Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 12

Consigna

¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden extender en forma continua a todo el plano?

1. $\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
2. $x^2 \log(x^2+y^2)$
3. $\frac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$

Resolución

Función #1

- $\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

La función está bien definida para todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo tanto, veamos si podemos extender la definición de la función para ese punto. Para esto tendremos que evaluar el límite en dicho punto:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \\
&=_{(\text{usando que si } u\to 0 \implies \sin(u)\sim u)} \\
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \\
&=_{(\text{operatoria})} \\
&1
\end{aligned}$$

Entonces, podemos extender la función a todo $\mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Función #2

- $x^2 \log(x^2 + y^2)$

La función está bien definida para todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo tanto, veamos si podemos extender la definición de la función para ese punto.

Para esto tendremos que evaluar el límite en dicho punto, para esto tenemos que operar de alguna forma. Podemos pasar a polares, y desarrollar el límite a ver que obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \log(x^2 + y^2) \\
&=_{\text{(cambio a polares)}} \\
&\lim_{\rho\to 0} \rho^2 \cos^2(\theta) \log(\rho^2) \\
&=_{\text{(operando)}} \\
&\lim_{\rho\to 0} \cos^2(\theta) \rho^2 2 \log(\rho)
\end{aligned}$$

A partir de este punto, podemos separar el límite en dos funciones:

- $2\cos^2(\theta)$ que está acotada.
- $\rho^2 \log(\rho)$ cuando $\rho \to 0$ es un límite teórico, resuelto por órdenes. Este da 0.

Por lo tanto la función en $(0,0)$ tiende a 0. Podemos extender su definición a todo el plano de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \log(x^2 + y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Función #3

- $\frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}$

La función está bien definida para todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo tanto, veamos si podemos extender la definición de la función para ese punto.

Para esto evaluemos el límite en $(0,0)$, viendo que si $u \to 0$, entonces $\sin(u) \sim u$. Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$$

$$=_{(\text{si } u\to 0 \implies \sin(u)\sim u)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

$$=_{(\text{cambiando a polares})}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{\rho^2}$$

$$=_{(\text{operando})}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$$

Y este es un clásico ejemplo de un límite 0 por acotado, por lo que el límite es 0.

Por lo tanto la función en $(0,0)$ tiende a 0. Podemos extender su definición a todo el plano de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$