

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 4 - 06/08/2025

### Ecuaciones diferenciales

#### Intuición

Una ecuación diferencial es una igualdad en la cual:

- La incógnita es una función desconocida  $y = f(x)$  definida y derivable hasta orden  $k$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (casos que vamos a trabajar en general) o para todo  $x$  en un intervalo de reales.
- Aparece en la ecuación alguna de las derivadas de la función desconocida  $y = f(x)$ , puede ser cualquiera de ellas hasta la derivada de orden  $k$ .
- La derivada de mayor orden es la que determina el orden de la ecuación diferencial, es decir: si la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación es la derivada segunda  $y'' = f''(x)$ , entonces es una ecuación diferencial de grado 2.

En este tema nos vamos a centrar en una clase muy particular de ecuaciones diferenciales, y vamos a trabajar solamente en esas clases. Hay otros cursos que expanden sobre este tema. Vayamos ahora a uno de los tipos que vamos a estar trabajando.

### Ecuación diferencial de primer orden de variables separables.

#### Definición 2.1

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se llama de variables separadas si es de la forma:

- $y' = A(y)B(x)$

Donde:

- $A(y)$  es una función dada, que depende solo de  $y$  y,
- $B(x)$  es una función dada, que depende solo de  $x$

**ATENCIÓN:**  $y$  es una función, pero  $x$  es una variable, este punto es muy importante, ya que la costumbre tiende a indicarnos que  $y$  es una variable numérica.

**Ejemplos:**

1.  $y' = (\operatorname{sen}(x))(1 + y^2)$  es de variables separables, donde  $A(y) = 1 + y^2$  y  $B(x) = \operatorname{sen}(x)$ .
2.  $y' = \operatorname{sen}(x + y)$  claramente no es de variables separables.

**Solución general 2.2**

Distingamos dos casos:

1. Si existen algunos valores reales  $\alpha$  tales que  $A(\alpha) = 0$  entonces la función  $y(x) = \alpha$  constante, independiente de  $x$ , definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ , es solución de la ecuación diferencial  $y' = A(y)B(x)$ . Esto lo podemos ver sustituyendo  $y(x) = \alpha \Rightarrow 0 = A(\alpha)B(x)$ , que trivialmente se cumple pues  $A(\alpha) = 0$ .
2. Ahora, podemos buscar las restantes soluciones  $y(x)$  tales que  $A(y(x)) \neq 0$ ; entonces, dividiendo la ecuación diferencial dada entre  $A(y)$  se obtiene:

$$\frac{y'(x)}{A(y(x))} = B(x)$$

Primitivando respecto de  $x$  (atención, para mantener la igualdad tenemos que considerar la misma variable de ambos lados) obtenemos lo siguiente:

$$\int \frac{y'(x)}{A(y(x))} dx = C + \int B(x) dx$$

Donde  $C$  es una constante real arbitraria. En la primer primitiva hacemos el cambio de variable:

- $u = y(x)$
- $du = y'(x)dx$

Esto resulta en:

$$\int \frac{du}{A(u)} = C + \int B(x) dx$$

Como  $A(y)$  y  $B(x)$  son funciones conocidas al dar la ecuación diferencial, calculando las primitivas obtenemos funciones conocidas:

$$P(y) = C + Q(x)$$

Donde  $C$  es una constante real arbitraria,  $P(y)$  es una primitiva respecto de  $y$  de la función  $\frac{1}{A(u)}$ , y  $Q(x)$  es una primitiva de la función continua dada  $B(x)$ . A partir de este punto se despeja  $y$  y se obtiene una (o en general varias) expresión de  $y$

**Observación:** El caso 1 se puede ignorar ya que se obtiene directamente de la expresión general de  $y$  obtenida.

### Ejemplo 2.3

Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial:

- $y' = \cos(x)y$

Realicemos el procedimiento mencionado en la parte que vimos anteriormente:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \cos(x) \\ \iff \int \frac{y'}{y} dx &= \int \cos(x) dx \\ \iff (u=y(x), du=y'(x)dx) \quad & \\ \int \frac{1}{u} du &= \operatorname{sen}(x) + C \\ \iff \ln|u| &= \operatorname{sen}(x) + C \\ \iff (\text{deshago el cambio de variable}) \quad & \\ \ln|y(x)| &= \operatorname{sen}(x) + C \\ \iff e^{\ln|y(x)|} &= e^{\operatorname{sen}(x)+C} \\ \iff |y(x)| &= e^{\operatorname{sen}(x)+C} \\ \iff y(x) &= \pm e^C e^{\operatorname{sen}(x)} \\ \iff y(x) &= \pm e^C e^{\operatorname{sen}(x)} \end{aligned}$$

Llamo  $k = \pm e^C$ , que es una constante real arbitraria. Por lo tanto la solución a la ecuación diferencial es la siguiente:

- $y = k e^{\operatorname{sen}(x)}$  con  $k \in \mathbb{R}$

### Verificación

Por lo general, verificar que la solución de una ecuación diferencial que hallamos es correcta, es sencillo, veamos como verificar:

Quiero ver que  $y(x) = k e^{\operatorname{sen}(x)}$  cumple lo siguiente:

- $y' = \cos(x)y$

Entonces primero hallemos  $y'$ :

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (ke^{\sin(x)})' \\
&\iff (\text{regla de la cadena: } f(x)=e^x; g(x)=\sin(x)) \\
y'(x) &= ke^{\sin(x)}\cos(x)
\end{aligned}$$

Ahora si, sustituimos  $y$  e  $y'$  en la ecuación diferencial a ver tenemos igualdad:

$$\begin{aligned}
y' &= \cos(x)y \\
&\iff \\
ke^{\sin(x)}\cos(x) &= \cos(x)ke^{\sin(x)}
\end{aligned}$$

Listo! Verificamos que efectivamente la solución que hallamos cumple la ecuación diferencial.

## Datos iniciales

Como vimos en la sección anterior, por lo general llegamos a infinitas soluciones para una ecuación diferencial. En algunos casos, además de hallar una función  $y$  y que cumpla con la ecuación diferencias, también es de interés hallar una función  $y$  de estas mismas características pero que además cumpla con lo que se llama una condición inicial.

Por lo general estas son del tipo:

- $y(x_0) = y_0$  con  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

Cuando nos dan datos iniciales, procedemos exactamente de la misma forma que venimos trabajando hasta ahora, para hallar lo que llamaremos **la solución general** que básicamente es la forma general que tiene una función solución  $y$ . Luego para que cumpla con los datos iniciales, sustituimos los valores reales que nos fueron dados en la solución general, para hallar la solución “particular” despejando. Veamos un ejemplo:

### Ejemplo 3.1

Sabiendo que todas las soluciones de la ecuación diferencial  $y' = (\cos x)y$  son de la forma  $y(x) = Ce^{\sin(x)}$ , hallar la única solución que cumple que:

- $y(0) = 3$

Sustituyendo en la forma general de la solución tenemos que:

$$\begin{aligned}
y(x) &= Ce^{\sin(x)} \\
&\iff \\
3 &= Ce^{\sin(0)} \\
&\iff \\
3 &= C
\end{aligned}$$

Por lo que entonces la solución al problema con datos iniciales es:

- $y(x) = 3e^{\sin(x)}$