

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Sean a_n y b_n dos sucesiones reales convergentes tales que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = B$.

1. Probar que la sucesión $c_n = a_n + b_n$ es convergente y $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = A + B$.
2. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la sucesión $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ converge y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$.
3. Probar que la sucesión $d_n = a_n b_n$ converge y $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = AB$.
4. Sea (e_n) una sucesión acotada y suponga que $A = 0$. Probar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n a_n = 0$.

Parte 1

Hecho en el teórico, clase 9, sección 3.11

Parte 2

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la sucesión $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ converge y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$

Tomamos $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, entonces a partir de un $n_0 \in \mathbb{N}$ se cumple el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} |a_n - A| &< \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \\ \iff & (\text{operando}) \\ |\lambda||a_n - A| &< \varepsilon \\ \iff & (\text{operando}) \\ |\lambda(a_n - A)| &< \varepsilon \\ \iff & (\text{operando}) \\ |\lambda a_n - \lambda A| &< \varepsilon \\ \iff & (\tilde{a}_n = \lambda a_n) \\ |\tilde{a}_n - \lambda A| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto demostramos lo que queríamos verificar, es decir que:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n = \lambda A$

Parte 3

Hecho en el teórico, clase 9, sección 3.11

Parte 4

Hecho en el teórico, clase 9, sección 3.10