

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 7

### Consigna

Determinar para qué valores de  $\alpha$  las siguientes integrales impropias son convergentes:

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x+1} dx$
2.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha}$

### Resolución

#### Integral #1

- $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x+1} dx$

**Caso  $\alpha \geq 0$ :**

Observemos que si  $\alpha \geq 0$ , tenemos que la integral diverge por comparación con:

- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ , pues  $\frac{x^\alpha}{x+1} \geq \frac{1}{x}$

**Caso  $\alpha < 0$ :**

Por otra parte, si  $\alpha < 0$  tenemos que la integral es:

- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{-\alpha}(x+1)} dx$

Y con este valor de  $\alpha$ , el comportamiento de la función en 0 está dado por:

- $\frac{1}{x^{-\alpha}}$

Por lo tanto podemos estudiar  $\int_0^1 \frac{1}{x^{-\alpha}} dx$  y descartar todos los valores de  $\alpha \leq -1$ , pues esta integral divergería en esos casos.

**Caso  $\alpha \in (-1, 0)$ :**

Nos resta estudiar el intervalo  $\alpha \in (-1, 0)$  donde tenemos que separar nuevamente la integral en:

$$\bullet \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{-\alpha}(x+1)} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{-\alpha}(x+1)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-\alpha}(x+1)} dx$$

La segunda integral, se comporta como  $\frac{1}{x^{-\alpha+1}}$  en  $+\infty$ , por lo que es convergente.

La primera integral, se comporta como  $\frac{1}{x^{-\alpha}}$  en 0. Por lo tanto es convergente (pues recordemos que  $\alpha \in (-1, 0)$ )

**Conclusión:** La integral impropia  $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x+1} dx$  es convergente si  $\alpha \in (-1, 0)$

## Integral #2

- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha}$

La integral es mixta, por lo tanto la dividimos en:

- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha}$

Para el primer integrando, observemos que:

- $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$  por Taylor

Por lo que podemos aplicarlo en el primer integrando para obtener:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha} \\ & \sim \\ & \int_0^1 \frac{dx}{x^{2\alpha}} \end{aligned}$$

Por lo que esta integral converge si:

- $2\alpha < 1 \rightarrow \alpha < \frac{1}{2}$

Ahora para el segundo integrando, es un poco más fácil encontrar una equivalencia, apliquemos directamente:

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha} \\ & \sim \\ & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{\alpha x^2}} \\ & \sim \\ & \int_1^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx \end{aligned}$$

Podemos distinguir algunos casos muy simplemente:

- Si  $\alpha < 0$ : Claramente diverge, pues tenemos una función integrando con crecimiento exponencial.
- Si  $\alpha = 0$ : El integrando equivale a 1, por lo que en este caso la integral también diverge.

Para el último caso, calculemos la primitiva:

$$\begin{aligned} & \int e^{-\alpha x^2} dx \\ &= \\ & -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} = 0$$

Con esto ya podemos observar que cuando  $\alpha > 0$ , tenemos que la integral converge.

**Conclusión:** La integral  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^{x^2}-1)^\alpha}$  converge si:

- $0 < \alpha < \frac{1}{2}$