

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Usar el **criterio del cociente** para estudiar la convergencia de las siguientes series:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

Resolución

Serie #1

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$$

Utilicemos el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{(\sqrt{2})^{n+1}} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{2n-1} \\ &= \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{2}(2n-1)} \\ &= \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n\sqrt{2}} \\ &= \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Entonces, como $L < 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ converge.

Serie #2

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Utilicemos el criterio del cociente:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\
 &= \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
 &= \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\
 &= \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n(1 + \frac{1}{n})} \right)^n \\
 &= \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \\
 &= \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} \\
 &= \\
 & \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

Donde la última igualdad es un resultado teórico de sucesiones.

Concluyendo, como $L < 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge.