Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

CLASE 5 - 07/08/2025

Ecuaciones diferenciales

Ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea

Definición 4.1

Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea a una ecuación del tipo:

- $y' + a(x)y = 0$

Donde $a(x)$ es una función dada.

Observación: Claramente se ve que la ecuación diferencial mencionada, es de variables separables, pues:

- $y' = -a(x) \cdot y$

Por lo tanto se resuelve como se vió en la sección de variables separables.

Ecuación diferencial lineal de primer orden NO homogénea

Definición 5.1

Se llama ecuación diferencial NO homogénea a una ecuación del tipo:

- $y' + a(x)y = r(x)$

Donde $a(x)$ y $r(x)$ son funciones conocidas, definidas y continuas para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $r(x)$ no es idénticamente nula.

Observación: Consideramos la ecuación diferencial homogénea asociada a la siguiente ecuación diferencial:

- $y' + a(x)y = 0$

Procedimiento de resolución de una ecuación diferencial lineal NO homogénea 5.2

Basaremos nuestro procedimiento de resolución en el siguiente teorema:

Teorema 5.3

La solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea es igual a la solución general de la ecuación homogénea asociada, más una (y solo una, cualquiera) solución particular de la ecuación diferencial dada NO homogénea. Representamos este teorema con la siguiente notación:

- $y_G = y_H + y_P$, donde:
  - y_G es la solución general de la ecuación diferencial **NO homogénea**
  - y_H es la solución general de la ecuación diferencial **homogénea**
  - y_P es una solución particular de la ecuación diferencial **NO homogénea**

Observación: La demostración del teorema está hecha en las notas, pero no se hace formalmente en las clases, por esto no voy a reescribirla en los apuntes. De todos modos la intuición que se da en la clase hace entender que no es muy complicado el porque este teorema se cumple.

A continuación, describimos el procedimiento para la resolución de una ecuación diferencial lineal NO homogénea.

1. Hallar la solución general $y_H(x)$ de la ecuación lineal homogénea asociada.
2. Hallar una solución particular $y_P(x)$ de la ecuación diferencial dada NO homogénea. En la siguiente sección veremos como hallar dicha y_P usando el "método de variación de constante".
3. Sumar la solución general de la homogénea $y_H(x)$ con la solución particular $y_P(x)$ para obtener la solución final $y_G(x)$

Método de variación de constante 5.4

Este método se usará para hallar (en cualquier caso) una solución particular y_P para poder aplicar el método de resolución descrito anteriormente.

1. En la solución general $y_H(x)$ de la ecuación diferencial homogénea asociada (H) siempre aparecerá una constante C real arbitraria (se verá más claro al hacer un ejemplo).
2. Tomaremos $y_P(x)$ igual a $y_H(x)$, pero reemplazaremos donde tenemos C, la constante arbitraria, con $C(x)$ una función genérica que depende de x.
3. Sustituyendo la función $y_P(x)$ descrita en el paso anterior, en la ecuación diferencial NO homogénea (NH), haciendo que la verifique, se despeja y se encuentra $C(x)$. De todas las posibles funciones $C(x)$ que se despejen habrá que elegir solo una.
4. La función $C(x)$ se sustituye en la expresión de $y_P(x)$ que teníamos hasta ahora para obtener la solución particular de (NH)

Ejemplo 5.5

Queremos resolver $y' = cos(x)y + cos(x)$, definimos las siguientes ecuaciones diferenciales con las que vamos a trabajar:

- $y' - cos(x)y = 0 \quad (H)$
- $y' - cos(x)y = cos(x) \quad (NH)$

Entonces ahora hallamos la solución general para (H).

Solución de (H)

Desarrollemos:

$$
\begin{aligned}
&y' - cos(x)y = 0\\
&\iff\\
&y' = cos(x)y\\
&\iff\\
&\frac{y'}{y} = cos(x)\\
&\iff\\
&\int \frac{y'}{y}dx = \int cos(x)dx\\
&\iff_{(u=y(x), du=y'(x)dx)}\\
&\int \frac{du}{u}dx = sen(x) + C\\
&\iff\\
&ln|u| = sen(x) + C\\
&\iff\\
&|u| = e^C e^{sen(x)}\\
&\iff\\
&u = ke^{sen(x)}\\
&\iff_{\text{(deshago el cambio de variable)}}\\
&y(x) = ke^{sen(x)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto concluimos que:

- $y_H(x) = ke^{sen(x)}$

Solución particular (NH)

Consideramos $y_P(x) = C(x)e^{sen(x)}$ y sustituimos en (NH) para despejar $C(x)$:

$y' - cos(x)y = cos(x)$

$\Longleftrightarrow$

$(C(x)e^{sen(x)})' = cos(x) + cos(x)C(x)e^{sen(x)}$

$\Longleftrightarrow$ (derivada del producto)

$C'(x)e^{sen(x)} + C(x)e^{sen(x)}cos(x) = cos(x) + cos(x)C(x)e^{sen(x)}$

$\Longleftrightarrow$ (simplificando)

$C'(x)e^{sen(x)} = cos(x)$

$\Longleftrightarrow$

$C'(x) = cos(x)e^{-sen(x)}$

$\Longleftrightarrow$

$$\int C'(x)dx = \int cos(x)e^{-sen(x)}dx$$

$\Longleftrightarrow$ (u=sen(x),du=cos(x)dx)

$$C(x) + k_1 = \int cos(x)e^{-sen(x)}dx$$

$\Longleftrightarrow$

$$C(x) + k_1 = \int e^{-u}du$$

$\Longleftrightarrow$

$C(x) + k_1 = -e^{-u} + k_2$

$\Longleftrightarrow$

$C(x) = -e^{-u} + k$

$\Longleftrightarrow$ (deshaciendo el cambio de variable)

$C(x) = -e^{-sen(x)} + k$

Ahora elegimos una sola de estas soluciones, con $k = 0$:

- $C(x) = -e^{-sen(x)}$, por lo tanto:
- $y_P(x) = -e^{-sen(x)}e^{sen(x)} = -1$

Conclusión del problema

La solución general de la ecuación diferencial dada (NH) es:

- $y(x) = Ce^{sen(x)} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$