

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

Indicar si las siguientes series son convergentes o no, hallando su suma en caso de serlo:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} 5^{n+1}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n(n+3)}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \arctan(n+1) - (n+1) \arctan(n)}{n(n+1)}$

Resolución

Recordatorio

Recordemos que una serie geométrica es una serie con la siguiente cara:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

Sabemos que:

- Si $q < 1$ entonces la serie converge a $\lim \frac{1+q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$
- Si $q > 1$ entonces la serie diverge

Serie #1

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Esta serie es geométrica, por lo que como $q < 1$ sabemos que:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge a $\frac{3}{2}$

Serie #2

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3}$

Esta serie también se parece mucho a la geométrica, pero no lo es exactamente. Operaremos para llegar a la forma deseada:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{n+3} \\
 &= (\text{operatoria}) \\
 & \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{n-1} \\
 &= (\text{operatoria}) \\
 & \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{n-1} \\
 &= (\text{operatoria y reindexación de la sumatoria}) \\
 & \frac{1}{9} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n
 \end{aligned}$$

Entonces ahora podemos calcular a que converge usando la fórmula para las series geométricas:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{9} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n$ converge a $\frac{1}{9(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}})}$

Serie #3

- $\sum_{n=1}^{+\infty} 5^{n+1}$

Esta serie claramente diverge, pues su término general no tiende a 0.

Serie #4

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

Busquemos expresar el término general de la serie usando fracciones simples:

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{n(n+3)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3} \\
 &\Leftrightarrow \\
 &\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Entonces podemos expresar la serie como:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$

Ahora podemos expandir los primeros términos para ver a que equivale la serie:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots$$

Por lo tanto la reducida enésima es:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

Y tomando límite:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{1}{n+3} = \frac{11}{6}$$

Concluyendo:

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n(n+3)} \text{ converge a } \frac{11}{6}$$

Serie #5

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)$$

Simplifiquemos la expresión del término general:

$$\begin{aligned} & \log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right) \\ & \quad = (\text{factorización de polinomios}) \\ & \log\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right) \\ & \quad = (\text{propiedades de logaritmos}) \\ & \log((n+1)^2) - \log(n^2) \\ & \quad = (\text{operatoria}) \\ & 2\log(n+1) - 2\log(n) \end{aligned}$$

Por lo tanto se puede simplificar la reducida enésima a:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n 2\log(n+1) - 2\log(n) \\ & \quad = \\ & 2\log(n+1) - 2\log(1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, al tomar límite observamos que esta serie diverge.

Serie #6

Se resuelve por fracciones simples, similar a la serie #4.

Serie #7

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \arctan(n+1) - (n+1) \arctan(n)}{n(n+1)}$$

Simplifiquemos la expresión del término general:

$$\begin{aligned} & \frac{n \arctan(n+1) - (n+1) \arctan(n)}{n(n+1)} \\ & \stackrel{=(operatoria)}{=} \frac{n \arctan(n+1)}{n(n+1)} - \frac{(n+1) \arctan(n)}{n(n+1)} \\ & \stackrel{=(operatoria)}{=} \frac{\arctan(n+1)}{n+1} - \frac{\arctan(n)}{n} \end{aligned}$$

Por lo tanto se puede simplificar su reducida enésima a:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{\arctan(n+1)}{n+1} - \frac{\arctan(n)}{n} \\ & = \\ & \frac{\arctan(n+1)}{n+1} - \arctan(1) \end{aligned}$$

Tomando límite:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(n+1)}{n+1} - \arctan(1) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

Concluyendo:

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \arctan(n+1) - (n+1) \arctan(n)}{n(n+1)} \text{ converge a } -\frac{\pi}{4}$$