

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 4

### Consigna

Sean  $A$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $C = A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ .  
Hallar  $\overset{\circ}{C}$ ,  $\overline{C}$  y  $\partial C$ .

### Resolución

Tengamos presente la siguiente afirmación que vale para  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $x_1 < x_2$ :

- $\exists q \in \mathbb{Q} : x_1 \leq q \leq x_2$
- $\exists i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x_1 \leq i \leq x_2$

Que significa que ambos  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  son densos en  $\mathbb{R}$ .

### Puntos interiores

Trabajemos primero con el conjunto de puntos interiores. Consideremos  $p = (p_1, p_2) \in C$  un punto cualquiera de  $C$ . Queremos verificar si este punto  $p$  es interior a  $C$ , entonces queremos probar que existe un  $\delta > 0$  tal que:

- $B(p, \delta) \subset A \cap \mathbb{Q}^2$

Pero esto no es posible, ya que para cualquier  $\delta > 0$  se cumple que:

- $\exists r_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : p_1 - \delta \leq r_1 \leq p_1 + \delta$
- $\exists r_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : p_2 - \delta \leq r_2 \leq p_2 + \delta$

Entonces considerando el punto  $r = (r_1, r_2)$ , tendríamos un punto conformado por coordenadas irracionales dentro de la bola abierta  $B(p, \delta)$ , lo que nos dice que  $p$  no puede ser interior.

**Conclusión:**  $\overset{\circ}{C} = \emptyset$

### Puntos frontera

Nuevamente consideremos  $p = (p_1, p_2) \in A$ . Queremos ver si el punto  $p$  es frontera de  $C$ , para esto queremos probar:

- $\forall \delta > 0 : B(p, \delta) \cap C \neq \emptyset \wedge B(p, \delta) \cap C^c \neq \emptyset$

Esto es bastante trivial, pues usando la densidad de  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ , obtenemos:

- $\exists q_1 \in \mathbb{Q} : p_1 - \delta \leq q_1 \leq p_1 + \delta$
- $\exists q_2 \in \mathbb{Q} : p_2 - \delta \leq q_2 \leq p_2 + \delta$
- $\exists r_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : p_1 - \delta \leq r_1 \leq p_1 + \delta$
- $\exists r_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : p_2 - \delta \leq r_2 \leq p_2 + \delta$

Por lo que considerando  $q = (q_1, q_2)$  y  $r = (r_1, r_2)$ , tenemos que:

- $q \in C$  y  $r \in C^C$
- Por construcción, ambos  $q, r$  pertenecen a la bola abierta  $B(p, \delta)$

**Conclusión:**  $p \in A$  es un punto frontera, y como consideramos uno genérico, este razonamiento vale para todo  $p \in A$ , es decir que  $\partial C = A \cup \partial A$

## Clausura de $C$

La clausura de  $C$  es por definición:

- $\overline{C} = A \cup \partial C = A \cup \partial A = \overline{A}$