

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 9

Consigna

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Probar que existen derivadas parciales en todos los puntos y calcularlas.
2. Probar que f es diferenciable.
3. Probar que f no es de clase C^1 .

Resolución

Parte 1

Queremos probar que existen derivadas parciales en todos los puntos. La estrategia es bastante simple, para $(0, 0)$ usaremos la definición, mientras que para cualquier otro punto se calcula directamente:

Derivadas auxiliares:

- $\frac{\partial(\frac{1}{x^2+y^2})}{\partial x} = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2} 2x = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$
- $\frac{\partial(\frac{1}{x^2+y^2})}{\partial y} = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2} 2y = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$

Derivada respecto de x :

$$\begin{aligned}
& f_x(x, y) \\
& \quad = (\text{operatoria}) \\
& 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \\
& \quad = (\text{operatoria}) \\
& 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)
\end{aligned}$$

Derivada respecto de y :

$$\begin{aligned}
& f_y(x, y) \\
& \quad = (\text{operatoria}) \\
& 2y \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \\
& \quad = (\text{operatoria}) \\
& 2y \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)
\end{aligned}$$

Esto es válido para cualquier punto $(x, y) \neq (0, 0)$. Vayamos con ese caso ahora.

$$\begin{aligned}
& f_x(0, 0) \\
& \quad = (\text{definición de derivada parcial}) \\
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\
& \quad = (\text{definición de la función}) \\
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} \\
& \quad = (\text{operatoria}) \\
& \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) \\
& \quad = (\text{límite de cero por acotado}) \\
& 0
\end{aligned}$$

El razonamiento para $f_y(0, 0)$ es análogo. Con esto concluimos que las derivadas parciales existen para todo punto (x, y) .

Parte 2

Para probar que la función es diferenciable, notaremos primero que:

- La función f es diferenciable para todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$ ya que sus derivadas parciales son continuas en dichos puntos.

Entonces el problema está en $(0, 0)$, si la función es diferenciable en este punto, entonces el candidato a diferencial es la transformación lineal nula (por lo que sabemos de las

derivadas parciales en este punto). Por lo tanto podemos despejar el resto al plantear la definición:

$$\begin{aligned} f(\Delta x, \Delta y) &= f(0, 0) + 0\Delta x + 0\Delta y + r(\Delta x, \Delta y) \\ f(\Delta x, \Delta y) &= r(\Delta x, \Delta y) \end{aligned}$$

Ahora, queremos verificar que el resto cumple la propiedad fundamental:

$$\begin{aligned} &\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \frac{r(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} \\ &= (\text{sustituyendo la función resto}) \\ &\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} \\ &= (\text{definición de la función}) \\ &\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin\left(\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} \\ &= (\text{notando que } \Delta x^2 + \Delta y^2 = \|(\Delta x, \Delta y)\|^2) \\ &\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \|(\Delta x, \Delta y)\| \sin\left(\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) \\ &= (\text{límite de cero por acotado}) \\ &0 \end{aligned}$$

Como el resto cumple con la propiedad fundamental, la función es diferenciable para $(0, 0)$ (y por lo tanto para todos los puntos).

Parte 3

Queremos probar que f no es de clase C^1 . Para ser de clase C^1 tendríamos que tener que $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son funciones continuas. Centraremos nuestro foco en una de ellas, porque nos bastará para probar que la función f no es de clase C^1 , tomaremos $f_x(x, y)$.

Por lo que vimos en las partes anteriores, podríamos definir a la función $f_x(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Veamos el límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ para verificar si la función es continua en dicho punto.

$$\begin{aligned}
& \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x \sin \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) \\
& = (\text{límite direccional cuando } x=y^2) \\
& \lim_{y \rightarrow 0} 2y^2 \sin \left(\frac{1}{y^2(y^2 + 1)} \right) - \frac{2y^2}{y^2(y^2 + 1)} \cos \left(\frac{1}{y^2(y^2 + 1)} \right) \\
& = (\text{operatoria y límite de cero por acotado}) \\
& \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{2}{y^2 + 1} \cos \left(\frac{1}{y^2(y^2 + 1)} \right) \\
& = (\text{operatoria}) \\
& \lim_{y \rightarrow 0} -2 \cos \left(\frac{1}{y^2(y^2 + 1)} \right)
\end{aligned}$$

Pero este límite oscila, pues $\cos \left(\frac{1}{y^2(y^2+1)} \right)$ oscila cuando $y \rightarrow 0$, y por lo tanto no existe.

Nota: Me complicué con la elección del límite direccional, podría haber elegido $y = 0$ y hubiera sido más directo.

Con esto, podemos concluir que la función no es de clase C^1 .