Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:
    1. $y'' - 5y' + 6y = 0$
    2. $y'' + y' = 0$
    3. $y'' + 4y' + 5y = 0$
    4. $y'' + 2y' + y = 0$
2. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:
    1. $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(1) = e^2,\ y'(1) = 3e^2$
    2. $y'' - 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 11$
    3. $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
    4. $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 0$

Resolución

Se harán la parte 1 y 2 simultaneamente, ya que los valores iniciales solo son un pasito extra.

Ecuación 1

- $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(1) = e^2,\ y'(1) = 3e^2$

Buscamos las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$:

- $\lambda_1 = 3$
- $\lambda_2 = 2$

Como son reales y diferentes, tenemos que la solución general es la siguiente:

- $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$ y su derivada:
- $y' = 3C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x}$

Ahora podemos usar los valores iniciales para obtener la solución que nos piden. Utilizándolos obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1e^3 + C_2e^2 = e^2 \\ 3C_1e^3 + 2C_2e^2 = 3e^2 \end{cases}$$

Es decir:

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^3 & e^2 & e^2 \\ 3e^3 & 2e^2 & 3e^2 \end{array}\right)$$
$$\sim_{\text{(F2-3F1)}}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} e^3 & e^2 & e^2 \\ 0 & -e^2 & 0 \end{array}\right)$$

De donde obtenemos que:

- $C_2 = 0$
- $C_1 = \frac{1}{e}$

Por lo tanto la solución es:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{e}e^{3x} \\ &= e^{3x-1} \end{aligned}$$

Ecuación 2

- $y'' - 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 11$

Buscamos las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$:

- $\lambda_1 = 1$
- $\lambda_2 = 5$

Como son reales y diferentes, tenemos que la solución general es la siguiente:

- $y = C_1e^x + C_2e^{5x}$ y su derivada:
- $y' = C_1e^x + 5C_2e^{5x}$

Ahora podemos usar los valores iniciales para obtener la solución que nos piden. Utilizándolos obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ C_1 + 5C_2 = 11 \end{cases}$$

Es decir:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 11 \end{array}\right)$$
$$\sim_{\text{(F2-F1)}}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

De donde obtenemos que:

- $C_2 = 2$
- $C_1 = 1$

Por lo tanto la solución es:

$$y(x) = e^x + 2e^{5x}$$

Ecuación 3

- $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

Buscamos las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$:

- $\lambda_1 = -2 + i$
- $\lambda_2 = -2 - i$

Como son imaginarias y diferentes, tenemos que la solución general es la siguiente:

- $y = C_1 e^{-2x} cos(x) + C_2 e^{-2x} sin(x)$ y su derivada:
- $y' = C_1(-2e^{-2x} cos(x) - e^{-2x} sin(x)) + C_2(-2e^{-2x} sin(x) + e^{-2x} cos(x))$

Ahora podemos usar los valores iniciales para obtener la solución que nos piden. Utilizándolos obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ -2C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos que:

- $C_1 = 1$
- $C_2 = 2$

Por lo tanto la solución es:

$$y(x) = e^{-2x} cos(x) + 2e^{-2x} sin(x)$$

Ecuación 4

- $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 2, y'(1) = 0$

Buscamos las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$:

- $\lambda_1 = 1$
- $\lambda_2 = -9$

Como son reales y diferentes, tenemos que la solución general es la siguiente:

- $y = C_1 e^x + C_2 e^{-9x}$ y su derivada:
- $y' = C_1 e^x - 9C_2 e^{-9x}$

Ahora podemos usar los valores iniciales para obtener la solución que nos piden. Utilizándolos obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 e + C_2 e^{-9} = 2 \\ C_1 e + -9 C_2 e^{-9} = 0 \end{cases}$$

Es decir:

$$\left(\begin{array}{cc|c} e & e^{-9} & 2 \\ e & -9e^{-9} & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim_{\text{(F2-F1)}}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} e & e^{-9} & 2 \\ 0 & -10e^{-9} & -2 \end{array}\right)$$

De donde obtenemos que:

- $C_2 = \frac{-2}{-10e^{-9}} = \frac{1}{5}e^9$
- $C_1 = \frac{9}{5e} = \frac{9}{5}e^{-1}$

Por lo tanto la solución es:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{9}{5}e^{-1}e^{x} + \frac{1}{5}e^{9}e^{-9x} \\ &= \frac{9}{5}e^{x-1} + \frac{1}{5}e^{-9x+9} \end{aligned}$$