

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

CLASE 5 - 07/08/2025

Ecuaciones diferenciales

Ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea

Definición 4.1

Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea a una ecuación del tipo:

- $y' + a(x)y = 0$

Donde $a(x)$ es una función dada.

Observación: Claramente se ve que la ecuación diferencial mencionada, es de variables separables, pues:

- $y' = -a(x) \cdot y$

Por lo tanto se resuelve como se vió en la sección de variables separables.

Ecuación diferencial lineal de primer orden NO homogénea

Definición 5.1

Se llama ecuación diferencial NO homogénea a una ecuación del tipo:

- $y' + a(x)y = r(x)$

Donde $a(x)$ y $r(x)$ son funciones conocidas, definidas y continuas para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $r(x)$ no es idénticamente nula.

Observación: Consideramos la ecuación diferencial homogénea asociada a la siguiente ecuación diferencial:

- $y' + a(x)y = 0$

Procedimiento de resolución de una ecuación diferencial lineal NO homogénea 5.2

Basaremos nuestro procedimiento de resolución en el siguiente teorema:

Teorema 5.3

La solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea es igual a la solución general de la ecuación homogénea asociada, más una (y solo una, cualquiera) solución particular de la ecuación diferencial dada NO homogénea. Representamos este teorema con la siguiente notación:

- $y_G = y_H + y_P$, donde:
 - y_G es la solución general de la ecuación diferencial **NO homogénea**
 - y_H es la solución general de la ecuación diferencial **homogénea**
 - y_P es una solución particular de la ecuación diferencial **NO homogénea**

Observación: La demostración del teorema está hecha en las notas, pero no se hace formalmente en las clases, por esto no voy a reescribirla en los apuntes. De todos modos la intuición que se da en la clase hace entender que no es muy complicado el porque este teorema se cumple.

A continuación, describimos el procedimiento para la resolución de una ecuación diferencial lineal NO homogénea.

1. Hallar la solución general $y_H(x)$ de la ecuación lineal homogénea asociada.
2. Hallar una solución particular $y_P(x)$ de la ecuación diferencial dada NO homogénea. En la siguiente sección veremos como hallar dicha y_P usando el “método de variación de constante”.
3. Sumar la solución general de la homogénea $y_H(x)$ con la solución particular $y_P(x)$ para obtener la solución final $y_G(x)$

Método de variación de constante 5.4

Este método se usará para hallar (en cualquier caso) una solución particular y_P para poder aplicar el método de resolución descrito anteriormente.

1. En la solución general $y_H(x)$ de la ecuación diferencial homogénea asociada (H) siempre aparecerá una constante C real arbitraria (se verá más claro al hacer un ejemplo).
2. Tomaremos $y_P(x)$ igual a $y_H(x)$, pero reemplazaremos donde tenemos C , la constante arbitraria, con $C(x)$ una función genérica que depende de x .
3. Sustituyendo la función $y_P(x)$ descrita en el paso anterior, en la ecuación diferencial NO homogénea (NH), haciendo que la verifique, se despeja y se encuentra $C(x)$. De todas las posibles funciones $C(x)$ que se despejen habrá que elegir solo una.
4. La función $C(x)$ se sustituye en la expresión de $y_P(x)$ que teníamos hasta ahora para obtener la solución particular de (NH)

Ejemplo 5.5

Queremos resolver $y' = \cos(x)y + \cos(x)$, definimos las siguientes ecuaciones diferenciales con las que vamos a trabajar:

- $y' - \cos(x)y = 0$ (H)
- $y' - \cos(x)y = \cos(x)$ (NH)

Entonces ahora hallamos la solución general para (H).

Solución de (H)

Desarrollemos:

$$y' - \cos(x)y = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y' = \cos(x)y$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int \cos(x) dx$$

$$\Leftrightarrow (u=y(x), du=y'(x)dx)$$

$$\int \frac{du}{u} = \sin(x) + C$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\ln|u| = \sin(x) + C$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|u| = e^C e^{\sin(x)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$u = k e^{\sin(x)}$$

$$\Leftrightarrow (\text{deshago el cambio de variable})$$

$$y(x) = k e^{\sin(x)}$$

Por lo tanto concluimos que:

- $y_H(x) = k e^{\sin(x)}$

Solución particular (NH)

Consideramos $y_P(x) = C(x)e^{\sin(x)}$ y sustituimos en (NH) para despejar $C(x)$:

$$\begin{aligned}
y' - \cos(x)y &= \cos(x) \\
&\Leftrightarrow \\
(C(x)e^{\sin(x)})' &= \cos(x) + \cos(x)C(x)e^{\sin(x)} \\
&\Leftrightarrow \text{(derivada del producto)} \\
C'(x)e^{\sin(x)} + C(x)e^{\sin(x)}\cos(x) &= \cos(x) + \cos(x)C(x)e^{\sin(x)} \\
&\Leftrightarrow \text{(simplificando)} \\
C'(x)e^{\sin(x)} &= \cos(x) \\
&\Leftrightarrow \\
C'(x) &= \cos(x)e^{-\sin(x)} \\
&\Leftrightarrow \\
\int C'(x)dx &= \int \cos(x)e^{-\sin(x)}dx \\
&\Leftrightarrow (u=\sin(x), du=\cos(x)dx) \\
C(x) + k_1 &= \int \cos(x)e^{-\sin(x)}dx \\
&\Leftrightarrow \\
C(x) + k_1 &= \int e^{-u}du \\
&\Leftrightarrow \\
C(x) + k_1 &= -e^{-u} + k_2 \\
&\Leftrightarrow \\
C(x) &= -e^{-u} + k \\
&\Leftrightarrow \text{(deshaciendo el cambio de variable)} \\
C(x) &= -e^{-\sin(x)} + k
\end{aligned}$$

Ahora elegimos una sola de estas soluciones, con $k = 0$:

- $C(x) = -e^{-\sin(x)}$, por lo tanto:
- $y_P(x) = -e^{-\sin(x)}e^{\sin(x)} = -1$

Conclusión del problema

La solución general de la ecuación diferencial dada (NH) es:

- $y(x) = Ce^{\sin(x)} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$