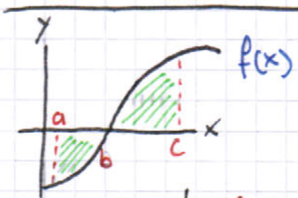
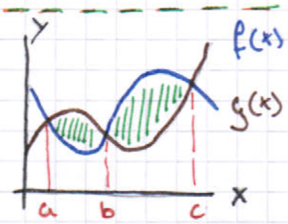
Integrale



$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \int_b^c f(x)\,dx$$



1. Schnittpunkte berechnen durch Gleichstellung und ausklammern

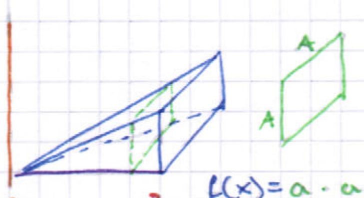
$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx = |A_1|$$

$$\int_b^c f(x) - g(x)\,dx = |A_2|$$

$$\text{Fläche} = |A_1| + |A_2|$$

Volumenbestimmung mit Querschnittsfläche

1. Skizze vom Körper und typische Querschnitt
2. Gleichung für Querschnitt aufstellen
3. Integrationsgrenzen bestimmen und Integrieren

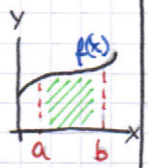


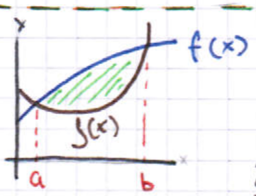
$$f(x) = a \cdot a = a^2$$

$$V = \int_0^3 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3$$

Flächenberechnung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$





1. Schnittpunkte bestimmen durch Gleichstellung.
2. 2 Möglichkeiten

2a) $$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

2b) $$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

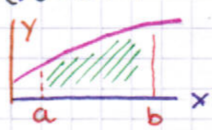
Volumenberechnung:

Rotation auf der Achse

A) Um X-Achse: $f(x) = R(x)$

Benötigte Form: $y(x) = \ldots$

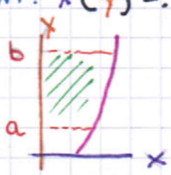
$$\int_a^b \pi\,(R(x))^2\,dx$$



B) Um Y-Achse: $f(y) = R(y)$

Benötigte Form: $x(y) = \ldots$

$$\int_a^b \pi\,(R(y))^2\,dy$$



Scheibenmethode

Newton: Schätzung

1. x_n Schätzen
2. $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Häufige Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}\, e^u = e^u \cdot u'$$

$$\frac{d}{dx}\, \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\, \ln(u) = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$\frac{d}{dx}\, a^x = a^x \cdot \ln(a)$$

Ableitung ↓ / Aufleitung ↑

$-\sin(x)$

$-\cos(x)$

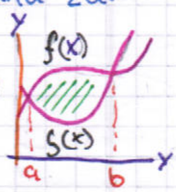
$\sin(x)$

$\cos(x)$

Rotation mit Abstand zur Achse

Rotation um X-Achse

$$\int_a^b \pi\left((R(x))^2 - (r(x))^2\right)dx$$



$f(x) = R(x)$

$g(x) = r(x)$

Rotation um Y-Achse

$$\int_a^b \pi\left((R(y))^2 - (r(y))^2\right)dy$$

Ringmethode

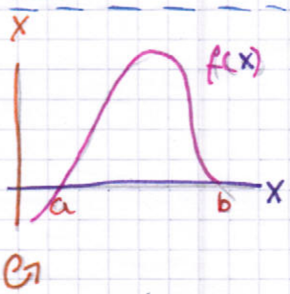
Schalenmethode:

Um Y-Achse rotiert

$$2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

Um X-Achse Rotiert

$$2\pi \int_a^b y \cdot f(y)\,dy$$



Vorsicht!

	Form	Grenzen
Rotation um X	[redacted] x = ...	auf [redacted] y
Rotation um Y	[redacted] y = ...	auf [redacted] x

Bogenlänge:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Integrationstechniken:

Partielle Integration

$$f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Beachte LIATE!:

- L: Logs $\ln(x)$
- I: Inverse Trig : $\sin^{-1}$
- A: Algebra $5x^2+3$
- T: Trig. : $\cos(x)$
- E: Exponent: 10^x

Wird in dieser Reihenfolge immer $f(x)$ sein!

Verwenden wenn ein Produkt zweier Funktionen vorliegt welche nicht in Relation stehen.

Beispiel: $\int x^3 \cdot \ln(x)\, dx$

Log: $f(x) = \ln(x)$ $\quad g'(x) = x^3$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = \frac{x^4}{4}$

$$\ln(x) \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{1}{x} \frac{x^4}{4}\, dx$$

$$= \ln(x) \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{x}\, dx$$

$$= \ln(x) \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4} \int x^{3}\, dx$$

$$= \ln(x) \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4}$$

$$= \ln(x) \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{16} \quad ✓$$

Mantelfläche: Rotation der Bogenlänge

$$2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Substitution

Substitution: Wenn ein Produkt zweier Funktionen und eines ist die Ableitung des Anderen

Beispiel:

$$\int_0^1 \frac{4x^3}{x^4+7}\, dx \qquad u = x^4+7 \qquad \frac{du}{dx} = 4x^3$$

Je nach Situation ist Umstellung nach du oder dx wünschenswert

$$= \int_7^8 \frac{\cancel{4x^3}}{u} \cdot \frac{1}{\cancel{4x^3}}\, du \qquad dx = \frac{du}{4x^3} = \frac{1}{4x^3}\, du$$

Integrationsgrenzen neu berechnen $u(x) = x^4+7$

$u(0) = 7$

$u(1) = 8$

!Keine x oder dx dürfen übrig bleiben!

$$= \int_7^8 \frac{1}{u}\, du$$

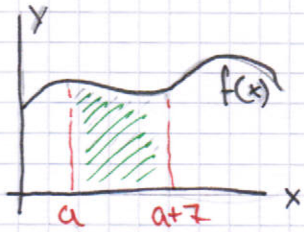
$$= \ln(u)\Big|_7^8$$

$$= \ln(8) - \ln(7)$$

Extremwerte mit Integral

Extremwerte mit Integral (siehe auch Volumenbestimmung mit Querschnittsfläche)

Beispiel. Finde Max. Fläche bei 7 Meter breiten Streifen



1. Analyse Hauptbedingung (Min/Max etc.)
2. Analyse Nebenbedingung (im Radius von r / 7 meter Breite etc.)
3. Funktion der Nebenbedingung so umstellen dass ein Einsetzen in die Hauptbedingung möglich ist.

$$\int_a^{a+7} f(x)\, dx = \Big[F(x)\Big]_a^{a+7} = F(a+7) - F(a)$$

Bei Max: 1 Ableitung, gleich 0 stellen und lösen.

überprüfen ob Min/Max mit $\int_a^{a+7} f''(x)\, dx$

Potenzreihen:

Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = Q$$

$Q < 1$ Konvergiert

$Q > 1$ Divergiert

$Q = 1$ keine Aussage möglich

Form: Potenzreihe unendlichen Grades:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

Form: Potenzreihe mit Zentrum:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n$$

x_0, b_n, a_n = Koeffizienten

Konvergenzradius r

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Quotientenkriterium für Potenzreihen:

$r > |x|$ Konvergiert

$r < |x|$ Divergiert

$r = |x|$ Keine Gültige Aussage

Taylorkoeffizient

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$t_f(x) = \sum^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Leibnitzkriterien

1. Monoton fallend
2. Grenzwert = 0

$|a_{n+1}| < |a_n|$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

wenn beide wahr dann Konvergiert, sonst divergiert

Allgemeines Vorgehen Konvergenzbestimmung

Gegeben: $P(x) = \sum_{n=}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$

1. Konvergenzradius r bestimmen
2. Randpunktdiskussion mit Leibnitz für $x = x_0 - r$ und $x = x_0 + r$

Resultat:

a) $-r < x < r$

b) $-r \leq x \leq r$

c) $-r \leq x < r$

d) $-r < x \leq r$

Vorgehen für Bestimmung der Summanten an $x_0 = z$

1. $f(x)$ n mal ableiten
2. $f^{(n)}(z)$ für jede Ableitung berechnen
3. Taylorpolynom berechnen: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ angefangen bei a_0!

Einfügen: $a_0 (x - x_0)^0 + a_1 (x - x_0)^1 + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$

Partialbruchzerlegung:

Reduzibel: $(x+3)^3 \Rightarrow \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3}$

Irreduzibel: $(x^2+1)^2 \Rightarrow \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$

Für Gleichungen Anzahl der vorgekommenen x^n mit Ax^n, Bx^n etc.. Gleichsetzen und lösen

Polynomdivision:

$$2x^3 - 14x^2 + 14x + 30 : x^2 - 4 = 2x - 14 + \frac{22x - 26}{x^2 - 4}$$

$$-(2x^3 - 8x)$$

$$-14x^2 + 22x + 30$$

$$-(14x^2 + 56)$$

$$22x - 26$$

Alternierende 0-Folge:

$$\frac{(-1)^n + 1}{2}$$

Alternierendes Vorzeichen:

$$-(1)^n$$

Taylor Polynom für Sin: $\frac{x^{2n+1}}{(2x+1)!}$

Differentialgleichungen

Homogene Form: $y' + f(x) \cdot y = 0$

Inhomogene Form: $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

$f(x)$: Faktor vor y, $g(x)$: Störfaktor

Separieren

1. Gleichung nach y' und y stellen
2. y' durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzen
3. dy und y von dx und x separieren.
4. Integrieren und nach y umstellen.
5. wenn speziell, $y(n) = a$ für K lösen

Beispiel:

$$\frac{y' x}{2} - 1 = y \qquad | +1, : x$$

$$\frac{y'}{2} = \frac{y+1}{x} \qquad | : (y+1) \cdot 2$$

$$\frac{y'}{y+1} = \frac{2}{x} \qquad | \; y' \text{ durch } \frac{dy}{dx} \text{ ersetzen}$$

$$\frac{dy}{(y+1)dx} = \frac{2}{x} \qquad | \text{ Separieren}$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{2\,dx}{x} \qquad | \text{ integrieren}$$

$$\ln(y+1) = 2\ln(x) + c \qquad | \text{ nach } y \text{ stellen}$$

$$e^{\ln(y+1)} = e^{2\ln(x)} \cdot e^{c} \qquad e^{\dots}$$

$$e^{\ln(y+1)} = e^{\ln(x^2)} \cdot K \quad \leftarrow e^c \text{ wird zu } K$$

$$y + 1 = x^2 \cdot K \qquad | \text{ wenn speziell dann } K \text{ für } y(n) = a \text{ lösen}$$

$$y(x) = x^2 \cdot K - 1$$

Substitution:

Form: $y' = f(ax + by + c)$

Substitution: $u = ax + by + c$

Form: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Substitution: $u = \frac{y}{x}$

Vorgehen: 1. Substitution wählen (Form muss nicht 100% identisch sein)

2. Substitution nach y umstellen und y' berechnen

3. y' einsetzen, lösen und zurücksubstituieren

Beispiel:

$$x \cdot y' - y - x = 0 \qquad | +x, +y, : x$$

$$y' = \frac{y}{x} + 1 \qquad | \; u = \frac{y}{x}$$

$$y = u \cdot x$$

$$y' = u' \cdot x + u \text{ (Partielle integration)}$$

$$u' x + u = u + 1$$

$$u' x = 1 \qquad | -u$$

$$u' = \frac{1}{x} \qquad | : x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$u = \ln(x) + c$$

$$\frac{y}{x} = \ln(x) + c$$

$$y = x(\ln(x) + c)$$

Variation der Konstante

Lösungsform: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y_h(x) = K \cdot e^{-\int f(x)\,dx}$$

$$y_p(x) = K(x) \cdot e^{-\int f(x)\,dx}$$

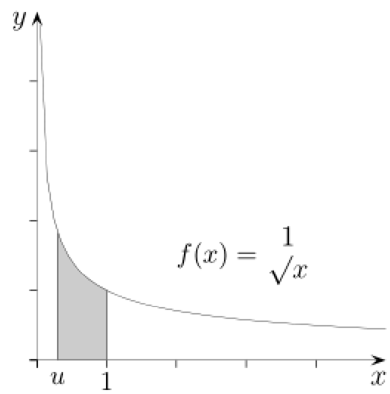
$$K(x) = \int \frac{g(x)}{y_h(x)\,[K=1]}\,dx$$

Uneigentliche Integrale 2. Art

Betrachten wir nun die Fläche unter dem Graphen von $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ in den Grenzen von 0 bis 1. An der linken Grenze ist die Funktion nicht definiert, es liegt ein Pol (Unendlichkeitsstelle) vor.

Um den Inhalt dieser Fläche zu ermitteln, integrieren wir die Funktion zunächst in den Grenzen von u bis 1:

$$\int_u^1 f(x)\,dx = \left[2 \cdot \sqrt{x}\,\right]_u^1 = 2 - 2 \cdot \sqrt{u} \qquad \text{beachte: } \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$



Lassen wir die linke Grenze u gegen 0 streben, so strebt der Integralwert offenbar gegen 2.

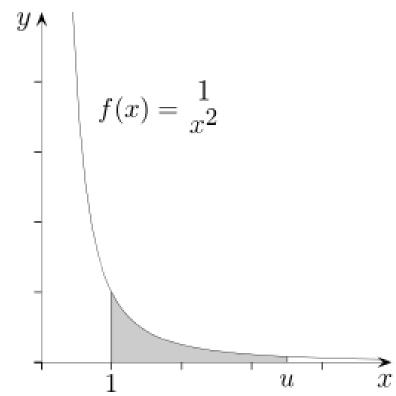
Allgemein legen wir fest:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to a} \int_u^b f(x)\,dx$$

, falls $x = a$ nicht zum Definitionsbereich gehört.

Uneigentliche Integrale 1. Art

Betrachten wir eine Fläche unter dem Graphen von $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Die linke Grenze sei $x = 1$, nach rechts sei die Fläche unbegrenzt, das Flächenstück erstreckt sich ins Unendliche.



Um den Inhalt dieser Fläche zu ermitteln, integrieren wir die Funktion zunächst in den Grenzen von 1 bis u:

$$\int_1^u f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^u = -\frac{1}{u} + 1$$

Lassen wir die obere Grenze u gegen ∞ streben, so strebt der Integralwert offenbar gegen 1.

Allgemein legen wir fest:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{u \to \infty} \int_a^u f(x)\,dx$$

Der Grenzwert muss natürlich nicht existieren, dann existiert das uneigentliche Integral nicht.

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \tag{2}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| \tag{4}$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \tag{5}$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \tag{6}$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{9}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}\ln|a^2+x^2| \tag{10}$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{11}$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2\ln|a^2+x^2| \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a+x}{b+x}, \ a \neq b \tag{14}$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln|a+x| \tag{15}$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{16}$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a}\, dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} \tag{17}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x\pm a}} dx = 2\sqrt{x\pm a} \tag{18}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \tag{19}$$

$$\int x\sqrt{x-a}\, dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \tag{20}$$

$$\int \sqrt{ax+b}\, dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3}\right)\sqrt{ax+b} \tag{21}$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2} \tag{22}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x\pm a}} dx = \frac{2}{3}(x\mp 2a)\sqrt{x\pm a} \tag{23}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a\tan^{-1}\frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \tag{24}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a\ln\left[\sqrt{x} + \sqrt{x+a}\right] \tag{25}$$

$$\int x\sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2+abx+3a^2x^2)\sqrt{ax+b} \tag{26}$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)}\, dx = \frac{1}{4a^{3/2}}\left[(2ax+b)\sqrt{ax(ax+b)} - b^2\ln\left|a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}\right|\right] \tag{27}$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)}\, dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3}\right]\sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}}\ln\left|a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}\right| \tag{28}$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2\pm a^2}\right| \tag{29}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{30}$$

$$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\, dx = \frac{1}{3}\left(x^2\pm a^2\right)^{3/2} \tag{31}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2\pm a^2}\right| \tag{32}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \tag{33}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} dx = \sqrt{x^2\pm a^2} \tag{34}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\sqrt{a^2-x^2} \tag{35}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2\pm a^2}\right| \tag{36}$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{b+2ax}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx^+c)}\right| \tag{37}$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{48a^{5/2}}\left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times \left(-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)\right) + 3(b^3-4abc)\ln\left|b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|\right) \tag{38}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{39}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{40}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \tag{41}$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax\, dx = x\ln ax - x \tag{42}$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln ax)^2 \tag{43}$$

$$\int \ln(ax+b)\, dx = \left(x + \frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x, a \neq 0 \tag{44}$$

$$\int \ln(x^2+a^2)\, \mathrm{d}x = x\ln(x^2+a^2) + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} - 2x \tag{45}$$

$$\int \ln(x^2-a^2)\, \mathrm{d}x = x\ln(x^2-a^2) + a\ln\frac{x+a}{x-a} - 2x \tag{46}$$

$$\int \ln\left(ax^2+bx+c\right) dx = \frac{1}{a}\sqrt{4ac-b^2}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x\right)\ln\left(ax^2+bx+c\right) \tag{47}$$

$$\int x\ln(ax+b)\, dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{b^2}{a^2}\right)\ln(ax+b) \tag{48}$$

$$\int x\ln\left(a^2-b^2x^2\right) dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)\ln\left(a^2-b^2x^2\right) \tag{49}$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} \tag{50}$$

$$\int \sqrt{x}e^{ax} dx = \frac{1}{a}\sqrt{x}e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}\mathrm{erf}\left(i\sqrt{ax}\right), \quad \text{where } \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2} dt \tag{51}$$

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x \tag{52}$$

$$\int xe^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax} \tag{53}$$

$$\int x^2e^x dx = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x \tag{54}$$

$$\int x^2e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax} \tag{55}$$

$$\int x^3e^x dx = \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)e^x \tag{56}$$

$$\int x^ne^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{x^ne^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, \mathrm{d}x \tag{57}$$

$$\int x^ne^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\Gamma[1+n, -ax], \quad \text{where } \Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\, \mathrm{d}t \tag{58}$$

$$\int e^{ax^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\mathrm{erf}\left(ix\sqrt{a}\right) \tag{59}$$

$$\int e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\mathrm{erf}\left(x\sqrt{a}\right) \tag{60}$$

$$\int xe^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2} \tag{61}$$

$$\int x^2e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\mathrm{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a}e^{-ax^2} \tag{62}$$

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax \tag{63}$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{64}$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax \; {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{65}$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3\cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \tag{66}$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax \tag{67}$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{68}$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)}\cos^{1+p} ax \times {}_2F_1\left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{69}$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3\sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \tag{70}$$

$$\int \cos ax \sin bx dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \tag{71}$$

$$\int \sin^2 ax \cos bx dx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{72}$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x \tag{73}$$

$$\int \cos^2 ax \sin bx dx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{74}$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a}\cos^3 ax \tag{75}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bx dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \tag{76}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \tag{77}$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a}\ln \cos ax \tag{78}$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a}\tan ax \tag{79}$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax\right) \tag{80}$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a}\ln \cos ax + \frac{1}{2a}\sec^2 ax \tag{81}$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| = 2\tanh^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) \tag{82}$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a}\tan ax \tag{83}$$

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| \tag{84}$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \tag{85}$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2}\sec^2 x \tag{86}$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n}\sec^n x, n \neq 0 \tag{87}$$

$$\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{88}$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a}\cot ax \tag{89}$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2}\cot x \csc x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| \tag{90}$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n}\csc^n x, n \neq 0 \tag{91}$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln|\tan x| \tag{92}$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \tag{93}$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax \tag{94}$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x\cos x + \left(x^2 - 2\right)\sin x \tag{95}$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x\cos ax}{a^2} + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\sin ax \tag{96}$$

$$\int x^n cos x dx = -\frac{1}{2}(i)^{n+1}\left[\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n\Gamma(n+1, ix)\right] \tag{97}$$

$$\int x^n cos ax dx = \frac{1}{2}(ia)^{1-n}\left[(-1)^n\Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, ixa)\right] \tag{98}$$

$$\int x \sin x dx = -x\cos x + \sin x \tag{99}$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \tag{100}$$

$$\int x^2 \sin x dx = \left(2 - x^2\right)\cos x + 2x\sin x \tag{101}$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2x^2}{a^3}\cos ax + \frac{2x\sin ax}{a^2} \tag{102}$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2}(i)^n\left[\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n\Gamma(n+1, -ix)\right] \tag{103}$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) \tag{104}$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{bx}(b\sin ax - a\cos ax) \tag{105}$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) \tag{106}$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{bx}(a\sin ax + b\cos ax) \tag{107}$$

$$\int xe^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x - x\cos x + x\sin x) \tag{108}$$

$$\int xe^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(x\cos x - \sin x + x\sin x) \tag{109}$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a}\sinh ax \tag{110}$$

$$\int e^{ax} \cosh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2 - b^2}[a\cosh bx - b\sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} + \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \tag{111}$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a}\cosh ax \tag{112}$$

$$\int e^{ax} \sinh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2 - b^2}[-b\cosh bx + a\sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} - \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \tag{113}$$

$$\int e^{ax} \tanh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)}{}_2F_1\left[1 + \dfrac{a}{2b}, 1, 2 + \dfrac{a}{2b}, -e^{2bx}\right] - \dfrac{1}{a}e^{ax}{}_2F_1\left[\dfrac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx}\right] & a \neq b \\ \dfrac{e^{ax} - 2\tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \tag{114}$$

$$\int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a}\ln \cosh ax \tag{115}$$

$$\int \cos ax \cosh bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[a\sin ax \cosh bx + b\cos ax \sinh bx\right] \tag{116}$$

$$\int \cos ax \sinh bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[b\cos ax \cosh bx + a\sin ax \sinh bx\right] \tag{117}$$

$$\int \sin ax \cosh bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[-a\cos ax \cosh bx + b\sin ax \sinh bx\right] \tag{118}$$

$$\int \sin ax \sinh bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[b\cosh bx \sin ax - a\cos ax \sinh bx\right] \tag{119}$$

$$\int \sinh ax \cosh ax dx = \frac{1}{4a}\left[-2ax + \sinh 2ax\right] \tag{120}$$

$$\int \sinh ax \cosh bx dx = \frac{1}{b^2 - a^2}\left[b\cosh bx \sinh ax - a\cosh ax \sinh bx\right] \tag{121}$$

Kehrwert

$\frac{1}{a}$ heißt *Kehrwert* der Zahl a. $\frac{b}{a}$ heißt *Kehrwert* des Bruches $\frac{a}{b}$.
Es gilt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \qquad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \qquad \frac{1}{\frac{1}{a}} = a \tag{4}$$

Erweitern und Kürzen

Beim *Erweitern* werden Zähler **und** Nenner mit der gleichen Zahl (ungleich Null) multipliziert:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \tag{5}$$

Beim *Kürzen* werden Zähler **und** Nenner durch die gleiche Zahl (ungleich Null) dividiert:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \tag{6}$$

Kürzen bei Produkten:

$$\frac{a \cdot b}{a \cdot c} = \frac{b}{c} \tag{7}$$

Kürzen bei Summen und Differenzen:

$$\frac{ab + ac}{ad} = \frac{a(b+c)}{ad} = \frac{b+c}{d} \qquad \frac{ab - ac}{ad} = \frac{a(b-c)}{ad} = \frac{b-c}{d} \tag{8}$$

$$\frac{ad}{ab + ac} = \frac{ad}{a(b+c)} = \frac{d}{b+c} \qquad \frac{ad}{ab - ac} = \frac{ad}{a(b-c)} = \frac{d}{b-c} \tag{9}$$

Zähler und Nenner müssen als **Produkt** vorliegen.
Merkregel: *„Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen!“*

Multiplikation

mit einer Zahl:

$$a \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{d} \tag{10}$$

mit einem Bruch:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{11}$$

bei Potenzierung:
Achtung: Es gilt weiterhin „Punkt- vor Strichrechnung!“. Potenzen zählen zur Punktrechnung. Beispiel:

$$(-2)^2 \neq -2^2$$

$$(+x)^2 = x^2 \qquad (-x)^2 = x^2 \tag{22}$$

$$(+x)^3 = x^3 \qquad (-x)^3 = -x^3 \tag{23}$$

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{für } n \text{ gerade.} \\ -x^n & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{24}$$

bei Summen und Differenzen:

$$-a - b = -(a + b) \qquad -a + b = -(a - b) = b - a \tag{25}$$

4 Termumformungen

$$\text{Punkt- vor Strichrechnung!} \tag{26}$$

Kommutativgesetze

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a \tag{27}$$

Assoziativgesetze

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \tag{28}$$

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \tag{29}$$

Produkte von Summen

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd \tag{30}$$

Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{31}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{32}$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \tag{33}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{34}$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \tag{35}$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \tag{36}$$

Wurzelgleichungen

Separation der Wurzeln – Quadrieren, bis keine Wurzel mehr vorhanden ist –

Definitionsmenge beachten – Probe machen

7 Potenzen

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren } a} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}$$

heißt *Potenz*. a heißt *Basis* und n *Exponent*.
Nicht-positive Exponenten werden wie folgt definiert:

$$a^0 = 1)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Potenzgesetze

Gleiche Basen:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Gleiche Exponenten:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potenzierung von Potenzen:

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$$

Gebrochene Exponenten

Potenzen mit gebrochenen Exponenten werden als Wurzeln definiert.
Für alle $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ gilt:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

8 Wurzeln

Die n-te Wurzel aus $a \geq 0$ wird wie folgt definiert:

$$\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow b^n = a \text{ und } b \geq 0 \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$$

a heißt *Radikand*und n *Wurzelexponent*.

Wurzelgesetze

Wurzelgesetze sind Potenzgesetze mit gebrochenen Exponenten.
Gleiche Radikanden:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{n+m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$$

Gleiche Wurzelexponenten:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Wurzeln von Wurzeln:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

9 Logarithmen

$$\log_b x = h \Longleftrightarrow b^h = x, \text{ wobei } b, x \in \mathbb{R}; b \neq 1$$

b heißt *Basis*, x *Numerus* und h *Logarithmus*.
Merke: Logarithmus bedeutet Hochzahl bzw. Exponent!

Spezielle Logarithmen

$$\log_{10} x = \lg x$$

$$\log_e x = \ln x$$

Logarithmieren

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrung der Exponentialfunktion.
Logarithmieren und
Potenzieren „heben sich gegenseitig auf".

$$b^{\log_b x} = x \qquad \log_b(b^x) = x$$

Speziell

$$10^{\lg x} = x \qquad \lg(10^x) = x$$

$$e^{\ln x} = x \qquad \ln(e^x) = x$$

Logarithmengesetze

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b x^r = r \cdot \log_b x$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\lg x}{\lg b}$$

Jede Exponentialfunktion mit der Basis b lässt sich als Funktion mit der Basis e (Eulersche Zahl) schreiben:

$$b^x = \left(e^{\ln b}\right)^x = e^{x \cdot \ln b}$$