Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 7

Consigna

Dibuje el dominio, los conjuntos de nivel y la gráfica de las siguientes funciones:

1. $x^2 + y^2$
2. $x^2 - y^2$
3. x^2
4. y/x
5. xy
6. $\max\{x^2, y^3\}$
7. $\max\{x^2, x + y\}$

Resolución

Aclaración

No haremos gráficas de las funciones para este ejercicio, aunque la estrategia para hacerlo es relativamente fácil:

1. Obtener los conjuntos de nivel.
2. Obtener el comportamiento de la función en los ejes (mandando a 0) a alguna de las dos variables.

Función #1

- $x^2 + y^2$

Veamos los conjuntos de nivel:

- Si $a < 0$ entonces $C_a = \emptyset$, la función es la suma de dos valores siempre positivos, nunca puede dar menos de 0.
- Si $a \geq 0$, entonces quiero estudiar cuando $x^2 + y^2 = a$. Notemos que $x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2$, por lo tanto lo que queremos estudiar es $\|(x, y)\|^2 = a$. De esto se desprende que $C_a = \{(x, y) : \|(x, y)\| = \sqrt{a}\}$

Función #2

- $x^2 - y^2$

Veamos los conjuntos de nivel:

Para este caso quizás es más fácil calcular el conjunto de nivel algunos valores de a.

Caso $a = 0 : x^2 - y^2 = 0$:

Por lo tanto $x^2 = y^2$, es decir que $x = y$. Entonces:

- $C_0 = \{(x, y) : x = y\}$

Caso $a > 0$: $x^2 - y^2 = a$:

Despejando: $x^2 = a + y^2 \to x = \pm\sqrt{a + y^2}$. Entonces tenemos que $C_a = \{(x, y) : x = \pm\sqrt{a + y^2}\}$.

Caso $a < 0 : x^2 - y^2 = a$:

Despejando $-y^2 = a - x^2 \to y = \pm\sqrt{x^2 - a}$. Entonces tenemos que $C_a\{(x, y) : y = \pm\sqrt{x^2 - a}\}$

Notemos que en los casos donde $a \neq 0$ elegimos de forma cuidadosa a quién despejar para evitar la posibilidad de que el radicando sea negativo.

Función #3

- x^2

Veamos los conjuntos de nivel:

- Si $a < 0 : C_a = \emptyset$
- Si $a > 0$, tenemos que $x^2 = a \leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$, por lo tanto $C_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sqrt{a}\}$

Función #4

- y/x

En este caso es importante observar que el dominio no puede ser todo $\mathbb{R}^2$ como en los casos anteriores, así que lo miramos con más detalle en este caso:

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$

Ahora si, veamos los conjuntos de nivel:

- Para cualquier a, tenemos que $\frac{y}{x} = a \to y = ax$, por lo tanto $C_a = \{(x, y) \in D : y = ax\}$

Función #5

- xy

Veamos los conjuntos de nivel:

- Si $a = 0$, se ve fácilmente que $C_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$
- Si $a \neq 0$, tenemos que $xy = a \to y = \frac{a}{x}$, por lo tanto (con cuidado): $C_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = \frac{a}{x}\}$