

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 5

### Consigna

1. Probar que si  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$  y  $g$  es una función acotada en una bola reducida de centro  $p$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = 0$ .
2. Calcular los límites de las siguientes funciones para  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ :
  1.  $x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
  2.  $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$
  3.  $\frac{xy^3}{x^2+y^4} = y \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

### Resolución

#### Parte 1

- Probar que si  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$  y  $g$  es una función acotada en una bola reducida de centro  $p$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = 0$ .

Escribamos el significado de las hipótesis para trabajar con ellas.

#### Hipótesis #1

- $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$

Esto significa que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $\forall x \in B^*(p, \delta) \cap D : |f(x)| < \varepsilon$

#### Hipótesis #2

- $g$  es una función acotada en una bola reducida de centro  $p$

Esto significa que existen  $K > 0$  y  $r > 0$  tales que  $\forall x \in B^*(p, r)$  se cumple que  $|g(x)| < K$

#### Razonamiento

Por la primer hipótesis, podemos considerar  $\varepsilon := \frac{\varepsilon}{K}$ , para el cual tenemos que:

- $\exists \delta_\varepsilon > 0$  tal que  $\forall x \in B^*(p, \delta_\varepsilon) \cap D : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$

Ahora consideremos  $\delta_0 := \max\{\delta_\varepsilon, r\}$ . Entonces para este  $\delta_0$  se van a cumplir simultáneamente las siguientes condiciones:

- $\forall x \in B^*(p, \delta_0) \cap D : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$
- $\forall x \in B^*(p, \delta_0)$  se cumple que  $|g(x)| < K$

Entonces en particular, para todo  $x \in B^*(p, \delta_0) \cap D$ :

- $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{K}K = \varepsilon$

Por lo tanto, obtuvimos lo que queríamos probar, es decir que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $\forall x \in B^*(p, \delta_0) \cap D : |f(x)g(x)| < \varepsilon$

Esto concluye esta parte del ejercicio.

## Parte 2

- Calcular los límites de las siguientes funciones para  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ :

1.  $x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2.  $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$
3.  $\frac{xy^3}{x^2+y^4} = y \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

### Límite #1

- $x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

Notemos que:

- Si  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  entonces  $x \rightarrow 0$ .
- $\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$  siempre está acotada entre 0 y 1

Por lo tanto podemos aplicar lo probamos en la primer parte del ejercicio para concluir que:

- $\lim_{x \rightarrow (0,0)} x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$

### Límite #2

- $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Consideremos el cambio por coordenadas polares:

- $x = \rho \cos \theta$
- $y = \rho \sin \theta$

Entonces:

$$\begin{aligned}
& \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \\
&= \\
& \frac{\rho^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta)}{\rho^2} \\
&= \\
& \rho \cos(\theta) \sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

Por lo tanto el límite que queremos calcular equivale a:

- $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos(\theta) \sin^2(\theta)$

Y tenemos que:

- Cuando  $\rho \rightarrow 0$  entonces  $\rho \rightarrow 0$  (trivial)
- $\cos(\theta) \sin^2(\theta)$  es una función siempre acotada para cualquier valor de  $\theta$

### Límite #3

- $\frac{xy^3}{x^2+y^4} = y \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

La resolución consiste en encontrar una cota, pero al revisar las soluciones se ve muy absurdo obtener esas cotas de la nada. Voy a saltar esta parte del ejercicio, revisar en las soluciones del práctico.