

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 13 - 18/09/2025

### Series

#### Proposición 3.40 (criterio de equivalentes)

Sean  $\sum a_n, \sum b_n$  dos series de términos positivos.

- Si  $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ , entonces las dos series son de la misma clase (es decir que o ambas son convergentes, o ambas divergentes).
- Si  $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ , entonces si  $\sum b_n$  converge,  $\sum a_n$  converge también

#### Demostración

##### Primera parte:

Supongamos que  $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ . Entonces, tomando  $\varepsilon := \frac{L}{2}$ , a partir de un  $n_0$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{L}{2} &\leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3L}{2} \\ &\iff (\text{multiplico por } b_n \geq 0) \\ \frac{L}{2}b_n &\leq a_n \leq \frac{3L}{2}b_n\end{aligned}$$

A partir de esto nomenclamos las desigualdades de la siguiente forma:

- $\frac{L}{2}b_n \leq a_n \quad (*_1)$
- $a_n \leq \frac{3L}{2}b_n \quad (*_2)$

Tengamos presente lo siguiente:

- Si  $b_n$  converge, también lo hace  $\frac{L}{2}b_n$
- Si  $b_n$  converge, también lo hace  $\frac{3L}{2}b_n$

Entonces usando el criterio de comparación, podemos llegar a:

- Si  $b_n$  converge, entonces  $a_n$  converge, utilizando  $(*_2)$
- Si  $b_n$  diverge, entonces  $a_n$  diverge, utilizando  $(*_1)$

## Segunda parte:

Es análoga a la primera, pero sin considerar la primera igualdad ( $*_1$ )

## Conclusión

Con este resultado entonces, para estudiar la convergencia de una serie, basta estudiar una serie cuyo término general sea equivalente. Así, cualquier serie cuyo término general  $a_n$  sea un cociente de polinomios será muy fácil de calcular.

## Ejemplos

### Ejemplo 1

Como  $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$ , y sabemos que la serie  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$  converge.

### Ejemplo 2

Si  $\alpha > 2$ , entonces  $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ , y como vimos que la serie  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, por el criterio de comparación podemos concluir que  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  también converge. De esta forma, solo nos queda el sector con  $\alpha \in (1, 2)$  sin clasificar para esta serie.

### Ejemplo 3

La serie  $\sum \sin(\frac{1}{n})$  es divergente pues  $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$  y tenemos que  $\sum \frac{1}{n}$  es divergente.

### Ejemplo 4

La serie  $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$  es divergente pues el término general es equivalente a  $\frac{1}{n}$

### Ejemplo 5

La serie  $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}}$  es convergente pues el término general es equivalente a  $\frac{1}{n^2}$

## Criterio del cociente (o criterio de D'Alembert)

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos, tal que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ . Entonces:

- Si  $L < 1$  entonces  $a_n$  converge.
- Si  $L > 1$  entonces  $a_n$  diverge.

## Demostración

### CASO 1 ( $L < 1$ ):

Observemos que por definición de límite, podemos llegar a la siguiente desigualdad a partir de un cierto  $n_0 \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < k < 1$$

**Observación:** Esto lo hacemos tomando  $\varepsilon := \frac{1-L}{2} > 0$  por ejemplo.

Entonces, tenemos este resultado  $\forall n > n_0$ , que se puede simplificar en:

- $a_n < ka_{n-1}$

Y esto se puede usar recursivamente hasta  $n_0$ :

$$a_n < ka_{n-1} < k^2a_{n-2} < k^3a_{n-3} < \dots < k^{n-n_0}a_{n_0}$$

Y ahora podemos simplificar en:

$$\begin{aligned} & k^{n-n_0}a_{n_0} \\ &= \\ & \frac{k^n}{k^{n_0}}a_{n_0} \\ &= \\ & \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}}k^n \end{aligned}$$

Como tenemos que  $0 < k < 1$ , tenemos que  $\sum k^n$  es convergente, y por el criterio de comparación, también lo hace  $\sum a_n$ .

## CASO 2 ( $L > 1$ ):

Observemos que por definición de límite, podemos llegar a la siguiente desigualdad a partir de un cierto  $n_0 \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > k > 1$$

**Observación:** Esto lo hacemos tomando  $\varepsilon := \frac{L-1}{2} > 0$  por ejemplo.

Entonces, tenemos este resultado  $\forall n > n_0$ , que se puede simplificar en:

- $a_{n+1} > ka_n$

Y además como  $k > 1$ , tenemos que:

- $a_{n+1} > ka_n > a_n$

Y como este resultado vale  $\forall n > n_0$ , la serie  $\sum a_n$  diverge, pues a partir de  $n_0$  su término general es estrictamente creciente.

## Ejemplos 3.43

### Ejemplo 1

Estudiemos la serie  $\sum \frac{n!}{n^n}$ . Utilicemos el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(n+1)}!}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} \\ &= \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n(1 + \frac{1}{n})} \right)^n \\ &= \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} \\ &= \\ & \frac{1}{e} \end{aligned}$$

La última igualdad es un resultado teórico de sucesiones.

### Ejemplo 2

Estudiemos la serie  $\sum \frac{2^n}{n!}$ . Utilicemos el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} \\ &= \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2^n} 2}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} \\ &= \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} \\ &= \\ & 0 \end{aligned}$$