

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 5

Consigna

1. Probar que si $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$ y g es una función acotada en una bola reducida de centro p , entonces $\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = 0$.
2. Calcular los límites de las siguientes funciones para $(x, y) \rightarrow (0, 0)$:
 1. $x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
 2. $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$
 3. $\frac{xy^3}{x^2+y^4} = y \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Resolución

Parte 1

- Probar que si $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$ y g es una función acotada en una bola reducida de centro p , entonces $\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = 0$.

Escribamos el significado de las hipótesis para trabajar con ellas.

Hipótesis #1

- $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$

Esto significa que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in B^*(p, \delta) \cap D : |f(x)| < \varepsilon$

Hipótesis #2

- g es una función acotada en una bola reducida de centro p

Esto significa que existen $K > 0$ y $r > 0$ tales que $\forall x \in B^*(p, r)$ se cumple que $|g(x)| < K$

Razonamiento

Por la primer hipótesis, podemos considerar $\varepsilon := \frac{\varepsilon}{K}$, para el cual tenemos que:

- $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tal que $\forall x \in B^*(p, \delta_\varepsilon) \cap D : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$

Ahora consideremos $\delta_0 := \max\{\delta_\varepsilon, r\}$. Entonces para este δ_0 se van a cumplir simultáneamente las siguientes condiciones:

- $\forall x \in B^*(p, \delta_0) \cap D : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$
- $\forall x \in B^*(p, \delta_0)$ se cumple que $|g(x)| < K$

Entonces en particular, para todo $x \in B^*(p, \delta_0) \cap D$:

- $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{K}K = \varepsilon$

Por lo tanto, obtuvimos lo que queríamos probar, es decir que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in B^*(p, \delta_0) \cap D : |f(x)g(x)| < \varepsilon$

Esto concluye esta parte del ejercicio.

Parte 2

- Calcular los límites de las siguientes funciones para $(x, y) \rightarrow (0, 0)$:

1. $x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$
3. $\frac{xy^3}{x^2+y^4} = y \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Límite #1

- $x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

Notemos que:

- Si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ entonces $x \rightarrow 0$.
- $\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ siempre está acotada entre 0 y 1

Por lo tanto podemos aplicar lo probamos en la primer parte del ejercicio para concluir que:

- $\lim_{x \rightarrow (0,0)} x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$

Límite #2

- $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Consideremos el cambio por coordenadas polares:

- $x = \rho \cos \theta$
- $y = \rho \sin \theta$

Entonces:

$$\begin{aligned}
& \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \\
& = \\
& \frac{\rho^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta)}{\rho^2} \\
& = \\
& \rho \cos(\theta) \sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

Por lo tanto el límite que queremos calcular equivale a:

- $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos(\theta) \sin^2(\theta)$

Y tenemos que:

- Cuando $\rho \rightarrow 0$ entonces $\rho \rightarrow 0$ (trivial)
- $\cos(\theta) \sin^2(\theta)$ es una función siempre acotada para cualquier valor de θ

Límite #3

- $\frac{xy^3}{x^2+y^4} = y \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

La resolución consiste en encontrar una cota, pero al revisar las soluciones se ve muy absurdo obtener esas cotas de la nada. Voy a saltar esta parte del ejercicio, revisar en las soluciones del práctico.