

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 9 - 27/08/2025

### Sucesiones

#### Ejercicio 3.10

1. Demostrar que si  $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$  y ambas tienen límite, entonces  $\lim a_n \leq \lim b_n$
2. Si  $a_n$  es acotada y  $\lim b_n = 0$ , demostrar que  $\lim a_n b_n = 0$

#### Parte 1

Llamemos:

- $A = \lim a_n$ , y
- $B = \lim b_n$

Probaremos esta propiedad por absurdo, entonces supongamos que  $B < A$ :

Como sabemos que ambas sucesiones tienen límite, tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_1 : a_n \in E(A, \varepsilon)$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_2 : b_n \in E(B, \varepsilon)$

Esto nos permite considerar:

- $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , y
- $\varepsilon = \frac{|A-B|}{2}$

De forma que  $E(B, \varepsilon) \cap E(A, \varepsilon) = \emptyset$ . Gráficamente la situación se ve algo así:

Entonces ahora consideremos cualquier  $n > n_0$ , para este se tiene que cumplir que:

- $a_n \in E(A, \varepsilon)$
- $b_n \in E(B, \varepsilon)$

Pero como son disjuntos y el entorno  $E(A, \varepsilon)$  está más adelante en la recta que  $E(B, \varepsilon)$ , necesariamente vamos a tener que:

- $b_n < a_n$  para todo  $n > n_0$

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Pero esto es absurdo pues estamos contradiciendo la hipótesis que nos dice que:

- $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Por lo que queda probada la propiedad.

## Parte 2

Como  $\lim b_n = 0$ , tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0 : |b_n - 0| < \varepsilon$

Como  $a_n$  es acotada, tenemos que:

- $\exists K \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < K$

Tomamos  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{K} > 0$  y como  $\lim b_n = 0$  tenemos que:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0 : |b_n| < \frac{\varepsilon}{K}$

Operando a partir de este punto,  $\forall n > n_0$  tenemos que:

$$\begin{aligned}
 |b_n| &< \frac{\varepsilon}{K} \\
 &\iff (\text{operando}) \\
 K|b_n| &< \varepsilon \\
 &\iff (a_n \text{ acotada}) \\
 |a_n||b_n| &< K|b_n| < \varepsilon \\
 &\iff (\text{operando}) \\
 |a_n b_n| &< K|b_n| < \varepsilon \\
 &\iff (\text{simplificando}) \\
 |a_n b_n| &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

Como demostramos esto para todo  $n > n_0$ , probamos que efectivamente:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0 : |a_n b_n| < \varepsilon$

Lo que es equivalente a decir que:

- $\lim a_n b_n = 0$

## Teorema 3.11 (propiedades de límite)

Sean  $a_n, b_n$  dos sucesiones tales que  $\lim a_n = A$  y  $\lim b_n = B$ . Entonces:

1.  $\lim a_n + b_n = A + B$
2.  $\lim a_n b_n = AB$
3. Si  $B \neq 0$ , entonces  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

En todos los casos, por hipótesis tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1$  tal que  $\forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$   $(*_1)$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2$  tal que  $\forall n > n_0 : |b_n - B| < \varepsilon$   $(*_2)$

### Demostración 1

- $\lim a_n + b_n = A + B$

Por definición de límite, queremos probar que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$  tal que  $\forall n > n_0 : |a_n + b_n - A - B| < \varepsilon$

Consideremos  $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$  y  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  y el siguiente razonamiento  $\forall n > n_0$ :

$$\begin{aligned} & |a_n + b_n - A - B| \\ & = (\text{reordenando}) \\ & |a_n - A + b_n - B| \\ & \leq (\text{desigualdad triangular}) \\ & |a_n - A| + |b_n - B| \\ & < (\text{def. de límite}) \\ & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ & = \\ & \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, probamos lo que queríamos verificar, y eso implica que:

- $\lim a_n + b_n = A + B$

**Observación:** Esta propiedad es válida también cuando hay una resta, y su prueba es análoga.

### Demostración 2

- $\lim a_n b_n = AB$

Por definición de límite, queremos probar que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0 : |a_n b_n - AB| < \varepsilon$

Consideremos  $\varepsilon = \varepsilon$  y  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  y el siguiente razonamiento  $\forall n > n_0$ :

$$\begin{aligned} & |a_n b_n - AB| \\ & = \\ & |a_n b_n + Ab_n - Ab_n - AB| \\ & = \\ & |A(b_n - B) + b_n(a_n - A)| \\ & \leq (\text{desigualdad triangular}) \\ & |A||b_n - B| + |b_n||a_n - A| \end{aligned}$$

Observemos los sumandos por separado por  $a_n$  y  $b_n$ :

- $|A||b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$ , por definición de límite.  $(*_1)$

**Atención:** Si  $A = 0$  entonces la propiedad cae en las hipótesis de la vista en la parte 3.10, por lo que consideramos  $A \neq 0$

Por otra parte tenemos que, como  $\lim b_n = B$ , tenemos que  $b_n$  es acotada (propiedad vista anteriormente), por lo tanto:

- $\exists K \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < K$

Con esto, veamos que:

- $|b_n||a_n - A| < K|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2K}$ , por definición de límite.  $(*_2)$

**Atención:** En ambos puntos  $(*_1)$  y  $(*_2)$  estamos considerando  $n > n_0$  para usar la definición de límite.

Ahora podemos redondear el ejercicio retomando el primer razonamiento que hicimos:

$$\begin{aligned}
 & |A||b_n - B| + |b_n||a_n - A| \\
 & <_{(\text{por } (*_1), (*_2))} \\
 & |A| \cdot \frac{\varepsilon}{2|A|} + |b_n| \frac{\varepsilon}{2K} \\
 & =_{(\text{simplificando})} \\
 & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 & = \\
 & \varepsilon
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, probamos lo que queríamos verificar, y eso implica que:

- $\lim a_n b_n = AB$

### **Demostración 3**