Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Encontrar los límites de las siguientes sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$
2. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $a_n = \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}}$
4. $a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$
5. $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n)$
6. $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
7. $a_n = \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$

Resolución

Sucesión #1

- $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \\
&=_{\text{(operando)}} \\
&\lim_{n\to\infty} \cos(n) \cdot \frac{1}{n} \\
&=_{(cos(n) \text{ acotado y } \lim \frac{1}{n}=0)} \\
&0
\end{aligned}$$

Sucesión #2

- $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
$$=\text{(sustitución por sucesiones equivalentes)}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n}$$
$$=\text{(operando)}$$
$$0$$

Sucesión #3

- $a_n = \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}}$$
$$=\text{(sustitución por sucesiones equivalentes)}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n}$$
$$=\text{(operando)}$$
$$2$$

Sucesión #4

- $a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

En este caso hay que dar algún pasito más, consideremos:

- $M = \max\{\alpha, \beta\}$

Y lo siguiente:

$$M^n \leq \alpha^n + \beta^n \leq 2M^n$$
$$\iff \text{(tomando raíz enésima)}$$
$$M \leq \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} \leq 2^{\frac{1}{n}} M$$
$$\iff \text{(tomando el límite)}$$
$$\lim_{n\to\infty} M \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} \leq \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} M$$
$$\iff \text{(operando y considerando } 2^{\frac{1}{n}} \to 1\text{)}$$
$$M \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} \leq M$$

Por el teorema del Sándwich entonces:

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} = M = max\{\alpha, \beta\}$

Sucesión #5

- $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n)$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n) \\
&=\text{(sustitución por sucesiones equivalentes)} \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos(n) \\
&=\text{(límite ya conocido)} \\
&0
\end{aligned}
$$

Sucesión #6

- $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Este límite es teórico, por órden de crecimiento se tiene que e^n crece más rapido que n^α para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{e^n} \\
&=\text{(órden de crecimiento)} \\
&0
\end{aligned}
$$

Sucesión #7

- $a_n = \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$

Antes de empezar, factorizemos la sucesión de una forma más conveniente:

$$
\begin{aligned}
&\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} \\
&=\text{(sacando factor común } 3^n\text{)} \\
&\frac{3^n(1+(\frac{-2}{3})^n)}{3^n(3+(-2)(\frac{-2}{3})^n)} \\
&=\text{(sacando factor común)} \\
&\frac{1+(\frac{-2}{3})^n}{3+(-2)(\frac{-2}{3})^n}
\end{aligned}
$$

Ahora busquemos el límite:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1+(\frac{-2}{3})^n}{3+(-2)(\frac{-2}{3})^n} \\
&=\text{(como } (\tfrac{-2}{3})^n \to 0\text{)} \\
&\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Observación: Esta idea es clave para rematar el ejercicio:

- $(\frac{-2}{3})^n \to 0$

Y la misma nace de que cuando trabajamos con límites en infinito, cualquier número $x \in (-1, 1)$ elevado a n tiende a 0.