Manit3 Zusammenfassung Kombinatorik geordnet 1. ①

Es gilt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Bsp. $\binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}$

1) Digitaler Display 5 Stellen, Ziffern 0 - 9

a) unterschiedliche Display Einstellungen? 10^5

b) bei wievielen Displayeinstellungen alle Ziffern unterschiedlich? $\frac{10!}{5!}$

c) Displayeinstellung beginnentenden mit ungerade Zahl? $10^3 \cdot 5 \cdot 5$

d) 4 nebeneinander die Zahl 4. 19 = 10 Möglichkeiten + 10 Möglichkeiten - (1 Möglichkeit 44444)

e) exakt 4 gleiche Ziffern? $10 \cdot \binom{5}{4} \cdot 9^1 \quad = 9^{(5-4)}$

f) exakt 3 gleiche Ziffern? $10 \cdot \binom{5}{3} \cdot 9^2 \quad = 9^{(5-3)}$

2) Fussballspiel endet mit 7:4. Mögliche Torefolgen? 11 Tore $\frac{11!}{7!\cdot 4!}$

Zwei Ereignisse Marginalisierung

abhängiges Ereignis = nicht zurücklegen
unabhängiges Ereignis = zurücklegen

W_1 \ W_2	K	Z
K	0.49	0.21
Z	0.21	0.09

Wahrscheinlichkeit für Kopf
0.49 + 0.21 = 0.7
0.21 + 0.09 = 0.3
Wahrscheinlichkeit für Zahl

unabhängig weil 0.7 · 0.7 = 0.49

	A	$\bar{A}$
Z	0.56	0.01
$\bar{Z}$	0.25	0.18

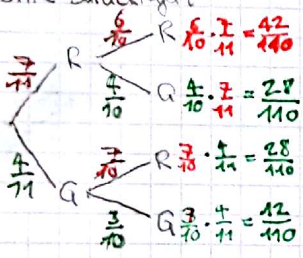
Wahrscheinlichkeit für Raucher →
0.56 + 0.01 = 0.57
0.25 + 0.18 = 0.43
Wahrscheinlichkeit für nichtraucher →

abhängiges Ereignis weil 0.57 · 0.81 ≠ 0.56

trinken 0.56 0.01 nicht trinken
↓ + 0.25 + 0.18 ↓
= 0.81 = 0.19

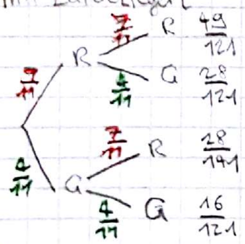
3) 7 rote 4 grün 2 Bälle blind 11 Bälle

a) ohne Zurücklegen



abhängig

b) mit Zurücklegen



Bedingte Wahrscheinlichkeiten
gemeinsame Wahrscheinlichkeit

P	mag Hunde	keine Hunde
Mag Katzen	0.15	0.30
keine Katzen	0.25	0.30

zuerst Katze dann Hund (K | H) $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$(K|H) = \frac{0.15}{0.15+0.30} = \frac{1}{3}$ $\quad (K|\bar{H}) = \frac{0.30}{0.15+0.30} = \frac{2}{3}$

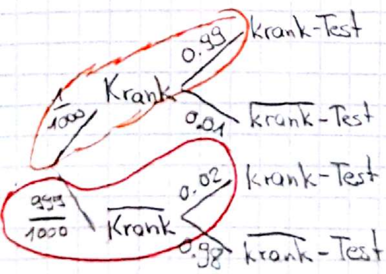
$(\bar{K}|H) = \frac{0.25}{0.25+0.30} = \frac{25}{55}$ $\quad (\bar{K}|\bar{H}) = \frac{0.30}{0.25+0.30} = \frac{30}{55}$

$(H|K) = \frac{0.15}{0.15+0.25} = \frac{3}{8}$ $\quad (H|\bar{K}) = \frac{0.25}{0.15+0.25} = \frac{5}{8}$

$(\bar{H}|K) = \frac{0.30}{0.30+0.30} = \frac{1}{2}$ $\quad (\bar{H}|\bar{K}) = \frac{0.30}{0.30+0.30} = \frac{1}{2}$

Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{bzw.} \quad P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A^c)\cdot P(A^c)}$$



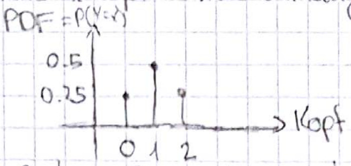
wahrscheinlich gegeben

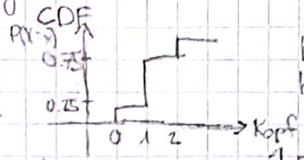
$$P(\text{krank}\,|\,\text{krank-Test}) = \frac{\frac{1}{1000}\cdot 0.99}{\frac{1}{1000}\cdot 0.99 + \frac{999}{1000}\cdot 0.02} = 0.0472$$

Manit 3 Zusammenfassung Verteilung 2. Zufallsvariable

PDF = Dichte
CDF = Verteilung
E(X) = Durchschnitt
= Lagemass

1a) Anzahl Kopf beim zweimaligen Wurf einer fairen Münze





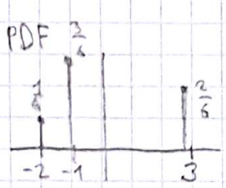
bei 0 ist es 0.25
bei 1 ist es 0.25+0.5
bei 2 ist es 0.25+0.5+0.25

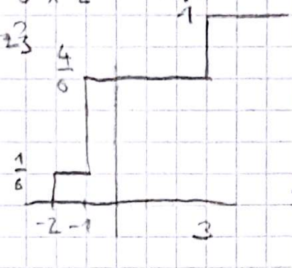
1b) Urne {1x rosa, 3 weiss, 2 schwarz} Ω = {rosa, weiss, schwarz}

$P(\{rosa\}) = \frac{1}{6}$ ⇒ verlieren 2CHF

$P(\{weiss\}) = \frac{3}{6}$ ⇒ verlieren 1CHF

$P(\{schwarz\}) = \frac{2}{6}$ ⇒ gewinnen 3CHF





Erwartungswert E(x) =

$\frac{1}{6}\cdot(-2) + \frac{3}{6}\cdot(-1) + \frac{2}{6}\cdot 3 = \frac{1}{6}$

Standardabweichung = $\sqrt{V(x)}$

Binomealverteilung

1. Anzahl Kopf beim 10-fachen Wurf einer unfairen Münze (70% Zahl)

n = Versuche = 10
k = Erfolge = Anzahl Kopf = 1
p = Erfolgswahrscheinlichkeit = 0.3
1-p = 0.7

$P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \Rightarrow P(X=1) = \binom{10}{1}\cdot 0.3^1 \cdot (1-0.3)^9$

$E(x) = n\cdot p = 10\cdot 0.3 = \underline{\underline{3}}$

Erwartungswert

1. Anzahl Kopf beim zweimaligen Werfen einer fairen Münze. $E(x) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + \ldots = 3.5$

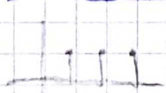
$V(x) = \frac{1}{6}\cdot(1-3.5)^2 + \frac{1}{6}\cdot(2-3.5)^2 + \frac{1}{6}\cdot(3-3.5)^2 = 2.92$

$V(x) = E((x-E(x))^2)$

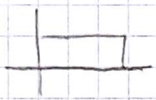
$E(\alpha X + b) = \alpha E(x) + b$; bleibt gleich $V(X+b) = V(x)$; quadriert sich $V(\alpha\cdot X) = \alpha^2 V(x)$

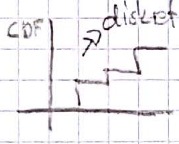
Stetig verteilte Zufallsvariable 2.3 kommt nicht 2.4 Gauss Normalverteilung kommt nicht

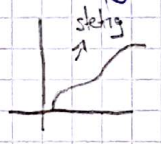
nicht



sondern







Linearität des Erwartungswert

$E(Y_1) + E(Y_2) = E(Y_1 + Y_2)$ 1. Summe der Augen von 2 Würfel $Y = X_1 + X_2$ "Bernoulli"-verteilung

X_1 : Augen im Wurf 1 $E(X_1) = 3.5$

X_2 : Augen im Wurf 2 $E(X_2) = 3.5$

$E(Y) = 3.5 + 3.5 = \underline{\underline{7}}$

Gesetz der grossen Zahlen

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ $X_i \begin{cases} 1, & \text{mit } p \\ 0, & \text{mit } 1-p \end{cases}$ $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \overline{X_n}$ = "zählt Erfolge"

gilt immer: $E(\overline{X_n}) = p$ gilt nur bei Unabhängigkeit: $V(\overline{X_n}) = \frac{V(X_i)}{n}$