Unsichere Ereignisse

$P(\Omega) = 1$

A, B disjunkt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

allg. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Falls $P(A) + P(B) = P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(B)$

Notationen

$B^c = \bar{B} = !B$

$P(A,B) = P(A \cap B)$

$P(A|B) = P(A)$ unabhängig

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Kombinatorik

berück. Reihenfolge + zurücklegen Anzahl: m^n

m = Pro „Ziehung" wie viele versch. Mögl.

n = Anzahl Wiederholungen

berück. Reihenfolge ohne zurücklegen Anzahl: $\dfrac{m!}{(m-n)!}$

m = alle ~~Möglichkeiten~~ z.B. 5 Personen

n = Anzahl Teilnehmer unter Bedingung

z.B. 2 Stühle 5 Personen Anzahl Sitz mögl.: $\dfrac{5!}{(5-2)!}$

ohne Berücksichtigung Reihenfolge $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

= nimm k aus n = $nCr(49,6)$

z.B. Lotto 6 aus 49 Zahlen ankreuzen $\Rightarrow \binom{49}{6}$ Mögl.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(A|B)$ Wenn B, wie gross ist $P(A)$?

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $\quad P(B) \neq 0$

Unabhängigkeit: $P(A|B) = P(A)$

Allg. Produktregel

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

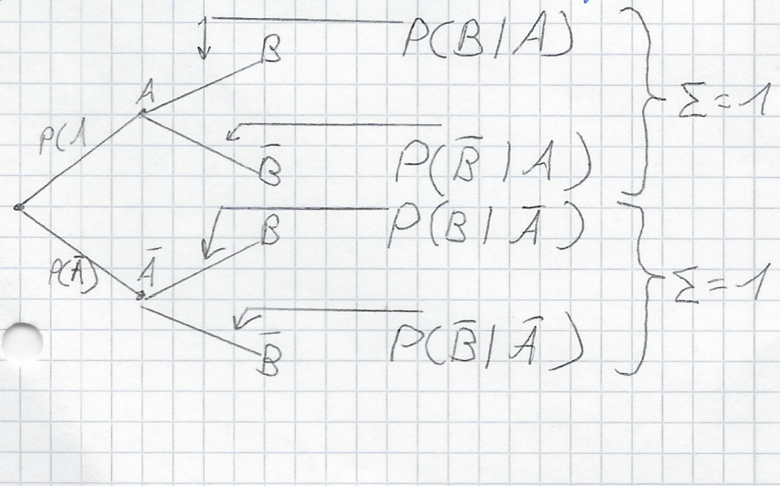
$= P(B|A) \cdot P(A)$

Totale Wahrscheinlichkeit

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

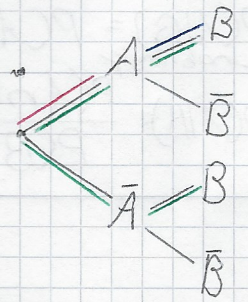
$= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$

Bed. Wahrscheinlichkeit Visualisierung



Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$$



or

	B	$\bar{B}$
A	A,B	$A,\bar{B}$
$\bar{A}$	$\bar{A},B$	$\bar{A},\bar{B}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

~~Diskrete~~ Diskrete Zufallsvariable

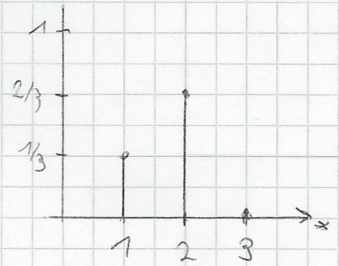
Zufallsvariable X: ~~Abbildung~~ Beschriftung auf X-Achse

PDF (Dichte): Probability density Function

$f: R \to [0,1],\ f(x) = P(X=x)$

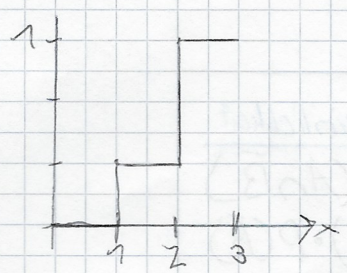
$\sum x = 1$

$P(X=2) = 2/3$



CDF (Verteilung) cumultative distribution function)

$F(x) = P(X \le x)$



letzter x Wert muss 1 sein

$P(X \le 2) = 1/3 + 2/3 = 1$

Binomialverteilung

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot \underbrace{p^k}_{\text{Chance Erfolg}} \cdot \underbrace{(1-p)}_{\text{Chance Misserfolg}}{}^{n-k}$$

n = Anzahl Durchführungen

k = Anzahl Erfolge

BSP 200 Durchführenen
0.06 Chance Erfolg
$P(10 \le x \le 11)$

$= \binom{200}{10}\cdot 0.06^{10}\cdot(1-0.06)^{190}$

$+ \binom{200}{11}\cdot 0.06^{11}\cdot(1-0.06)^{189}$

Erwartungswert E

$E(x) = \sum (X = x) \cdot x$ //Durchschnittswert mit Einbezug Wahrscheinlichkeit

Falls $X = binom(n, p) \Rightarrow E(X) = n \cdot p$ (total)

Varianz V

mittlere quad. Abweichung von $E(X)$

3/

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$
$$= E(X^2) - E(X)^2$$

falls $X = binom(n, p) \rightarrow V(x)$
$\rightarrow V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$ (total)

Standartabweichung S

$$S(X) = \sqrt{V(X)}$$

BSP Binom $E(X), V(X)$

Anzahl Kopf bei 3 Würfen mit fairer Münze

$X = binom(3, 0.5)$

$E(X) = n \cdot p = 3 \cdot 0.5 = \underline{\underline{3/2}}$

$V(X) = 3 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)$
$= \underline{\underline{3/4}}$

α, β Spielereien

$E(X + \beta) = \sum P(X = x + \beta) \cdot (x + \beta)$

$E(\alpha X) = \alpha E(X) = \sum P(X = \alpha x) \cdot \alpha x$

$V(X + \beta) = V(x)$

$V(\alpha x) = \alpha^2 V(x)$

BSP $E(X), V(X)$

~~Ges~~: Augenzahl bei einmaligem Werfen eines Würfels

ges: $E(X), V(X)$

p	Auge x	x^2
1/6	1	1
1/6	2	4
1/6	3	9
1/6	4	16
1/6	5	25
1/6	6	36

$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6$
$= \frac{21}{6} = 3.5$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
$= E(X^2) - (3.5)^2$

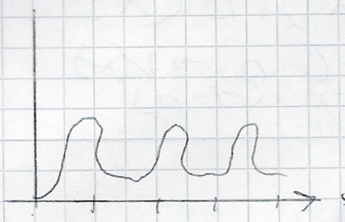
$E(X^2) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 9 + \frac{1}{6} \cdot 16 + \frac{1}{6} \cdot 25 + \frac{1}{6} \cdot 36$
$= \frac{91}{6}$

$\rightarrow V(X) = \frac{91}{6} - 3.5^2 = \underline{\underline{2.91\overline{6}}}$

Stetig verteilte Zufallsvariablen

auf X-Achse keinen bestimmten Werte mehr, sondern Funktionen

PDF $f(x)$



$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(x)$$

CDF: $F(x) = \int_{-\infty}^{\cancel{\infty}\,x} f(x)\,dx$

Erwartungswert E(X) und Varianz V(X)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$ bestimmt Lage

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$ bestimmt ~~die~~ Streuung

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 \cdot f(x))\,dx - E(X)^2$$

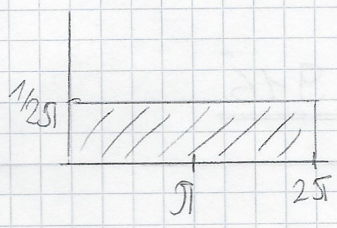
bei binom: $E(X) = n \cdot p$

$V(X) = n \cdot p(1-p)$

BSP E(X), V(X)

Rad drehen: wie gross Winkel zur Ursprungsstellung

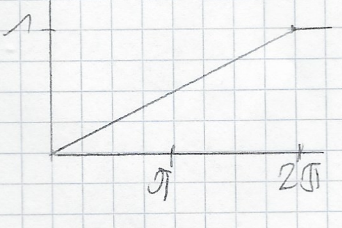
PDF



$$f(x) = \frac{1}{2\pi}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot x^2 = \frac{1}{4\pi} x^2 \Big|_{-\infty\;0}^{\infty\;2\pi} = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \underline{\underline{\pi}}$$

CDF: bei $x = 2\pi$ wird 1 erreicht



Integration von ~~gerade~~ stetigen Funktion
→ Gerade

$$V(X) = \int \frac{1}{2\pi} x^2\,dx - \pi^2 = \frac{1}{6\pi} x^3 \Big|_0^{2\pi} - \pi^2$$

$$= \frac{8\pi^3}{6\pi} - \pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} - \pi^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi^2}}$$

Gaussche Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

X heisst normalverteilt falls $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ und

$$\text{CDF}: F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

$$\text{PDF}: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} > 0$$

μ = Mittelwert = $E(X)$ bestimmt Lage

σ = Standartabweichung = $S(X) = \sqrt{V(X)}$ bestimmt Streuung

$\sigma = V(X)$

hohes σ = tiefe Spitze, flacher Hügel

tiefes σ = hohe Spitze

☑ Standart Normalverteilung $= N(\mu = 0, \sigma = 1)$

$$E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X) \cdot \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$V\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = V\left(\frac{x}{\sigma}\right) \ldots\ldots = 1$$

Bernoulli-Verteilung

2 mögliche Ergebnisse (evtl. nachhelfen)

1 = gültig
0 = ungültig

$E(x+y) = E(X) + E(Y)$

sonst $V(x+y) = V(x) + V(y) + 2(E(xy) - E(x) \cdot E(y))$

$V(x+y) = V(x) + V(y)$ falls x und y voneinander unabhängig sind

= Tabelle besteht aus Prod. der Randwahrsch.

oder: $P(x \mid y) = P(x)$

Gesetz der grossen Zahlen

Erwartungswerd des Durchschnitts entspricht dem Erwartungswert des Einzelexperiments. Je mehr Wiederholungen durchgeführt werden, desto kleiner die Varianz

BSP

Erw. Anzahl versch. Geburtstage bei 20 Personen

365 Zufallsvariablen

$X_1 \begin{cases} 1 & \text{falls an einem Tag Geburtstag wo noch niemand hat} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$P_1 = \underbrace{1}_{\text{Total}} - \underbrace{\left(\frac{364}{365}\right)^{20}}_{\text{Chance dass niemand am 1. Januar Geb. hat}}$

$P_2 = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{2}$

Chance niemand am 2. Jan Geb

. . . . .

$\rightarrow E(X_1) = 0 \cdot P(X_1 = 0) + 1 \cdot P(X_1 = 1)$

$\underbrace{E(X_1 + \ldots + X_{365})}_{\text{da Bernoulli}} = 365 \cdot \left(1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{20}\right)$ = Anzahl erw. versch. Geburtstage

---

BSP Kombinatorik

Display mit 5 Stellen mit Zahlen jeweils 0–9

untersch. Komb. 10^5

unterschiedliche Ziffern $\frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

Starten und enden mit ungerader Ziffer $5 \cdot 10^3 \cdot 5$

4 min. 4x nacheinander die Zahl 4 $\quad 9 + 1 + 9$

$\underset{9}{4444x} \quad \underset{9}{x4444} \quad \underset{1}{44449}$

exakt 4 gleiche Ziffern $\underbrace{\binom{5}{4}}_{\text{4 gleiche Ziffern}} \cdot \underbrace{10}_{\text{für jede Zahl}} \cdot \underbrace{9}_{\text{Letzte Zahl}}$

exakt 3 gleiche Ziffern $\binom{5}{3} \cdot 10 \cdot 9^2$

min / max gem. Wahrsch: 2 Mögl min/max max/min