Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Se definen los siguientes conjuntos:

- $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 1 < y < 3\}$
- $B = A_1 \cap \mathbb{Q}^2$
- $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$
- $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ (x, y) \neq (0, 0)\}$
- $C = A_3 \cap \mathbb{Q}^2$
- $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$
- $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n + \frac{1}{n},\ y = 1,\ n \geq 1\}$
- $A_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$
- $A_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 1 \leq z\}$

1. Representarlos gráficamente e investigar si están acotados.

2. Hallar el interior, la frontera y la clausura de cada uno de ellos.

3. Hallar el conjunto de sus puntos de acumulación.

4. Indicar si son abiertos.

5. Indicar si son cerrados.

6. Indicar si son compactos.

Resolución

Conjunto A_1

- $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 1 < y < 3\}$

1. Efectivamente el conjunto está acotado considerando $K = 4$ por la bola $B(0, 4)$

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Figura 1

Figure 2: Figura 1

2. Veamos los conjuntos:
    - $\mathring{A}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2,\ 1 < y < 3\}$
    - $\partial A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, y \in \{1, 3\}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \{1, 2\}, 1 \leq y \leq 3\}$
    - $\overline{A}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\}$
3. El conjunto de puntos de acumulación es $A_1' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\}$
4. A_1 no es abierto, pues contiene puntos frontera.
5. A_1 no es cerrado, pues A_1^C contiene puntos frontera.
6. A_1 no es cerrado, por lo que no es compacto.

Conjunto B

- $B = A_1 \cap \mathbb{Q}^2$

Este conjunto no es graficable, pero la intuición está en el gráfico de A_1.

1. Efectivamente el conjunto está acotado considerando $K = 4$ por la bola $B(0, 4)$
2. Veamos los conjuntos:
    - $\mathring{B} = \emptyset$ pues para cualquier $B(p, \delta)$ existe por lo menos algún punto de coordenadas irracionales que queda por fuera del conjunto.
    - $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\} = \overline{A}_1$
    - $\overline{B} = \partial B$
3. El conjunto de puntos de acumulación es:
    - $B' = \partial B$
4. B no es abierto, pues no tiene ningún punto interior.
5. B no es cerrado, pues su complemento B^C contiene puntos frontera (no es abierto).
6. B no es cerrado, por lo que no es compacto.

Conjunto A_2

- $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

1. Claramente el conjunto A_2 es NO acotado.
2. Veamos los conjuntos:
    - $\mathring{A}_2 = \emptyset$
    - $\partial A_2 = A_2$
    - $\overline{A}_2 = A_2$
3. El conjunto de puntos de acumulación es:
    - $A_2' = A_2$
4. El conjunto A_2 no es abierto pues no tiene puntos internos.
5. El conjunto A_2 es cerrado, pues su complemento A_2^C no contiene puntos frontera.
6. El conjunto A_2 no es compacto pues no está acotado.

Conjunto A_3

- $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ (x, y) \neq (0, 0)\}$

Figura 3

Figure 3: Figura 3

Figura 4

Figure 4: Figura 4

1. El conjunto A_3 está acotado considerando $K = 2$ por la bola $B(0, 2)$
2. Veamos los conjuntos:
    - $\mathring{A}_3 = A_3$
    - $\partial A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$
    - $\overline{A_3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
3. El conjunto de puntos de acumulación es:
    - $A_3' = \overline{A_3}$
4. El conjunto A_3 es abierto pues contiene a todos sus puntos interiores
5. El conjunto A_3 no es cerrado pues su complemento A_3^C contiene puntos frontera (no es abierto)
6. El conjunto A_3 no es cerrado, por lo tanto no es compacto

Conjunto C

- $C = A_3 \cap \mathbb{Q}^2$

El conjunto no es gráficable, pero la intuición de como funciona está en la gráfica de A_3

1. El conjunto C está acotado considerando $K = 2$ por la bola $B(0, 2)$
2. Veamos los conjuntos:
    - $\mathring{C} = \emptyset$
    - $\partial C = A_3 \cup \partial A_3 = \overline{A_3}$
    - $\overline{C} = \overline{A_3}$
3. El conjunto de puntos de acumulación es:
    - $C' = \overline{C}$
4. El conjunto C no es abierto pues no tiene puntos interiores
5. El conjunto C no es cerrado pues su complemento C^C contiene puntos frontera (no es abierto)
6. El conjunto C no es cerrado, por lo tanto no es compacto

Conjunto A_4

- $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$

1. El conjunto claramente es no acotado.
2. Veamos los conjuntos:
    - $\mathring{A}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 1\}$
    - $\partial A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1\} \cup (\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 1\})$
    - $\overline{A_4} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$
3. El conjunto de puntos de acumulación es:
    - $A_4' = \overline{A_4}$
4. El conjunto A_4 no es abierto pues contiene puntos frontera.

5. El conjunto A_4 no es cerrado pues su complemento A_4^C contiene puntos frontera (no es cerrado)
6. El conjunto A_4 no es cerrado, por lo tanto tampoco es compacto.