

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

CLASE 18 - 20/10/2025

Topología en \mathbb{R}^n

Definición 5.1 (norma)

Decimos que una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una *norma* si verifica las siguientes tres propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$, y $\|x\| = 0$ solamente si $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ que se denomina la desigualdad triangular

Veamos un ejemplo visual de como funciona la desigualdad triangular:

Ejemplos

1. Norma euclídea $\|\cdot\|_2$ (o norma dos):
 - Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la norma euclídea se define por $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$
Esta norma es la que solemos usar en general.
2. Norma uno $\|\cdot\|_1$:
 - Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la norma euclídea se define por $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$
Esto se puede generalizar para cualquier $p \in \mathbb{N}$:
3. Norma p $\|\cdot\|_p$:
 - Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la norma euclídea se define por $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p}$
4. Norma infinito $\|\cdot\|_\infty$
 - Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la norma euclídea se define por $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$

Veamos ahora como se define una función distancia.

Definición 5.2 (distancia)

Decimos que una función $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una distancia si verifica las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$, y $d(x, y) = 0$ si $x = y$

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Figura 2

Figure 2: Figura 2

Figura 3

Figure 3: Figura 3

2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Podemos ver que si tenemos una norma, podemos definir una función distancia de la siguiente forma:

- $d(x, y) = \|x - y\|$

En general, trabajaremos con la distancia dada por la norma euclídea, aunque distintas normas o distancias tienen distintas aplicaciones en las que pueden ser más prácticas que las que usamos normalmente.

Definición 5.3 (bola abierta)

Dado un punto $a \in \mathbb{R}^n$ y un número real positivo δ , llamamos bola abierta (o entorno, o simplemente bola) de centro a y radio δ al conjunto:

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < \delta\}$$

Tenemos entonces que $B(a, \delta)$ es el conjunto de puntos de \mathbb{R}^n que se encuentran a distancia menor que δ . Esto claramente depende de que noción de distancia estamos usando.

Ejemplos en \mathbb{R}^2

1. Considerando la distancia tradicional, la que se deriva de la norma euclídea, tenemos que $B(0, 1)$ es representado de la siguiente forma en el plano:
2. Considerando la distancia derivada de la norma $\|\cdot\|_1$, $B(0, 1)$ es representado de la siguiente forma en el plano:
3. Considerando la distancia derivada de la norma $\|\cdot\|_\infty$, $B(0, 1)$ es representado de la siguiente forma en el plano:

Definición 5.5

Sea A un conjunto, y denotamos por A^C su complemento. Entonces decimos que:

- un punto x_0 es **interior** a A si existe una bola $B(x_0, \delta) \subset A$
- un punto x_0 es **exterior** a A si existe una bola $B(x_0, \delta) \subset A^C$

Figura 4

Figure 4: Figura 4

- un punto x_0 es **frontera** de A si toda bola interseca a A y A^C (es decir que $\forall \delta > 0 : A \cap B(x_0, \delta) \neq \emptyset \wedge A^C \cap B(x_0, \delta) \neq \emptyset$)

Observemos que ser un punto frontera es exactamente la definición de no ser ni interior ni exterior. Por la definición está claro que los puntos interiores necesariamente pertenecen al conjunto A , mientras que los exteriores necesariamente pertenecen al conjunto A^C . Sin embargo no podemos concluir mucho sobre los puntos frontera.

Ejemplos 5.6

Ejemplo 1

Consideremos el conjunto $A_1 = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0\}$, es decir el semiplano superior. Entonces:

- Cualquier punto (x_1, x_2) con $x_2 > 0$ es interior.
- Cualquier punto (x_1, x_2) con $x_2 < 0$ es exterior.
- Cualquier punto (x_1, x_2) con $x_2 = 0$ es un punto frontera.

Ejemplo 2

Consideremos el conjunto $A_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, x_2 = 0\}$. Entonces:

- No hay puntos interiores, ya que no puede haber una bola de radio positivo incluida en un segmento.
- Todos los puntos del conjunto son puntos frontera.
- El $(0, 0)$ y $(1, 0)$ también son puntos frontera a pesar de no pertenecer al conjunto.