

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 8

Consigna

Sea $\{z_1, \dots, z_8\}$ el conjunto de raíces octavas de 2^8 , es decir, $z_k^8 = 2^8$ para $k = 1, \dots, 8$. Determinar cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

1. $z_i = 2$ para todo $i = 1, \dots, 8$
2. Existen al menos dos raíces z_j, z_k tales que $z_j = -z_k$
3. Existen al menos dos raíces z_l, z_m tales que $\bar{z}_l = z_m$
4. Se cumple que $z_1 z_2 \cdots z_8 = 2^8$

Resolución

Antes de empezar a evaluar las afirmaciones, hallemos las raíces octavas de 2^8 .

Sea $z = re^{i\theta}$, entonces tenemos que:

- $(re^{i\theta})^8 = 2^8$

De donde derivamos las siguientes ecuaciones:

- $r^8 = 2^8 \rightarrow r = 2$ y,
- $8\theta = 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{k\pi}{4} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$

Entonces las raíces octavas de 2^8 son las siguientes:

- $z_0 = 2$
- $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$
- $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$
- $z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- $z_4 = 2e^{i\pi} = -2$
- $z_5 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$
- $z_6 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$
- $z_7 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Afirmación 1

- $z_i = 2$ para todo $i = 1, \dots, 8$

Claramente FALSO.

Afirmación 2

- Existen al menos dos raíces z_j, z_k tales que $z_j = -z_k$

Esto es VERDADERO, pues $z_0 = 2$ y $z_4 = -2$

Afirmación 3

- Existen al menos dos raíces z_l, z_m tales que $\bar{z}_l = z_m$

Esto es VERDADERO, pues $z_2 = 2i$ y $z_6 = -2i$.

Afirmación 4

- Se cumple que $z_1 z_2 \cdots z_8 = 2^8$

Para esto habría que verificar que la suma de argumentos de las raíces sea $0 + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, verifiquemos:

$$\sum_{i=0}^7 \frac{i\pi}{4} = \frac{28\pi}{4} = 7\pi$$

Como el argumento no es $0 + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ podemos afirmar que el resultado no es real. Por lo tanto esta afirmación es FALSA.