

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 5

### Consigna

Sabiendo que  $a_n \geq 0$  y que  $\sum a_n$  converge, indicar si las siguientes series son convergentes o no, explicando por qué:

1.  $\sum \frac{1}{a_n}$
2.  $\sum a_n^2$
3.  $\sum \sqrt{a_n}$
4.  $\sum \log(1 + a_n)$

### Resolución

#### Serie #1

- $\sum \frac{1}{a_n}$

Consideremos para este caso que  $a_n > 0$ , de lo contrario la sucesión no queda bien definida para todo  $n \in \mathbb{N}$

Analizando el término general, como  $a_n \rightarrow 0$ , vamos a tener que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$$

Y como el término general no tiende a 0, la serie es divergente.

#### Serie #2

- $\sum a_n^2$

Considerando que  $a_n$  converge, tenemos que a partir de cierto  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n > n_0$  se cumple la siguiente desigualdad:

- $0 \leq a_n \leq 1$

Entonces, a partir de este  $n_0$  se va a cumplir la siguiente desigualdad:

- $a_n^2 \leq a_n$ , por lo visto en la anterior desigualdad.

Entonces, utilizando el criterio de comparación, como  $\sum a_n$  converge:

- $\sum a_n^2$  también converge.

### Serie #3

- $\sum \sqrt{a_n}$

Esta serie no necesariamente converge, veámoslo con el contraejemplo:  $\sum \frac{1}{n^2}$ . La serie mencionada converge, pero al tomar raíz obtenemos lo siguiente:

$$\bullet \quad \sum \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \sum \frac{1}{n}$$

Y sabemos que  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

Por otra parte podemos ver otro ejemplo en el que la serie resultante si converge:

- $\sum \frac{1}{n^4}$

Por lo que no podemos afirmar nada sobre esta serie.

### Serie #4

- $\sum \log(1 + a_n)$

**Observación:** Si  $x \geq 0$ , entonces:

- $\log(1 + x) \leq x$

Utilizamos entonces la observación con  $a_n = x$ , dado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , obteniendo:

- $\sum \log(1 + a_n) \leq \sum a_n$

Y por criterio de comparación, como  $a_n$  converge, entonces:

- $\sum \log(1 + a_n)$  también converge.