Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 7

Consigna

Decidir si los siguientes límites existen y en caso afirmativo calcularlos:

1. $\lim_{(x,y,z)\to(2,2,6)} \frac{x-y}{x^2+y-z}$
2. $\lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} \frac{\sin(x^2+e^y-z)}{x^2+\tan\left(\frac{1}{\cos(xyz)}\right)}$
3. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz-z^4}{x^4+y^4+z^4}$

Resolución

Límite #1

- $\lim_{(x,y,z)\to(2,2,6)} \frac{x-y}{x^2+y-z}$

Evaluemos algunos límites direccionales, por ejemplo cuando:

- $y = x$
- $z = 6$

Por lo tanto, el límite se convierte en el siguiente:

- $\lim_{x\to 2} \frac{0}{x^2+x-6}$

Esto tiende a 0, teniendo muy en cuenta que NO estamos evaluando la función en el punto $x = 2$, sino en los puntos arbitrariamente cercanos a él.

Ahora veamos otra dirección:

- $y = 2$
- $z = 6$

Por lo tanto, el límite se convierte en el siguiente:

- $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4}$

Con esto podemos concluir que el límite no existe, ya que hallamos dos direcciones en que el límite nos da un valor numérico diferente.

Límite #2

- $\lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} \frac{\sin(x^2+e^y-z)}{x^2+\tan\left(\frac{1}{\cos(xyz)}\right)}$

Probemos sustituyendo:

- $\frac{\sin(x^2+e^y-z)}{x^2+\tan\left(\frac{1}{\cos(xyz)}\right)} = \frac{\sin(1)}{1+\tan\left(\frac{1}{\cos(0)}\right)} = \frac{\sin(1)}{1+\tan(1)}$

Por lo tanto el límite existe, y tiende a $\frac{\sin(1)}{1+\tan(1)}$

Límite #3

- $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz-z^4}{x^4+y^4+z^4}$

Evaluemos algunos límites direccionales, por ejemplo cuando:

- $y = z$
- $x = 0$

Por lo tanto el límite se convierte en:

- $\lim_{z\to 0} \frac{-z^4}{2z^4} = \frac{-1}{2}$

Ahora, veamos otra dirección:

- $y = z$
- $x = z$

Por lo tanto el límite se convierte en:

- $\lim_{z\to 0} \frac{z^4-z^4}{3z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{0}{3z^4} = 0$

Por el mismo razonamiento que el que usamos para el límite de la parte 1, tenemos que este también tiende a 0.

Con esto podemos concluir que el límite no existe, ya que hallamos dos direcciones en que el límite nos da un valor numérico diferente.