Throughput = Stück produziert pro Tag
Cycletime = [Zeiteinheit] im Arbeitstag

$$N = \lambda \cdot W$$
$$WIP = TH \cdot CT$$

$WIP$ : (Mean) Work in Process ("(mittlere) Ware-In-Arbeit, WIA")
$TH$ : (Mean) Throughput ("(mittlerer) Durchsatz", "(mittlere) Produktionsrate")
$CT$: (Mean) Cycle Time ("(mittlere) Durchlaufzeit, DLZ")

## Überblick: Beschreibende Parameter

| | |
|---|---|
| $\lambda$ | (mittlere) Ankunftsrate |
| $1/\lambda$ | (mittlere) Zwischenankunftszeit 1 / lambda = TH / CT |
| $\mu$ | (mittlere) Bedienrate (entspricht "Kapazität" einer Arbeitsstation) |
| $1/\mu$ | (mittlere) Bedienzeit (bearbeitungszeit) |
| $s$ | Anzahl Arbeitsstationen |

Davon abgeleitete Grösse:
$\rho$ (mittlere) Auslastung
(auch: Auslastungsgrad, Ausnutzungsgrad, Verkehrsintensität, ...)

Es gilt:
$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$ allgemein bei $s \geq 1$ Arbeitsstationen
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ speziell bei $s = 1$ Arbeitsstation

3.2 Einige Grundbegriffe der Warteschlangentheorie

## Überblick: Leistungskennzahlen

| | |
|---|---|
| $E[N]$ | (mittlere) Anzahl Kunden im System avg. WIP |
| $E[N_q]$ | (mittlere) Anzahl Kunden in Warteschlange anzahl Stücke im Input-Buffer |
| $E[W]$ | (mittlere) Aufenthaltszeit eines Kunden im System avg. Durchlaufzeit |
| $E[W_q]$ | (mittlere) Aufenthaltszeit eines Kunden in Warteschlange ("Wartezeit") |

$p_i$ Wahrscheinlichkeit, dass genau $i \geq 0$ Kunden im System sind d.h. $p_i = P[N = i]$

## Grundlegende Zusammenhänge

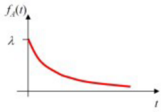
$$E[W] = \frac{E[N]}{\lambda} \qquad \text{Formel von Little}$$
$$E[W_q] = E[W] - \frac{1}{\mu}$$
Wartezeit = Durchlaufzeit - Bearbeitungszeit
$$E[N_q] = \lambda \cdot E[W_q] \qquad \text{Formel von Little}$$

- Beachte: Falls $E[N]$ gegeben ist, können die anderen drei Leistungsmasse daraus berechnet werden.

## Das Modell $M/M/1$

Die Kunden gelangen in die Schlange gemäss einem *Poisson-Prozess*, d.h. die Zwischenankunftszeiten sind gegenseitig unabhängige, identisch exponential-verteilte (iid) Zufallsgrössen. Die Dichte ist

$$f_A(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$




$\lambda$ ist die mittlere Ankunftsrate
$1/\lambda$ ist die mittlere Zwischenankunftszeit
(d.h. der Erwartungswert der durch $f_A$ definierten Verteilung)

Eine *einzige* Bedienungsstelle kümmert sich um diese Kunden und zwar in der Reihenfolge *FIFO*. Die jeweilige Bedienungszeit ist eine exponential-verteilte Zufallsgrösse mit Dichte

$$f_S(t) = \mu e^{-\mu t}$$

$\mu$ ist die mittlere Bedienungsrate

$1/\mu$ ist die mittlere Bedienungsdauer
(d.h. der Erwartungswert der durch $f_S$ definierten Verteilung)
Die Anzahl $a(t)$ im Zeitintervall $[0, t)$ eingetroffener Kunden ist eine Poisson-verteilte Zufallsgrösse mit Erwartungswert $(\lambda t)$. Es gilt

$$P[a(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} : k = 0,1,2,...$$

Ist das System im statistischen Gleichgewicht (stationär), so gilt dasselbe für die Anzahl Kunden $b(t)$, die das System in diesem Zeitintervall verlassen.

Im Folgenden wird die stationäre Verteilung der Anzahl $N(t)$ der *zum Zeitpunkt t im System anwesenden Kunden* hergeleitet (für den Fall, dass $t$ gegen unendlich strebt und das System stationär ist).

## Modell M/M/1

$$E[N] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$
$$E[W] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{1}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$
$$E[W_q] = E[W] - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$
$$E[N_q] = \lambda \cdot E[W_q] = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Wahrscheinlichkeit für n Kunden im System: $p_n = P[N = n] = \rho^n (1-\rho)$

Beachte:
- Die Formeln sind nur gültig für $\rho < 1$ (gilt immer im stationären System)
- Für $\rho \to 1$ wachsen alle 4 Kennzahlen ins Unendliche!

## Modell M/M/2

$$E[N] = \frac{2\rho}{1-\rho^2}$$
$$E[W] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot \frac{1}{\mu}$$
$$E[W_q] = E[W] - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \cdot \frac{1}{\mu}$$
$$E[N_q] = \lambda \cdot E[W_q] = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2}$$

$$\pi_0 = P[N = 0] = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$
$$\pi_n = P[N = n] = \begin{cases} 2\rho^2 \frac{1-\rho}{1+\rho} : n = 1 \\ \frac{4\rho^n}{2} \frac{1-\rho}{1+\rho} : n = 2,3,\ldots \end{cases}$$

Beachte:
- $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$
- Die Formeln sind nur gültig für $\rho < 1$ (gilt immer im stationären System)
- Für $\rho \to 1$ wachsen alle 4 Kennzahlen ins Unendliche!

## 4.4.1 Glättungsverfahren bei gleichmässigem Bedarf

- Annahme: Bedarf unterliegt **nur zufälligen Schwankungen**, d.h. Zeitreihe hat **nur Komponente *I*.**

### A) Gleitender Durchschnitt ("Moving Average")

**Parameter:**
- $n$: Anzahl berücksichtigte Perioden, $n \geq 1$

$$F(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n+1}^{t} A(i) \qquad \text{"Smoothed Estimate"}$$
$$f(t+\tau) = F(t) \qquad \tau = 1,2,... \qquad \text{"Forecast"}$$

- $F(t)$: Durchschnitt der letzten $n$ Beobachtungen

Beachte: $F(t+1) = F(t) + \frac{A(t+1)}{n} - \frac{A(t-n+1)}{n}$

### B) Gewichteter, gleitender Durchschnitt ("Weighted Moving Average")

**Parameter:**
- $n$: Anzahl berücksichtigte Perioden, $n \geq 1$
- $w_i$: Gewicht für Periode i, $i = 1,...,t$, wobei $w_i > 0$ und $\sum_{i=t-n+1}^{t} w_i = 1$

$$F(t) = \sum_{i=t-n+1}^{t} w_i \cdot A(i) \qquad \text{"Smoothed Estimate"}$$
$$f(t+\tau) = F(t) \qquad \tau = 1,2,... \qquad \text{"Forecast"}$$

- $F(t)$: Gewichteter Durchschnitt der letzten $n$ Beobachtungen
- Festlegen der Gewichte: Tendeziell den jüngeren Beobachtungen höhere Gewichte geben als den älteren.

### C) Exponentielle Glättung ("Exponential Smoothing")

**Parameter:**
- $\alpha$: Glättungsparameter, $0 \leq \alpha \leq 1$; Setze $F(1) = A(1)$. Für $t > 1$ setze

$$F(t) = \alpha \cdot A(t) + (1-\alpha) \cdot F(t-1) \qquad \text{"Smoothed Estimate"}$$
$$f(t+\tau) = F(t) \qquad \tau = 1,2,... \qquad \text{"Forecast"}$$

Beachte:
$$f(t+1) = \alpha \cdot A(t) + (1-\alpha) \cdot f(t) = f(t) + \alpha \cdot (A(t) - f(t))$$
Letzte Beobachtung (Kurzfristiger Einfluss)
Prognose für aktuelle Periode t (Einfluss älterer Beobachtungen)

Es gilt:
$\alpha \to 0$: Starke Glättung, da ältere Beobachtungen stärker gewichtet
$\alpha \to 1$: Schwache Glättung, da ältere Beobachtungen kaum ins Gewicht fallen

## 4.4.2 Glättungsverfahren bei einem Trend

- Annahme: Bedarf unterliegt **zufälligen Schwankungen** und einem **Trend**
- D.h. Zeitreihe umfasst die **zwei Komponenten *I* und *T*.**

### A) Exponentielle Glättung mit (linearem) Trend

**Parameter:** $\alpha$: Glättungsparameter für Schätzwert, $0 \leq \alpha \leq 1$
$\beta$: Glättungsparameter für Trend, $0 \leq \beta \leq 1$
- Setze $F(1) = A(1)$ und $T(1) = A(1) - A(0)$. Für $t > 1$ setze

$$F(t) = \alpha \cdot A(t) + (1-\alpha) \cdot [F(t-1) + T(t-1)] \qquad \text{"Smoothed Estimate"}$$
$$T(t) = \beta \cdot [F(t) - F(t-1)] + (1-\beta) \cdot T(t-1) \qquad \text{"Smoothed Trend"}$$
$$f(t+\tau) = F(t) + \tau \cdot T(t) \qquad \tau = 1,2,... \qquad \text{"Forecast"}$$

- Falls $\alpha$, $\beta \to 0$: starke Glättung, falls $\alpha$, $\beta \to 1$: schwache Glättung

**Beachte:**

$$F(t) = \alpha \cdot A(t) + (1-\alpha) \cdot f(t)$$
$$F(t) = \alpha \cdot A(t) + (1-\alpha) \cdot [F(t-1) + T(t-1)]$$
Vorhergehender geglätteter Schätzwert
Vorhergehender geglätteter Trend

$$T(t) = \beta \cdot [F(t) - F(t-1)] + (1-\beta) \cdot T(t-1)$$
"Neu beobachteter Trend"

## 4.4.3 Glättungsverfahren bei Trend und Saisonalität

- D.h. Zeitreihe umfasst die **drei Komponenten *I*, *T* und *S*.**

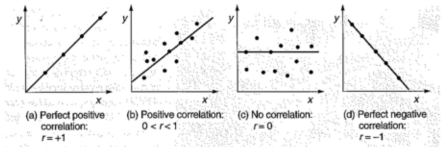
**Winters Methode** *(Winters, 1960)*

**Parameter:**
- $\alpha$: Glättungsparameter für Schätzwert, $0 \leq \alpha \leq 1$
- $\beta$: Glättungsparameter für Trend, $0 \leq \beta \leq 1$
- $\gamma$: Glättungsparameter für Saisonalität, $0 \leq \gamma \leq 1$

$$F(t) = \alpha \cdot \frac{A(t)}{c(t-N)} + (1-\alpha) \cdot [F(t-1) + T(t-1)] \quad \text{"Smoothed Estimate"}$$
$$T(t) = \beta \cdot [F(t) - F(t-1)] + (1-\beta) \cdot T(t-1) \quad \text{"Smoothed Trend"}$$
$$\boxed{c(t) = \gamma \cdot \frac{A(t)}{F(t)} + (1-\gamma) \cdot c(t-N) \quad \text{"Smoothed Saisonality"}}$$
$$f(t+\tau) = [F(t) + \tau \cdot T(t)] \cdot c(t+\tau-N), t+\tau = N+1, \ldots, 2N \quad \text{"Forecast"}$$

Falls $\alpha$, $\beta$, $\gamma \to 0$: starke Glättung, falls $\alpha$, $\beta$, $\gamma \to 1$: schwache Glättung

Initialisierung von $c(t)$ mit Saisonfaktoren: $c(t) = \frac{A(t)}{\sum A(t)/N}$




**Korrelationskoeffizient**

$$r_{xy} := \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Alternative Berechnung von $r_{xy}$:

$$r_{xy} := \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right]\left[n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}}$$

# Exponentielle Glättung mit linearem Trend für verschiedene $\alpha$ und $\beta$

3.4 Das Modell $M|M|s$

- Masse zur Qualitätsbeurteilung:

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^{m} |f(i) - A(i)|}{m}$$
$$MSD = \frac{\sum_{i=1}^{m} [f(i) - A(i)]^2}{m}$$
$$BIAS = \frac{\sum_{i=1}^{m}(f(i) - A(i))}{m}$$

## Übersicht: Kennzahlen für Modell M/M/2

$$E[N] = \frac{2\rho}{1-\rho^2}$$
$$E[W] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot \frac{1}{\mu}$$
$$E[W_q] = E[W] - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \cdot \frac{1}{\mu}$$
$$E[N_q] = \lambda \cdot E[W_q] = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2}$$

$$\pi_0 = P[N = 0] = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$
$$\pi_n = P[N = n] = \begin{cases} 2\rho^2 \frac{1-\rho}{1+\rho} : n = 1 \\ \frac{4\rho^n}{2} \frac{1-\rho}{1+\rho} : n = 2,3,\ldots \end{cases}$$

Beachte:
- $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$
- Die Formeln sind nur gültig für $\rho < 1$ (gilt immer im stationären System)
- Für $\rho \to 1$ wachsen alle 4 Kennzahlen ins Unendliche!

| | |
|---|---|
| **Anzahl Kunden im System (an Warteposition oder in Bedienung)** | **N** |
| **Anzahl Kunden in Warteschlange** | $\mathbf{N_q}$ |
| **Aufenthaltszeit eines Kunden im System** | **W** |
| **Wartezeit eines Kunden in Warteschlange** | $\mathbf{W_q}$ |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 9 | 9 | 12.42 | 1.02 | 13.28 | 4.28 | 18.30 | -4.28 |
| | 10 | 10 | 6 | 11.95 | 0.72 | 13.44 | 7.44 | 55.35 | -7.44 |
| | 11 | 11 | 5 | 11.14 | 0.41 | 12.67 | 7.67 | 58.86 | -7.67 |
| | 12 | 12 | 4 | 10.04 | 0.11 | 11.55 | 7.55 | 57.01 | -7.55 |
| 1998 | 1 | 13 | 5 | 9.12 | -0.09 | 10.15 | 5.15 | 26.54 | -5.15 |
| | 2 | 14 | 4 | 8.02 | -0.30 | 9.03 | 5.03 | 25.27 | -5.03 |
| | 3 | 15 | 7 | 7.58 | -0.32 | 7.73 | 0.73 | 0.53 | -0.73 |
| | 4 | 16 | 7 | 7.20 | -0.34 | 7.26 | 0.26 | 0.07 | -0.26 |
| | 5 | 17 | 15 | 8.50 | -0.01 | 6.87 | 8.13 | 66.11 | 8.13 |
| | 6 | 18 | 17 | 10.19 | 0.33 | 8.49 | 8.51 | 72.50 | 8.51 |
| | 7 | 19 | 24 | 13.22 | 0.87 | 10.52 | 13.48 | 181.74 | 13.48 |
| | 8 | 20 | 18 | 14.87 | 1.03 | 14.08 | 3.92 | 15.33 | 3.92 |
| | 9 | 21 | 12 | 15.12 | 0.87 | 15.89 | 3.89 | 15.17 | -3.89 |
| | 10 | 22 | 7 | 14.19 | 0.51 | 15.99 | 8.99 | 80.75 | -8.99 |
| | 11 | 23 | 8 | 13.36 | 0.24 | 14.70 | 6.70 | 44.89 | -6.70 |
| | 12 | 24 | 6 | 12.08 | -0.06 | 13.60 | 7.60 | 57.81 | -7.60 |
| | | | | | | Mittel: | 5.71 | 48.89 | -0.36 |

Werkstücke kommen an einer Maschine an, wo sie bearbeitet werden. Bei belegter Maschine warten sie in einem Input-Puffer.

Durchschnittlich treffen 15 Stück pro Stunde ein.

Die mittlere Bearbeitungsdauer für ein Stück beträgt 3 Minuten.

**Zu bestimmen sind folgende Kenngrössen:**

- der mittlere Auslastungsgrad $\rho$
- die mittlere Anzahl Stücke im System (im Input-Puffer und auf der Maschine) $N$
- die mittlere Anzahl der wartenden Stücke im Input-Puffer $N_q$
- die mittlere Wartezeit eines Stücks $W_q$
- die mittlere Durchlaufzeit (Warten + Bearbeitung) eines Stücks $W$
- die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zwei Stücke im Input-Puffer sind

- (Mittlere) Ankunftsrate: $\lambda = 15$ *[1/h]*
- (Mittlere) Bearbeitungszeit: $\frac{1}{\mu} = 3$ *[min]* $= \frac{1}{20}$ *[h]*
- (Mittlere) Bedienrate: $\mu = 20$ *[1/h]*
- (Mittlerer) Auslastungsgrad: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{20} = 0.75$
- $E[N] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.75}{1-0.75} = 3$
- $E[W] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{3}{15} = 0.20$ *[h]* $= 12$ *[min]*
- $E[W_q] = E[W] - \frac{1}{\mu} = \frac{3}{15} - \frac{1}{20} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$ *[h]* $= 9$ *[min]*
- $E[N_q] = \lambda E[W_q] = 15 \cdot \frac{3}{20} = \frac{9}{4} = 2.25$

**Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2 Stücke im Input - Puffer sind :**

- Gesucht: $P[N_q > 2]$
- Es gilt: $P[N_q > 2] = P[N > 3]$ (Weshalb?)
- $P[N > 3] = 1 - P[N \leq 3] = 1 - (P[N=0] + P[N=1] + P[N=2] + P[N=3])$
  $= 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3)$
- Gemäss Formel gilt: $p_n = \rho^n (1-\rho)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Also: $P[N > 3] = 1 - (1-\rho)(\rho^0 + \rho^1 + \rho^2 + \rho^3) =$
  $= 1 - (1-0.75)(1 + 0.75 + 0.75^2 + 0.75^3)$
  $= 0.3164\ldots$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2 Stück im Puffer sind, beträgt somit 31.6%.