Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 8

Consigna

Estudiar la convergencia de las siguientes series:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

Resolución

Serie #1

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$

Es una serie de términos positivos, por lo que estudiemos convergencia usando el criterio de equivalencia:

- $\frac{n}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

Y como $\sum \frac{1}{n}$ diverge:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ también diverge.

Serie #2

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$

Es una serie de términos positivos, por lo que lo primero que haremos será simplificar la expresión del término general:

$$\frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$$
$$=$$
$$\frac{n}{n\log(n+1)+\log(n+1)}$$
$$=$$
$$\frac{1}{\log(n+1)+\log(n+1)}$$
$$=$$
$$\frac{1}{2\log(n+1)}$$

Ahora podemos usar la siguiente desigualdad de logaritmo $\forall x \geq 0$:

- $\log(1+x) \leq x$

Y por consecuente obtenemos que:

- $\frac{1}{2\log(n+1)} \geq \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{n}$

Entonces como tenemos que $\sum \frac{1}{n}$ diverge, por comparación:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$ diverge también

Serie #3

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$

Es una serie de términos positivos, por lo que lo primero que haremos será utilizar el criterio de la raíz enésima:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^3}{e^n}}$$
$$=$$
$$\lim \frac{\sqrt[n]{n^3}}{e}$$
$$=$$
$$\frac{1}{e}\lim e^{\log(n^{\frac{3}{n}})}$$
$$=$$
$$\frac{1}{e}\lim e^{\frac{3}{n}\log(n)}$$
$$=$$
$$\frac{1}{e}\lim e^{\frac{3\log(n)}{n}}$$
$$=$$
$$\frac{1}{e}$$

Como $\frac{1}{e} < 1$, la serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$ converge

Serie #4

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

Es una serie alternada, por lo que primero estudiaremos convergencia absoluta clasificando la siguiente serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Podemos usar el criterio de comparación y tenemos lo siguiente:

- Como $\sqrt{n} \leq n$, tenemos que $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces como $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ también diverge. Por lo que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ NO es absolutamente convergente.

Para verificar si la misma es convergente, vamos a probar que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ es monótona decreciente, es decir que:

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Esto es directo, pues $\sqrt{x}$ es una función creciente, por lo que $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$, es decir que $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Además tenemos que $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Por lo tanto, por el criterio de Leibnitz tenemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ es convergente.