Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

CLASE 18 - 20/10/2025

Topología en $\mathbb{R}^n$

Definición 5.1 (norma)

Decimos que una función $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una *norma* si verifica las siguientes tres propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$, y $\|x\| = 0$ solamente si $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ que se denomina la desigualdad triangular

Veamos un ejemplo visual de como funciona la desigualdad triangular:

Ejemplos

1. Norma euclidea $\|.\|_2$ (o norma dos):
   - Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la norma euclidea se define por $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x^n}$

   Esta norma es la que solemos usar en general.
2. Norma uno $\|.\|_1$:
   - Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la norma euclidea se define por $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$

   Esto se puede generalizar para cualquier $p \in \mathbb{N}$:
3. Norma p $\|.\|_p$:
   - Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la norma euclidea se define por $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + ... + |x_n|^p}$
4. Norma infinito $\|.\|_\infty$
   - Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la norma euclidea se define por $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$

Veamos ahora como se define una función distancia.

Definición 5.2 (distancia)

Decimos que una función $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una distancia si verifica las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$, y $d(x, y) = 0$ sii $x = y$

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Figura 2

Figure 2: Figura 2

Figura 3

Figure 3: Figura 3

2. $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Podemos ver que si tenemos una norma, podemos definir una función distancia de la siguiente forma:

- $d(x,y) = \|x - y\|$

En general, trabajaremos con la distancia dada por la norma euclidea, aunque distintas normas o distancias tienen distintas aplicaciones en las que pueden ser más prácticas que las que usamos normalmente.

Definición 5.3 (bola abierta)

Dado un punto $a \in \mathbb{R}^n$ y un número real positivo δ, llamamos bola abierta (o entorno, o simplemente bola) de centro a y radio δ al conjunto:

$$B(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) < \delta\}$$

Tenemos entonces que $B(a,\delta)$ es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ que se encuentran a distancia menor que δ. Esto claramente depende de que noción de distancia estamos usando.

Ejemplos en $\mathbb{R}^2$

1. Considerando la distancia tradicional, la que se deriva de la norma euclidea, tenemos que $B(0,1)$ es representado de la siguiente forma en el plano:
2. Considerando la distancia derivada de la norma $\|.\|_1$, $B(0,1)$ es representado de la siguiente forma en el plano:
3. Considerando la distancia derivada de la norma $\|.\|_1$, $B(0,1)$ es representado de la siguiente forma en el plano:

Definición 5.5

Sea A un conjunto, y denotamos por A^C su complemento. Entonces decimos que:

- un punto x_0 **es interior** a A sii existe una bola $B(x_0,\delta) \subset A$
- un punto x_0 **es exterior** a A sii existe una bola $B(x_0,\delta) \subset A^C$

Figura 4

Figure 4: Figura 4

- un punto x_0 **es frontera** de A sii toda bola interseca a A y A^C (es decir que $\forall \delta > 0 : A \cap B(x_0, \delta) \neq \emptyset \wedge A^C \cap B(x_0, \delta) \neq \emptyset$)

Observemos que ser un punto frontera es exactamente la definición de no ser ni interior ni exterior. Por la definición está claro que los puntos interiores necesariamente pertenecen al conjunto A, mientras que los exteriores necesariamente pertenecen al conjunto A^C. Sin embargo no podemos concluir mucho sobre los puntos frontera.

Ejemplos 5.6

Ejemplo 1

Consideremos el conjunto $A_1 = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0\}$, es decir el semiplano superior. Entonces:

- Cualquier punto (x_1, x_2) con $x_2 > 0$ es interior.
- Cualquier punto (x_1, x_2) con $x_2 < 0$ es exterior.
- Cualquier punto (x_1, x_2) con $x_2 = 0$ es un punto frontera.

Ejemplo 2

Consideremos el conjunto $A_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, x_2 = 0\}$. Entonces:

- No hay puntos interiores, ya que no puede haber una bola de radio positivo incluida en un segmento.
- Todos los puntos del conjunto son puntos frontera.
- El $(0, 0)$ y $(1, 0)$ también son puntos frontera a pesar de no pertenecer al conjunto.