Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

CLASE 11 - 15/09/2025

Sucesiones

Teorema 3.2.6

Toda sucesión a_n acotada tiene una subsucesión convergente.

Demostración

Llamemos A al recorrido de la sucesión $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como la sucesión es acotada, el conjunto A es acotado. Puede ocurrir que A sea finito o infinito.

- Observemos que si A es finito, entonces la sucesión a_n pasa infinitas veces por alguno de sus puntos. Tomando esos índices, construimos una subsucesión que converge a ese elemento.

Por otra parte, si A es infinito, podemos aplicar el teorema 3.2.4, y por lo tanto A tiene un punto de acumulación L.

Como L es de acumulación, en cualquier entorno habrá puntos de a_n. Tomamos entonces valores sucesivos de radios $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. En cada entorno $E^*(L, \varepsilon_k)$ hay un elemento de la sucesión, al que llamaremos a_{n_k}. Por construcción, $|a_{n_k} - L| < \varepsilon_k$, y por lo tanto:

- $a_{n_k} \to L$

Series

Definición 3.34

Dada una sucesión real a_n, se llama suma parcial o reducida enésima a la sucesión $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, y se denomina serie de término general a_n a la suma infinita $\sum a_n$. Se dice que la serie converge, diverge u oscila, cuando lo hace la sucesión s_n. Además, cuando la serie es convergente, al límite $S \in \mathbb{R}$ de s_n se lo denomina la suma de la serie, y se escribe $S = \sum a_n$. También utilizaremos la notación $\sum a_n < \infty$ para referirnos a que la serie es convergente.

Ejemplo 3.35

La serie $\sum_{i=1}^{\infty} q^n$ se denomina serie geométrica. Tenemos que:

- $s_n = 1 + q^1 + q^2 + ... + q^n$

Múltiplicando por q y restando podemos llegar a lo siguiente:

$$\begin{array}{rl} s_n &= 1 + \cancel{q^1} + \cancel{q^2} + ... + \cancel{q^n} \\ -qs_n &= \cancel{q^1} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + ... + q^{n+1} \\ \hline s_n(1-q) &= 1 + q^{n+1} \\ s_n &= \dfrac{1+q^{n+1}}{1-q} \end{array}$$

Ahora queremos evaluar $\lim s_n = \lim \frac{1+q^{n+1}}{1-q}$, y para esto distinguimos dos casos:

- $|q| < 1 : q^{n+1} \to 0$, entonces $\lim s_n = \lim \frac{1+q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$
- $|q| > 1 : q^{n+1}$ diverge. Entonces en este caso no tenemos límite.

Faltaría ver el caso $|q| = 1$, en el que la serie se convierte en una de las siguientes:

- $\sum 1^n$
- $\sum (-1)^n$

Donde ambas son divergentes.