Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

CLASE 4 - 06/08/2025

Ecuaciones diferenciales

Intuición

Una ecuación diferencial es una igualdad en la cual:

- La incógnita es una función desconocida $y = f(x)$ definida y derivable hasta orden k para todo $x \in \mathbb{R}$ (casos que vamos a trabajar en general) o para todo x en un intervalo de reales.
- Aparece en la ecuación alguna de las derivadas de la función desconocida $y = f(x)$, puede ser cualquiera de ellas hasta la derivada de orden k.
- La derivada de mayor orden es la que determina el orden de la ecuación diferencial, es decir: si la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación es la derivada segunda $y'' = f''(x)$, entonces es una ecuación diferencial de grado 2.

En este tema nos vamos a centrar en una clase muy particular de ecuaciones diferenciales, y vamos a trabajar solamente en esas clases. Hay otros cursos que expanden sobre este tópico. Vayamos ahora a uno de los tipos que vamos a estar trabajando.

Ecuación diferencial de primer orden de variables separables.

Definición 2.1

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se llama de variables separadas si es de la forma:

- $y' = A(y)B(x)$

Donde:

- $A(y)$ es una función dada, que depende solo de y y,
- $B(x)$ es una función dada, que depende solo de x

ATENCIÓN: y es una función, pero x es una variable, este punto es muy importante, ya que la costumbre tiende a indicarnos que y es una variable numerica.

Ejemplos:

1. $y' = (sen(x))(1+y^2)$ es de variables separables, donde $A(y) = 1+y^2$ y $B(x) = sen(x)$.
2. $y' = sen(x+y)$ claramente no es de variables separables.

Solución general 2.2

Distingamos dos casos:

1. Si existen algunos valores reales α tales que $A(\alpha) = 0$ entonces la función $y(x) = \alpha$ constante, independiente de x, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, es solución de la ecuación diferencial $y' = A(y)B(x)$. Esto lo podemos ver sustituyendo $y(x) = \alpha \Rightarrow 0 = A(\alpha)B(x)$, que trivialmente se cumple pues $A(\alpha) = 0$.

2. Ahora, podemos buscar las restantes soluciones $y(x)$ tales que $A(y(x)) \neq 0$; entonces, dividiendo la ecuación diferencial dada entre $A(y)$ se obtiene:

$$\frac{y'(x)}{A(y(x))} = B(x)$$

   Primitivando respecto de x (atención, para mantener la igualdad tenemos que considerar la misma variable de ambos lados) obtenemos lo siguiente:

$$\int \frac{y'(x)}{A(y(x))}dx = C + \int B(x)dx$$

   Donde C es una constante real arbitraria. En la primer primitiva hacemos el cambio de variable:

   - $u = y(x)$
   - $du = y'(x)dx$

   Esto resulta en:

$$\int \frac{du}{A(u)} = C + \int B(x)dx$$

   Como $A(y)$ y $B(x)$ son funciones conocidas al dar la ecuación diferencial, calculando las primitivas obtenemos funciones conocidas:

$$P(y) = C + Q(x)$$

   Donde C es una constante real arbitraria, $P(y)$ es una primitiva respecto de y de la función $\frac{1}{A(u)}$, y $Q(x)$ es una primitiva de la función continua dada $B(x)$. A partir de este punto se despeja y se obtiene una (o en general varias) expresión de y

Observación: El caso 1 se puede ignorar ya que se obtiene directamente de la expresión general de y obtenida.

Ejemplo 2.3

Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial:

- $y' = cos(x)y$

Realicemos el procedimiento mencionado en la parte que vimos anteriormente:

$$
\begin{aligned}
&\frac{y'}{y} = cos(x) \\
&\iff \\
&\int \frac{y'}{y} dx = \int cos(x) dx \\
&\iff_{(u=y(x), du=y'(x)dx)} \\
&\int \frac{1}{u} du = sen(x) + C \\
&\iff \\
&ln|u| = sen(x) + C \\
&\iff \text{(deshago el cambio de variable)} \\
&ln|y(x)| = sen(x) + C \\
&\iff \\
&e^{ln|y(x)|} = e^{sen(x)+C} \\
&\iff \\
&|y(x)| = e^{sen(x)+C} \\
&\iff \\
&y(x) = \pm e^C e^{sen(x)} \\
&\iff \\
&y(x) = \pm e^C e^{sen(x)}
\end{aligned}
$$

Llamo $k = \pm e^C$, que es una constante real arbitraria. Por lo tanto la solución a la ecuación diferencial es la siguiente:

- $y = ke^{sen(x)}$ con $k \in \mathbb{R}$

Verificación

Por lo general, verificar que la solución de una ecuación diferencial que hallamos es correcta, es sencillo, veamos como verificar:

Quiero ver que $y(x) = ke^{sen(x)}$ cumple lo siguiente:

- $y' = cos(x)y$

Entonces primero hallemos y':

$$
\begin{aligned}
&y'(x) = (ke^{sen(x)})' \\
&\iff \text{(regla de la cadena: } f(x)=e^x; g(x)=sen(x)) \\
&y'(x) = ke^{sen(x)}cos(x)
\end{aligned}
$$

Ahora si, sustituyamos y e y' en la ecuación diferencial a ver tenemos igualdad:

$$
\begin{aligned}
&y' = cos(x)y \\
&\iff \\
&ke^{sen(x)}cos(x) = cos(x)ke^{sen(x)}
\end{aligned}
$$

Listo! Verificamos que efectivamente la solución que hallamos cumple la ecuación diferencial.

Datos iniciales

Como vimos en la sección anterior, por lo general llegamos a infinitas soluciones para una ecuación diferencial. En algunos casos, además de hallar una función y y que cumpla con la ecuación diferencias, también es de interés hallar una función y de estas mismas características pero que además cumpla con lo que se llama una condición inicial.

Por lo general estas son del tipo:

- $y(x_0) = y_0$ con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

Cuando nos dan datos iniciales, procedemos exactamente de la misma forma que venimos trabajando hasta ahora, para hallar lo que llamaremos **la solución general** que básicamente es la forma general que tiene una función solución y. Luego para que cumpla con los datos iniciales, sustituimos los valores reales que nos fueron dados en la solución general, para hallar la solución "particular" despejando. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.1

Sabiendo que todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = (cosx)y$ son de la forma $y(x) = Ce^{sen(x)}$, hallar la única solución que cumple que:

- $y(0) = 3$

Sustiyuendo en la forma general de la solución tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&y(x) = Ce^{sen(x)} \\
&\iff \\
&3 = Ce^{sen(0)} \\
&\iff \\
&3 = C
\end{aligned}
$$

Por lo que entonces la solución al problema con datos iniciales es:

- $y(x) = 3e^{sen(x)}$