Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas:
    1. $y' + y\cos x = 0$
    2. $x(x-1)y' + (1-2x)y = 0$
    3. $y' - \frac{2}{x}y = 0$
2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no homogéneas:
    1. $y' + y\cos x = \cos x \sin x$
    2. $x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0$
    3. $y' - \frac{2}{x}y = x^4$

Resolución

Se harán la parte 1 y 2 simultaneamente, ya que para resolver las ecuaciones lineales no homogéneas necesitamos también resolver las homogéneas.

Ecuación 1

- $y' + y\cos x = \cos x \sin x$

Tenemos las siguientes ecuaciones por resolver:

- $(H) \quad y' + y\cos x = 0$
- $(NH) \quad y' + y\cos x = \cos x \sin x$

Solución de (H)

Operemos:

$$y' + y \cos x = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{y'}{y} = -\cos x$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\int \frac{y'}{y} dx = \int -\cos x dx$$
$$\Longleftrightarrow_{(u=y(x);du=y'(x)dx)}$$
$$\int \frac{1}{u} du = -\sin x + k_1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$ln|u| + k_2 = -\sin x + k_1$$
$$\Longleftrightarrow_{(C=k_1-k_2)}$$
$$ln|u| = -\sin x + C$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$u = \pm e^C e^{-\sin x}$$
$$\Longleftrightarrow_{(K_1=\pm e^C)}$$
$$u = K_1 e^{-\sin x}$$
$$\Longleftrightarrow_{\text{(deshaciendo el cambio de variables)}}$$
$$y_H = K_1 e^{-\sin x}$$

Solución de (NH)

Para esta parte consideramos el método de variación de constantes, y en base a la solución de (H) procedemos:

- $y_P = C(x)e^{-\sin x}$
- $y_P' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x} cos(x)$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$
\begin{aligned}
& y' + y\cos x = \cos x \sin x \\
& \iff \\
& C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}cos(x) + C(x)e^{-\sin x}\cos x = \cos x \sin x \\
& \iff \\
& e^{-\sin x}(C'(x) - C(x)cos(x) + C(x)\cos x) = \cos x \sin x \\
& \iff \\
& C'(x) - C(x)cos(x) + C(x)\cos x = \frac{\cos x \sin x}{e^{-\sin x}} \\
& \iff \\
& C'(x) = \frac{\cos x \sin x}{e^{-\sin x}} \\
& \iff \\
& \int C'(x)dx = \int \frac{\cos x \sin x}{e^{-\sin x}}dx \\
& \iff {\scriptstyle (u=\sin x; du=\cos(x)dx)} \\
& C(x) + k_1 = \int \frac{u}{e^{-u}}du \\
& \iff \\
& C(x) + k_1 = \int ue^u du \\
& \iff \text{(integración por partes)} \\
& C(x) + k_1 = ue^u - \int 1e^u du \\
& \iff \\
& C(x) + k_1 = ue^u - e^u + k_2 \\
& \iff \\
& C(x) + k_1 = e^u(u-1) + k_2 \\
& \iff {\scriptstyle (K_2=k_1-k_2)} \\
& C(x) = e^u(u-1) + K_2 \\
& \iff \text{(deshago cambio de variable)} \\
& C(x) = e^{\sin x}(\sin(x) - 1) + K_2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, podemos hallar la solución particular de (NH):

$$
\begin{aligned}
& y_P = C(x)e^{-\sin x} \\
& \iff \\
& y_P = (e^{\sin x}(\sin(x) - 1) + K_2)e^{-\sin x} \\
& \iff \\
& y_P = \sin(x) - 1 + K_2 e^{-\sin x} \\
& \iff {\scriptstyle (\text{eligiendo } K_2=0)} \\
& y_P = \sin(x) - 1
\end{aligned}
$$

Conclusión

Por lo tanto, la solución general para (NH) es la siguiente:

- $y_G = y_H + y_P$, entonces:
- $y_G = Ke^{-\sin x} + sin(x) - 1$

Lo que finaliza esta parte.

Ecuación 2

- $x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0$

Tenemos las siguientes ecuaciones por resolver:

- $(H) \quad x(x-1)y' + (1-2x)y = 0$
- $(NH) \quad x(x-1)y' + (1-2x)y = -x^2$

Solución de (H)

Operemos:

$$x(x-1)y' + (1-2x)y = 0$$

$\iff$

$$y' = \frac{1-2x}{x(x-1)}y$$

$\iff$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1-2x}{x(x-1)}$$

$\iff$

$$\int \frac{y'}{y}dx = \int \frac{1-2x}{x(x-1)}dx$$

$\iff$ $\scriptstyle (u=y(x);du=y'(x)dx)$

$$\int \frac{1}{u}du = \int \frac{1-2x}{x(x-1)}dx$$

$\iff$ (fracciones simples)

$$ln|u| + k_1 = \int \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x-1}dx$$

$\iff$

$$ln|u| + k_1 = \int \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x-1}dx$$

$\iff$

$$ln|u| + k_1 = -\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$$

$\iff$ $\scriptstyle (v=x-1;dv=1dx)$

$$ln|u| + k_1 = -ln|x| + k_2 - \int \frac{1}{v}dv$$

$\iff$

$$ln|u| + k_1 = -ln|x| + k_2 - ln|v| + k_3$$

$\iff$ (deshago cambios de variables y $k_4=k_2+k_3-k_1$)

$$ln|y| = -ln|x| - ln|x-1| + k_4$$

$\iff$

$$ln|y| = -(ln|x| + ln|x-1|) + k_4$$

$\iff$

$$ln|y| = -ln|x(x-1)| + k_4$$

$\iff$ $\scriptstyle (n \cdot ln(a)=ln(a^n))$

$$ln|y| = ln\left(\frac{1}{|x(x-1)|}\right) + k_4$$

$\iff$

$$|y| = \frac{e^{k_4}}{|x(x-1)|}$$

$\iff$ $\scriptstyle (K=e^{k_4})$

$$y = \frac{K}{x(x-1)}$$

$\iff$ $\scriptstyle (C=\frac{1}{K})$

$$y = Cx(x-1)$$

Solución de (NH)

Para esta parte consideramos el método de variación de constantes, y en base a la solución de (H) procedemos:

- $y_P = C(x)x(x-1)$
- $y'_P = C'(x)x(x-1) + C(x)(2x-1)$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$
\begin{aligned}
& x(x-1)y' + (1-2x)y = -x^2 \\
& \iff \\
& x(x-1)(C'(x)x(x-1) + C(x)(2x-1)) + (1-2x)(C(x)x(x-1)) = -x^2 \\
& \iff \text{(divido por } x(x-1) \neq 0,1) \\
& x(x-1)(C'(x)x(x-1) + C(x)(2x-1)) + (1-2x)(C(x)x(x-1)) = -x^2 \\
& \iff \\
& (C'(x)x(x-1) + C(x)(2x-1)) + (1-2x)C(x) = \frac{-x^2}{x(x-1)} \\
& \iff \\
& C'(x)x(x-1) = \frac{-x^2}{x(x-1)} \\
& \iff \\
& C'(x) = \frac{-x^2}{x^2(x-1)^2} \\
& \iff \\
& C'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \\
& \iff \\
& \int C'(x)dx = -\int \frac{1}{(x-1)^2}dx \\
& \iff \text{(recordatorio } (*_1)) \\
& C(x) + k_1 = -\frac{1}{(-1)(x-1)} + k_2 \\
& \iff (K = k_2 - k_1) \\
& C(x) + k_1 = \frac{1}{x-1} + k_2 \\
& \iff (K = k_2 - k_1) \\
& C(x) = \frac{1}{x-1} + K
\end{aligned}
$$

Recordatorio $(*_1)$

En este paso se aplica la regla de la potencia:

$$\int (x-a)^n = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con } n \neq -1$$

También se puede hacer cambio de variable que quizás pueda resultar más simple.

Continuando con el ejercicio, ahora podemos hallar la solución particular de (NH):

$$\begin{aligned}
&y_P = C(x)x(x-1) \\
&\iff \\
&y_P = \left(\frac{1}{x-1} + K\right) x(x-1) \\
&\iff \\
&y_P = \frac{x(x-1)}{x-1} + Kx(x-1) \\
&\iff \\
&y_P = x + Kx(x-1) \\
&\iff \text{(eligiendo } K\text{=0)} \\
&y_P = x
\end{aligned}$$

Conclusión

Por lo tanto, la solución general para (NH) es la siguiente:

- $y_G = y_H + y_P$, entonces:
- $y_G = Cx(x-1) + x$, o:
  - $y_G = x(C(x-1) + 1)$

Lo que finaliza esta parte.

Ecuación 3

- $y' - \frac{2}{x}y = x^4$

Tenemos las siguientes ecuaciones por resolver:

- $(H) \quad y' - \frac{2}{x}y = 0$
- $(NH) \quad y' - \frac{2}{x}y = x^4$

Solución de (H)

Operemos:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$

$$\iff$$

$$y' = \frac{2}{x}y$$

$$\iff$$

$$\int \frac{y'}{y}dx = \int \frac{2}{x}dx$$

$$\iff_{(u=y(x);du=y'(x)dx)}$$

$$\int \frac{1}{u}du = 2\int \frac{1}{x}dx$$

$$\iff$$

$$ln|u| + k_1 = 2ln|x| + k_1$$

$$\iff_{(\text{deshaciendo el cambio de variables y } C=k_1-k_2)}$$

$$ln|y| = ln|x^2| + C$$

$$\iff$$

$$|y| = |x^2|e^C$$

$$\iff_{(K=e^C)}$$

$$y = Kx^2$$

Solución de (NH)

Para esta parte consideramos el método de variación de constantes, y en base a la solución de (H) procedemos:

- $y_P = C(x)x^2$
- $y'_P = C'(x)x^2 + C(x)2x$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^4$$
$$\iff$$
$$C'(x)x^2 + C(x)2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = x^4$$
$$\iff$$
$$C'(x)x^2 + C(x)2x - 2xC(x) = x^4$$
$$\iff$$
$$C'(x)x^2 = x^4$$
$$\iff \text{(divido por } x^2 \neq 0)$$
$$C'(x) = x^2$$
$$\iff$$
$$\int C'(x)dx = \int x^2dx$$
$$\iff$$
$$C(x) + k_1 = \frac{x^3}{3} + k_2$$
$$\iff (K = k_2 - k_1)$$
$$C(x) = \frac{x^3}{3} + K$$

Ahora podemos hallar la solución particular de (NH):

$$y_P = C(x)x^2$$
$$\iff$$
$$y_P = \left(\frac{x^3}{3} + K\right)x^2$$
$$\iff$$
$$y_P = \frac{x^5}{3} + Kx^2$$
$$\iff \text{(considerando } K = 0)$$
$$y_P = \frac{x^5}{3}$$

Conclusión

Por lo tanto, la solución general para (NH) es la siguiente:

- $y_G = y_H + y_P$, entonces:
- $y_G = Kx^2 + \frac{x^5}{3}$

Lo que finaliza esta parte.