

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 1 - 24/07/2025

### Números complejos

#### Definición y operatoria

Definimos un número complejo como un par ordenado de números reales  $z = (a, b)$ . Llamamos parte real a  $a = \operatorname{Re}(z)$  y parte imaginaria a  $b = \operatorname{Im}(z)$ .

Además de esto también definimos las operaciones básicas del cuerpo. Sean  $z = (a, b)$  y  $w = (c, d)$ , entonces:

1. Igualdad  $(a, b) = (c, d)$  si  $a = c$  y  $b = d$
2. Suma:  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
3. Producto:  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Observemos que realizando un pequeño sistema de ecuaciones podemos llegar a que el inverso de un complejo  $(a, b)$  cualquiera es el siguiente:

- $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

#### Notación binómica

Dado un complejo cualquiera  $z = (a, b)$ , definimos su notación binómica por:

- $z = a + bi$

Esta es la primera notación con la que vamos a trabajar con los complejos, que es más práctica que la anterior ya que se comporta bien con todas las operaciones que definimos (porque el producto se puede obtener usando distributiva).

#### Definición (norma y argumento)

Dado un complejo  $z = a + bi$ , definimos su módulo como  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  y su argumento  $\theta$  como el ángulo que forma con el eje real.

Veamos como se ve todo al representarlo gráficamente:

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Figura 2

Figure 2: Figura 2

### Observación importante

Al estar trabajando con ángulos, está claro que dos argumentos  $\theta_1, \theta_2$  son iguales en ambos los siguientes casos:

- $\theta_1 = \theta_2$  o
- $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$

La intuición es sencilla, un ángulo se mantiene igual si damos una vuelta completa.

### Detalle sobre el argumento

Se observa, mirando la representación gráfica, que podemos calcular el argumento  $\theta$  de un complejo, a partir de ambas su parte real e imaginaria de la siguiente forma:

- $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$ , entonces
- $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Pero debemos tener cuidado en como aplicamos  $\arctan$ , por la naturaleza que tiene la función (pues varios ángulos diferentes entre si tienen el mismo valor de  $\arctan$ )

### Ejemplo

Consideremos el complejo  $z_1 = 1 + i$ , el mismo tiene:

- Norma:  $|z| = \sqrt{2}$
- Argumento:  $\arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

Ahora, consideremos el complejo  $z_2 = -1 - i$ , el mismo tiene:

- Norma:  $|z| = \sqrt{2}$
- Argumento:  $\arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{\pi}{4}$

Entonces, algo tiene que estar mal, pues sabemos que  $z_1 \neq z_2$  pero tienen mismo argumento y norma. El problema viene de que la tangente tiene varias ramas, y estamos usando en ambos casos la que se define en el intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , por lo que en algunos casos, debemos corregir sumando (o restando)  $\pi$ . En general lo que debemos hacer es corroborar que el resultado tenga sentido con la representación gráfica.