C})=\frac{4}{5}$，则 $P(\overline{B}\cup\overline{C})=$ ________.

2. 随机变量$X\sim b(10,0.2)$，则$E[(X+3)^2]=$________.

3. 袋中有 50 只产品，其中 5 件是次品，现从袋中不放回地抽取两次，每次取一件，则第二次取到次品的概率是________.

4. 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$，则$P\{X<Y\}=$________.

5. 设某地区高中女生的身高服从正态分布，从该地区高中女生中随机抽取 n 名，$\bar{X}$和S分别是样本平均值和样本标准差，则该地区高中女生的平均身高的置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间为________.

6. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且其方差为$\sigma^2>0$。令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则$Cov(X_1,Y)=$________。

二、单项选择题(共5题，每题3分，共15分)

1. 下列说法不正确的是（　　）

A. 设离散型随机变量 X 的分布律是$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$，则一定有$\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k<1$;

B. 设 X 是连续型随机变量，a 是一个实数，则 $P\{X=a\}=0$;

C. 设随机变量 X 的分布函数是$F(x)$，a 是一个实数，则 $P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$;

D. 设连续型随机变量 X 的概率密度为$f(x)$，则$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=1$.

2. 随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，设 Y 表示对 X 进行 3 次独立重复观察事件“$X<0.5$”出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$（　　）

A. $\dfrac{9}{64}$　　B. $\dfrac{27}{64}$　　C. $\dfrac{1}{64}$　　D. $\dfrac{3}{64}$

3. 随机变量X和Y的方差分别为$D(X)=4, D(Y)=9$，相关系数$\rho_{XY}=-0.5$，则$D(2X-Y)=$(　　)

A. 13　　B. 37　　C. 31　　D. 19

4. 设$X_1, X_2, \cdots X_n$为来自总体 X 的一个简单随机样本，设$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，要使

$C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是σ^2的无偏估计，则常数 $C=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2n}$　　B. $\dfrac{1}{n}$　　C. $\dfrac{1}{2(n-1)}$　　D. $\dfrac{1}{n-1}$

5. 假设检验中，设显著性水平为α，下列说法正确的是（　　）

A. α表示H_0为假，但接受原假设 H_0 的概率.

B. α表示H_0为真，但拒绝原假设 H_0 的概率.

C. 如果在$\alpha=0.05$ 下拒绝H_0，那么在$\alpha=0.01$一定拒绝 H_0.

D. 如果在$\alpha=0.05$ 下拒绝H_0，那么在$\alpha=0.01$一定接受 H_0.

三、 计算题(共 6 题，共 62 分，解答写在答题纸上)

1. （12 分）设甲盒中有 1 个白球 2 个黑球，乙盒中有 3 个白球 2 个黑球，丙盒中有 4 个白球 1 个黑球，现在有一抽奖活动，抽奖规则是：采取掷一次骰子决定选盒，出现 1 点或 2 点或 3 点时选甲盒，出现 4 点或 5 点时选乙盒，出现 6 点选丙盒，然后在选出的盒中随机摸出 1 球，如果摸到白球就中奖。设某人只有一次抽奖机会，求：

（1）此人中奖的概率；

（2）已知此人中奖，求他是从甲盒中取到白球的概率.

2. （16 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（1）求(X,Y)分别关于X和Y的边缘概率密度；

（2）X与Y是否相互独立，为什么？

（3）求$P\{10Y>9X^2\}$；

座号：________ 考场教室号：________ 授课教师：________ 专业年级：________ 姓名：________ 学号：________

装--------订--------线

（4）分别求$f_{Y|X}(y|x)$和$P\left\{Y<\frac{1}{4}\middle|X=\frac{1}{2}\right\}$.

3. （10 分）某箱装有 100 件产品，其中一等品 80 件，二等品 10 件，三等品 10 件。现在随机从箱中抽取一件，令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{抽到}\, i \text{ 等品} \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad i=1,2,3$$

（1）求 X_1和X_2 的联合分布 （2）求 X_1和X_2 的相关系数.

4. （12 分）设总体X的概率分布律为

$$P\{X=x\}=\binom{m}{x}p^x(1-p)^{m-x}, x=0,1,2,\cdots m.$$

其中 m 为已知数，$0<p<1$，p为未知参数，$X_1,X_2,\cdots X_n$为来自总体 X 的一个简单随机样本，

（1）求p的矩估计量$\hat{p}_1$；

（2）求p的最大似然估计量$\hat{p}_2$.

5. （6 分）一学校有 1000 名学生，每名学生都以 80%的概率去图书馆上自习，利用中心极限定理求图书馆不少于 820 名学生上自习的概率是多少？(答案可以带着$\Phi(\cdot)$的函数符号，其中$\Phi(x)$是标准正态分布的分布函数。)

6. （6 分）设某产品的某项质量指标服从正态分布，已知它的标准差$\sigma=150$，现从一批产品中随机抽取了 36 只，测得该项指标的平均值为 1650，问在显著性水平 0.05 下，能否认为这批产品的该项指标均值为 1600？并给出检验过程。附：$z_{0.05}=1.645, z_{0.025}=1.96$.

四、 证明题(共 1 题，共 5 分, 解答写在答题纸上)

设$X_1,X_2,\cdots X_n$为来自$N(0,1)$的一个简单随机样本，样本均值和样本方差分别为

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$$

证明

$$n(\bar{X})^2+(n-1)S^2\sim\chi^2(n).$$

学号：________ 姓名：________ 专业年级：________ 授课教师：________ 考场教室号：________ 座号：________

装 订 线

中国海洋大学全日制本科课程考试答题纸（2019 年秋季学期期末考试）

一. 1. $P(\bar{B}\cup\bar{C}) = 1 - P(BC) = 1$.

$P(BC) + P(B\bar{C}) = P(B) \Rightarrow P(BC) = 0$

2. $X \sim b(10, 0.2)$, $E(X) = 2$, $D(X) = 1.6$

$E[(X+3)^2] = D(X+3) + [E(X+3)]^2$

$= D(X) + (E(X)+3)^2 = 1.6 + 25 = 26.6$

3. $\frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

4. X与Y 独立，故 X−Y 也服从正态分布

$X - Y \sim N(0, 2\sigma^2)$.

$P\{X<Y\} = P\{X-Y<0\} = \frac{1}{2}$.

5. $\left(\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

6. $Cov\left(X_1, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sigma^2$

二. 1. (A)

2. $P\{X<0.5\} = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\,dx = x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.

易知 $Y \sim b(3, \frac{1}{4})$

$P\{Y=2\} = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$

(A).

3. $D(2X-Y) = 4D(X) + D(Y) - 4\,\underline{Cov(X,Y)}$ $\quad \rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$

$= 16 + 9 + 2\times 2\times 3$

$= 37.$

(B)

4. 要求 $E\left(C\cdot\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right) = \sigma^2$. 求 C.

$E(X_{i+1}-X_i)^2 = D(X_{i+1}-X_i) + \left(E(X_{i+1}-X_i)\right)^2$

$= 2\sigma^2 + 0 = 2\sigma^2$

所以 $C = \dfrac{\sigma^2}{(n-1)\cdot(2\sigma^2)} = \dfrac{1}{2(n-1)}$. (C).

5. $P_{H_0真}(拒绝H_0) \le \alpha$.

三. 1. Sol: 设选中甲、乙、丙分别为 B_1, B_2, B_3.

中奖记为 A.

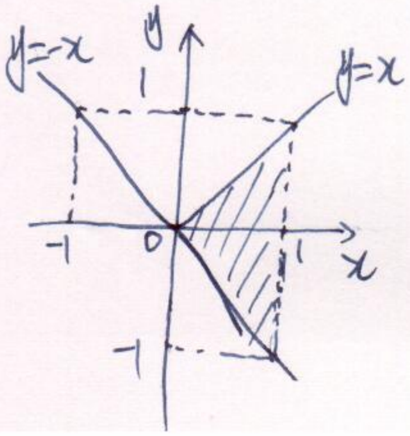
① $P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P(A|B_k)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{4}{5} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$

② $P(B_1|A) = \dfrac{P(AB_1)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$

2. ① $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$, $\quad -\infty < x < +\infty$

$= \begin{cases} 0<x<1: & \int_{-x}^{x} 1\,dy = 2x. \\ 其他: & 0. \end{cases}$



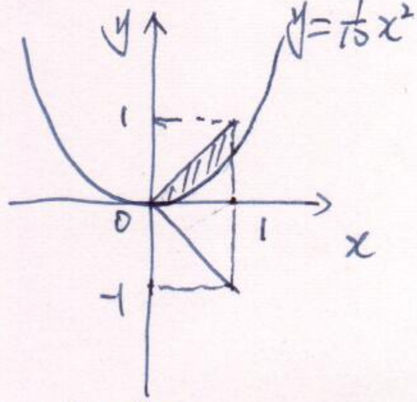
同理得 $f_Y(y)=\begin{cases} 0\le y<1: & \int_y^1 1\,dx = 1-y \\ -1<y<0: & \int_{-y}^1 1\,dx = 1+y \\ 其他: & 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-|y|, & -1<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

② 易知 $f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$. 故不独立.

③ $P\{10Y>9X^2\}=P\{Y>\frac{9}{10}X^2\}$

$$=\iint\limits_{y>\frac{9}{10}x^2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\substack{y>\frac{9}{10}x^2 \\ |y|<x<1}} 1\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{\frac{9}{10}x^2}^{x} dy = \frac{1}{5}$$



④ 固定 $0<x<1$，在 $X=x$ 条件下，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad -\infty<y<+\infty$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & -x<y<x \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$P\{Y<\tfrac{1}{4}\mid X=\tfrac{1}{2}\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{4}} f_{Y|X}(y|\tfrac{1}{2})\,dy$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}\,dy=\frac{3}{4}.$$

3. $P\{X_1=1\}=\frac{8}{10}$, $P\{X_2=1\}=\frac{1}{10}$, $P\{X_3=1\}=\frac{1}{10}$.

① $P\{X_1=0, X_2=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{10}$

其他三个概率用边缘分布律做减法即得.

$X_2 \backslash X_1$	0	1	
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$
1	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
	$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}$	

② $Cov(X_1, X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)\cdot E(X_2)$

其中: $E(X_1)=\frac{8}{10}$, $E(X_2)=\frac{1}{10}$. $E(X_1\cdot X_2)=0$.

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\cdot\sqrt{D(X_2)}}=\frac{0-\frac{8}{100}}{\frac{4}{10}\times\frac{3}{10}}=-\frac{2}{3}$$

其中 $D(X_1)=E(X_1^2)-(E(X_1))^2=\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{16}{100}$

$D(X_2)=\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{100}$

4. ① $E(X)=mp$.

令 $E(X)=\overline{X}$, 解得 $\hat{p}_{矩}=\frac{1}{m}\cdot\overline{X}$.

② 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是一组样本值, 其中 $x_i=0,1,\cdots,m$.

似然函数:

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}\cdot p^{x_i}\cdot(1-p)^{m-x_i}$$

取对数:

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}\{\ln C_m^{x_i}+x_i\cdot\ln p+(m-x_i)\cdot\ln(1-p)\}$$

令 $\frac{d\ln L(p)}{dp}=0$, 即: $\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(m-x_i)}{1-p}=0$.

解得 MLE 估计值 $\hat{p}_{\cancel{MLE}}=\frac{1}{m}\overline{x}$, 所以极大似然估计量为 $\hat{p}_{MLE}=\frac{1}{m}\overline{X}$

5. 设 X：上自习的人数.

易知 $X \sim b(1000, 0.8)$

由中心极限定理知 $\frac{X-800}{\sqrt{160}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$

$$P\{X \geq 820\} = P\left\{\frac{X-800}{\sqrt{160}} \geq \frac{20}{\sqrt{160}}\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{160}}\right)$$

6. 提假设：$\begin{cases} H_0: \mu = 1600 \\ H_1: \mu \neq 1600 \end{cases}$ 双边检验.

已知 $\alpha = 0.05$，$\sigma = 150$，$n = 36$.

Z 检验法

检验统计量：$Z = \frac{\bar{X} - 1600}{\sigma / \sqrt{n}}$

拒绝域：$|z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$.

代入样本值：$z = \frac{1650 - 1600}{150 / \sqrt{36}} = 2$

$\because$ $2 > 1.96$ $\therefore$ 落入拒绝域. 拒绝 H_0.

四. proof. 由题(3)知 ~~$\bar X \sim N($~~ $\frac{\bar X}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

$$\frac{(n-1)S^2}{1^2} \sim \chi^2(n-1)$$

且 S^2 与 $\bar X$ 独立.

$\therefore \left(\frac{\bar X}{1/\sqrt{n}}\right)^2 = n\cdot(\bar X)^2 \sim \chi^2(1)$.

~~再~~根据 χ^2分布可加性，得：

$$n(\bar X)^2 + (n-1)S^2 \sim \chi^2(n).$$

证毕.