Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 6

Consigna

Encontrar el conjunto de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las condiciones, y representarlos geométricamente:

1. $|z| > 1$
2. $z - \overline{z} = i$
3. $|z - i| = |z + i|$
4. $Im(z) < 2$
5. $|z - \overline{z}| = 2Re(z - 1)$

Resolución

Parte 1

- $|z| > 1$

Esta parte se entiende muy fácilmente con su representación gráfica:

Parte 2

- $z - \overline{z} = i$

En este caso operemos un poco para simplificar la expresión, sea $z = a + bi$:

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Figura 2

Figure 2: Figura 2

Figura 3

Figure 3: Figura 3

$$
\begin{aligned}
& z - \overline{z} = i \\
& \iff \\
& a + bi - (a - bi) = i \\
& \iff \\
& 2bi = i \\
& \iff \\
& 2b = 1 \\
& \iff \\
& b = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la representación gráfica es la siguiente:

Parte 3

- $|z - i| = |z + i|$

En este caso operemos un poco para simplificar la expresión, sea $z = a + bi$:

$$
\begin{aligned}
& |z - i| = |z + i| \\
& \iff \\
& |a + bi - i| = |a + bi + i| \\
& \iff \\
& |a + (b - 1)i| = |a + (b + 1)i| \\
& \iff \\
& \sqrt{a^2 + (b - 1)^2} = \sqrt{a^2 + (b + 1)^2} \\
& \iff \\
& a^2 + b^2 - 2b + 1 = a^2 + b^2 + 2b + 1 \\
& \iff \\
& -2b = 2b \\
& \iff \\
& 4b = 0 \\
& \iff \\
& b = 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la representación gráfica es la siguiente:

Figura 4

Figure 4: Figura 4

Figura 5

Figure 5: Figura 5

Parte 4

- $Im(z) < 2$

Esta parte se entiende muy fácilmente con su representación gráfica

Parte 5

- $|z - \overline{z}| = 2Re(z - 1)$

En este caso operemos un poco para simplificar la expresión, sea $z = a + bi$:

$$
\begin{aligned}
&|z - \overline{z}| = 2Re(z - 1) \\
&\iff \\
&|i2b| = 2(a - 1) \\
&\iff \\
&|i2b| = 2(a - 1) \\
&\iff \\
&2b = 2a - 2 \\
&\iff \\
&b = a - 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la representación gráfica es la siguiente: