Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 8

Consigna

Calcular:

1. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+xy+1}{x^2-x-y}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log|y|$
3. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}$
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2}$
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$

Resolución

Límite #1

- $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+xy+1}{x^2-x-y}$

Simplemente sustituimos:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+xy+1}{x^2-x-y}$$
$$=$$
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{1+2+1}{1-1-2}$$
$$=$$
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{4}{-3}$$
$$=$$
$$-\frac{4}{3}$$

Por lo tanto, $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+xy+1}{x^2-x-y} = -\frac{4}{3}$

Límite #2

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \log|y|$

Notemos que el límite se puede separar en dos factores:

- x
- $y \log|y|$

Donde la primera tiende claramente a 0, mientras que la segunda se puede deducir por órdenes (x crece más rápido que $\log(x)$), también tiende a 0. Por lo tanto tenemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \log|y| = 0$.

Límite #3

- $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}$

Podemos operar con la función:

$$\frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}$$
$$=$$
$$\frac{(x-y)(x+2y)}{(x+y)(x-y)}$$
$$=$$
$$\frac{x+2y}{x+y}$$

Por lo tanto:

- $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+2y}{x+y} = \frac{3}{2}$

Límite #4

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Consideremos el cambio por polares:

- $x = \rho \cos\theta$
- $y = \rho \cos\theta$

Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$
$$=$$
$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta))}{\rho^2}$$
$$=$$
$$\lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta))$$

Como $\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)$ está acotada para cualquier θ y $\rho \to 0$, podemos concluir que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$

Límite #5

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2}$

Nota: Recordemos que $e^u - 1 \sim u$ cuando $u \to 0$

Aplicando la nota, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2}$$
$$=$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{(x+y)(x-y)}$$
$$=$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x+y}$$

Entonces esto tiende a infinito, pero qué pasa con el signo? Si nos acercamos de con $x = 0^-$ e $y = 0^-$, tendremos que el límite es $-\infty$. Sin embargo si nos acercamos por el lado positivo tendremos que el límite es $+\infty$.

Con esta observación, podemos concluir que el límite no existe.

Límite #6

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$

Nota: Recordemos que $\log(1+u) \sim u$ cuando $u \to 0$.

Aplicando la nota, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$$
$$=$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x^3y}$$

Ahora podemos pasar a polares:

- $x = \rho\cos\theta$
- $y = \rho\sin\theta$

Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x^3y}$$
$$=$$
$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\rho^2+\rho^4\cos^3\theta\sin\theta}$$
$$=$$
$$\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{1+\rho^2\cos^3\theta\sin\theta}$$
$$=$$
$$1$$

Por lo tanto, podemos concluir que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y} = 1$