Treten Elemente wiederholt auf? => Wiederholung?

Liegt eine Auswahl vor?

- nein → **Permutation**
  - Wiederholung?
    - nein: $n!$
    - ja: $\frac{k!}{m_1! \cdots m_n!}$ or $\binom{k_1}{m_1} \cdot \binom{k_2}{m_2} \cdot \ldots \cdot \binom{k_n}{m_n}$

      \# Kombis mit Ketten: $\frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!}$
- ja → **Variation oder Kombination?**
  - Mit oder ohne Reihenfolge?
    - mit: Wiederholung?
      - nein: $\frac{n!}{(n-k)!}$

        19 Personen P(alle andere GB): $\frac{365!}{(365-19)!}$
      - ja: n^k

        Display 5 Stellen, Pro Stelle 10 Mögl., # unter. Darstellung: 10^5
    - ohne: Wiederholung?
      - nein: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

        \# Darstellungen alle Ziffern anders: $\frac{10!}{5!}$
      - ja: $\binom{n-1+k}{k}$

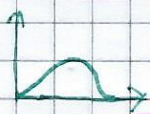
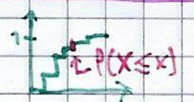
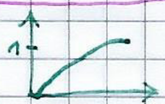
ZV: **diskret**: nur endlich viele Werte z.B. 3x Münzwurf => Stabdiagramm
stetig: ∞-viele Werte z.B. Temperaturmessung => Kurve

Bsp.:
Anzahl Kopf 3x Münzwurf

Anzahl K. x	PDF $P(X=x)$	CDF $P_{kum} = F(X)$
0	0.125	0.125
1	0.375	0.5
2	0.375	0.875
3	0.125	1

CDF von $X = F(X) = P(X \leq x)$
PDF von $X = f(x) = P(X = x)$

Verteilungsfkt.: zu Wahrscheinlichkeiten die kummulierten Wahrscheinlichkeiten

	diskret	stetig	
PDF/Dichte			Fläche unter Dichte = 1
CDF			
		$P(X_1 < X < X_2) \Leftrightarrow P(X_1 \leq X \leq X_2)$	

Bsp.:

A zwischen 7 und 10 => $P(7 \leq X \leq 10) = F(10) - F(6)$
$A > 10$ => $P(X > 10) = 1 - F(10)$
$A = 3$ oder $A = 7$ => $P(X = 3 \vee X = 7) = f(3) + f(7)$

Unsichere Ereignisse

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$P(\Omega) = 1$

A, B disjunkt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

allg. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Falls $P(A) + P(B) = P(\Omega) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(B)$

Notationen

$B^c = \bar{B} = !B$

$P(A, B) = P(A \cap B)$

$P(A|B) = P(A)$ unabhängig

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Laplace: $P(X) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$

Stochastisch unabhängig:

Wenn:

$P(A|B) = P(A)$ or $P(B|A) = P(B)$

$\Longleftrightarrow$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

dann:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)}$

$= P(A)$ und $P(B|A) = P(B)$

Kombinatorik

berück. Reihenfolge + zurücklegen Anzahl: m^n
- m = Pro Ziehung wie viele versch. Mögl.
- n = Anzahl Wiederholungen

berück. Reihenfolge ohne zurücklegen Anzahl: $\frac{m!}{(m-n)!}$
- m = alle ~~Möglichkeiten~~ z.B 5 Personen
- n = ~~A~~ Anzahl Teilnehmer unter Bedingung

z.B 2 Stühle 5 Personen Anzahl Sitz mögl: $\frac{5!}{(5-2)!}$

ohne Berücksichtigung Reihenfolge $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

= nimm k aus n = Ncr(49,6)

z.B Lotto 6 aus 49 Zahlen ankreuzen $\rightarrow \binom{49}{6}$ Mögl

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(A|B)$ Wenn B, wie gross ist $P(A)$?

$P(A|B) =$ ~~[illegible]~~ Unabhängigkeit: $P(A|B) = P(A)$

$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(B) \neq 0$

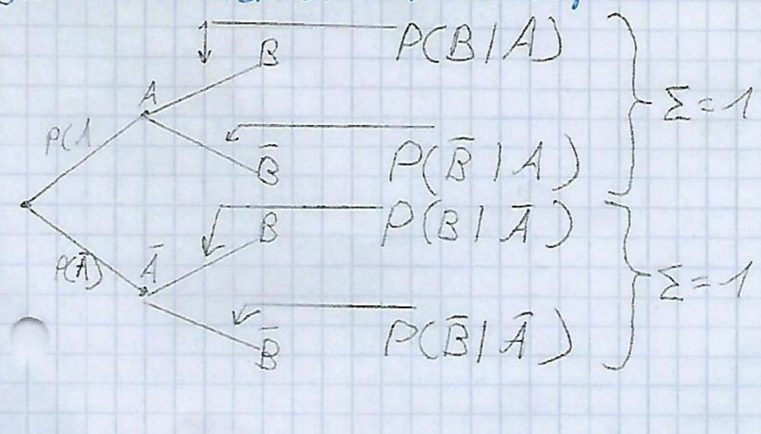
Allg. Produktregel

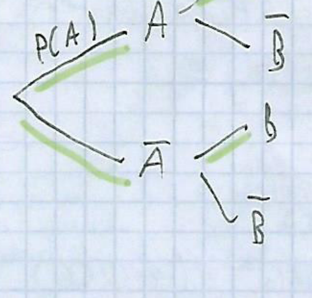
$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
$= P(B|A) \cdot P(A)$

Totale Wahrscheinlichkeit

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$
$= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$

Bed. Wahrscheinlichkeit Visualisierung



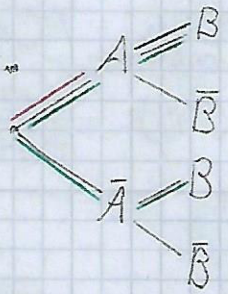


$P(B)$
$= P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$
$+$
$P(A) \cdot P(B|A)$

Satz von Bayes

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{or} \quad P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$



or

	B	$\bar{B}$
A	A,B	$A,\bar{B}$
$\bar{A}$	$\bar{A},B$	$\bar{A},\bar{B}$

Definition:
Beschreibt wie Kenntnis von B, die "priori" Unsicherheit $P(A)$ zu "posteriori" $P(A|B)$ ändert.

~~Diskrete~~ Diskrete Zufallsvariable

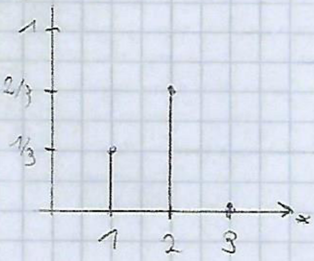
Zufallsvariable X: ~~Abbildung~~ Beschriftung auf X-Achse

PDF (Dichte): Probability density Function

$f: R \to [0,1]$, $f(x) = P(X = x)$

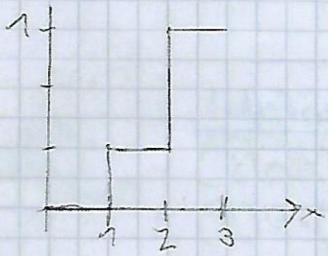
$\sum x = 1$

$P(X=2) = 2/3$



CDF (Verteilung) cumultative distribution function)

$F(x) = P(x \leq x)$



letzter x Wert muss 1 ~~ge~~ sein

$P(X \leq 2) = 1/3 + 2/3 = 1$

Binomialverteilung

$X \sim \text{Binom}(p, n)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{= genau } k$$

~~p~~ Chance Erfolg — Chance Misserfolg

n = Anzahl Durchführungen

k = Anzahl Erfolge

BSP 200 Durchführenen
0.06 Chance Erfolg
$P(10 \leq x \leq 11)$

$$= \binom{200}{10} \cdot 0.06^{10} \cdot (1-0.06)^{190} + \binom{200}{11} \cdot 0.06^{11} \cdot (1-0.06)^{189}$$

Bernoulli-Verteilung:

X_i	$P(X_i = x_i)$
1	p
0	$1-p$

$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

$V(X_i) = E(x^2) - (E(x)^2) = p - p^2 = p \cdot (1-p)$

$E(X_n) = n \cdot p$

$V(X_n) = n \cdot (p - p^2)$

Erwartungswert E

$E(x) = \sum P(X=x) \cdot x$ //Durchschnittswert mit Einbezug Wahrscheinlichkeit

Falls $X = binom(n,p) \rightarrow E(X) = \underbrace{\overset{\mu}{n \cdot p}}_{total}$

Varianz V

mittlere quad. Abweichung von E(X)

3/

$V(X) = E((X - E(X))^2)$
$= E(X^2) - E(X)^2$

falls $X = binom(n,p) \rightarrow V(x)$
$\rightarrow V(X) = \underbrace{n \cdot p}_{total} \cdot (1-p) = \sigma^2$

$\boxed{\sqrt{\sigma^2} = \sigma = \text{Standardabweichung}}$

Standartabweichung S

$S(X) = \sqrt{V(X)}$

BSP Binom E(X), V(X)

Anzahl Kopf bei 3 Würfen mit fairer Münze

$X = binom(3, 0.5)$

$E(X) = n \cdot p = 3 \cdot 0.5 = \underline{\underline{3/2}}$

$V(X) = 3 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)$
$= \underline{\underline{3/4}}$

α, β Spielereien

$E(X+\beta) = \sum P(X = x+\beta) \cdot (x+\beta)$

$E(\alpha X) = \alpha E(X) = \sum P(X = \alpha x) \cdot \alpha x$

$V(X+\beta) = V(x)$

$V(\alpha x) = \alpha^2 V(x)$

Varianz V Teil 2:

$V(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2 - \mu^2$

Bsp.:

BSP E(X), V(X)

Geg: Augenzahl bei einmaligem Werfen eines Würfels

ges: E(X), V(X)

p	Auge x	x^2
1/6	1	1
1/6	2	4
1/6	3	9
1/6	4	16
1/6	5	25
1/6	6	36

$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6$
$= \underline{\underline{21/6 = 3.5}}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
$= E(X^2) - (3.5)^2$

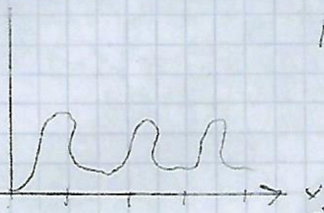
$E(X^2) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 9 + \frac{1}{6} \cdot 16 + \frac{1}{6} \cdot 25 + \frac{1}{6} \cdot 36$
$= \frac{91}{6}$

$\rightarrow V(X) = \frac{91}{6} - 3.5^2 = \underline{\underline{2.91\overline{6}}}$

Stetig verteilte Zufallsvariablen

auf X-Achse keinen bestimmten Werte mehr, sondern Funktionen

PDF $f(x)$



$$CDF: F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty} f(x)\,dx$$

$$P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(x)$$

Erwartungswert E(X) und Varianz V(X)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$ bestimmt Lage

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$ bestimmt ~~die~~ Streuung

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 \cdot f(x))\,dx - E(X)^2$$

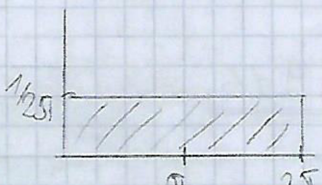
bei binom: $E(X) = n \cdot p$

$V(X) = n \cdot p(1-p)$

BSP E(X), V(X)

Rad drehen: wie gross Winkel zur Ursprungsstellung

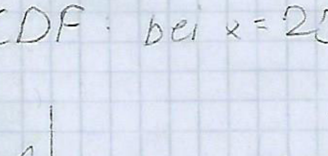
PDF



$$f(x) = \frac{1}{2\pi}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot x^2 = \frac{1}{4\pi} x^2 \Big|_{-\infty\ 0}^{\infty\ 2\pi} = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \underline{\underline{\pi}}$$

CDF: bei $x = 2\pi$ wird 1 erreicht



Integration von stetigen gerade Funktion → Gerade

$$V(X) = \int \frac{1}{2\pi} x^2\,dx - \pi^2 = \frac{1}{6\pi} x^3 \Big|_{0}^{2\pi} - \pi^2$$

$$= \frac{8\pi^3}{6\pi} - \pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} - \pi^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi^2}}$$

Gaussche Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

X heisst normalverteilt falls $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ und

$$CDF: F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

$$PDF: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} > 0$$

μ = Mittelwert $= E(X)$ bestimmt Lage

σ = standartabweichung $= S(X) = \sqrt{V(X)}$ bestimmt Streuung

$\sigma = V(X)$

hohes σ = tiefe Spitze, flacher Hügel

tiefes σ = hohe Spitze

☑ Standart Normalverteilung $= N(\mu = 0, \sigma = 1)$

$$E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X) \cdot \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$V\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = V\left(\frac{x}{\sigma}\right) \ldots\ldots = 1$$

Bernoulli-Verteilung

2 mögliche Ergebnisse (evtl. nachhelfen)

1 = gültig
0 = ungültig

$E(x+y) = E(X) + E(Y)$

sonst $V(x+y) = V(x) + V(y) + 2(E(xy) - E(x) \cdot E(y))$

$V(x+y) = V(x) + V(y)$ falls x und y voneinander unabhängig sind

= Tabelle besteht aus Prod. der Randwahrsch.

oder: $P(x \mid y) = P(x)$

Gesetz der grossen Zahlen

Erwartungswerd des Durchschnitts entspricht dem Erwartungswert des Einzel Experiments. Je mehr Wiederholungen durchgeführt werden, desto kleiner die Varianz

BSP

Erw. Anzahl versch. Geburtstage bei 20 Personen

365 Zufallsvariablen

$X_1 \begin{cases} 1 & \text{falls an einem Tag Geburtstag wo noch niemand hat} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\underbrace{P_1}_{\text{Total}} = 1 - \underbrace{\left(\frac{364}{365}\right)^{20}}_{\text{Chance dass ~~An~~ niemand am 1. Januar Geb. hat}}$$

$$P_2 = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^2$$

Chance niemand am 2. Jan Geb

...

$\rightarrow E(X_1) = 0 \cdot P(X_1 = 0) + 1 \cdot P(X_1 = 1)$

$$\underbrace{E(X_1 + \dots + X_{365})}_{\text{da Bernoulli}} = 365 \cdot \left(1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{20}\right) = \text{Anzahl erw. versch. Geburtstage}$$

BSP Kombinatorik

Display mit 5 stellen mit Zahlen jeweils 0-9

untersch. Komb. 10^5

unterschiedliche Ziffern $\frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

Starten und enden mit ungerader Ziffer $5 \cdot 10^3 \cdot 5$

4 min. ~~44~~ 4x nacheinander die Zahl 4 $\quad 9 + 1 + 9$

$\underset{9}{4444x} \quad \underset{9}{x4444} \quad \underset{1}{44444}$

exakt 4 gleiche Ziffern $\underbrace{\binom{5}{4}}_{\text{4 gleiche Ziffern}} \cdot \underbrace{10}_{\text{für jede Zahl}} \cdot \underbrace{9}_{\text{Letzte Zahl}}$

exakt 3 gleiche Ziffern $\binom{5}{3} \cdot 10 \cdot 9^2$

min / max gem. Wahrsch: 2 Mögl min/max max/min

Test 1

Aufgabe 1 *Auf einem digitalen Display mit 5 Stellen können an jeder Stelle die Ziffern 0-9 dargestellt werden. Beantworten Sie folgende Fragen, Ausrechnen der Resultate ist nicht notwendig.*

(a) *Wie viele unterschiedliche Displaydarstellungen gibt es? (1 Punkt)*

$$10^5$$

(b) *Bei wie vielen Displaydarstellungen sind alle Ziffern unterschiedlich? (1 Punkt)*

$$\frac{10!}{5!}$$

(c) *Wie viele Displaydarstellungen beginnen und enden mit einer ungeraden Ziffer? (1 Punkt)*

$$25 \cdot 10^3$$

(d) *Wie viele Displaydarstellungen haben mindestens 4 Mal nebeneinander die Zahl 4? (1 Punkt)*

$$19$$

(e) *Wie viele Displaydarstellungen haben exakt 4 gleiche Ziffern? (1 Punkt)*

$$10 \cdot \binom{5}{4} \cdot 9$$

(f) *Wie viele Displaydarstellungen haben exakt 3 gleiche Ziffern? (1 Punkt)*

$$10 \cdot \binom{5}{3} \cdot 9^2$$

Aufgabe 3 (a) *In einem Gefängnis sitzen 3 Gefangene A,B und C. Es wird bekannt gegeben, dass zwei der drei Gefangenen an nächsten Tag entlassen werden sollen. Zur Modellierung der Situation werden die folgenden gleich wahrscheinlichen Ereignisse definiert.*

- *E1={A und B werden entlassen}*
- *E2={A und C werden entlassen}*
- *E3={B und C werden entlassen}*

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt Gefangener A frei? (2 Punkte)

$$p(E1) + p(E2) = 2/3$$

(b) *Ein Wärter fragt einen anderen nach dem Namen eines der Gefangenen, der morgen entlassen wird. Dieser antwortet wahrheitsgemäss, indem er einen der beiden zufällig (mit je gleicher bedingter Wahrscheinlichkeit) angibt. Zur Modellierung verwenden wir*

- *W1={Wärter sagt, dass A entlassen wird}*
- *W2={Wärter sagt, dass B entlassen wird}*
- *W3={Wärter sagt, dass C entlassen wird}*

Geben Sie die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten von $E_i \cap W_j$ an. (2 Punkte)

	W1	W2	W3
E1	1/6	1/6	0
E2	1/6	0	1/6
E3	0	1/6	1/6

(c) *Gefangener A hört dem Gespraech der beiden Wärter aus Teil b) zu und erfährt so, dass Gefangener B frei kommt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt er nun frei? (2 Punkte)*

$$p(E1|W2) = \frac{p(E1 \cap W2)}{p(W2)} = \frac{1/6}{1/3} = 1/2$$

Aufgabe 2 *Zwei Spieler X und Y spielen das Spiel Stein(0)-Schere(1)-Papier(2) miteinander, dessen Regeln wie folgt sind.*

Ein Beobachter hat aufgrund vorheriger Spiele das unten dargestellte Modell der gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten der Ereigniskombinationen erstellt.

		X			
		0	1	2	Total
Y	0	1/16	2/16	1/16	4/16
	1	2/16	4/16	2/16	8/16
	2	1/16	2/16	1/16	4/16
	Total	4/16	8/16	4/16	1.00

(a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(X = 1)$. (1 Punkt)*

$$p(X = 1) = 8/16$$

(b) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(X = 1|Y = 2)$. (1 Punkt)*

$$p(X = 1|Y = 2) = \frac{2/16}{4/16} = 1/2$$

(c) *Sind die Ereignisse X=1 und Y=2 abhängig oder unabhängig? (1 Punkt)*

unabhängig

(d) *Kann ein Spieler, z.B. X, sein Spiel verbessern, wenn er als einziger der beiden Spieler das Modell der gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten kennt? Sollte X sein Spiel anpassen, und wenn ja, welchen Einfluss hätte dies auf die obige Tabelle? (3 Punkte)*

Aufgabe 4 *In einer Vaterschaftsklage soll festgestellt werden, ob ein Mann der Vater eines Kinds ist. Dieser Mann hat eine bestimmte genetische Eigenschaft, einen sog. genetischen Marker, den er genetisch bedingt immer auch an seine Kinder vererbt. Ansonsten tritt der Marker allgemein in 1% der Bevölkerung auf.*

Zur Modellierung der Situation werden die folgenden Ereignisse definiert:

- *A={der Mann ist der Vater des Kinds}*
- *B={das Kind hat den genetischen Marker}*

Nehmen Sie weiter an, dass nur zwei Personen als Vater in Frage kommen, beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Über die andere Person ist nicht bekannt, ob sie den genetischen Marker hat oder nicht; daher wird sie zunächst als allgemeine Person aus der Bevölkerung angesehen.

(a) *Geben Sie die priori-Wahrscheinlichkeit $p(A)$ an. (1 Punkt)*

$$p(A) = 1/2$$

(b) *Geben Sie $p(B|A)$ an. (1 Punkt)*

$$p(B|A) = 1$$

(c) *Benutzen Sie den Satz von Bayes, um $p(A|B)$ anzugeben (Ausrechnen nicht notwendig) (2 Punkte)*

$$p(A|B) = \frac{1 \cdot 1/2}{1 \cdot 1/2 + 0.01 \cdot 1/2} \approx 98\%$$

(d) *Wie ändert sich $p(A|B)$, wenn Sie erfahren, dass auch die zweite als Vater in Frage kommende Person den genetischen Marker hat? (2 Punkte)*

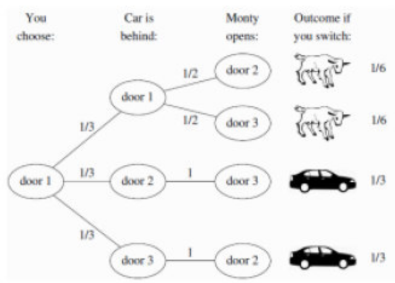
$$p(A|B) = \frac{1 \cdot 1/2}{1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2} = 1/2$$

Aufgabe 5 *In einer Fernseh-Show muss der Kandidat eine von drei Türen wählen. Hinter zwei der Türen wartet eine Ziege, hinter der dritten ein Auto als Gewinn. (Der Kandidat möchte lieber das Auto als eine der Ziegen gewinnen.)*

Der Moderator namens Monty Hall weiss, wo das Auto ist. Nachdem der Kandidat seine Tür gewählt (aber noch nicht geöffnet) hat, öffnet Monty eine der beiden anderen Türen, dabei nimmt er immer eine Tür mit Ziege dahinter; die Position des Autos wird nie verraten.

Es bleiben also zwei geschlossene Türen, die des Kandidaten und die von Monty nicht geöffnete Tür. Monty bietet jetzt dem Kandidaten an, seine Wahl zu ändern und statt der ursprünglichen die andere geschlossene Tür zu öffnen. Was würden Sie als Kandidat tun? Zur Modellierung der Situation nennen wir die vom Kandidaten gewählte Tür 1, die anderen Türen 2 und 3.

(a) *Tragen Sie im untenstehenden Diagramm die Verlaufs-Wahrscheinlichkeiten bzw. bedingten Wahrscheinlichkeiten an den Kanten ein. (2 Punkte)*



(b) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Kandidat das Auto, wenn er die Tür wechselt? (2 Punkte)*

$$p = 2/3$$

(c) *In einer anderen Variante der Show hat der Kandidat vier statt drei Türen zur Wahl, mit 3 Ziegen und einem Auto. Monty öffnet wieder eine der nicht gewählten Türen mit einer Ziege und stellt dem Kandidaten frei, seine Tür zu behalten oder eine der anderen beiden noch geschlossenen Türen zu öffnen. Was soll der Kandidat tun?(2 Punkte)*

Türwechsel verbessert die Chance auf das Auto von 1/4=25% auf 6/16=37.5%.

Aufgabe 6 *Ein fairer 6-seitiger Würfel wird 2-mal geworfen und die Ergebnisse der beiden Würfe notiert.*

(a) Es bezeichne A_i das Ereignis, bei dem das Maximum der beiden Würfe gleich i ist, für $i = 1, \dots, 6$. Zum Beispiel ist also A_4 das Ereignis, bei dem das Maximum der beiden Würfe 4 ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser sechs Ereignisse. (2 Punkte)

i	$p(A_i)$
1	1/36
2	3/36
3	5/36
4	7/36
5	9/36
6	11/36

(b) Analog bezeichne B_i das Ereignis, bei dem das Minimum der beiden Würfe gleich i ist, für $i = 1, \dots, 6$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser sechs Ereignisse. (2 Punkte)

i	$p(B_i)$
1	11/36
2	9/36
3	7/36
4	5/36
5	3/36
6	1/36

(c) Finden Sie die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten $p(A_i \cap B_j)$ (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1/36	0	0	0	0	0
A_2	2/36	1/36	0	0	0	0
A_3	2/36	2/36	1/36	0	0	0
A_4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0
A_5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0
A_6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36

Test 2

Aufgabe 1 *(a) Ein Würfel wird zweimal geworfen, die Zufallsvariable X_1 bezeichne die Anzahl Augen aus dem ersten Wurf und X_2 die aus dem zweiten Wurf. Geben Sie in Tabellenform jeweils die diskrete Dichte (PDF) folgender Zufallsvariablen an (je 2 Punkte)*

(i) $Y_1 = X_1^2$

y_1	$p(Y_1 = y_1)$
1	1/6
4	1/6
9	1/6
16	1/6
25	1/6
36	1/6

(ii) $Y_2 = |X_1 - X_2|$

y_2	$p(Y_1 = y_1)$
0	6/36
1	10/36
2	8/36
3	6/36
4	4/36
5	2/36

(b) Ein Kollege hat eine unfaire Münze. Er bietet Ihnen folgendes Spiel an: wenn beim Münzwurf "Kopf" erscheint, zahlen Sie CHF 10, bei "Zahl" erhalten Sie CHF 1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p muss mindestens "Zahl" erscheinen, damit beide Parteien gleichen Gewinn erwarten können? (2 Punkte)

Es sei X der Gewinn von Person 1 und Y der Gewinn von Person 2. Dann

$$E(X) = -10\dot{(}1-p) + 1 \cdot p = -10 + 11 \cdot p$$

und

$$E(Y) = 10\dot{(}1-p) - 1 \cdot p = 10 - 11 \cdot p$$

Aus $E(X) = E(Y)$ folgt $p = 10/11$ und $E(X) = E(Y) = 0$.

Aufgabe 2 *Ein Team aus 10 Mitgliedern will sich treffen, allerdings kommt jede Person nur mit 75%-iger Wahrscheinlichkeit zu einem anberaumten Termin. Es sei die Zufallsvariable X gegeben durch die Anzahl Personen, die zum Treffen erscheinen.*

(a) Benennen Sie eine geeignete Verteilung von X, welche obige Situation modelliert. (1 Punkt)

X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0.75$

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen alle Personen zum Treffen? (1 Punkt)

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0.75^{10} \cdot 0.25^0$$

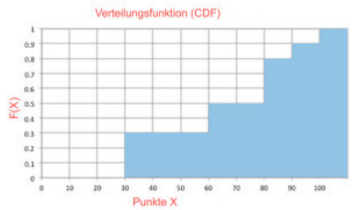
(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen mindestens 7 Personen? Sie müssen das Ergebnis nur angeben und brauchen es nicht numerisch auszurechnen. (2 Punkte)

$$P(X \geq 7) = \binom{10}{7} \cdot 0.75^7 \cdot 0.25^3 + \binom{10}{8} \cdot 0.75^8 \cdot 0.25^2 + \binom{10}{9} \cdot 0.75^8 \cdot 0.25^1 + \binom{10}{10} \cdot 0.75^{10} \cdot 0.25^0$$

(d) Wie viele Personen erscheinen durchschnittlich bei Treffen des Teams? (2 Punkte)

$$E(X) = 10 \cdot 0.75 = 7.5$$

Aufgabe 3 *Eine Zufallsvariable X bezeichne die bei einem Test erreichten Punkte. Im untenstehenden tabellenartigen Graph ist die Verteilungsfunktion (CDF) von X dargestellt.*



(a) Ist die Zufallsvariable X diskret oder stetig verteilt? (0.5 Punkte)

Es liegt eine diskrete Verteilung vor.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreichen Teilnehmer mindestens 50 Punkte? (1 Punkt)

$$P(X > 50) = 0.7$$

(c) Geben Sie die Dichte (PDF) zur Verteilung an. (1.5 Punkte)

x	$p(X = x)$
30	0.3
60	0.2
80	0.3
90	0.1
100	0.1

(d) Geben Sie auf 2 Nachkommastellen gerundet den Erwartungswert $E(X)$ an (1.5 Punkte)

$$E(X) = 64$$

(e) Geben Sie auf 2 Nachkommastellen gerundet die Varianz $V(X)$ an (1.5 Punkte)

$$V(X) = 624$$

Aufgabe 4 *Für $x \in \mathcal{R}$ sei die sogenannte logistische Verteilungsfunktion (CDF)*

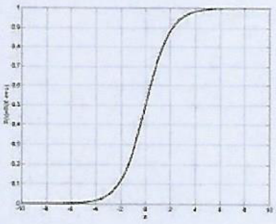
$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}},$$

welche die Verteilung einer Zufallsvariablen X beschreibe.

(a) *Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ (1 Punkt)*

Mit $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ folgen die beiden Aussagen.

(b) *Fertigen Sie eine grobe Skizze der Funktion an. (Hinweis: Sie können zuerst den Nenner betrachten und anschliessend dessen Kehrwert) (1 Punkt)*



(c) *Finden Sie die zugehörige Dichte (PDF). (2 Punkte)*

$$f(x) = F'(x) = \left[(1+e-x)^{-1}\right]' = -(1+e^{-x})^{-2}\cdot(-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

(d) *Berechnen Sie $P(X > 10)$. (1 Punkt)*

$P(X > 10) = 1 - \frac{1}{1+e^{-10}}$

(e) *Finden Sie den sog. Median m der Verteilung; m ist definiert durch F(m)=0.5. (1 Punkt)*

Hinweis: die Umkehrfunktion von F ist gegeben durch $F^{-1}(y) = ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$

$m = 0$

Aufgabe 5 *Der Wetterbericht sagt für Samstag und Sonntag eine erwartete Regenmenge von 2cm bzw. von 3cm voraus. Am Samstag beträgt die Regenwahrscheinlichkeit 50%. Falls es am Samstag regnet, ist die Chance auf Regen am Sonntag 75%. Falls es am Samstag nicht regnet, beträgt die Regenwahrscheinlichkeit am Sonntag nur 50%.*

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 bezeichnen die Regenmenge am Samstag respektive am Sonntag. Die Gesamtregenmenge sei $Y = X_1 + X_2$.

(a) *Wie hoch ist die am Wochenende erwartete Gesamtregenmenge? (1 Punkt)*

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) = 5$$

(b) *Stellen Sie die Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten der Wetterverhältnisse auf. (2 Punkte)*

Es bezeichne $p(SA = R)$ die Regen-Wahrscheinlichkeit am Samstag, $p(SA = \bar{R})$ die Wahrscheinlichkeit für Nichtregen, etc.

Laut Aufgabe $p(SA = R) = 0.5$, also $p(SA = \bar{R}) = 0.5$. Weiter $p(SO = R|SA = R) = 0.75$, d.h. $p(SO = \bar{R}|SA = R) = 0.25$, sowie $p(SO = R|SA = \bar{R}) = 0.5$ und $p(SO = \bar{R}|SA = \bar{R}) = 0.5$. Damit

$P(\cdot,\cdot)$	$SO = R$	$SO = \bar{R}$
$SA = R$	0.375	0.125
$SA = \bar{R}$	0.25	0.25

(c) *Finden Sie die PDFs von X_1 und X_2. (je 1 Punkt)*

Aus Marginalisierung folgt $p(SO = R) = 0.625$, also $p(SO = \bar{R}) = 0.375$. Damit folgen aus den angegebenen Erwartungswerten die PDFs:

x_1	$p(X_1 = x_1)$
0	0.5
4	0.5

x_2	$p(X_2 = x_2)$
0	0.375
4.8	0.625

$E(x_1) = P(SA=R)\cdot x + P(SA=\bar{R})\cdot 0$

$2 = 0.5\cdot x + 0$

$\Rightarrow x = \underline{4}$

(d) *Finden Sie die PDF von Y. (1 Punkt)*

Mit den gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten aus Teil b) folgt

y	$p(Y = y)$
0	0.25
4	0.125
4.8	0.25
8.8	0.375

Bemerkung: aus der PDF folgt, wie schon aus Teil a) bekannt,

$E(Y) = 0\cdot 0.25 + 4\cdot 0.125 + 4.8\cdot 0.25 + 8.8\cdot 0.375 = 0.5 + 1.2 + 3.3 = 5$

Aufgabe 6 *Eine Vertriebsgesellschaft besitzt in einer Stadt 200 Automaten zum Verkauf von Snacks. Jeder Automat hat (unabhängig von den anderen) mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1/20$ pro Woche eine Störung.*

Die Zufallsvariable X_i modelliere den Ausfall des i-ten Automaten; sie nehme den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit p und den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ an (Bernoulli-Verteilung).

(a) *Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X_1)$ und die Varianz $V(X_1)$. (je 1 Punkt)*

$$E(X_1) = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p = 1/20$$
$$V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = p - p^2 = p\cdot(1-p) = 19/400$$

(b) *Es sei $S_{200} = X_1 + \ldots + X_{200}$ die Gesamtzahl wöchentlicher Ausfälle. Finden Sie $E(S_{200})$ und $V(S_{200})$. (je 1 Punkt)*

Laut Aufgabenstellung sind die Zufallsvariablen unabhängig, daraus ergibt sich, dass sich neben den Erwartungswerten auch die Varianzen addieren. Also

$$E(S_{200}) = 10$$
$$V(S_{200}) = 19/2$$

(c) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen in einer Woche keine Automaten aus? (1 Punkt)*

$$P(S_{200} = 0) = (1-p)^{200}$$

(d) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen in einer Woche genau 5 Automaten aus? (1 Punkt)*

$$P(S_{200} = 5) = \binom{200}{5}\cdot p^5\cdot(1-p)^{195}$$

Bsp.

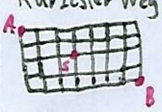
exakt 4 gleich von 10 auf 5 Plätzen : $10\cdot\binom{5}{4}\cdot 9$

" 3 " : $10\cdot\binom{5}{3}\cdot 9$

10 Personen im Kreis. # Möglichkeiten $\frac{10!}{10}$

Sitzordnung 5 Personen 2 Plätze $\frac{5!}{(5-2)!}$

Kürzester Weg:



$\frac{11!}{7!\cdot 4!}$ ohne S.

durch S. $\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}$

7:4 Tore $\frac{11!}{7!\cdot 4!}$

$Y = X_1 + X_2$ $\quad Z = X_1\cdot X_2$

$E(Z) = E(X_1)\cdot E(X_2)$

$E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Erwartungswert (Spiel fair):

$p\cdot 1 = (1-p)\cdot 10$

$\Rightarrow p = \frac{10}{11}$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$, wenn A, B disjunkt $(A\cap B = \{\})$

else $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$