

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 17 - 02/10/2025

### Integrales impropias de primera especie

#### Definición 4.14

Decimos que la integral impropia  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  es absolutamente convergente si:

- $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  es convergente

#### Teorema 4.15

Si  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  es absolutamente convergente, entonces también es convergente.

La demostración es “análoga” a la versión de series de este teorema, cambiando lo que haya que cambiar.

#### Ejemplos 4.17

##### Ejemplo 1

Clasifiquemos la integral impropia  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$ .

Observemos que tenemos la siguiente desigualdad:

- $|\frac{\sin(x)}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$

Entonces podemos usar comparación, y como  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  es convergente, también lo es  $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin(x)}{x^2}| dx$ .

Por lo tanto probamos que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$  es absolutamente convergente, lo que implica que también converge por el teorema anterior.

##### Ejemplo 2

La integral  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$  se denomina la integral de Fresnel y tiene muchas aplicaciones en física, especialmente en óptica.

Para clasificarla (primero entre 1 y  $+\infty$ ), podemos realizarlo con el siguiente truco:

Figura 1

Figure 1: Figura 1

$$\begin{aligned}
 & \int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx \\
 &= \\
 & \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} \sin(x^2) 2x dx \\
 &= (\text{integración por partes } (*_1)) \\
 & \frac{-\cos(x^2)}{2x} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{2x^2} dx
 \end{aligned}$$

**Observación  $(*_1)$ :** Lo que hacemos es lo siguiente:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2x} \rightarrow du = -\frac{1}{2x^2} \\ dv = \sin(x^2) 2x dx \rightarrow v = -\cos(x^2) \end{cases}$$

Ahora queremos verificar si los dos términos de la integral que hallamos convergen o no para determinar la convergencia de la integral original.

**Primer término:** converge

$$\begin{aligned}
 & \frac{-\cos(x^2)}{2x} \Big|_1^{+\infty} \\
 &= \\
 & \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\cos(x^2)}{2x} \right) + \frac{\cos(1)}{2} \\
 &= (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\cos(x^2)}{2x} \rightarrow 0) \\
 & \frac{\cos(1)}{2}
 \end{aligned}$$

**Segundo término:** converge

$$\begin{aligned}
 & \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{2x^2} dx \text{ es absolutamente convergente} \\
 & \iff \\
 & \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos(x^2)}{2x^2} \right| dx \text{ es convergente} \\
 & \iff \\
 & \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos(x^2)}{x^2} \right| dx \text{ es convergente}
 \end{aligned}$$

Y esto último se cumple por criterio de comparación, pues:

- $\left| \frac{\cos(x^2)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$

Y como  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  es convergente,  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{2x^2} dx$  es absolutamente convergente. Y por lo tanto también es convergente.

**Resumiendo:** Con esto último podemos concluir que la integral de 1 a  $+\infty$  es convergente, y observando que la integral de 0 a 1 es una integral que no tiene inconvenientes (continua y en un intervalo acotado), podemos afirmar que:

- $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$  es convergente.

## Integrales impropias de segunda especie

### Definición 4.19

Sea  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, y  $F(x) = \int_x^b f(t) dt$ . Entonces si el límite  $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = L < \infty$ , decimos que la integral impropia  $\int_a^b f(x) dx$  es convergente, y su valor es  $L$ . Si por el contrario el límite es infinito o no existe, decimos que la integral impropia diverge u oscila, respectivamente.

La definición cuando el dominio es  $[a, b)$  es análoga.

### Ejemplo 4.20

Comencemos con  $\frac{1}{x^\alpha}$  en  $(0, 1]$ . Es decir, queremos clasificar  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ . Calculamos entonces la primitiva:

$$\begin{aligned} F(x) &= \\ &= \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \\ &= \\ &\begin{cases} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_x^1 & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\log(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \\ &= \\ &\begin{cases} \frac{1-x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\log(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Y entonces la integral impropia  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$  converge solamente para  $\alpha < 1$

## Observación

Para integrales impropias de segunda especie, tenemos los mismos resultados de comparación, equivalentes y convergencia absoluta que teníamos para las de primera especie.

### Ejemplo 4.21

Estudiemos la integral impropia  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-\sin(x)}} dx$ .

El único punto donde se anula el denominador es  $x = 0$ , por lo que vamos a estudiar la función en ese punto para clasificar la integral. Por Taylor tenemos lo siguiente:

- $\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!}$

Entonces tenemos el siguiente razonamiento para el integrando:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-\sin(x)}} dx \\ & \sim \\ & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-(x-\frac{x^3}{3!})}} dx \\ & \sim \\ & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{3!}}} dx \\ & \sim \\ & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx \\ & \sim \\ & \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx \end{aligned}$$

Por lo tanto, de acuerdo a lo visto en el ejemplo 4.20, esta integral diverge por el criterio de equivalentes.

## Integrales mixtas

Cuando en una integral aparece mas de punto problemático (o dominio infinito), debemos partir la integral en suma de integrales que contengan solamente uno de esos puntos, y decimos que la integral original es convergente si cada uno de los sumandos lo es.

### Ejemplo 4.23

La integral impropia  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  tiene que partirse en dos (pues en 0 no es acotada y el dominio es infinito). Entonces:

$$\bullet \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Pero observemos que la primera solo converge si  $\alpha < 1$ , y la segunda solo si  $\alpha > 1$

### Ejemplo 4.24

Queremos clasificar  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ , por lo tanto por la definición tenemos que separar en:

$$\bullet \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^{+\infty} x dx$$

De donde claramente podemos verificar que la integral diverge, pues ambos sus integrandos divergen.