第一章　　习题课

1．给定文法G=({S,B,C,D,E},{0,1},P,S)，其中P：

S→ABC，AB→0AD，AB→1AE，AB→ε，D0→0D，
D1→1D，E0→0E，E1→1E，C→ε，DC→B0C，
EC→B1C，0B→B0，1B→B1

试写出句子01100110的派生过程。

解：S⇒ABC⇒0ADC⇒0AB0C⇒01AE0C⇒01A0EC
⇒01A0B1C⇒01AB01C⇒011AE01C⇒011A0E1C⇒
011A01EC⇒011A01B1C⇒011A0B11C⇒011AB011C
⇒0110AD011C⇒0110A0D11C⇒0110A01D1C⇒
0110A011DC⇒0110A011B0C⇒0110A01B10C⇒
0110A0B110C⇒0110AB0110C⇒01100110C⇒01100110

2．设计下列各文法G，使得它们分别是：

（1）G是个上下文无关文法，且

$L(G)=\{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geqslant 1\}$。

（2）G是个正规文法，且

$L(G)=\{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geqslant 1\}$。

（3）G是个上下文无关文法，且

$L(G)=\{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^+ \}$。其中$w^R$是w的逆转，例如w=001, 则$w^R$=100.

解：设计一个文法G要验证：

凡是符合要求的句子G都能产生出来；

G产生出来的所有句子都是符合要求的。

(1) G=({S,A,B,C},{a,b,c},P,S)

P: S→ABC , A→aA|a, B→bB|b,C→cC|c

(2) $G=(\{S,A,B,C\},\{a,b,c\},P,S)$

$P: S \to aA,\ A \to aA \mid bB,\ B \to bB \mid cC,\ C \to cC \mid \varepsilon$

(3) $G=(\{S\},\{0,1\},P,S)$

$P: S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 00 \mid 11$

第二章　　习题

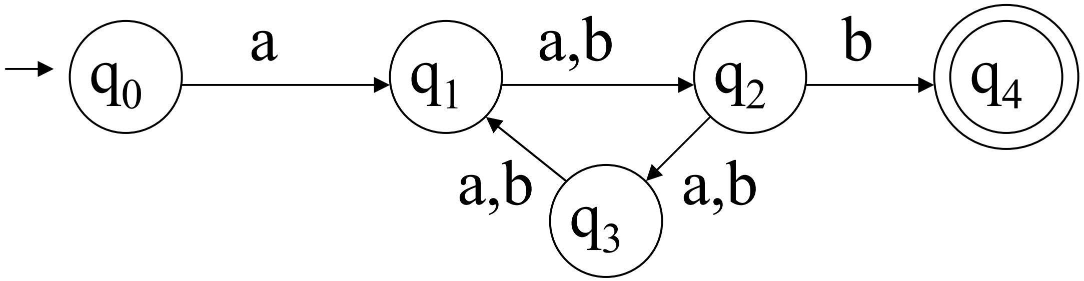
1．设计一个有限自动机(FA) M，使得T(M)中的每个句子w同时满足下面三个条件：

1) w∈{a,b,}*；

2) |w|是3的整数倍；

3) w以a开头，以b结尾。

解：

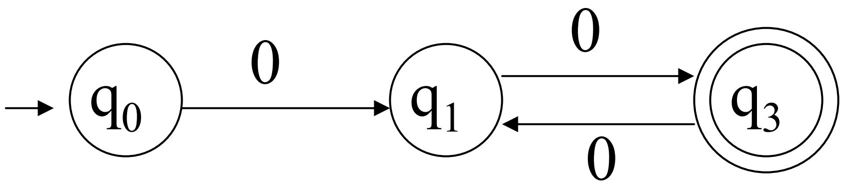


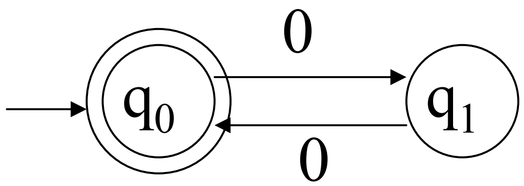
2．设计二个FA M_1和M_2，分别满足

$T(M_1)=\{0^{2i} \mid i$是自然数$\}$

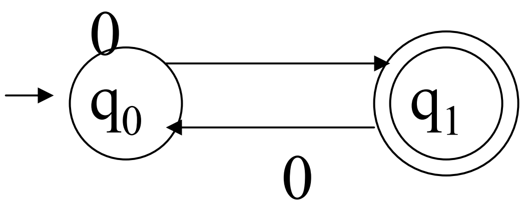
$T(M_2)=\{0^{2i+1} \mid i=0,1,2,3,4,\ldots\}$

解： M_1：





M_2：



3. 给定NFA M_1 =({p,q,r,s},{0,1}, δ ,p,{s})，如下表所示。构造一个DFA M_2，使得$T(M_1)=T(M_2)$ 。

δ	0	1
p	{p,q}	{p}
q	{r }	{r}
r	{s}	Φ
s	{s}	{s}

解：令 $M_2=(K',\Sigma, \delta', q_0',F')$, 其中

K'⊆2^K，K'中的元素是由K的子集$\{q_1,q_2,\ldots,q_i\}$构成，但是要把子集$\{q_1,q_2,\ldots,q_i\}$作为的一个状态看待，因此把此子集写成$[q_1,q_2,\ldots,q_i]$。

$q_0'=[q_0]$,

$F'=\{[q_1,q_2,\ldots,q_i] \mid [q_1,q_2,\ldots,q_i]\in K'$ 且 $\{q_1,q_2,\ldots,q_i\}\cap F\neq\Phi\}$

δ '：$K'\times\Sigma\rightarrow K'$，对$\forall[q_1,q_2,\ldots,q_i]\in K', \forall a\in\Sigma$，有

$$\delta'([q_1,q_2,\ldots,q_i],a)=[p_1,p_2,\ldots,p_j]$$

当且仅当

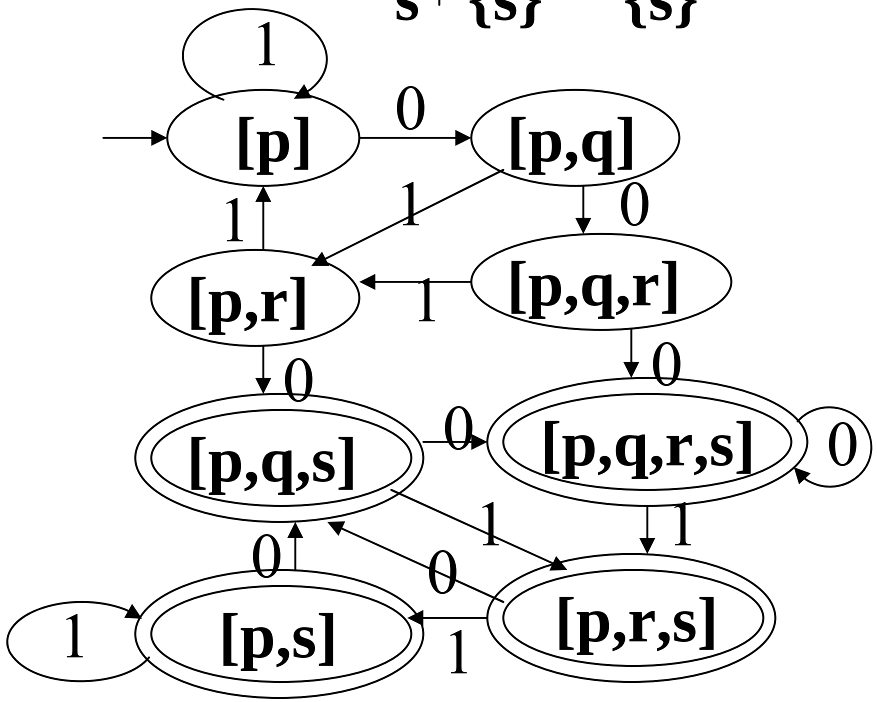
$$\delta(\{q_1,q_2,\ldots,q_i\},a)=\{p_1,p_2,\ldots,p_j\}$$

q_0'=[p] , K'和F'以后确定。

δ '：

	0	1
[p]	[p,q]	[p]
[p,q]	[p,q,r]	[p,r]
[p,r]	[p,q,s]	[p]
[p,q,r]	[p,q,r,s]	[p,r]
[p,q,s]	[p,q,r,s]	[p,r,s]
[p,r,s]	[p,q,s]	[p,s]
[p,s]	[p,q,s]	[p,s]
[p,q,r,s]	[p,q,r,s]	[p,r,s]

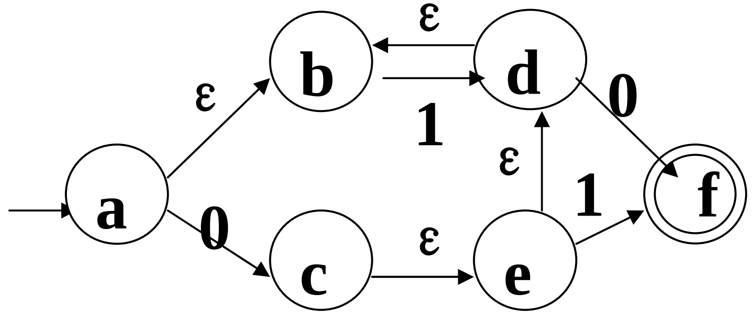
δ	0	1
p	**{p,q}**	**{p}**
q	**{r }**	**{r}**
r	**{s}**	Φ
s	**{s}**	**{s}**



K'={[p],[p,q],[p,r],[p,s],[p,q,r],[p,q,s],[p,r,s],[p,q,r,s]}

F' ={ [p,s],[p,q,s],[p,r,s],[p,q,r,s]}

4.将下面的ε-NFA M等价变换成NFA M'。



解：M'=(K, Σ, δ',q_0,F')，q_0是M的开始状态，其中

$$F' = \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{如果}\ \varepsilon\text{—CLOUSURE}(q_0) \cap F \neq \Phi \\ F & \text{否则} \end{cases}$$

δ'：对任何q∈K,任何a∈Σ，δ'(q,a)= $\hat{\delta}$(q,a)。

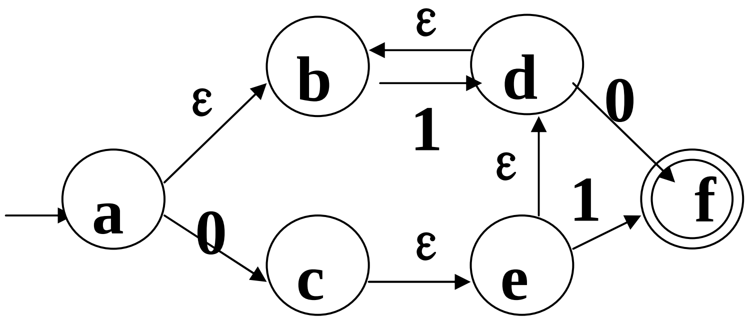
公式(1)：对于∀q∈K,，$\hat{\delta}$ (q, ε)= ε-CLOSURE(q)

公式(2)： 对于∀q∈K, ∀w∈Σ^*, ∀a∈Σ,

$$\hat{\delta}(q,wa) = \varepsilon\text{-CLOSURE}(\delta(\hat{\delta}(q,w),a))$$

因为f$\notin$CLOSURE(a)={a,b},

所以F’=F={f}



δ ’： $\forall$q$\in$K,任何a$\in\Sigma$,

δ ’(q,a)= $\hat{\delta}$(q,a) 。

在计算$\hat{\delta}$(q,a)时，要将a理解成**a路径**！

例如δ ’(a,0)= $\hat{\delta}$(a,0)={c,e,d,b} 。

δ ’:

	0	1
a	{c,e,d,b}	{d,b}
b	Φ	{d,b}
c	{f}	{f,d,b}
d	{f}	{d,b}
e	{f}	{f,d,b}
f	Φ	Φ

5. 化简正规表达式 **a(ε+aa)*(ε+a)b+b+ϕ(ab*+b)*。**

解： 上式＝**a(aa)*(ε+a)b+b**

其中**(aa)*(ε+a)**代表集合：

{ε,aa,aaaa,aaaaaa,…}{ε,a}

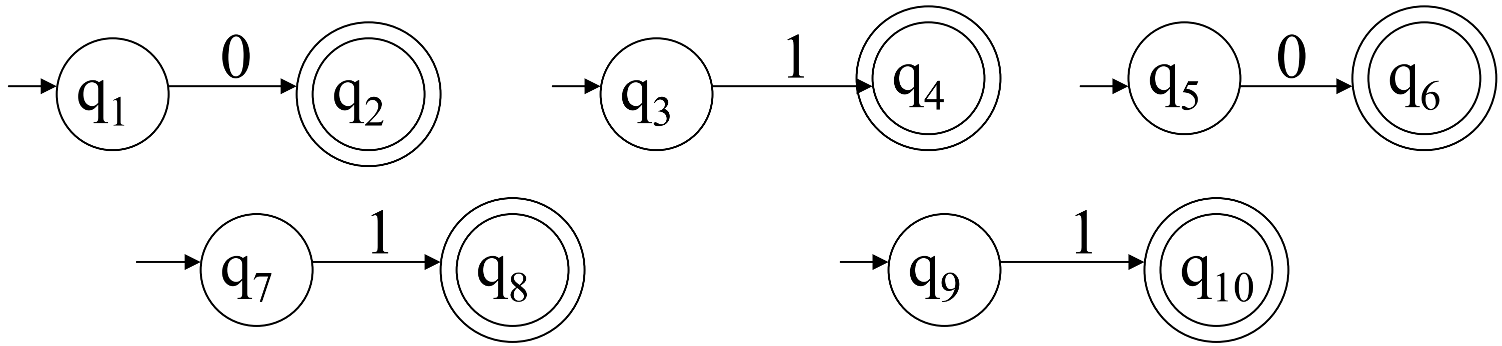
= {ε,aa,aaaa,aaaaaa,…}∪{a,aaa,aaaaa,…}

={ε,a,aa,aaa,aaaa,aaaaa,aaaaaa,…}={a}*

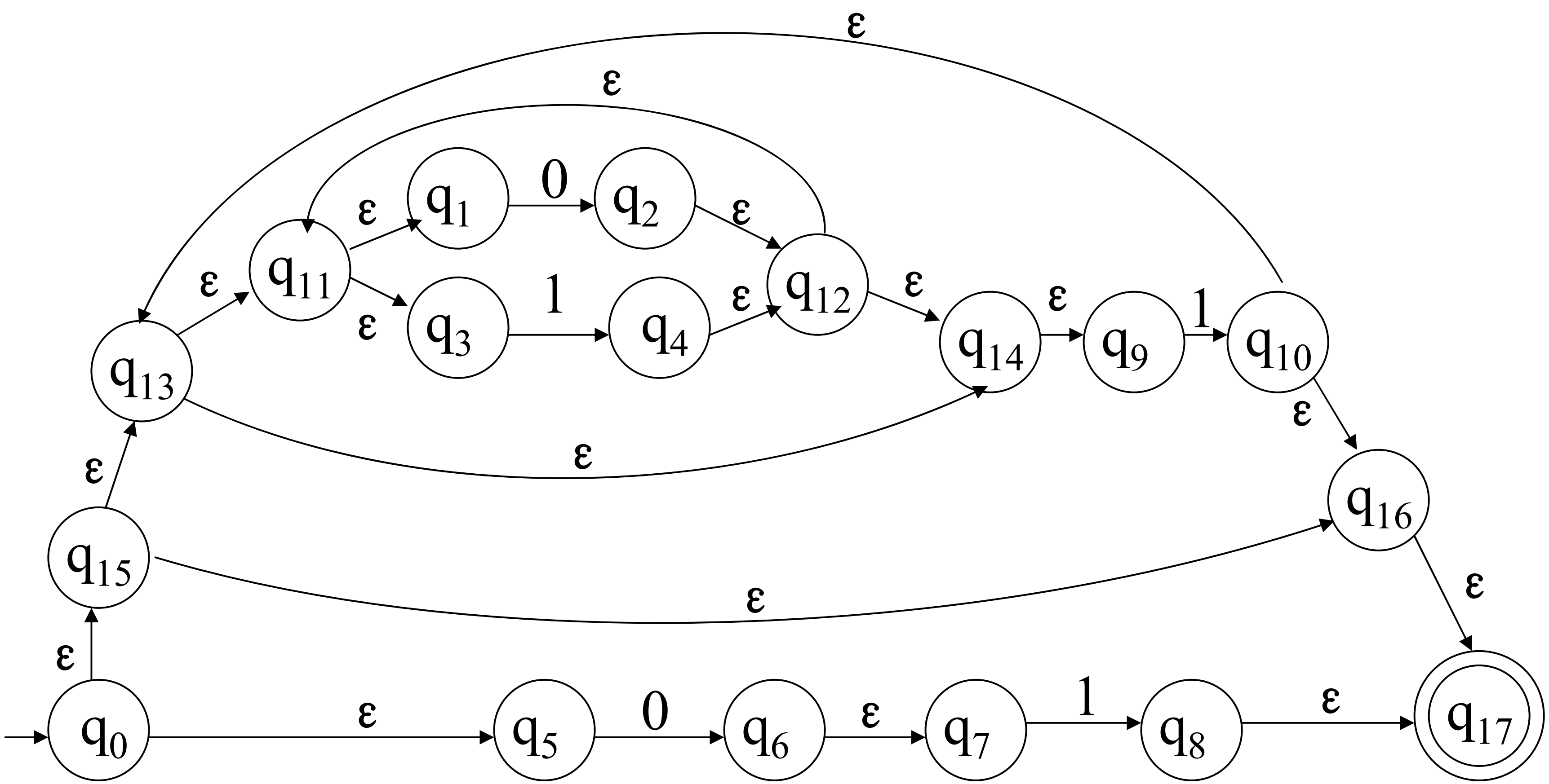
于是上式＝**aa*b+b=a^+b+b=(a^++ε)b= a*b**

6．构造一个FA M，使得T(M)的正规表达式为 01+((0+1)*1)*。

解：1.分解表达式，找出基本单元：**0,1,01,1**。设计接收这些基本单元的自动机如下：

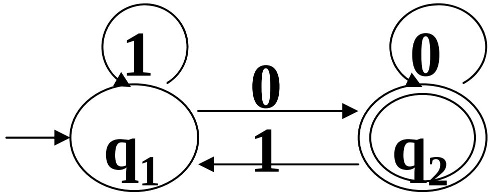


2.组装：（按照优先权从高到低） 01+((0+1)*1)*



7．给定FA M如下图所示，求它所接收的语言T(M)的正规表达式。

解：



$$r_{ij}^{0}=\begin{cases}a_1+a_2+\ldots+a_m & i\neq j\\ a_1+a_2+\ldots+a_m+\varepsilon & i=j\end{cases}\quad \delta(q_i,a_k)=q_j \quad (1\leq k\leq m)$$

$$r_{ij}^{k}=r_{ik}^{k-1}(r_{kk}^{k-1})^{*}r_{kj}^{k-1}+r_{ij}^{k-1}$$

$r_{11}^{0}=1+\varepsilon$　　$r_{12}^{0}=0$　　$r_{21}^{0}=1$　　$r_{22}^{0}=0+\varepsilon$

因为M接收的语言T(M)的正规表达式r为

r＝$r_{12}^{2}=r_{12}^{1}(r_{22}^{1})^{*}r_{22}^{1}+r_{12}^{1}$

所以只求r_{12}^{1}和r_{22}^{1}即可。

$$r_{11}^{0} = 1 + \varepsilon \qquad r_{12}^{0} = 0 \qquad r_{21}^{0} = 1 \qquad r_{22}^{0} = 0 + \varepsilon$$

$$r_{12}^{1} = r_{11}^{0}(r_{11}^{0})^{*} r_{12}^{0} + r_{12}^{0} = (r_{11}^{0})^{+} r_{12}^{0} + r_{12}^{0} = ((r_{11}^{0})^{+} + \varepsilon) r_{12}^{0}$$

$$= (r_{11}^{0})^{*} r_{12}^{0} = (1 + \varepsilon)^{*} 0 = 1^{*} 0$$

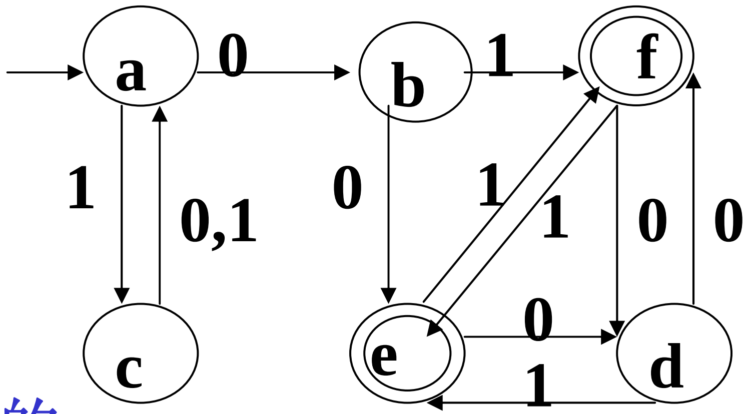
$$r_{22}^{1} = r_{21}^{0}(r_{11}^{0})^{*} r_{12}^{0} + r_{22}^{0} = 1(1 + \varepsilon)^{*} 0 + 0 + \varepsilon$$

$$= 11^{*} 0 + 0 + \varepsilon = 1^{+} 0 + 0 + \varepsilon = (1^{+} + \varepsilon) 0 + \varepsilon = 1^{*} 0 + \varepsilon$$

$$\mathrm{r} = r_{12}^{2} = r_{12}^{1}(r_{22}^{1})^{*} r_{22}^{1} + r_{12}^{1} = r_{12}^{1}(r_{22}^{1})^{+} + r_{12}^{1} = r_{12}^{1}((r_{22}^{1})^{+} + \varepsilon)$$

$$= r_{12}^{1}(r_{22}^{1})^{*} = 1^{*} 0(1^{*} 0 + \varepsilon)^{*} = 1^{*} 0(1^{*} 0)^{*} = (1^{*} 0)^{+}$$

8.将下面有限自动机简化(要求有简化过程)。



解：一.定义K上等价关系≡

给定DFA $M=(K,\Sigma,\delta,q_0,F)$，

$\forall p,q\in K$,

$p\equiv q \Leftrightarrow$ 对$\forall x\in\Sigma^*$, 有

$\delta(p,x)\in F\leftrightarrow\delta(q,x)\in F$

如果$p\equiv q$ 也称p与q是不可区分的。

二. 商集K/≡

三. ≡的逆关系≢

$p\not\equiv q \Leftrightarrow \exists x(x\in\Sigma^*\wedge\neg(\delta(p,x)\in F\leftrightarrow\delta(q,x)\in F))$

$\Leftrightarrow\exists x(x\in\Sigma^*\wedge$

$((\delta(p,x)\in F\wedge\delta(q,x)\notin F)\vee(\delta(p,x)\notin F\wedge\delta(q,x)\in F)))$

$\Leftrightarrow\exists x(x\in\Sigma^*$，使得$\delta(p,x)$与$\delta(q,x)$恰有一个在F中)

如果$p\not\equiv q$, 称p与q是可区分的。判断$p\not\equiv q$是比较容易的。

4．判断可区分状态对的算法

引理2-1 设$M=(K,\Sigma,\delta,q_0,F)$是DFA，则状态对(p,q)是可区分的(即$p\not\equiv q$)，当且仅当在下面算法中(p,q)格写上×。

begin

1．**for** $p\in F, q\in K-F$, **do** 给(p,q)格写×；

2．**for** $F\times F$或$(K-F)\times(K-F)$中每个状态对(p,q) ($p\neq q$)，**do**

3．**if** $\exists a\in\Sigma$，使得格($\delta(p,a),\delta(q,a)$)内已经写上×，**then**

  begin

4． 给(p,q)格写×；

5． 如果刚刚写上×的格内有先前写入的状态对，此状态对的格同时也写入×。反复执行5, 直到写入×的格内没有先前写入的状态对为止；

  end

 else /** 格($\delta(p,a),\delta(q,a)$)内无× **/

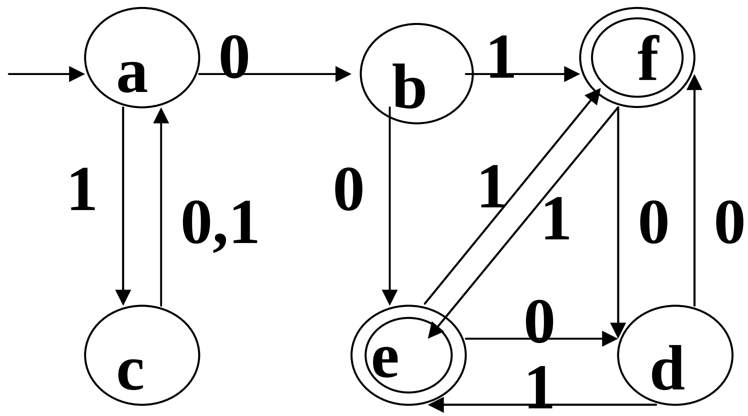
6．**for** 每个$a\in\Sigma$, **do**

7．把(p,q)写入格($\delta(p,a),\delta(q,a)$)内，除非$\delta(p,a)=\delta(q,a)$。

end

执行此算法的结果用一个表表示，实际上，执行此算法的过程就是向这个表内写入“×”的过程。

b	×				
c	×	×			
d	×	?	×		
e	×	×	×	×	
f	×	×	×	×	(b,d)
	a	b	c	d	e



(a,b):

	0	1
a	b	
b	e	

(a,c):

	0	1
a	b	
c	a	

(a,d):

	0	1
a	b	
d	f	

(b,c):

	0	1
b	e	
c	a	

(b,d):

	0	1
b	e	f
d	f	e

(c,d):

	0	1
c	a	
d	f	

(e,f):

	0	1
e	d	f
f	d	e

得：**b≡d, e≡f ,**

a≡a ,c≡c

于是 $K/\equiv\{\{a\},\{b,d\},\{c\},\{e,f\}\}$，

五．构造简化的有限自动机

定理2-5.1 给定DFA $M=(K,\Sigma,\delta,q_0,F)$，可根据引理2-1中的算法构造出除去不可达状态的具有更少状态的DFA M'，使得$T(M')=T(M)$。

证明： 先对M用引理2-1中的算法求出$K/\equiv$。再构造M'：

$M'=(K',\Sigma,\delta',[q_0],F')$，其中

$K'=\{[q] \mid [q]\in K/\equiv$且在M中q是从$q_0$可达的状态$\}$

$F'=\{[q] \mid q\in F\}$

δ'：对任何$[q]\in K'$，任何$a\in\Sigma$，

$$\delta'([q],a)=[\delta(q,a)]$$

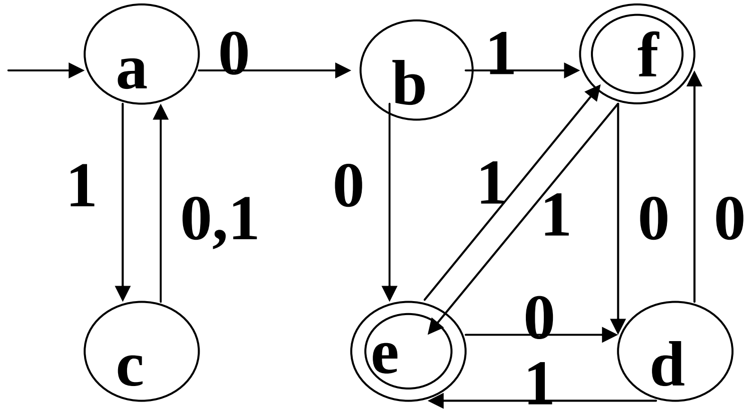
K/≡{{a},{b,d},{c},{e,f}}={[a],[b],[c],[e]}，([b]=[b,d],[e]={e,f})

K’= {[a],[b],[c],[e]}　F’={[e]}

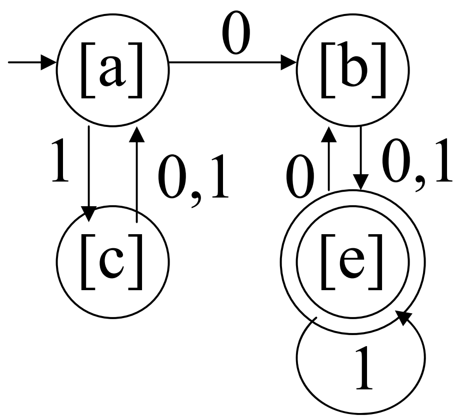
M’=(K’, ∑ , δ ’,[a], F’)

=({[a],[b],[c],[e]},{0,1}, δ ’,[a],{[e]})

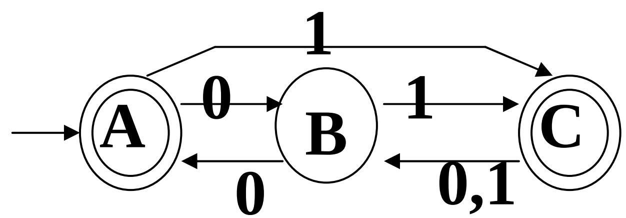
δ ’([q],a)=[δ (q,a)]



δ ’:	0	1
[a]	[b]	[c]
[b]	[e]	[e]
[c]	[a]	[a]
[e]	[b]	[e]



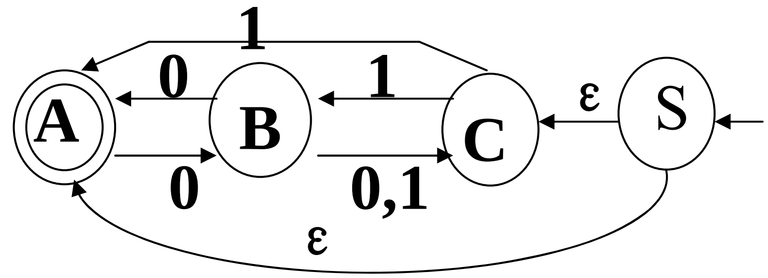
9．给定DFA M如图所示。求一个左线性文法G，使得L(G)=T(M)。



解：有两种方法。

方法1

1.先将M逆转成M’：



2.根据M’构造右线性文法G’：

P={q→ap| δ (q,a)=p}∪{q→a| δ (q,a)∈F}。

S→A|C| ε

A→0B

B→0A|0C|1C|0

C→1A|1B|1

3.将G’逆转成左线性文法G:

S→A|C| ε

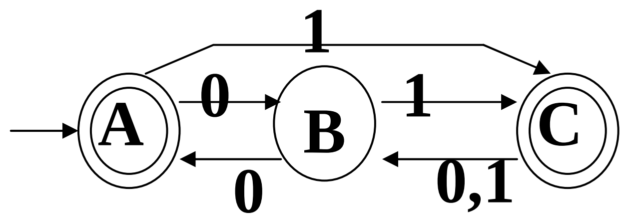
A→B0

B→A0|C0|C1|0

C→A1|B1|1

方法2

1.先根据M构造右线性文法G’:



$A \to 0B|1C|1$ (其中A是开始变元)

$B \to 0A|1C|0|1$

$C \to 0B|1B$

2.再将G’直接变成左线性文法G: 根据定理:

(1) $S \to \alpha$, 当且仅当 $S \to \alpha \in P$;

(2) $A_i \to \alpha$, 当且仅当 $S \to \alpha A_i \in P$;

(3) $A_i \to A_j \alpha$, 当且仅当 $A_j \to \alpha A_i \in P$;

(4) $S \to A_j \alpha$, 当且仅当 $A_j \to \alpha \in P$。

(1)由$A \to 1$ 得: $A \to 1$

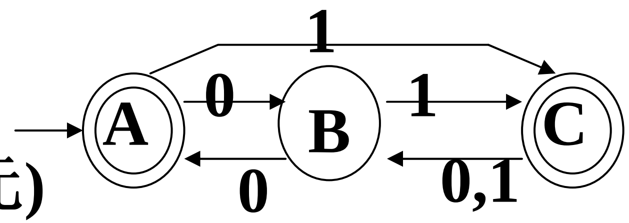
(2) 由$A \to 0B$ 得: $B \to 0$ 由$A \to 1C$ 得: $C \to 1$

(3)由$B \to 0A$ 得:$A \to B0$ 由$B \to 1C$ 得: $C \to B1$

由$C \to 0B$ 得:$B \to C0$ 由$C \to 1B$ 得: $B \to C1$

(4)由 $B \to 0$ 得: $A \to B0$ 由$B \to 1$ 得: $A \to B1$

方法2



1.先根据M构造右线性文法G’:

A→0B|1C|1 | ε (其中A是开始变元)

B→0A|1C|0|1

C→0B|1B

因开始变元A出现在产生式右侧，故引入新的开始变元S，

S→A (其中S是开始变元)

A→0B|1C|1| ε

B→0A|1C|0|1

C→0B|1B

2.再将G'直接变成左线性文法G：根据定理：

(1) $S \to \alpha$， 当且仅当 $S \to \alpha \in P$；

(2) $A_i \to \alpha$， 当且仅当 $S \to \alpha A_i \in P$；

(3) $A_i \to A_j \alpha$， 当且仅当 $A_j \to \alpha A_i \in P$；

(4) $S \to A_j \alpha$， 当且仅当 $A_j \to \alpha \in P$。

(2) $S \to A$ 得: $A \to \varepsilon$

(3) 由$A \to 0B$ 得: $B \to A0$ 由$A \to 1C$ 得: $C \to A1$

由$B \to 0A$ 得: $A \to B0$ 由$B \to 1C$ 得: $C \to B1$

由$C \to 0B$ 得: $B \to C0$ 由$C \to 1B$ 得: $B \to C1$

(4) 由$A \to 1$ 得: $S \to A1$ 由$A \to \varepsilon$ 得: $S \to A$

由 $B \to 0$ 得: $S \to B0$ 由$B \to 1$ 得: $S \to B1$

整理得左线性文法**G:**

S→A1|B0 |B1|A

A →B0| ε

B→A0| C0 | C1

C→A1|B1

表面上看与方法**1**得结果略有些不同

S→A|C| ε

A→B0

B→A0|C0|C1|0

C→A1|B1|1

10. 首先构造一个右线性文法G，使得

$L(G)=\{a^i b^j | i,j \geqslant 0\} \cup \{c^k | k \geqslant 0\}$

再构造一个有限自动机M，使得T(M)=L(G)。

解：令G=({S,A,B,C},{a,b,c},P,S)

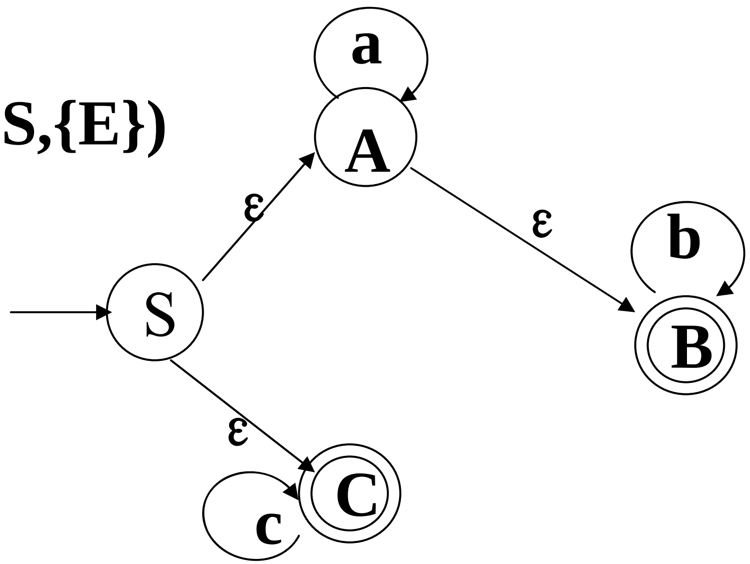
P: $S \to A|C|\varepsilon$

$A \to aA|B|\varepsilon$

$B \to bB|b|\varepsilon$

$C \to cC|c|\varepsilon$

令M＝({S,A,B,C},{a,b,c}, δ ,S,{E})



11．给定右线性文法G=({S,B,C,D},{0,1}, P, S)，其中P：

$S \to B \mid C$，　　　　$B \to 0B \mid 1B \mid 011$,

试求一个FA M，使得 T(M)=L(G)。

$C \to 0D \mid 1C \mid \varepsilon$,　$D \to 0C \mid 1D$

解：此题与第10题类似。

要将G变成简单右线性文法，唯一要处理的产生式是 $B \to 011$，将它变成：

$B \to 0F$, $F \to 1G$, $G \to 1$

12. 证明$L=\{a^i|i$是个素数$\}$不是正规集。

证明:

(1) 假设L是正规集。

(2)令n是L满足正规集泵作用引理常数。

(3)取$z=a^m$， $m\geqslant n$ 且m是个素数。$|z|=m\geqslant n$, 根据正规集的泵作用引理，可将z写成 $z=uvw$ 形式，其中$|uv|\leqslant n$, $|v|\geqslant 1$, 且对任何$i\geqslant 0$ 有 $uv^iw\in L$。

(4)令$u=a^{n1}$, $v=a^{n2}$, $w=a^{n3}$, 于是$|uv|=n_1+n_2\leqslant n$, $|v|=n_2\geqslant 1$,

$n_1+n_2+n_3=m$, $z=uvw=a^{n1+n2+n3}=a^m$,

$uv^iw=a^{n1+in2+n3}=a^{(n1+n2+n3)+(i-1)n2}=a^{m+(i-1)n2}$

取$i=m+1$,则

$uv^{m+1}w=a^{m+(m+1-1)n2}=a^{m+mn2}=a^{m(1+n2)}$

由于$n_2\geqslant 1$，所以$1+n_2\geqslant 2$, 而$m\geqslant 2$, 所以$m(1+n_2)$不是素数，故 $uv^{m+1}w\notin L$，产生矛盾。所以L不是正规集。

第三章　习题

1． 给定CFG $G=(\{S,A,B,C\},\{a,b,c\},P,S)$，其中，

P：$S \to A|B$, $A \to Ab|bS|C|b$, $B \to AB|Ba$,

$C \to AS \mid b$,

去掉G中的无用符号和单一生成式。

解：定义：给定CFG $G=(V_N,V_T,P,S)$，如果在G中存在派生$S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$，其中$w \in V_T^*$，$X \in V_N \cup V_T$，则称符号X是有用的，否则X是无用的。

利用两个引理，去掉无用符号。

注意：一定是先应用引理3-2.1, 后应用引理3-3.2 !!!

引理3-2.1 给定CFG $G=(V_N, V_T, P, S)$，且$L(G)\neq\Phi$，可以找到一个与G等价的CFG $G'=(V_N', V_T, P', S)$，使得每个$A\in V_N'$，都有$w\in V_T^*$，且在G′中有$A\Rightarrow^* w$。

证明：1）求V_N'的算法：

```
begin
(1) OLDV_N := Φ
(2) NEWV_N :={A|A→w∈P 且w∈V_T*}
(3) While OLDV_N ≠ NEWV_N do
    begin
(4)   OLDV_N:=NEWV_N
(5)   NEWV_N:= OLDV_N ∪{A|A→α∈P,且α∈(V_T ∪ OLDV_N)*}
    end
(6) V_N' :=NEWV_N,
end
```

引理3-2.2 给定CFG $G=(V_N,V_T,P,S)$，可以找到一个与G等价的CFG G'，$G'=(V_N',V_T',P',S)$，使得每个$X\in(V_N'\cup V_T')$，都有$\alpha,\beta\in(V_N'\cup V_T')^*$，且在$G'$中有派生$S\Rightarrow^*\alpha X\beta$。

证明：1．执行下面迭代算法求V_N'和V_T'。

1）置初值：$V_N':=\{S\}$，$V_T':=\Phi$；

2）如果$A\in V_N'$，在P中又有产生式

$A\rightarrow\alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_m$，

则可以将$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$中的所有变元加到$V_N'$中，将$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$中的所有终极符加到中$V_T'$中。重复2)。

3）若没有新的符号可加入到V_N'、V_T'中，算法停止。

最后得到V_N'、V_T'。

P：S→A|B，A→Ab|bS|C|b，B→AB|Ba， C→AS｜b,

对**G**应用引理**3-2.1**，执行上述算法，得到的结果如下表所示。

循环次数i	初值	1	2	3
OLD V_N	Φ	{A,C}	{A,C,S}	
NEW V_N	{A,C}	{A,C,S}	{A,C,S}	

最后得**G′CFG G’=({S,A,C},{a,b,c},P’,S),**

其中 **P’：S→A, A→Ab|bS|C|b, C→AS|b**

实际上，只去掉了不能推出终极符串的变元**B**。

再对**G’**应用引理**3-2.2**：

P'：S→A, A→Ab|bS|C|b, C→AS|b

再对**G'**用引理**3-2.2**处理，执行算法的结果如下表所示：

循环次数i	初值	1	2	3
V_N''	{S}	{S,A}	{S,A,C}	
V_T''	Φ	Φ	{ b }	

最后得**G''=({S,A,C},{b},P'',S)**

P'': S→A, A→Ab|bS|C|b, C→AS|b

实际上只去掉了无用符号**a**和**c**。

下面对G’’去掉单一产生式:

对任何A,B∈V_N，如果有$A \Rightarrow^* B$，且$B \rightarrow \alpha_1 | \alpha_2 | \ldots | \alpha_n$是 P’’中B的所有非单一产生式，则把所有 $A \rightarrow \alpha_1 | \alpha_2 | \ldots | \alpha_n$ 加到P’’’ 中。

P’’: S→A, A→Ab|bS|C|b, C→AS|b

下面去掉单一产生式S→A, A→C, 得P’’’:

S→Ab|bS|C|b , A→Ab|bS|AS|b, C→AS|b

再去掉S→C, 得

S→Ab|bS|AS|b , A→Ab|bS|AS|b, C→AS|b

但是，可以看出C是无用符号，所以C→AS|b也被去掉。

最后得：G’’’=({S,A},{b},P’’’,S)

P’’’: S→Ab|bS|AS|b , A→Ab|bS|AS|b,

2． 给定CFG G=({S,A,B,C},{a,b},P,S)，其中，

P：$S \rightarrow ABC$，$A \rightarrow BB|\varepsilon$，$B \rightarrow CC|a$，$C \rightarrow AA|b$，

去掉G中的ε生成式。

解：首先求出可为零的变元，即可以推出ε的变元。

显然有A、C、B和S。

如果$A \rightarrow X_1X_2...X_n \in P$，则将所有形如$A \rightarrow \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$的产生式都加到P′中，其中

(1) 如果X_i不是可为零的，则$\alpha_i = X_i$。

(2) 如果X_i是可为零的，则$\alpha_i = X_i$或者$\alpha_i = \varepsilon$。但是，如果所有$X_i(i=1,2,...n)$都是可为零的，则不可所有$\alpha_i = \varepsilon$。

于是最后得：

$S \rightarrow ABC|BC|AC|AB|C|B|A$,

$A \rightarrow BB|B$,　$B \rightarrow CC|C|a$,

$C \rightarrow AA|A|b$,

3．给定CFG G=({S,A },{0,1}, P, S)，其中，

P：S→AA｜0, A→SS｜1,

将G写成GNF形式。

解：此时G已经具备CNF形式。(A→BC，D→a)

(1)变元重新命名：令A_1=S, A_2=A,

P: $A_1 \to A_2A_2 \mid 0$, $A_2 \to A_1A_1 \mid 1$,

(2)处理$A_2 \to A_1A_1 \mid 1$，变成： $A_2 \to A_2A_2A_1 \mid 0A_1 \mid 1$,

(3)处理左递归$A_2 \to A_2A_2A_1 \mid 0A_1 \mid 1$, 变成:

$A_2 \to 0A_1 \mid 1 \mid 0A_1Z_2 \mid 1Z_2$, $Z_2 \to A_2A_1 \mid A_2A_1Z_2$,

(4)处理$A_1 \to A_2A_2 \mid 0$， 得

$A_1 \to 0A_1A_2 \mid 1A_2 \mid 0A_1Z_2A_2 \mid 1Z_2A_2 \mid 0$

(5)处理$Z_2 \to A_2A_1 \mid A_2A_1Z_2$, 分别得:

$Z_2 \to 0A_1A_1 \mid 1A_1 \mid 0A_1Z_2A_1 \mid 1Z_2A_1$

$Z_2 \to 0A_1A_1Z_2 \mid 1A_1Z_2 \mid 0A_1Z_2A_1Z_2 \mid 1Z_2A_1Z_2$

最后得$G'=(\{A_1,A_2,Z_2\},\{0,1\},P',A_1)$

$$
\begin{aligned}
P':\ & A_1 \to 0A_1A_2 \mid 1A_2 \mid 0A_1Z_2A_2 \mid 1Z_2A_2 \mid 0 \\
& A_2 \to 0A_1 \mid 1 \mid 0A_1Z_2 \mid 1Z_2, \\
& Z_2 \to 0A_1A_1 \mid 1A_1 \mid 0A_1Z_2A_1 \mid 1Z_2A_1 \\
& Z_2 \to 0A_1A_1Z_2 \mid 1A_1Z_2 \mid 0A_1Z_2A_1Z_2 \mid 1Z_2A_1Z_2
\end{aligned}
$$

4．构造一个PDA M，使得

T(M)= {w| w∈{a,b}* ∧ w 中a,b的个数相等}。

解：设计思想：

有两个状态q_1和q_2：q_1是开始状态，q_2是终止状态。

栈内符号：A，B，R (R是开始时栈内符号)。

开始时：读a，向栈压入A；读b，向栈压入B。

之后：当读a时：如果栈顶是A，再向栈压入一个A；

如果栈顶是B，则B退栈。

当读b时：如果栈顶是B，再向栈压入一个B；

如果栈顶是A，则A退栈。

如果w中a,b的个数相等，则M读完w后，栈顶应该是R，此时M进入终止状态q_2。

令$M=(\{q_1,q_2\},\{a,b\},\{A,B,R\},\delta, q_1,R,\{q_2\})$

$\delta(q_1,a,R)=\{(q_1,AR)\}$　　$\delta(q_1,b,R)=\{(q_1,BR)\}$

$\delta(q_1,a,A)=\{(q_1,AA)\}$　　$\delta(q_1,a,B)=\{(q_1,\varepsilon)\}$

$\delta(q_1,b,A)=\{(q_1,\varepsilon)\}$　　$\delta(q_1,b,B)=\{(q_1,BB)\}$

$\delta(q_1,\varepsilon,R)=\{(q_2,\varepsilon)\}$

如w=bbabaa 时，M识别w的过程：$\Rightarrow$表示ID间的变化。

$(q_1,bbabaa,R)\Rightarrow(q_1,babaa,BR)\Rightarrow(q_1, abaa,BBR)$

$\Rightarrow(q_1, baa,BR) \Rightarrow (q_1,aa,BBR) \Rightarrow (q_1,a,BR) \Rightarrow (q_1,\varepsilon,R)$

$\Rightarrow (q_2,\varepsilon,\varepsilon)$

再如w＝abbab，看看M是如何拒绝接收的。

$(q_1,abbab,R)\Rightarrow(q_1, bbab,AR)\Rightarrow(q_1, baa, R)\Rightarrow(q_1, aa,BR)$

$\Rightarrow (q_1,a,R) \Rightarrow (q_1,\varepsilon,AR)$ 无下一个动作，$w\notin T(M)$

5．给定CFG G=（{S,A,B},{a,b,c},P,S），其中

P为：S→aAB | aA　A→bSa | Ab | Bc | b，

求一个PDA M，使得T(M)=L(G)。

解:(1)先简化**G**，因为**G**中无ε产生式和单一产生式，所以只去掉无用符号：对**G**应用引理**3-2.1**，执行上述算法，得到的结果如下表所示：

循环次数i	初值	1	2	3
OLD V_N	Φ	{A}	{A, S}	
NEW V_N	{A}	{A,S}	{A, S}	

得**G'=({S,A},{a,b,c},P',S)**

P'：S→aA　A→bSa | Ab | b，

P'：S→aA　A→bSa | Ab | b，

再对**G'**应用引理**3-2.2**处理，执行算法的结果如下表所示。

循环次数i	初值	1	2	3
V_N''	{S}	{S,A}	{S,A}	
V_T''	Φ	{a}	{ a,b }	

得**G''=({S,A},{a,b},P'',S)**

P'': S→aA　A→bSa | Ab | b，

(2)将G''变成GNF形式

先变成：**S→aA,　A→bSD | Ab | b，D →a ，**

处理左递归**A→Ab | bSD | b ,**

变成：**A→bSD | b | bSDZ|bZ,　Z→b |bZ**

最后得：**S→aA，A→bSD|b|bSDZ|bZ,　Z→b|bZ，D →a**

$S \to aA$， $A \to bSD \mid b \mid bSDZ \mid bZ$, $Z \to b \mid bz$， $D \to a$ ，

(3)根据上述文法，构造PDAM'使得N(M')=L(G)

$M'=(\{q\},\{a,b\},\{S,A,D,Z\},\delta,q,S,\Phi)$

δ :由$S \to aA$得： $\delta(q,a,S)=\{(q,A)\}$

由$A \to bSD \mid b \mid bSDZ \mid bZ$得：

$\delta(q,b,A)=\{(q,SD),(q,\varepsilon),(q,SDZ),(q,Z)\}$

由$Z \to b \mid bz$得： $\delta(q,b,Z)=\{(q,\varepsilon),(q,Z)\}$

由$D \to a$ 得： $\delta(q,a,D)=\{(q,\varepsilon)\}$

(4)根据M'变成M,使得T(M)=N(M').

$M=(\{q_0,q,q_1\},\{a,b\},\{S,A,D,Z,E\},\delta',q_0,E,\{q_1\})$

δ': $\delta'(q_0,\varepsilon,E)=\{(q,SE)\}$

$\delta'(q,a,S)=\{(q,A)\}$

$\delta'(q,b,A)=\{(q,SD),(q,\varepsilon),(q,SDZ),(q,Z)\}$

$\delta'(q,b,Z)=\{(q,\varepsilon),(q,Z)\}$

$\delta'(q,a,D)=\{(q,\varepsilon)\}$

$\delta'(q,\varepsilon,E)=\{(q_1,\varepsilon)\}$

6．给定**PDA M=({q_0,q_1},{0,1},{Z_0 ,X }, δ , q_0, Φ)**，其中 δ 如下：

(1) δ **(q_0,1, Z_0)={(q_0, XZ_0)}** (2) δ **(q_0,1,X)={(q_0, XX) }**

(3) δ **(q_0,0, X)={(q_1, X)}** (4) δ **(q_0, ε , Z_0)={(q_0, ε) }**

(5) δ **(q_1,1, X)={(q_1, ε)}** (6) δ **(q_1,0, Z_0)={(q_0, Z_0) }**

求一个**CFG G** 使得**L(G)=N(M).**

解：令**M=(K,** Σ **,** Γ **,** δ **,q_0,Z_0,** Φ **)**，**N(M)=L**。

构造一个**CFG G =(**V_N, V_T, P **,S)**，其中

V_N＝**{[q,A,p]|q,p**∈**K,A**∈ Γ **}**∪**{S}** V_T＝Σ**={0,1}**

V_N＝**{S,[q_0,Z_0,q_0],[q_0,Z_0,q_1],[q_1,Z_0,q_0],[q_1,Z_0,q_1],**
[q_0,X,q_0],[q_0,X,q_1], [q_1,X,q_0], [q_1,X,q_1]}

P中产生式有三种类型：

1. 对任何$q \in K$,有 $S \rightarrow [q_0,Z_0,q]$。

1) $S \rightarrow [q_0,Z_0,q_0]$

2) $S \rightarrow [q_0,Z_0,q_1]$

2. 对K中任何$q,q_1,q_2,\ldots,q_m,q_{m+1}=p$，任何$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, 任何$A,B_1,B_2,\ldots,B_m \in \Gamma$,

只要$\delta(q,a,A)$中含有$(q_1,B_1B_2\ldots B_m)$，则有产生式

$[q,A,p] \rightarrow a[q_1,B_1,q_2][q_2,B_2,q_3]\ldots[q_m,B_m,p]$。

由(1) $\delta(q_0,1,Z_0)=\{(q_0,XZ_0)\}$

3) $[q_0,Z_0,q_0] \rightarrow 1[q_0,X,q_0][q_0,Z_0,q_0]$

4) $[q_0,Z_0,q_0] \rightarrow 1[q_0,X,q_1][q_1,Z_0,q_0]$

5) $[q_0,Z_0,q_1] \rightarrow 1[q_0,X,q_0][q_0,Z_0,q_1]$

6) $[q_0,Z_0,q_1] \rightarrow 1[q_0,X,q_1][q_1,Z_0,q_1]$

由(2) $\delta(q_0,1,X)=\{(q_0,XX)\}$得

7） $[q_0,X,q_0]\to 1[q_0,X,q_0][q_0,X,q_0]$

8） $[q_0,X,q_0]\to 1[q_0,X,q_1][q_1,X,q_0]$

9） $[q_0,X,q_1]\to 1[q_0,X,q_0][q_0,X,q_1]$

10） $[q_0,X,q_1]\to 1[q_0,X,q_1][q_1,X,q_1]$

由(3) $\delta(q_0,0,X)=\{(q_1,X)\}$得

11） $[q_0,X,q_0]\to 0[q_1,X,q_0]$

12） $[q_0,X,q_1]\to 0\ [q_1,X,q_1]$

由(4) $\delta(q_1,0,Z_0)=\{(q_0, Z_0)\}$得

13） $[q_1,Z_0,q_0]\to 0[q_0,Z_0,q_0]$

14） $[q_1,Z_0,q_1]\to 0\ [q_0,Z_0,q_1]$

3．对任何$q,p\in K$，任何$a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$,任何$A\in\Gamma$，

如果有$\delta(q,a,A)$中含有(p,ε)，则有产生式$[q,A,p]\rightarrow a$。

由(5) $\delta(q_0,\varepsilon,Z_0)=\{(q_0,\varepsilon)\}$得

15）$[q_0,Z_0,q_0]\rightarrow\varepsilon$

由(6) $\delta(q_1,1,X)=\{(q_1,\varepsilon)\}$得

16）$[q_1,X,q_1]\rightarrow 1$

下面对这些产生式进行整理。

1） $S\to[q_0,Z_0,q_0]$

2） $S\to[q_0,Z_0,q_1]$ 去掉5)6)后,无产生式

3） $[q_0,Z_0,q_0]\to 1[q_0,X,q_0][q_0,Z_0,q_0]$ 无产生式

4） $[q_0,Z_0,q_0]\to 1[q_0,X,q_1][q_1,Z_0,q_0]$

5） $[q_0,Z_0,q_1]\to 1[q_0,X,q_0][q_0,Z_0,q_1]$ 无产生式

6） $[q_0,Z_0,q_1]\to 1[q_0,X,q_1][q_1,Z_0,q_1]$ 将14)代入后，死循环

7） $[q_0,X,q_0]\to 1[q_0,X,q_0][q_0,X,q_0]$ 死循环

8） $[q_0,X,q_0]\to 1[q_0,X,q_1][q_1,X,q_0]$ 无产生式

9） $[q_0,X,q_1]\to 1[q_0,X,q_0][q_0,X,q_1]$ 无产生式

10） $[q_0,X,q_1]\to 1[q_0,X,q_1][q_1,X,q_1]$

11） $[q_0,X,q_0]\to 0[q_1,X,q_0]$ 无产生式

12） $[q_0,X,q_1]\to 0\ [q_1,X,q_1]$

13） $[q_1,Z_0,q_0]\to 0[q_0,Z_0,q_0]$

14） $[q_1,Z_0,q_1]\to 0\ [q_0,Z_0,q_1]$ 去掉6)后,无产生式

15） $[q_0,Z_0,q_0]\to \varepsilon$

16） $[q_1,X,q_1]\to 1$

最后得:

1） $S \to [q_0,Z_0,q_0]$

4） $[q_0,Z_0,q_0] \to 1[q_0,X,q_1][q_1,Z_0,q_0]$

10） $[q_0,X,q_1] \to 1[q_0,X,q_1][q_1,X,q_1]$

12） $[q_0,X,q_1] \to 0\ [q_1,X,q_1]$

13） $[q_1,Z_0,q_0] \to 0[q_0,Z_0,q_0]$

15） $[q_0,Z_0,q_0] \to \varepsilon$

16） $[q_1,X,q_1] \to 1$

7．求证下面语言L不是CFL，

$L=\{a^k \mid k$是个素数$\}$。

证明：(1) 假设L是CFL。

(2)令n是L满足CFL泵作用引理常数。

(3)取$z=a^m$，$m\geqslant n$ 且m是个素数。$|z|=m\geqslant n$, 根据CFL的泵作用引理，可将z写成 $z=uvwxy$ 形式，其中$|vwx|\leqslant n$, $|vx|\geqslant 1$, 且对任何$i\geqslant 0$ 有 $uv^iwx^iy\in L$。

(4)令$u=a^{n1}$, $v=a^{n2}$, $w=a^{n3}$, $x=a^{n4}$, $y=a^{n5}$,于是$|vx|=n_2+n_4\geqslant 1$,

$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=m$， $z=uvwxy=a^{n1+n2+n3+n4+n5}=a^m$,

$uv^iwx^iy=a^{n1+i*n2+n3+i*n4+n5}=a^{m+(i-1)n2+(i-1)n4}=a^{m+(i-1)(n2+n4)}$

取$i=m+1$,则

$uv^{m+1}wx^{m+1}y=a^{m+(m+1-1)(n2+n4)}=a^{m+m(n2+n4)}=a^{m(1+n2+n4)}$

由于$n_2+n_4\geqslant 1$，故$1+n_2+n_4\geqslant 2$, 而$m\geqslant 2$, 所以$m(1+n_2+n_4)$不是素数，故 $uv^{m+1}wx^{m+1}y\notin L$，产生矛盾。所以L不是CFL。