Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 7

Consigna

Determinar para qué valores de α las siguientes integrales impropias son convergentes:

1. $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x+1} dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha}$

Resolución

Integral #1

- $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x+1} dx$

Caso $\alpha \geq 0$:

Observemos que si $\alpha \geq 0$, tenemos que la integral diverge por comparación con:

- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$, pues $\frac{x^\alpha}{x+1} \geq \frac{1}{x}$

Caso $\alpha < 0$:

Por otra parte, si $\alpha < 0$ tenemos que la integral es:

- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{-\alpha}(x+1)} dx$

Y con este valor de α, el comportamiento de la función en 0 está dado por:

- $\frac{1}{x^{-\alpha}}$

Por lo tanto podemos estudiar $\int_0^1 \frac{1}{x^{-\alpha}} dx$ y descartar todos los valores de $\alpha \leq -1$, pues esta integral divergería en esos casos.

Caso $\alpha \in (-1, 0)$:

Nos resta estudiar el intervalo $\alpha \in (-1, 0)$ donde tenemos que separar nuevamente la integral en:

- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{-\alpha}(x+1)} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{-\alpha}(x+1)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-\alpha}(x+1)} dx$

La segunda integral, se comporta como $\frac{1}{x^{-\alpha+1}}$ en $+\infty$, por lo que es convergente.

La primera integral, se comporta como $\frac{1}{x^{-\alpha}}$ en 0. Por lo tanto es convergente (pues recordemos que $\alpha \in (-1, 0)$)

Conclusión: La integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x+1} dx$ es convergente sii $\alpha \in (-1, 0)$

Integral #2

- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha}$

La integral es mixta, por lo tanto la dividimos en:

- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha} = \int_0^{1} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha}$

Para el primer integrando, observemos que:

- $\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ por Taylor

Por lo que podemos aplicarlo en el primer integrando para obtener:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha}$$
$$\sim$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{2\alpha}}$$

Por lo que esta integral converge sii:

- $2\alpha < 1 \to \alpha < \frac{1}{2}$

Ahora para el segundo integrando, es un poco más fácil encontrar una equivalencia, apliquemos directamente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha}$$
$$\sim$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{\alpha x^2}}$$
$$\sim$$
$$\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

Podemos distinguir algunos casos muy simplemente:

- Si $\alpha < 0$: Claramente diverge, pues tenemos una función integrando con crecimiento exponencial.
- Si $\alpha = 0$: El integrando equivale a 1, por lo que en este caso la integral también diverge.

Para el último caso, calculemos la primitiva:

$$\int e^{-\alpha x^2} dx$$
$$=$$
$$-\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2}$$

Entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} = 0$$

Con esto ya podemos observar que cuando $\alpha > 0$, tenemos que la integral converge.

Conclusión: La integral $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha}$ converge sii:

- $0 < \alpha < \frac{1}{2}$