# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

# Ejercicio 3

## Consigna

Sea $k > 0$. Hallar el valor de $k$ para que la integral

$$\int_1^{+\infty} \left( \frac{x}{2x^2 + 2k} - \frac{k}{x+1} \right) dx$$

sea convergente y calcularla.

## Resolución

Operemos un poco con la integral para simplificar la expresión:

$$\int_1^{+\infty} \left( \frac{x}{2x^2 + 2k} - \frac{k}{x+1} \right) dx$$
$$=$$
$$\int_1^{+\infty} \left( \frac{x^2 + x - 2kx^2 - 2k^2}{2x^3 + 2kx + 2x^2 + 2k} \right) dx$$
$$=$$
$$\int_1^{+\infty} \left( \frac{(1-2k)x^2 + x - 2k^2}{2x^3 + 2kx + 2x^2 + 2k} \right) dx$$

Observemos que $1 - 2k$ determina si la integral converge o no.

- Si $1 - 2k = 0$, entonces la impropia equivale a $\frac{1}{x^2}$, por lo que convergería
- Si $1 - 2k \neq 0$, entonces la impropia equivale a $\frac{1}{x}$, por lo que divergería

De esto concluimos que la integral impropia converge sii $k = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto queremos trabajar con la siguiente integral:

$$\int_1^{+\infty} \left( \frac{x}{2x^2 + 1} - \frac{1}{2(x+1)} \right) dx$$

Entonces, tenemos dos primitivas que calcular, vamos paso a paso para cada una:

## Primitiva #1

$$\int \frac{x}{2x^2+1}dx$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{2x^2+1}dx$$
$$=_{\text{(cambio de variable } u=x^2; du=2xdx)}$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{2u+1}$$
$$=_{(*_1)}$$
$$\frac{1}{4}log(2u+1)$$
$$=_{\text{(deshaciendo cambio de variable)}}$$
$$\frac{1}{4}log(2x^2+1)$$

**Observación $(*_1)$:** En este paso usamos la regla de la cadena con las siguientes funciones:

- $f(x) = log(x)$
- $g(x) = 2u + 1$

Entonces: $(f \circ g)' = \frac{1}{2u+1} \cdot 2 = \frac{2}{2u+1}$.

Esto es casi lo que buscabamos, pero multiplicado por dos. Fácilmente vemos que si consideramos la función

- $\frac{1}{2}\log(2u+1)$

La regla de la cadena devuelve lo que estamos necesitando.

## Primitiva #2

$$\int \frac{1}{2(x+1)}dx$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}\log(x+1)$$

## Primitiva original

Entonces la primitiva que queríamos calcular queda de la siguiente forma:

$$\int \left( \frac{x}{2x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)} \right) dx$$
$$=$$
$$\frac{1}{4}\log(2x^2+1) - \frac{1}{2}\log(x+1)$$
$$=$$
$$\frac{\log(2x^2+1) - 2\log(x+1)}{4}$$
$$=$$
$$\frac{\log(2x^2+1) - \log((x+1)^2)}{4}$$
$$=$$
$$\frac{1}{4}\log\left(\frac{2x^2+1}{(x+1)^2}\right)$$

Y ahora tendríamos que evaluarla en los extremos:

$$\frac{1}{4}\log\left(\frac{2x^2+1}{(x+1)^2}\right)\Big|_1^{+\infty}$$
$$=$$
$$\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{2x^2+1}{(x+1)^2}\right) - \log\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$
$$=$$
$$\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{2x^2}{x^2}\right) - \log\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$
$$=$$
$$\frac{1}{4}\left(\log(2) - \log\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$
$$=$$
$$\frac{1}{4}\log\left(\frac{8}{3}\right)$$

## Conclusión

La integral impropia $\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2k} - \frac{k}{x+1}\right) dx$ converge a $\frac{1}{4}\log\left(\frac{8}{3}\right)$ sii $k = \frac{1}{2}$. En cualquier otro caso la integral diverge.