

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 2

### Consigna

Sean  $a_n$  y  $b_n$  dos sucesiones reales convergentes tales que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = B$ .

1. Probar que la sucesión  $c_n = a_n + b_n$  es convergente y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = A + B$ .
2. Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ , probar que la sucesión  $\tilde{a}_n = \lambda a_n$  converge y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$ .
3. Probar que la sucesión  $d_n = a_n b_n$  converge y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = AB$ .
4. Sea  $(e_n)$  una sucesión acotada y suponga que  $A = 0$ . Probar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n a_n = 0$ .

### Parte 1

Hecho en el teórico, clase 9, sección 3.11

### Parte 2

- Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ , probar que la sucesión  $\tilde{a}_n = \lambda a_n$  converge y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$ .

Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$ , tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$

Tomamos  $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ , entonces a partir de un  $n_0 \in \mathbb{N}$  se cumple el siguiente razonamiento:

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

$\iff$  (operando)

$$|\lambda| |a_n - A| < \varepsilon$$

$\iff$  (operando)

$$|\lambda(a_n - A)| < \varepsilon$$

$\iff$  (operando)

$$|\lambda a_n - \lambda A| < \varepsilon$$

$\iff (\tilde{a}_n = \lambda a_n)$

$$|\tilde{a}_n - \lambda A| < \varepsilon$$

Por lo tanto demostramos lo que queríamos verificar, es decir que:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n = \lambda A$

### **Parte 3**

Hecho en el teórico, clase 9, sección 3.11

### **Parte 4**

Hecho en el teórico, clase 9, sección 3.10