Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 8

Consigna

Usando el **criterio serie-integral**, clasificar las siguientes series:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log(n)}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2}$

Resolución

Serie #1

- $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Consideremos la función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = xe^{-x^2}$. Lo primero que hay que hacer para es determinar si la función es decreciente. Para esto, hallemos su derivada:

$$
\begin{aligned}
&(xe^{-x^2})' \\
&=_{\text{(regla del producto)}} \\
&-2x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} \\
&=_{\text{(operatoria)}} \\
&e^{-x^2}(-2x^2 + 1)
\end{aligned}
$$

Observemos que quién determina el signo es el polinomio $-2x^2 + 1$, pues en el intervalo que queremos evaluar la función e^{-x^2} es siempre positiva.

Veamos intervalo a intervalo como se comporta el signo entonces:

- $(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}})$: Negativo
- $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$: Positivo
- $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$: Negativo

Por lo tanto, en el intervalo que nos interesa $[1, +\infty)$, la derivada es negativa. Entonces la función es decreciente.

Por lo tanto podemos estudiar la primitiva para determinar el comportamiento de la serie.

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$
$$=_{\text{(cambio de variable } t=-x^2; dt=-2xdx)}$$
$$-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} e^t dt$$
$$=_{\text{(deshaciendo el cambio de variable)}}$$
$$-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^{+\infty}$$

Y dicho límite en $+\infty$ claramente tiende a 0. Por lo que entonces $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ es convergente, y utilizando el criterio serie-integral:

Conclusión: $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ es convergente

Conclusión

Las demás partes son análogas, es calcular la integral impropia para inferir el resultado sobre las series.