

# 计算实践题目一

认真阅读《现代科学计算》§2.3 节（31 页），并作类似数值实验，具体要求如下：

- （一）生成矩阵，作 5 个 100 阶对角方阵，记为  $D_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ 。生成（生成方法自己选，选你认为有意义的，也可随机生成）10 个 100 阶矩阵  $M_j, j = 1, \dots, 10$ ，作它们的 QR 分解（分解程序可以从 Matlab 或其它软件包中找，或自己编，下同）得  $Q_j, j = 1, \dots, 10$ ，这样可得 50 个对称的矩阵  $A_{ij} = Q_j D_i Q_j^T, i = 1, \dots, 5, j = 1, \dots, 10$ 。其中  $D_i$  的对角元是  $A_{ij}$  的特征值，若它们都大于 0，则  $A_{ij}$  正定， $Q_j$  的列就是相应（单位正交的）特征向量。
- （二）用共轭梯度法，Lanczos 法，MINRES 法解  $A_{ij}x = b, i = 1, \dots, 5, j = 1, \dots, 10$ ，这里  $b$  由你选（如何知道精确解？），对非正定的  $A_{ij}$  仅用后两种方法。要求对每个算法作以下工作：
  - (1) 用计算结果填类似于书上 33 页的表 2.3.3（可添加你认为有关的因素）以分析特征值分布对算法的影响。要求在每个分布（即每个  $D_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ ）所对应的 10 个矩阵  $A_{ij}, j = 1, \dots, 10$  中取一个的结果填入表中即可。
  - (2) 取定一个  $D_i$ （取哪个由你确定，哪个有意义？），用  $Q_j, j = 1, \dots, 10$  的计算结果填表 2.3.4 来观察特征向量对算法的影响。
  - (3) 在  $i = 1, \dots, 5, j = 1, \dots, 10$  的 50 个计算结果中选取 5 个画出类似于图 2.3.2 的收敛率曲线（基于什么数据的收敛率曲线更稳定，更说明问题？）。
- （三）讨论：

- (1) 你如何取的特征值分布  $D_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ , 它们对计算过程和结果有什么影响? 比如若记  $D_i$  的最大对角元即  $A_{ij}$  最大特征值为  $\lambda_1^i$ , 最小对角元为  $\lambda_n^i$ , 则当其他特征值中有较多接近于  $\lambda_1^i$  时, 较多接近于  $\lambda_n^i$  时,  $\lambda_1^i/\lambda_n^i$  较大时, 较小时等, 收敛速度和结果有何表现和不同?
  - (2) 在填表 2.3.3 时, 你如何选取  $A_{ij}$  的, 理由是什么? 在填其它表和画收敛率图时选择的理由是什么?
  - (3) 讨论你的计算实验所显示的诸算法的性质, 与课程和参考资料中的理论分析一样吗? 有什么新发现?
  - (4) 对所算的简单方程, 这三个算法比 stationary 迭代法中的 SOR 法好吗? 试试预处理 CG 法, 比如用对称 G-S 或对称 SOR 公式构造的预处理 CG 法。
  - (5) 对非正定的系数矩阵, 用你的算例比较 Lanczos 和 MINRES 方法的计算和收敛结果
- (四) 作业用电子版通过网络学堂提交, 包括你所构造的 5 个对角阵  $D_i$  (写成向量形式即可), 所填的几个表和收敛率图以及你的讨论。正交阵  $Q_j$  (或  $A_{ij}$ ),  $j = 1, \dots, 10$  中只交你认为对解释你的结果有必要的。报告里要附计算中所用的程序, 要保证所交程序可运行并算出你提交的结果。