

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 5

### Consigna

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Se define el conjunto suma:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

1. Demostrar que si  $A$  es abierto,  $A + B$  es abierto.
2. ¿Qué se puede decir de  $A + B$  si  $A$  es cerrado?

### Resolución

#### Parte 1

- Demostrar que si  $A$  es abierto,  $A + B$  es abierto.

Consideremos un punto genérico  $a + b \in A + B$ , queremos demostrar que este punto es interior a  $A + B$ , es decir que existe  $\delta > 0$  tal que  $B(a + b, \delta) \subset A + B$ .

Como  $A$  es abierto, tenemos que:

- Para  $\delta_0 > 0 : B(a, \delta_0) \subset A$

Haciendo un bosquejo de la situación en la que estamos parados, podemos darnos cuenta de que el candidato a  $\delta$  para la bola  $B(a + b, \delta)$  es  $\delta_0$ . Por lo tanto ahora lo que queremos ver es que la bola mencionada está completamente incluida en  $A + B$ , para lo que consideramos  $x \in B(a + b, \delta_0)$  y probamos que pertenece a  $A + B$ .

Para que  $x \in A + B$ , entonces  $x = x_a + x_b$  con  $x_a \in A$  y  $x_b \in B$ . Podemos tomar  $x_b = b$  que trivialmente pertenece a  $B$  por como elegimos a  $b$ , lo que nos dejaría con:

- $x_a = x - b$

Para terminar la demostración, tenemos que probar que  $x_a \in A$ , para lo que va a ser más fácil probar que  $x_a \in B(a, \delta_0)$  (completamente incluida en  $A$  porque  $A$  es abierto).

Como  $x \in B(a + b, \delta_0)$ , tenemos que  $d(a + b, x) < \delta_0$ , además podemos operar de la siguiente forma:

$$d(a + b, x) = d(a + b, x_a + b) = \|a + b - x_a - b\| = \|a - x_a\| = d(a, x_a) < \delta_0$$

Entonces, como  $d(a, x_a) < \delta_0$ ,  $x_a \in B(a, \delta_0) \subset A$ . Por lo que  $x_a \in A$ , y entonces  $x \in A + B$ .

## Parte 2

- ¿Qué se puede decir de  $A + B$  si  $A$  es cerrado?

No se puede decir nada en este caso sobre  $A + B$ , veamos dos casos de conjuntos que cumplen con la hipótesis pero el comportamiento de  $A + B$  es distinto:

### Caso 1: $A + B$ cerrado

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$
- $B = \{(1, 1)\}$
- $A + B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3\}$

Donde  $A + B$  es claramente cerrado.

### Caso 2: $A + B$ abierto

- $A = \{-n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$
- $B = \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$

Recordemos que un conjunto cerrado contiene a todos sus puntos de acumulación. Verificaremos que  $A + B$  es abierto probando que  $0 \notin A + B$  pero que  $0$  es un punto de acumulación de  $A + B$ .

Lo primero se verifica fácil pues  $B$  no contiene números enteros, y restarle un número entero a uno racional nunca dará 0. Para lo segundo, observemos que en  $A + B$  tenemos una sucesión de elementos de la forma  $(-n) + (n + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$  para  $n \geq 2$ , la cual converge a 0.