

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Las siguientes sucesiones son convergentes ($\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$), es decir, que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependiendo de ε) tal que para todo $n \geq n_0$, se cumple $|a_n - L| < \varepsilon$.

Determinar en cada caso el primer valor de n_0 que corresponde a los siguientes valores de ε : 1, 0.1, 0.01.

1. $a_n = \frac{1}{n}$

2. $a_n = \frac{n}{n+1}$

3. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

4. $a_n = \frac{1}{n!}$

5. $a_n = \frac{2n}{n^3+1}$

Resolución

Parte 1

- $a_n = \frac{1}{n}$

Sabemos que $\lim a_n = 0$, veamos que n_0 nos sirve para cada ε .

$$\varepsilon = 1$$

Queremos verificar para que n_0 se cumple que:

- $|\frac{1}{n}| < 1$

Esto se cumple a partir de $n_0 = 2$.

$$\varepsilon = \frac{1}{10}$$

Queremos verificar para que n_0 se cumple que:

- $|\frac{1}{n}| < \frac{1}{10}$

Esto se cumple a partir de $n_0 = 11$.

$$\varepsilon = \frac{1}{100}$$

Queremos verificar para que n_0 se cumple que:

- $|\frac{1}{n}| < \frac{1}{100}$

Esto se cumple a partir de $n_0 = 101$.

Parte 2

- $a_n = \frac{n}{n+1}$

Sabemos que $\lim a_n = 1$, veamos que n_0 nos sirve para cada ε

$$\varepsilon = 1$$

Queremos verificar para que n_0 se cumple que:

- $|\frac{n}{n+1} - 1| < 1$, es decir:
- $|\frac{-1}{n+1}| < 1$

Esto se cumple a partir de $n_0 = 1$.

$$\varepsilon = \frac{1}{10}$$

Queremos verificar para que n_0 se cumple que:

- $|\frac{n}{n+1} - 1| < \frac{1}{10}$, es decir:
- $|\frac{-1}{n+1}| < \frac{1}{10}$

Esto se cumple a partir de $n_0 = 10$.

$$\varepsilon = \frac{1}{100}$$

Queremos verificar para que n_0 se cumple que:

- $|\frac{n}{n+1} - 1| < \frac{1}{100}$, es decir:
- $|\frac{-1}{n+1}| < \frac{1}{100}$

Esto se cumple a partir de $n_0 = 100$.

Parte 3

- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Sabemos que $\lim a_n = 0$, veamos que n_0 nos sirve para cada ε

$$\varepsilon = 1$$

Queremos verificar para que n_0 se cumple que:

$$\bullet \quad \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| < 1$$

Esto se cumple a partir de $n_0 = 2$.

$$\varepsilon = \frac{1}{10}$$

Queremos verificar para que n_0 se cumple que:

$$\bullet \quad \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| < \frac{1}{10}$$

Esto se cumple a partir de $n_0 = 11$.

$$\varepsilon = \frac{1}{100}$$

Queremos verificar para que n_0 se cumple que:

$$\bullet \quad \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| < \frac{1}{100}$$

Esto se cumple a partir de $n_0 = 101$.

Partes restantes

Son análogas a las anteriores.