Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

CLASE 16 - 30/09/2025

Integrales impropias de primera especie

Teorema 4.11 (criterio serie-integral)

Sea $f : [k, +\infty] \to \mathbb{R}$ monótona decreciente, y $f(x) \geq 0$ para todo x. Entonces:

- $\sum_{n=k}^{+\infty} f(n)$ y $\int_k^{+\infty} f(x)dx$ son de la misma clase.

Demostración

Supongamos que k es entero, o tomamos el primer entero mayor que k.

Como f es decreciente, en cada intervalo de la forma $[n, n+1]$ tenemos que:

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) \quad \forall t \in [n, n+1]$$

Si integramos en el intervalo mencionado, obtenemos que:

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} f(n)dt \quad \forall t \in [n, n+1]$$

Y como $f(n)$ y $f(n+1)$ son constantes:

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \quad \forall t \in [n, n+1]$$

Y como este razonamiento es válido para todo n, podemos sumar desde k hasta n, obteniendo:

$$\sum_{n=k}^{n+1} f(n) \leq \int_k^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{n=k}^{n} f(n) \quad \forall t \in [n, n+1]$$

Marcamos las desigualdades para usarlas más adelante:

- $(*_1) : \sum_{n=k}^{n+1} f(n) \leq \int_k^{n+1} f(t)dt$

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Figura 2

Figure 2: Figura 2

- $(*_2) : \int_k^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{n=k}^{n} f(n)$

Ahora veamos una representación geométrica de lo que estamos haciendo:

Bien, ahora llamemos $F(x) = \int_k^{+\infty} f(t)dt$. Observar que F es creciente, pues f es positiva. Por lo tanto el límite de $F(x)$ cuando x tiende a infinito puede ser finito (en caso de que F esté acotada) o infinito (en caso de que F no esté acotada). Entonces:

- Si $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ es convergente, entonces sabemos que $F(x)$ está acotada por el valor de la serie (por la desigualdad $(*_2)$), por lo que $\lim_{x\to\infty} F(x)$ es finito, y entonces la integral impropia es convergente.
- Si por el contrario $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ es divergente, entonces tenemos que $F(x)$ es no acotada (por la desigualdad $(*_1)$), de donde $\lim_{n\to\infty} F(x) = +\infty$, y entonces la integral impropia es divergente.

En la mayoría de los casos, es más fácil hallar una primitiva que calcular la reducida enésima, o incluso que clasificar la serie mediante otros métodos.

Ejemplo 4.12

Tomemos $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, con $\alpha > 0$. Se puede ver que f es decreciente, por lo que podemos concluir que:

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ y $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ son de la misma clase.

En particular, esto nos permite clasificar la serie para valores de α en $(1, 2)$, que era lo que nos faltaba del capítulo pasado.

Resumiendo entonces, tanto para la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ como para la serie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ tenemos el siguiente comportamiento:

Ejemplo 4.13

Clasifiquemos la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log(n)}$. Si tomamos la función $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x\log(x)}$, tenemos que f es positiva, y decreciente (calculable viendo la derivada por ejemplo). Por otro lado, mediante un cambio de variable podemos calcular la primitiva:

$$
\begin{aligned}
&F(x)\\
&=\\
&\int_2^x \frac{1}{t\log(t)}dt\\
&=_{(\text{cambio de variable } u=\log(t); du=\frac{1}{t}dt)}\\
&\int_{\log(2)}^{\log(x)} \frac{1}{u}du\\
&=\\
&\log(u)\Big|_{\log(2)}^{\log(x)}\\
&=\\
&\log(\log(x))-\log(\log(2))
\end{aligned}
$$

Entonces observamos que $\lim_{n\to\infty} F(x) = +\infty$, entonces la integral impropia $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log(x)}dx$ diverge, y por lo tanto:

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$ también diverge.