

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 2

### Consigna

Sea

$$f(x, y) = e^{\sin(x)+y}, \quad g(x, y) = \sin(x) + y.$$

1. Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de  $g$  en  $(0, 0)$ .
2. Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de  $f$  en  $(0, 0)$ .

**Observación:**  $T_3(f)$  puede obtenerse componiendo  $T_3h \circ T_3g$ , donde  $h(x) = e^x$ , y luego removiendo los términos de orden mayor a 3.

### Resolución

#### Parte 1

- Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de  $g$  en  $(0, 0)$

Para el desarrollo de orden tres de  $g$ , necesitamos hallar hasta  $d^3g$ , por lo que primero calcularemos todas las derivadas que necesitaremos:

- $g_x(x, y) = \cos x \implies g_x(0, 0) = 1$
- $g_y(x, y) = 1 \implies g_y(0, 0) = 1$
- $g_{xx}(x, y) = -\sin x \implies g_{xx}(0, 0) = 0$
- $g_{xy}(x, y) = 0 \implies g_{xy}(0, 0) = 0$
- $g_{yy}(x, y) = 0 \implies g_{yy}(0, 0) = 0$
- $g_{xxx}(x, y) = -\cos x \implies g_{xxx}(0, 0) = -1$
- $g_{xxy}(x, y) = 0 \implies g_{xxy}(0, 0) = 0$
- $g_{yyx}(x, y) = 0 \implies g_{yyx}(0, 0) = 0$
- $g_{yyy}(x, y) = 0 \implies g_{yyy}(0, 0) = 0$

Con esto podemos calcular los diferenciales que necesitamos:

- $dg_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = 0 + 1 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y = \Delta x + \Delta y$
- $d^2g_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = 0 + 0 + 0 = 0$
- $d^3g_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = -\Delta x^3 + 0 + 0 + 0 = -\Delta x^3$

Por lo tanto, podemos realizar el desarrollo de Taylor:

$$\begin{aligned}
& g(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) \\
& \quad = (\text{teorema de Taylor}) \\
& 0 + \Delta x + \Delta y + 0 - \frac{\Delta x^3}{3!} + r(\Delta x, \Delta y) \\
& \quad = (\text{operatoria}) \\
& \Delta x + \Delta y - \frac{\Delta x^3}{6} + r(\Delta x, \Delta y)
\end{aligned}$$

## Parte 2

- Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de  $f$  en  $(0, 0)$ .

La estrategia para esta parte, será utilizar la observación de la consigna para el desarrollo. Notemos bien que  $f$  es exactamente  $h \circ g$  con  $h(x) = e^x$ .

En el ejercicio uno (en realidad en cálculo uno también) ya sabemos quién es el desarrollo de Taylor de orden tres de  $h$  para cuando  $x$  tiende a cero:

- $h(0 + \Delta x) = 1 + \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta x^3}{6} + r(\Delta x)$

Con esto estamos en condiciones de usar la observación:

$$\begin{aligned}
& f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) \\
& \quad = (\text{por la observación de la consigna}) \\
& T_3 h \circ T_3 g \\
& \quad = (\text{sustituyendo por lo que conocemos (ya eliminando los términos con orden mayor a 3)}) \\
& 1 + \Delta x + \Delta y - \frac{\Delta x^3}{6} + \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y + \Delta y^2}{2} + \frac{\Delta x^3 + 3\Delta x^2\Delta y + 3\Delta x\Delta y^2 + \Delta y^3}{6} \\
& \quad = (\text{operatoria}) \\
& 1 + \Delta x + \Delta y + \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{2} + \Delta x\Delta y + \frac{\Delta y^3}{6} + \frac{\Delta x^2\Delta y + \Delta x\Delta y^2}{2}
\end{aligned}$$

Esto concluye el ejercicio.