SM1 Zusammenfassung – Kinematik

Physik: Beschreibung und Erforschung messbarer Grössen, insbesondere der Beschreibung der Veränderung gesetzmässigkeiten mit Hilfe von Mathematik

Kinematik: Beschreibt Bewegung von Objekten. Nicht "warum" sondern "wie bewegen"

Koordinatensystem: Zur Beschreibung eines Punktes in einem n-dimensionalen Raum braucht man n Zahlen. => 3 Dimensionen = 3 Zahlen
↳ Kartesische Koordinaten (x, y, z)

Kinematik eines Punktes: Benötigt: Koordinaten vom Punkt über Zeit

↳ 3 Funktionen: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ OR $\vec{r}(t) = \vec{P_1} + \vec{v}\,t$

slide at

$\vec{v} = k(\vec{P_1} - \vec{P_2}) \Rightarrow |\vec{v}| = k \cdot \sqrt{(\vec{P_1} - \vec{P_2})^2}$

Trajektion: (ortskurve) • $\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow$ Kraft = Masse × Beschleunigung

DIFFERENTIATE f(x)? inkl. y-schnitt!?

Trajectory
~~speed~~
velocity
~~speed~~
acceleration

INTEGRATE

- Geschwindigkeit ist Ableitung der Ortskurve
  ↳ ist ein Vektor, hat eine Richtung
- Schnelligkeit (speed) ist Betrag der Geschwindigkeit (velocity)svektors
- Beschleunigung (acceleration) ist die $\underbrace{\text{Zeitliche}}_{\text{zweite}}$ Ableitung der Geschwindigkeit

Ortsfunktion (Ort): $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Geschwindigkeit (velocity): $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \\ V_z(t) \end{pmatrix}$

Beschleunigung (acceleration): $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right)$

$a = \frac{V_{final} - V_{initial}}{\Delta\, time}$

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Winkelgeschwindigkeit:
- Beschreibt "Winkel pro Sekunde"
- Einheit: Radian (immer)

Bsp.:
- Kreis hat 360° -> 2π
- 1 Drehung / Sekunde = Winkelgeschwindigkeit ≙ $2\pi\, s^{-1}$
- "s^{-1}" = Pro Sekunde

–> 20 Kreisdrehungen/Sekunde: $\omega = 20 * 2\pi s^{-1}$

Convert RPM to $||\vec{v}||$ Example

7.5e4 RPM, r = 0.075m

$v = 7.5e4 \cdot \frac{2\pi(0.075)}{60} = 585 \frac{m}{s}$

–> Circumference

–> "pro Sekunde"

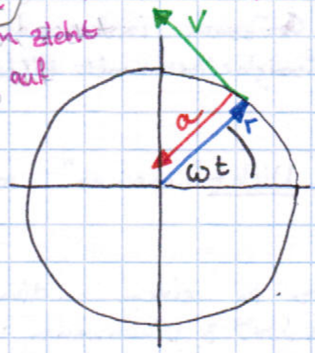
Auch Radiale Kraft $|\vec{F_r}| = m\omega^2 r$

SOH CAH TOA
CAT

$\omega \to v$

Centripetale Kraft: (Net Forces)

! $\boxed{F = m\frac{v^2}{r}}$: Kraft die das Objekt ins Zentrum zieht
↳ "Spannung auf dem Seil"



$\vec{r}(t)$: Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}(t)| = r$$
$$|\vec{v}(t)| = r\omega$$
$$|\vec{a}(t)| = r\omega^2$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos(\omega t) \\ -r\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$T = \frac{1}{\nu}$
Periode → Frequenz

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Periode – Kreisfrequenz

T : Periode, Zeit für einen Umlauf

$$|\vec{r}(t)| = r$$
$$|\vec{v}(t)| = \omega r$$
$$|\vec{a}(t)| = \omega^2 r = \frac{|\vec{v}(t)|}{r} = \frac{v^2}{r}$$

$$F = m\cdot\omega^2\cdot r \to \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{F}{m\cdot r}}$$

"Bei welcher Frequenz reisst die Schnur?"

Masse eines Planeten : $m\vec{a} = -\gamma\frac{mM_E}{|\vec{r}_{mM_E}|^2}\vec{n}_{mM_E}$ $\qquad M_E = \frac{g\cdot r^2}{\gamma}$

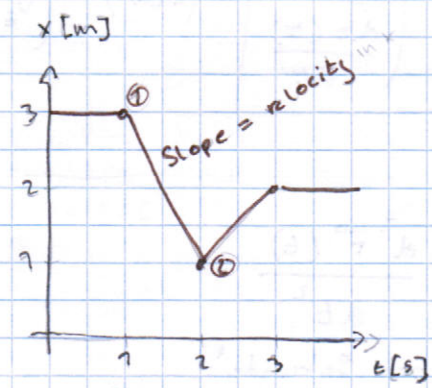
$m/s \xrightarrow{\cdot 3.6} km/h$

$km/h \xrightarrow{\div 3.6} m/s$

Fallzeit: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ⇒ bei Horizontalen Wurf

Aufprallgeschwindigkeit $v_a = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ unter beachtung der Energieerhaltung!

Anziehungsbeschleunigung eines Planeten $\|\vec{a}\| = \gamma\cdot\frac{M_{planet}}{r^2_{planet}}$

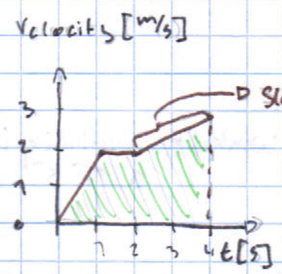


Velocity @ $t = 1.5 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1-3}{2-1} = -\frac{2}{1} = -2\,m/s$

$2\cdot\vec{a}\cdot\vec{s} = V_{fin}^2 - V_{init}^2$ // $\vec{s}$ = "Distanz"

$\vec{s} = \vec{V}_{init}\cdot\Delta t + \frac{1}{2}\cdot\vec{a}\cdot(\Delta t)^2$ // Assumes constant acceleration ($\vec{a}$)

$\vec{V}_{final} = \vec{V}_{in} + \vec{a}\cdot\Delta t$ // $\vec{a}$ VORZEICHEN BEACHTEN!



⇒ Slope = acceleration ⇒ Avg acceleration $= \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ $\qquad v = a\cdot t$

▨ = Distance Travelled ("Kästchen zählen")

SM2: Zusammenfassung Mechanik

$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$ => Kraft = Masse · Beschleunigung

Einheit: N

$[N] = \left[\frac{kg \cdot meter}{s^2}\right]$

$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}}$ auf Erde $\boxed{\vec{F} = g \cdot m}$, $9.81\ m/s^2$

Massenpunkt Bestandteile: 1. m => Masse

2. Ortsvektor $\vec{r}(t)$ (Trajektorie)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

3. Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

Newton Laws:

1. Geschwindigkeit eines Körpers ändert sich nur bei Krafteinwirkung

Zeitliche Ableitung von Massenpunkt (Geschwindigkeit $\vec{v}$ und Masse m)
↳ Beschleunigung vom Massenpunkt $= \vec{a}$

Falls $\vec{a} = 0$ => Keine Bewegung oder nur auf gerader Linie

2. Beschleunigung eines Körpers:

Summe aller auf ihn wirkenden Kräfte, geteilt durch die Masse

↳ $\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i$

3. Übt Körper A eine Kraft $\vec{F}_{BA}$ auf B aus, wirkt auf B $\vec{F}_{AB}$

$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

Newton $= \frac{kg \cdot meter}{sekunde^2}$

Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{M_1 \cdot M_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \vec{n}_{12}$$

Hängt vom Richtungsvektor ab!

$\vec{F}_{12}$: Kraft die M_2 auf M_1 ausübt

$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2 kg^{-2}$

$\vec{r}_{12}$: Vektor von M_1 zu M_2

Gravitations Potential
↳ $= \frac{\text{Energie}}{\text{Masse}}$

Wechselwirkung zwischen 2 Ladungen

$$\vec{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \vec{n}_{12}$$

$\vec{n}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$: Einheitsvektor in Richtung $\vec{F}_{12}$

$\varepsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12}\ C^2 s^2 kg^{-1} m^{-3}$

$C = \underbrace{e}_{\text{Kleinst mögliche Ladung}} = 1.602189 \cdot 10^{-19}$

1 Elektron trägt eine Ladung von genau $-e$

Wie hoch fliegt ein Objekt

$v_0 = 10\ ms^{-1}$ $g = 10\ m s^{-2}$

$z = \frac{v_{init}^2}{2g} \approx 5.1\ m$

Zeit: $t = \frac{2 v_{z,0}}{g}$

Zeit: $t = \frac{2 v_{init}}{g}$

SM3 Impuls und Energie Zusammenfassung

Impuls : $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ $\vec{p}_{total} = \overbrace{\sum_i m_i \cdot \vec{v}_i}^{\to \text{Konstant wenn keine äusseren einflüsse}}$ // Impuls ist additive Grösse

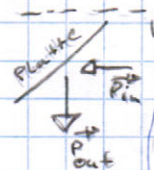
Zeitliche Ableitung des Impuls eines Massenpunkt ist gleich der Kraft, die auf ihn wirkt : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot m$$

Impuls in eine Richtung $\Rightarrow A \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \Delta t$

Volumen $= A \cdot v \cdot \Delta t$
Masse $= A \cdot \rho \cdot v \cdot \Delta t$
Impuls $= A \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \Delta t$

Impulsänderung : $\Delta \vec{p} = \vec{p}_{out} - \vec{p}_{in}$



Impulsänderung pro Zeit $= \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$

$= \frac{\vec{p}_{out} - \vec{p}_{in}}{\Delta t}$

Impulsänderung und Kraft

$$\underline{\Delta \vec{p}} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}(t)\, dt$$

$$\vec{F}_{\varnothing} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \vec{F}(t)\, dt \Rightarrow \vec{F}_{\varnothing} \cdot \Delta t = \underline{\Delta \vec{p}}$$

$$\vec{F}_{Avg} = \frac{2mv}{\Delta t} = \Delta p$$

Sprengsatz Astereoid

$\vec{v}_0 - \vec{v}$ ← o ⚡ (M) → $\vec{v}_0 + \vec{v}$

$$m(\vec{v}_0 - \vec{v}') + (M - m)(\vec{v}_0 + \vec{v}) = M\vec{v}_0$$

$$\vec{v} = \frac{m}{M - m} \cdot \vec{v}'$$

Rotationsenergie $= J \frac{\omega^2}{2}$ (J = Trägheitsmoment $\sum m_i \cdot r^2$ OR $\int r^2 dm$)

Lageenergie (Potential) $= m \cdot g \cdot h = E_{pot}$

$$E_{mech} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}(t))\, d\vec{r}$$

Kinetische energie $= E_{kin} = m \frac{|\vec{v}|^2}{2} = m \frac{v^2}{2}$

EINHEIT : Joule

Federenergie $E_{spring} = k \frac{(L - L_0)^2}{2}$ $\Rightarrow k$ (Federkonstante), L_0 (Ruhelänge), L (ausdehnung / kompri.)

Mechanische Energie $E_{mech} = F \cdot s = m \cdot g \cdot s$

Leistung [Watt] $= \frac{\text{Joule}}{\text{sekunde}}$ $[J s^{-1}]$ in Watt!

Elektro.Mag. Kraft auf ein Teilchen: $\vec{F}_{elmag} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Beispiel: Energieerhaltung $\Rightarrow$ M fällt im Gravitationsfeld, wird auf Höhe (H) losgelassen (keine Reibung). Wie gross ist die Geschwindigkeit auf $h < H$?

$E_{pot}(t) = M \cdot g \cdot h(t)$, $E_{kin}(t) = m \frac{v^2(t)}{2}$, $E_{pot}(t) + E_{kin}(t) = const.$

Elastische Kollision : Keine Energie geht verloren

Inelastische Kollision: Energie geht verloren (therm, reibung etc.)

IMPULS BLEIBT ERHALTEN!

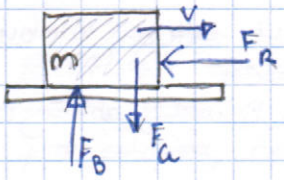
$E_{pot}(0) + E_{kin}(0) = mgh + 0$

$= mgH$

$\Rightarrow mgH = mgh(t) + m \frac{v^2(t)}{2}$

$v(t) = \sqrt{2g(H - h(t))}$

SM3 Coulombreibung



$$\vec{F}_G = -\vec{F}_B \qquad \vec{F}_R = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \vec{n}_v$$

μ = Gleitreibungskoeffizient

$$\vec{n}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

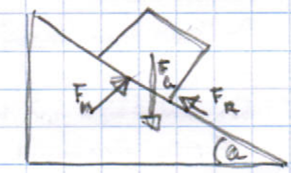
m = Masse

Wie weit kommt der Klotz bei $v_0 = x$ m/s?

$$m \cdot \dot{v}_x = -m \cdot g \cdot \mu \Rightarrow v(t) = v_0 - g \cdot \mu \cdot t$$

$$\Rightarrow t_{stop} = \frac{v_0}{g \cdot \mu} \qquad s = v_0 \cdot t_{stop} - g \cdot \mu \cdot \frac{t_{stop}^2}{2}$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g \mu} = \text{Distanz}$$



$$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0_x \\ -F_{gy} \end{pmatrix} \qquad F_g \cdot \sin(\alpha) = F_R \cdot \cos(\alpha)$$

Standardaufgabe:

wie gross darf α sein μ_H (Haftreibungsko.), ohne das der Klotz ins Rutschen kommt?

$$\alpha < \tan^{-1}(\mu_H)$$

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{n_y} + \vec{F}_{n_x}$$

$$\vec{F}_{R_H} = \vec{F}_{R_y} + (-\vec{F}_{n_x})$$

$$\vec{F}_N = \begin{pmatrix} F_{gx} \cdot \sin(\alpha) \\ F_{gy} \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \cdot \sin(\alpha) \\ -F_G \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_R = \begin{pmatrix} -F_{R_H} \cdot \cos(\alpha) \\ F_{R_y} \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

SM4 Ausgedehnte Körper

<u>Starrer Körper</u>: Distanz zwischen zwei beliebigen Massenpunkten ist zeitlich konstant
↳ Massenpunkte P_i und P_j gilt $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}_{ij}| = C_{ij}$
↳ Wobei die Konstante C_{ij} von den Massenpunkten P_i und P_j abhängt

Math. definition: $\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \;\hat{=}\; \int_\Omega \rho(\vec{r})\, dV$ Volumen integral

m_i : Masse vom Massenpunkt i

$\vec{r}_i$: Position vom Massenpunkt i

Ω : Raumbereich welches das Objekt einnimmt

$\rho(\vec{r})$: Massendichte am Punkt $\vec{r}$ innerhalb von Ω.

<u>Ausgedehnter Körper</u>: Gegeben durch eine Menge von Massenpunkten $\{P_i\}$, welche durch ihre Ortsvektoren $\{\vec{r}_i\}$ zusammen mit ihren Massen $\{m_i\}$ bestimmt sind

<u>Schwerpunkt (center of mass/gravity)</u>: $\vec{r}_s = \dfrac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\boxed{\sum_i m_i}}$ übliche Beschreibung für die Gesamtmasse eines Ausg. Körpers $= M$

Law 6.1: Schwerpunktsatz

$M \cdot \vec{a}_s = \sum_{i,k} \vec{F}_{ik}^{ext.}$ ⇒ Beschleunigung eines Schwerpunktes ist die Summe aller extern angreifenden Kräfte geteilt durch die Summe aller Massen der einzelnen Massenpunkte!

↳ $\vec{a}_s = \frac{1}{M} \sum \vec{F}_{ik}^{ext}$

↳ $M = \frac{1}{\vec{a}_s} \sum \vec{F}_{ik}^{ext}$

⇒ **Schwerpunktgeschwindigkeit** $\vec{v}_s = \dfrac{d\vec{r}_s}{dt}$

$\vec{v}_s = \frac{1}{M} \sum m_i \cdot \vec{v}_i$

⇒ **Schwerpunktbeschleunigung** $\vec{a}_s = \dfrac{d\vec{v}_s}{dt}$

$\vec{a}_s = \frac{1}{M} \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i$

Leistung [Watt] $= \dfrac{\text{Energie [Joule]}}{\text{Zeit [1 Sekunde]}} = \dfrac{\text{Energie}}{\text{Energieträger}} \cdot \dfrac{\text{Energieträger}}{\text{Zeit}}$

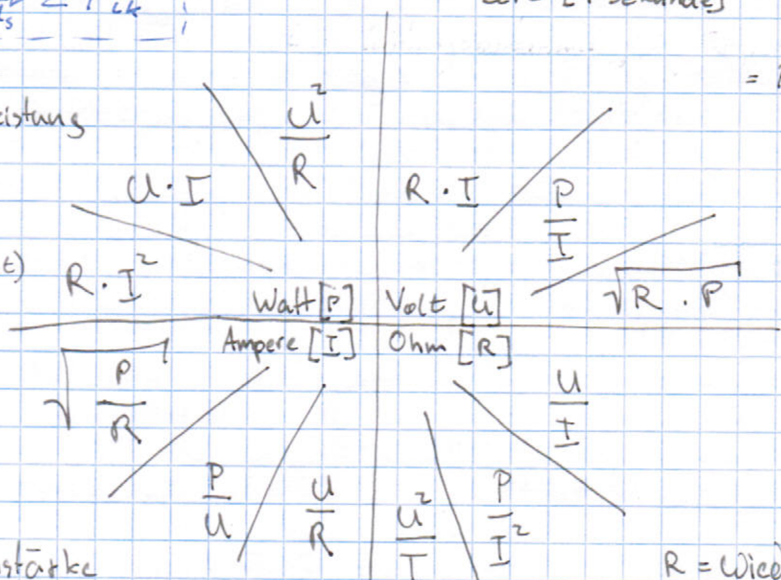
= Potentialdifferenz · Strom

U_a = Gleichstrom

P = Leistung

$P_{DC} = \dfrac{U_a^2}{R}$

$P_{AC} = \dfrac{U^2}{R} \sin^2(\omega t)$



U = Spannung

I = Stromstärke

R = Wiederstand

$P_{DC} = \dfrac{U_a^2}{R}$

$P_{AC} = \dfrac{U_0^2}{R} \sin^2(\omega t)$

$U_0 = \sqrt{2} \cdot U_a$

Energie: $P = \dfrac{dE}{dt}$ ⇒ $E = \int_0^t P(t)\, dt$

U_0 = Amplitude

$U_{eff} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$ ⇒ $P = \dfrac{(\sqrt{2}\, U_{eff})^2}{R} = 2U_{eff}$

SM⑥ Elektrische Felder

$\vec{E}(\vec{r}, t)$ ⇒ Elektrisches Feld, abhänig von Raum ($\vec{r}$) und Zeit (t)

q ⇒ Testladung. Annahme → q verändert nicht das E-Feld!

→ Kraft, die auf q wirkt ⇒ $\underline{\vec{F} = q \cdot \vec{E}}$ ⇒ E-Felder sind "Kraft pro Ladung"
↳ $\left[\frac{\text{Newton}}{\text{Coloumbe}} \right]$

E-Feld: Kugel mit Ladung Q ⇒ $\vec{E}_{kug} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 |\vec{r}|^2} \vec{n}$, $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

E-Feld: Zylinder mit Ladungsdichte λ (Ladung pro Länge)

↳ $\vec{E}_z = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 |\vec{r}_\perp|} \vec{n}_\perp$ $\vec{r}$: Vektor senkrecht zur Zylinderachse

E-Feld: Platte mit Flächenladungsdichte σ (Ladung pro Fläche) zeigt von BEIDEN SEITEN von der Platte weg

↳ $\vec{E}_{Platte} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}_\perp$ $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, $\vec{n}$: Vektor, der senkrecht von der Platte wegzeigt

Elektrisches Potential $E_{pot}(\vec{r}) = \underbrace{-\int_{\infty}^{\vec{r}} Q\vec{E}\, d\vec{s}}_{} = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}}$ ⇒ "Wieviel Energie pro Ladung braucht es um eine Ladung aus dem Unendlichen zum Punkt $\vec{r}$ zu bringen?"

$$= \int_{\vec{r}}^{\infty} Q\vec{E}\, d\vec{s}$$

Kapazität eines Kondensators $[C]$ ⇒ $C \cdot U = Q$

Kapazität Einheit: Farad $\left[\frac{C}{V}\right]$ ↳ $C = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{L}$ A: Fläche, L: Abstand zwischen Platten

↳ $\frac{\text{Kapazität}}{\text{Volt}}$ (?)

$$U = \frac{Q \cdot L}{A \cdot \varepsilon_0}$$

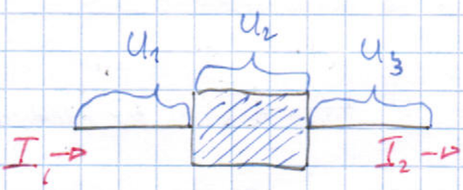
Elektrische Energie: $E_{Elek} = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$ = Elektrisches Potential

Volumen eines Kondensators: $E_{pot} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A \cdot L^2 \cdot E^2}{L \cdot 2} = V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

Energiedichte: $W_E = \frac{E_{pot}}{V} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

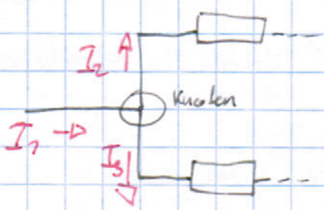
SM7 - Einfache RC - Systeme

Ideale Elemente	Wiederstand [R]	Kapazität [C]	Induktivität [L]
Resistor, wiederstand	R	0	0
Kondensator	0	C	0
Induktor, Spule	0	0	L
Draht	0	0	0



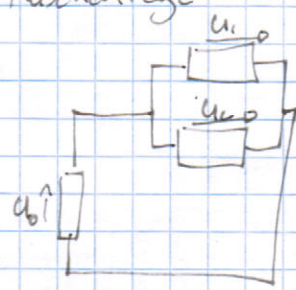
$U_2 = U_1 - U_3$

Knotenregel



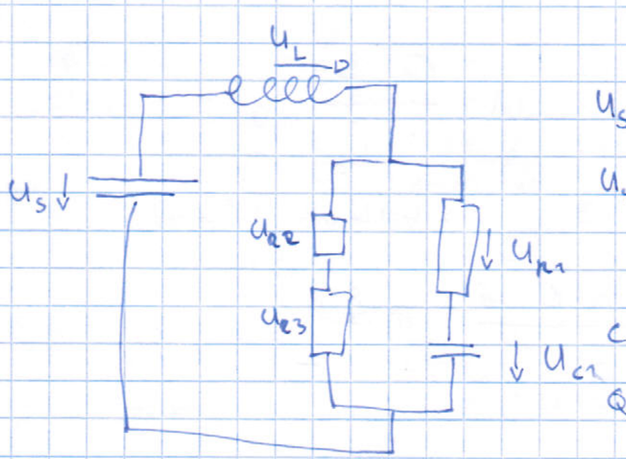
$I_1 - I_2 - I_3 = 0!$

Maschenregel



$U_0 + U_1 = 0 \qquad U_0 + U_2 = 0$

Spannung, die durch Bauelemente fliesst, wird negativ gezählt



$U_S = U_L + U_{R1} + U_{C1} \Rightarrow 0 = -U_S + U_{R1} + U_{C1}$

$U_S = U_L + U_{R2} + U_{R3} \qquad 0 = -U_S + U_{R2} + U_{R3}$

U_S · Spannungsquelle

SM7 - Dynamik von Schaltungen

Vorgehen:

1. Maschen- und Knotensatz verwenden um Relationen zwischen Strömen [I] und Spannungen [U] aufzustellen

2. Ersetzen von allgemeinen Spannungen in Gleichungen durch spezifische Relationen:

Widerstand $[U_R]$	Kondensatoren $[U_C]$	Spule $[U_L]$	Strom zum Kondensator
$U_R = R \cdot I$	$U_C = \frac{Q}{C}$	$U_L = L\frac{dI}{dt}$	$I = \frac{dQ}{dt}$

Gilt nur wenn Referenzrichtung des Spannungsgefälles gleich der Referenzrichtung von Strom ist (Richtung der U und I Pfeile)

Falls U und I antiparallel ist die Veränderungsrate der Ladung $-I$

1. Grössen bestimmen, von denen die Veränderungsraten aus den erzielten Gleichungen bestimmen können

---

How to solve electronics Problems?

$\boxed{\text{Bilanzgleichungen}}$

Pro Kondensator gibt es eine Ladung → Bilanzgleichung.

Pro Spule gibt es einen "Strom" → Bilanzgleichung.

Tipp: Spulen und Kondensatoren in einer Schaltung zählen

Kondensator hat eine Ladung Q_i : Spule hat Strom I_k

⇒ Ziel: Für jede Ladung Q und Strom I eine Bilanzgleichung!

Lösungsschritte:

1. Maschengleichungen aufstellen ⇒ Summe aller Ladungen einer Masche = 0!
2. Knotengleichungen aufstellen ⇒ Summe aller Ströme in und aus einem Knoten = 0!
3. Spannungen über Bauelementen mit Ersatzregeln ersetzen
4. Für $L\frac{dI}{dt} = U_L$ und $\frac{dQ}{dt} = I$ ⇒ Ableitungen als Variablen behandeln und danach auflösen (nach Einsetzen der Bezeichnungen!)

Tipp: Nach dem gefragten Element nach dem Einsetzen umstellen!

5.

$\frac{dQ_i}{dt}$ und/oder $\frac{dI_k}{dt}$ Form: $\frac{dQ_{1-N}}{dt} = \dots$ und/oder $\frac{dI_{1-M}}{dt} = \dots$

sind in BM die Zuleitungen zu den Q_i und I_k - Töpfen. Töpfe selber haben Startwerte der Ladungen in Kondensatoren / Ströme durch Spulen

Falls: $\frac{dX}{dt} = aX + \beta$, $X(0) = X_0$ $a, \beta \in \mathbb{R}$

Lösung ohne BM nur für diesen Fall!

dann $\Rightarrow$ $X(t) = -\frac{\beta}{a} + \left(\frac{\beta}{a} + X_0\right) \cdot e^{a \cdot t}$

Interpretatifion von Diagrammen

Beispiel: Bilanzgleichung $\frac{dQ}{dt} = \frac{U_s}{R} - \frac{Q}{RC}$

Falls vorhanden: Diagramm für $Q(t)$

↳ Ablesen von Q bei t

↳ Ablesen der veränderungsrate bei t

Falls notwendig Bilanzgleichung nach weiteren Grössen umstellen.

Typische Fragen:

1. Systemgrösse (z.B. Spannung) im stationären Zustand.
2. Zeitkonstante ermitteln und was bringt das?
3. Steigung (= Veränderungsrate) bestimmen und was kann man aus ihr ablesen?
4. Fläche unter Kurve bestimmen und was bedeutet sie?

Tipps und Tricks:

- Gegeben: 1. Diagramm der Spannung $U(t)$
  2. Kapazität vom Kondensator $[C]$

  ↳ Spannung im Kondensator: $Q(t) = C \cdot U(t)$

- Gegeben / Bekannt: Diagramm der Ladung $Q(t)$ im Kondensator

  ↳ Für Zeitpunkt t die Ableitung der Ladung graphisch ermitteln

- Gegeben / Bekannt: 1. Spannung über einen Widerstand
  2. Strom durch den Widerstand

  ↳ Widerstand mit Ω - Gesetze $\left(R = \frac{U}{I}\right)$

Berechnen Stationären Zustand eines Systems

Rechnerisch: Veränderungsrate eines Systemzustands = 0

1. Gegebene Funktion ableiten $\frac{dx}{dt} = F(x)$

2. $F(x) = 0$ setzen und nach x auflösen. Falls möglich ist die Lösung stationär

---

Energetische Betrachtung

$$E_{Kondensator} = C\frac{U^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

$$E_{Spule} = L\frac{I^2}{2}$$

Typische Fragen:

1. Wieviel Energie wird benötigt um Kondensator mit Kapazität C auf Ladung Q aufzuladen?

2. Wieviel Energie wird benötigt damit durch eine Spule mit Induktivität L ein Strom I fliesst?

5.

$\frac{dQ_i}{dt}$ und/oder $\frac{dI_k}{dt}$ Form: $\frac{dQ_{1-N}}{dt} = \dots$ und/oder $\frac{dI_{1-M}}{dt} = \dots$

sind in BM die Zuleitungen zu den Q_i und I_k - Töpfen. Töpfe selber haben Startwerte der Ladungen in Kondensatoren / Ströme durch Spulen

Falls: $\frac{dX}{dt} = aX + \beta$, $X(0) = X_0$ $a, \beta \in \mathbb{R}$

Lösung ohne BM nur für diesen Fall!

dann $\Rightarrow$ $X(t) = -\frac{\beta}{a} + \left(\frac{\beta}{a} + X_0\right) \cdot e^{a \cdot t}$

Interpretatition von Diagrammen

Beispiel: Bilanzgleichung $\frac{dQ}{dt} = \frac{U_s}{R} - \frac{Q}{RC}$

Falls vorhanden: Diagramm für $Q(t)$

↳ Ablesen von Q bei t

↳ Ablesen der Veränderungsrate bei t

Falls notwendig Bilanzgleichung nach weiteren Grössen umstellen.

Typische Fragen:

1. Systemgrösse (z.B. Spannung) im stationären Zustand.
2. Zeitkonstante ermitteln und was bringt das?
3. Steigung (=Veränderungsrate) bestimmen und was kann man aus ihr ablesen?
4. Fläche unter Kurve bestimmen und was bedeutet sie?

Tipps und Tricks:

- Gegeben: 1. Diagramm der Spannung $U(t)$
  2. Kapazität vom Kondensator $[C]$

  ↳ Spannung im Kondensator: $Q(t) = C \cdot U(t)$

- Gegeben/Bekannt: Diagramm der Ladung $Q(t)$ im Kondensator

  ↳ Für Zeitpunkt t die Ableitung der Ladung graphisch ermitteln

- Gegeben/Bekannt: 1. Spannung über einen Widerstand
  2. Strom durch den Widerstand

  ↳ Widerstand mit Ω-Gesetze $\left(R = \frac{U}{I}\right)$

5.

$\frac{dQ_i}{dt}$ und/oder $\frac{dI_k}{dt}$ Form: $\frac{dQ_{1-N}}{dt} = \dots$ und/oder $\frac{dI_{1-M}}{dt} = \dots$

sind in BM die Zuleitungen zu den Q_i und I_k - Töpfen. Töpfe selber haben Startwerte der Ladungen in Kondensatoren / Ströme durch Spulen

Falls: $\frac{dX}{dt} = aX + \beta$, $X(0) = X_0$ $a, \beta \in \mathbb{R}$

Lösung ohne BM nur für diesen Fall!

dann $\Rightarrow$ $X(t) = -\frac{\beta}{a} + \left(\frac{\beta}{a} + X_0\right) \cdot e^{a \cdot t}$

Interpretatition von Diagrammen

Beispiel: Bilanzgleichung $\frac{dQ}{dt} = \frac{U_s}{R} - \frac{Q}{RC}$

Falls vorhanden: Diagramm für $Q(t)$

↳ Ablesen von Q bei t

↳ Ablesen der Veränderungsrate bei t

Falls notwendig Bilanzgleichung nach weiteren Grössen umstellen.

Typische Fragen:

1. Systemgrösse (z.B. Spannung) im stationären Zustand.
2. Zeitkonstante ermitteln und was bringt das?
3. Steigung (= Veränderungsrate) bestimmen und was kann man aus ihr ablesen?
4. Fläche unter Kurve bestimmen und was bedeutet sie?

Tipps und Tricks:

- Gegeben: 1. Diagramm der Spannung $U(t)$
  2. Kapazität vom Kondensator $[C]$

  ↳ Spannung im Kondensator: $Q(t) = C \cdot U(t)$

- Gegeben/Bekannt: Diagramm der Ladung $Q(t)$ im Kondensator

  ↳ Für Zeitpunkt t die Ableitung der Ladung graphisch ermitteln

- Gegeben/Bekannt: 1. Spannung über einen Widerstand
  2. Strom durch den Widerstand

  ↳ Widerstand mit Ω-Gesetze $\left(R = \frac{U}{I}\right)$

5.

$\frac{dQ_i}{dt}$ und/oder $\frac{dI_k}{dt}$ Form: $\frac{dQ_{1-N}}{dt} = \dots$ und/oder $\frac{dI_{1-M}}{dt} = \dots$

sind in BM die Zuleitungen zu den Q_i und I_k - Töpfen. Töpfe selber haben Startwerte der Ladungen in Kondensatoren / Ströme durch Spulen

Falls: $\frac{dX}{dt} = aX + \beta$, $X(0) = X_0$ $a, \beta \in \mathbb{R}$

Lösung ohne BM nur für diesen Fall!

dann $\Rightarrow$ $X(t) = -\frac{\beta}{a} + \left(\frac{\beta}{a} + X_0\right) \cdot e^{a \cdot t}$

Interpretatifion von Diagrammen

Beispiel: Bilanzgleichung $\frac{dQ}{dt} = \frac{U_s}{R} - \frac{Q}{RC}$

Falls vorhanden: Diagramm für $Q(t)$

↳ Ablesen von Q bei t

↳ Ablesen der Veränderungsrate bei t

Falls notwendig Bilanzgleichung nach weiteren Grössen umstellen.

Typische Fragen:

1. Systemgrösse (z.B. Spannung) im stationären Zustand.
2. Zeitkonstante ermitteln und was bringt das?
3. Steigung (= Veränderungsrate) bestimmen und was kann man aus ihr ablesen?
4. Fläche unter Kurve bestimmen und was bedeutet sie?

Tipps und Tricks:

- Gegeben: 1. Diagramm der Spannung $U(t)$
  2. Kapazität vom Kondensator $[C]$

  ↳ Spannung im Kondensator: $Q(t) = C \cdot U(t)$

- Gegeben/Bekannt: Diagramm der Ladung $Q(t)$ im Kondensator

  ↳ Für Zeitpunkt t die Ableitung der Ladung graphisch ermitteln

- Gegeben/Bekannt: 1. Spannung über einen Widerstand
  2. Strom durch den Widerstand

  ↳ Widerstand mit Ω-Gesetze $\left(R = \frac{U}{I}\right)$

SH 10 - Schwingungen / Resonanz

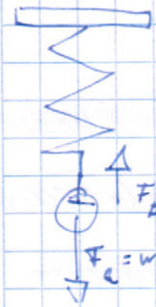
Federn:

- Lineare Feder → Kraft ist linear proportional zur Ausdehnung

$F = -k(r - L)$

k: Federkonstante
L: Gleichgewichtslänge
↳ wenn diese Länge wirken keine Kräfte
r: Tatsächliche Ausdehnung

Hängende Feder mit Gewicht



$F_F = -k(r - L)$

$F_G = m \cdot g$

$$F_{tot} = F_F + F_G$$
$$= -k(r - L_0) + m \cdot g$$
$$= -k\left(r - L_0 - \frac{m \cdot g}{k}\right)$$
$$= -k\left(r - \left(L_0 + \frac{mg}{k}\right)\right)$$
$$= -k(r - L_1)$$

↳ $L_1 = L_0 + \frac{m \cdot g}{k}$

$$F_{tot} = -k(z_{alt} - L_1)$$
$$z_{neu} = z_{alt} - L_1$$
$$F_{tot} = -k\left(z_{neu} + L_1 - \left(L_0 + \frac{mg}{k}\right)\right)$$
$$F_{tot} = -k \cdot z_{neu}$$

z (Achse): Gleichgewichtslage $z = 0$

$$F_{tot} = -kz \Rightarrow m\frac{d^2 z}{dt^2} = -kz$$
$$\Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot z$$
$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = v_z \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot z$$

Bewegungsgleichung

$$f(t) = f_0 \cdot \cos(\sqrt{a}\, t) + \frac{v_0}{\sqrt{a}} \cdot \sin(\sqrt{a} \cdot t) \quad \Leftarrow \quad z(t) = z_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$$

z_0: Startposition, v_0: Startgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$z(t) = A \cdot \cos(\omega t - \phi)$$
$$A = \sqrt{z_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$
$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z_0}{z_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\right)$$

Phase einer Schwingung: $\omega t - \phi$

ϕ: Phasenkonstante/verschiebung

$f(t) = A \cos(\omega t - \phi)$

Funktion wird nach rechts, in die "Zukunft" verschoben

Kinetische Energie einer Schwingung:

Trajektorie: $z(t) = A \cdot \cos(\omega t - \phi)$

Geschwindigkeit der Masse: $v(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - \phi)$

Kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t - \phi)$

Potentielle Energie: $E_{pot} = \frac{k}{2} \cdot z^2$

E_{pot} für Schwingung: $E_{pot} = \frac{k}{2} \cdot A^2 \cdot \cos(\omega t - \phi)$

Totale Energie: $E_{tot} = \frac{kA^2}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2}$

Regeln zu Schwingungen:

E_{tot} → Proportional zur Federkonstante
→ proportional zum Quadrat der Frequenz
→ Proportional zum Quadrat der Amplitude

Q-Faktor = $\dfrac{\text{Totale Energie im Oszillator zu Beginn der Periode}}{2\pi \cdot \text{Energieverlust während der Periode}}$

$Q = \frac{m\,\omega_0}{\gamma}$ $\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

SM10 - (Un)-Gedämpfte Schwingungen

Hydronumischer Widerstand:

- Energie um Kugel im Wasser zu bewegen da Wasser verdrängt werden muss
- Energie $[\vec{F}_d]$ (d: drag) in die Gegenrichtung der Bewegung

$$\vec{F}_d = -\gamma \cdot \vec{v}$$

γ: Hydroreibungskonstante $\left[\frac{kg}{s}\right]$

Für Kugeln: Stokes'sche Gesetz

$$\vec{F}_d = -6\pi\eta r \vec{v}$$

r: Radius der Kugel

η: Viskosität $\left[\frac{kg}{s}\right]$

Gültig für Flüssigkeiten wie Wasser

↳ kleine Kugeln (z.B. 100 nm)

Nicht für grössere Geschwindigkeiten!

Kugel bewegt sich im Wasser:

1. Schwache Dämpfung → $\gamma < 2\sqrt{k \cdot m}$

$$m a_z(t) = -kz - \gamma v_z$$

$$z(t) = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + B)$$

$$\delta = \frac{\gamma}{2m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$$

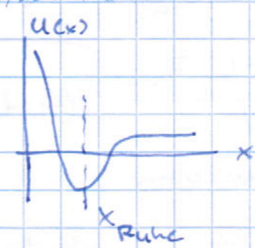
2. Mittlere Dämpfung → $\gamma = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}$

$$z(t) = (A + Bt) \cdot e^{-\delta t}$$

$$U_{Approx}(x) = \frac{k}{2}(x - x_{Ruhe})^2$$

3. Starke Dämpfung → $\gamma > 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}$

Potentiale: Wenn sich ein Teilchen in einem Potential befindet, strebt es an dessen tiefsten Punkt!



Äussere Anregung einer Feder (mit osizilierender Kraft)

1. Nach kompliziertem Einschwingvorgang mit der (Kreis)-Frequenz der Anregung schwingen
2. Amplitude hängt stark von der Anregungsfrequenz ab
3. Bei Resonanzfrequenz kann Amplitude sehr gross werden

Resonanzen:

- Je kleiner die Dämpfung, desto grösser der "Resonanzpeak"
- Bei verschwindender Dämpfung kann die Amplitude unendlich werden
  ↳ System explodiert
- Resonanzfrequenz liegt nahe der natürlichen Frequenz ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Resonanzfrequenz $\Omega_R = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Grössere Werte für 'k' und 'm' → schärfere Resonanz

Schwerere/Steifere Konstruktionen → schärfere Resonanz

$$\text{Amplitude} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2}}$$

Grössere Masse/Induktivität:

↳ Langsamere Dämpfung

↳ kleinere Frequenz

Grössere Reibung/Widerstand

↳ schnellere Dämpfung

↳ kleinere Frequenz

Grössere Federkonstante/Kapazität

↳ Grössere Frequenz

↳ Dämpfung wird nicht beeinflusst!

(Maximale) Resonanzfrequenz:

Mechanische Systeme : $\omega_R = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad \nu_R = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$

LC-Schaltkreis : $\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ $\quad \nu_R = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC}}$

SM11 Elektromagnetische Strahlung im Vakuum

Maxwell'sche Gleichungen → Lösungen zu elek.mag Wellen

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ⇒ Zusammenhang E-Feld und Coulumb-Gesetz

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ ⇒ Es gibt keine elek.mag Ladung

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ⇒ Faraday Induktionsgesetz

ρ: Ladungsdichte

ε_0: Permittivität vom Vakuum $8.85 \cdot 10^{-12}$

$\vec{J}$: Stromdichte

$\vec{B}$: Magnetfeld

Kreisfrequenz ω in Beziehung zur Anzahl Wellenbuckel die pro Sekunde durch einen Punkt gehen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Wellenzahl ⇒ Wellenbuckel pro Meter

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

λ: Distanz zwischen zwei Wellenbuckeln

Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellenbuckeln

↳ Phasengeschwindigkeit

$$v_p = c = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu$$

$$k = \frac{\omega}{c} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Antennen

1. Beschleunigte Ladungen erzeugen elek. und mag. Felder
2. Felder breiten sich aus
3. Ruhende Ladungen am anderen Ort werden nun Beschleunigt Modulation entspricht dem Sender
4. Felder beschleunigen Ladungen am zweiten Ort
5. Beschleunigung führt zu Strom der gemessen und Verstärkt werden kann

- Nur Beschleunigte Ladungen strahlen. Konstante Geschwindigkeit = keine Strahlung
- Kreisförmige Bewegung = Beschleunigung

Länge der Antenne muss ca. der Hälfte der Wellenlänge der abgestrahlten Ladung entsprechen!

Abgestrahlte Energie hängt von der Frequenz der Strahlung ab

$$\text{Senderelfizienz}: \eta = \frac{h^3 \omega^3}{\pi^3 c^3} = \frac{P_{out}}{P_{in}}$$

h: höhe der Antenne
c: Lichtgeschwin.
ω: Frequenz

Eigenschaften Elek.Mag. Strahlung

- Mit Strahlung der Wellenlänge λ sind nur Objekte grösser als λ sichtbar
- Kleinere Wellenlänge = Höhere Energie
- Je nach Wellenlänge können physikalische Systeme durch Resonanz angeregt werden.

Strahlung kürzer als 400nm λ können biologische Molekühle "zerstört" werden

Intensität der Strahlung: [I]

$I = aI + \rho I$

α: Absorbsonskoeffizient

ρ: Reflektionskoeffizient

Schwarzer Körper:

- Gibt Strahlung auf allen Wellenlängen ab
- Maximum der Intensität hängt von Temp. ab

Max vom Spektrum bei gegebener Temp: $\lambda_{max} = \frac{b}{T}$

$b: 2.8978\ [mm\ K] \cdot 10^{-3}$

Abgegebene Leistung eines Schwarzstrahlers: $P = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{k^4}{c^2 \cdot h^3} \cdot A \cdot T$

"Doppelte Hitze = 16 x Energie abstrahlung" $= \sigma A T^4$

A: Fläche

T: Temperatur

$\sigma: 5.67 \cdot 10^{-8}$

Energiefluss aus einem Körper:

$I_E = \sigma \cdot A \cdot (T_k^4 - T_{environment}^4)$

Für Graue Körper: $I_E = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T_k^4 - T_{env}^4)$

ε: Emmissionskoeffizient

SH 12 Elektromagnetische Wellen in Materie und Thermische Strahlung

Strahlung: Intensität = $\frac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \times \text{Zeit}}$

Energiebilanz eines bestrahlten Objects:

$$\frac{dE_{OB}}{dt} = I_{E,rad,in} - I_{E,rad,out} - I_{E,cond,out}$$

$$I_{E,rad,in} = \alpha A j_{E,sol}$$

$$I_{E,rad,out} = \varepsilon A \sigma \left(T^4 - T_{env}^4\right)$$

$$I_{E,cond,out} = A \cdot h \cdot (T - T_{env})$$

A: Fläche vom Objekt

$j_{E,sol}$: Energiestromdichte des Strahlers

ε: Emissionskoeffizient vom Objekt

α: Absorbtionskoeffizient von Objekt

T: Temperatur vom Objekt

h: (totaler) Energieübergangskoeffizient

ρ: Reflexionskoeffizient ($\rho = (1-\alpha)$)

Energie/Entropietransfer:

Konduktion/Conduction: $I_{E,cond} = A \cdot h \cdot (T - T_{env})$

Strahlung/Radiation: $I_{E,rad} = A \cdot \sigma \cdot (T - T_{env}^4)$

Konvektion/Convection: $I_{E,conv} = u \cdot I_m$

A: Systemoberfläche

T: Systemtemperatur

T_{env}: Umgebungstemperatur

h: Energietransferkoeffizient

u: Spezifischer Energiegehalt

c: Spezifische Energie-/Wärmeintensität

Verdoppelung der Masse eines Systems

↳ Länge von Leitungen × 2

↳ Oberfläche × 4

↳ Volumen × 8

Absorbtion von Licht: $I_L(x) = I_{L,0}\, e^{-\frac{x}{\lambda}}$ x: Tiefe im Objekt

Temperatur der Erde ohne Atmosphäre:

Sonnenradius r_S: $6.955\,m \cdot 10^8$

Erdbahn R_E: $1.496\,m \cdot 10^{11}$

Sonnentemperatur: 5778 K

Albedo Erde α: 0.34

Erdradius r_E: $637\,m \cdot 10^4$

Abstrahlung Sonne: $\sigma A T^4 = 4\pi r^2 \sigma T^4 = P_S$

Aufnahme Erde: $P_{Erde,input} = \frac{(1-\alpha) \cdot P_S \cdot \pi r_E^2}{4 \cdot \pi \cdot R_E^2}$

Abstrahlung: $P_{Erde,out} = 4\pi r_E^2 \sigma T_E^4$

$$P_{Erde,in} = P_{Erde,out}$$

Durchmesser: $2r$

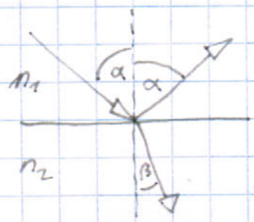
Umfang: $2\pi r$

Oberfläche: $4\pi r^2$

Volumen: $\frac{4\pi r^3}{3}$

Lichtbrechung

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



$n_1 < n_2 \Rightarrow n_2$ ist optisch dichter als n_1

Falls $\sin(\beta) \leq \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow$ Licht tritt aus

Falls $\sin(\beta) > \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow$ Total Reflektion

c_i: Lichtgeschwindigkeit in Material i

n_i: Brechungsindex von Material i