Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 5

Consigna

Sean A y B dos conjuntos de $\mathbb{R}^n$. Se define el conjunto suma:

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

1. Demostrar que si A es abierto, $A + B$ es abierto.
2. ¿Qué se puede decir de $A + B$ si A es cerrado?

Resolución

Parte 1

- Demostrar que si A es abierto, $A + B$ es abierto.

Consideremos un punto genérico $a + b \in A + B$, queremos demostrar que este punto es interior a $A + B$, es decir que existe $\delta > 0$ tal que $B(a + b, \delta) \subset A + B$.

Como A es abierto, tenemos que:

- Para $\delta_0 > 0 : B(a, \delta_0) \subset A$

Haciendo un bosquejo de la situación en la que estamos parados, podemos darnos cuenta de que el candidato a δ para la bola $B(a+b, \delta)$ es δ_0. Por lo tanto ahora lo que queremos ver es que la bola mencionada está completamente incluida en $A+B$, para lo que consideramos $x \in B(a + b, \delta_0)$ y probamos que pertenece a $A + B$.

Para que $x \in A + B$, entonces $x = x_a + x_b$ con $x_a \in A$ y $x_b \in B$. Podemos tomar $x_b = b$ que trivialmente pertenece a B por como elegimos a b, lo que nos dejaría con:

- $x_a = x - b$

Para terminar la demostración, tenemos que probar que $x_a \in A$, para lo que va a ser más fácil probar que $x_a \in B(a, \delta_0)$ (completamente incluida en A porque A es abierto).

Como $x \in B(a + b, \delta_0)$, tenemos que $d(a + b, x) < \delta_0$, además podemos operar de la siguiente forma:

$$d(a + b, x) = d(a + b, x_a + b) = \|a + b - x_a - b\| = \|a - x_a\| = d(a, x_a) < \delta_0$$

Entonces, como $d(a, x_a) < \delta_0$, $x_a \in B(a, \delta_0) \subset A$. Por lo que $x_a \in A$, y entonces $x \in A + B$.

Parte 2

- ¿Qué se puede decir de $A + B$ si A es cerrado?

No se puede decir nada en este caso sobre $A + B$, veamos dos casos de conjuntos que cumplen con la hipótesis pero el comportamiento de $A + B$ es distinto:

Caso 1: $A + B$ cerrado

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$
- $B = \{(1, 1)\}$
- $A + B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3\}$

Donde $A + B$ es claramente cerrado.

Caso 2: $A + B$ abierto

- $A = \{-n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$
- $B = \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$

Recordemos que un conjunto cerrado contiene a todos sus puntos de acumulación. Verificaremos que $A + B$ es abierto probando que $0 \notin A + B$ pero que 0 es un punto de acumulación de $A + B$.

Lo primero se verifica fácil pues B no contiene numeros enteros, y restarle un número entero a uno racional nunca dará 0. Para lo segundo, observemos que en $A + B$ tenemos una sucesión de elementos de la forma $(-n) + (n + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ para $n \geq 2$, la cual converge a 0.