

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

CLASE 4 - 06/08/2025

Ecuaciones diferenciales

Intuición

Una ecuación diferencial es una igualdad en la cual:

- La incógnita es una función desconocida $y = f(x)$ definida y derivable hasta orden k para todo $x \in \mathbb{R}$ (casos que vamos a trabajar en general) o para todo x en un intervalo de reales.
- Aparece en la ecuación alguna de las derivadas de la función desconocida $y = f(x)$, puede ser cualquiera de ellas hasta la derivada de orden k .
- La derivada de mayor orden es la que determina el orden de la ecuación diferencial, es decir: si la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación es la derivada segunda $y'' = f''(x)$, entonces es una ecuación diferencial de grado 2.

En este tema nos vamos a centrar en una clase muy particular de ecuaciones diferenciales, y vamos a trabajar solamente en esas clases. Hay otros cursos que expanden sobre este tópico. Vayamos ahora a uno de los tipos que vamos a estar trabajando.

Ecuación diferencial de primer orden de variables separables.

Definición 2.1

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se llama de variables separadas si es de la forma:

- $y' = A(y)B(x)$

Donde:

- $A(y)$ es una función dada, que depende solo de y y,
- $B(x)$ es una función dada, que depende solo de x

ATENCIÓN: y es una función, pero x es una variable, este punto es muy importante, ya que la costumbre tiende a indicarnos que y es una variable numerica.

Ejemplos:

1. $y' = (\text{sen}(x))(1 + y^2)$ es de variables separables, donde $A(y) = 1 + y^2$ y $B(x) = \text{sen}(x)$.
2. $y' = \text{sen}(x + y)$ claramente no es de variables separables.

Solución general 2.2

Distingamos dos casos:

1. Si existen algunos valores reales α tales que $A(\alpha) = 0$ entonces la función $y(x) = \alpha$ constante, independiente de x , definida para todo $x \in \mathbb{R}$, es solución de la ecuación diferencial $y' = A(y)B(x)$. Esto lo podemos ver sustituyendo $y(x) = \alpha \Rightarrow 0 = A(\alpha)B(x)$, que trivialmente se cumple pues $A(\alpha) = 0$.
2. Ahora, podemos buscar las restantes soluciones $y(x)$ tales que $A(y(x)) \neq 0$; entonces, dividiendo la ecuación diferencial dada entre $A(y)$ se obtiene:

$$\frac{y'(x)}{A(y(x))} = B(x)$$

Primitivando respecto de x (atención, para mantener la igualdad tenemos que considerar la misma variable de ambos lados) obtenemos lo siguiente:

$$\int \frac{y'(x)}{A(y(x))} dx = C + \int B(x) dx$$

Donde C es una constante real arbitraria. En la primer primitiva hacemos el cambio de variable:

- $u = y(x)$
- $du = y'(x)dx$

Esto resulta en:

$$\int \frac{du}{A(u)} = C + \int B(x) dx$$

Como $A(y)$ y $B(x)$ son funciones conocidas al dar la ecuación diferencial, calculando las primitivas obtenemos funciones conocidas:

$$P(y) = C + Q(x)$$

Donde C es una constante real arbitraria, $P(y)$ es una primitiva respecto de y de la función $\frac{1}{A(u)}$, y $Q(x)$ es una primitiva de la función continua dada $B(x)$. A partir de este punto se despeja y se obtiene una (o en general varias) expresión de y

Observación: El caso 1 se puede ignorar ya que se obtiene directamente de la expresión general de y obtenida.

Ejemplo 2.3

Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial:

- $y' = \cos(x)y$

Realicemos el procedimiento mencionado en la parte que vimos anteriormente:

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \cos(x) \\ \Leftrightarrow \\ \int \frac{y'}{y} dx &= \int \cos(x) dx \\ \Leftrightarrow (u=y(x), du=y'(x)dx) \\ \int \frac{1}{u} du &= \sin(x) + C \\ \Leftrightarrow \\ \ln|u| &= \sin(x) + C \\ \Leftrightarrow (\text{deshago el cambio de variable}) \\ \ln|y(x)| &= \sin(x) + C \\ \Leftrightarrow \\ e^{\ln|y(x)|} &= e^{\sin(x)+C} \\ \Leftrightarrow \\ |y(x)| &= e^{\sin(x)+C} \\ \Leftrightarrow \\ y(x) &= \pm e^C e^{\sin(x)} \\ \Leftrightarrow \\ y(x) &= \pm e^C e^{\sin(x)}\end{aligned}$$

Llamo $k = \pm e^C$, que es una constante real arbitraria. Por lo tanto la solución a la ecuación diferencial es la siguiente:

- $y = ke^{\sin(x)}$ con $k \in \mathbb{R}$

Verificación

Por lo general, verificar que la solución de una ecuación diferencial que hallamos es correcta, es sencillo, veamos como verificar:

Quiero ver que $y(x) = ke^{\sin(x)}$ cumple lo siguiente:

- $y' = \cos(x)y$

Entonces primero hallemos y' :

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (ke^{\text{sen}(x)})' \\
&\iff (\text{regla de la cadena: } f(x)=e^x; g(x)=\text{sen}(x)) \\
y'(x) &= ke^{\text{sen}(x)}\cos(x)
\end{aligned}$$

Ahora si, sustituyamos y e y' en la ecuación diferencial a ver tenemos igualdad:

$$\begin{aligned}
y' &= \cos(x)y \\
&\iff \\
ke^{\text{sen}(x)}\cos(x) &= \cos(x)ke^{\text{sen}(x)}
\end{aligned}$$

Listo! Verificamos que efectivamente la solución que hallamos cumple la ecuación diferencial.

Datos iniciales

Como vimos en la sección anterior, por lo general llegamos a infinitas soluciones para una ecuación diferencial. En algunos casos, además de hallar una función y y que cumpla con la ecuación diferencial, también es de interés hallar una función y de estas mismas características pero que además cumpla con lo que se llama una condición inicial.

Por lo general estas son del tipo:

- $y(x_0) = y_0$ con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

Cuando nos dan datos iniciales, procedemos exactamente de la misma forma que venimos trabajando hasta ahora, para hallar lo que llamaremos **la solución general** que básicamente es la forma general que tiene una función solución y . Luego para que cumpla con los datos iniciales, sustituimos los valores reales que nos fueron dados en la solución general, para hallar la solución “particular” despejando. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.1

Sabiendo que todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = (\cos x)y$ son de la forma $y(x) = Ce^{\text{sen}(x)}$, hallar la única solución que cumple que:

- $y(0) = 3$

Sustituyendo en la forma general de la solución tenemos que:

$$\begin{aligned}
y(x) &= Ce^{\text{sen}(x)} \\
&\iff \\
3 &= Ce^{\text{sen}(0)} \\
&\iff \\
3 &= C
\end{aligned}$$

Por lo que entonces la solución al problema con datos iniciales es:

- $y(x) = 3e^{\text{sen}(x)}$