

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Probar que en los siguientes casos no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$:

1. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
2. $f(x, y) = \frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$
3. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{si } x + y \neq 0 \\ 0, & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$
4. $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

Resolución

Función #1

$$\bullet \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Verifiquemos los límites direccionales para cuando $y = mx$.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - m^2)x^2}{(1 + m^2)x^2} \\ &= \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - m^2)}{(1 + m^2)} \\ &= \\ & \frac{(1 - m^2)}{(1 + m^2)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el límite depende siempre del valor de m . Esto no puede pasar pues el valor del límite tiene que ser único.

Función #2

- $f(x, y) = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$

Transformemos a coordenadas polares.

- $x = \rho \cos \theta$
- $y = \rho \sin \theta$

Entonces ahora operamos:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \\ & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^3 \cos^3(\theta)\rho \sin(\theta)}{(\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta)^2} \\ &= \\ & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^3 \cos^3(\theta)\rho \sin(\theta)}{(\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta))^2} \\ &= \\ & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^3 \cos^3(\theta)\rho \sin(\theta)}{(\rho^2)^2} \\ &= \\ & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^3 \cos^3(\theta)\rho \sin(\theta)}{\rho^4} \\ &= \\ & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^4 \cos^3(\theta) \sin(\theta)}{\rho^4} \\ &= \\ & \lim_{\rho \rightarrow 0} 2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ &= \\ & 2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \end{aligned}$$

Pero esta expresión es totalmente dependiente de θ , por lo tanto el límite puede tender a diferentes valores según la dirección de la que nos acerquemos. Esto no puede pasar porque el límite es único.

Función #3

- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{si } x + y \neq 0 \\ 0, & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$

En este caso también probaremos con los límites direccionales para cuando $y = mx$.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xmx}{x + mx} \\
&= \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xmx}{x(1 + m)} \\
&= \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{1 + m} \\
&= \\
& 0
\end{aligned}$$

Esto no nos permite descartar que el límite exista, pero sabemos que si o si tiene que ser 0 si efectivamente existe. Probemos ahora cuando $y = x^2 - x$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - x)}{x + x^2 - x} \\
&= \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x - 1)}{x^2} \\
&= \\
& \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) \\
&= \\
& -1
\end{aligned}$$

Entonces encontramos una dirección para la que el límite no es 0, por lo que podemos concluir que el límite no existe.

Función #4

- $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

Consideremos dos direcciones:

- $y = \frac{1}{2}x^2$
- $y = x^2$

Primera dirección: $y = \frac{1}{2}x^2$:

- En este caso, tenemos que $f(x, y) = 1$, por lo tanto el límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ es 1

Segunda dirección: $y = x^2$:

- En este caso, tenemos que $f(x, y) = 0$, por lo tanto el límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ es 0

Como obtuvimos dos resultados diferentes, el límite no puede existir.