Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1 (evaluaciones anteriores)

Consigna

Considere las soluciones de la siguiente ecuación en los números complejos:

- $z^3 = 4\overline{z}$

Entonces:

(A) La ecuación tiene 5 soluciones, una sola de ellas con parte imaginaria nula.

(B) La ecuación tiene 4 soluciones, y el producto de ellas es i.

(C) La ecuación tiene 5 soluciones, tres de ellas con parte imaginaria nula.

(D) La ecuación tiene 3 soluciones, una real pura y dos complejas conjugadas.

(E) La ecuación tiene 3 soluciones, la suma de ellas da cero.

Resolución

Usemos notación polar para representar mejor este problema, con esto obtenemos que:

- $z = \rho e^{i\theta}$, entonces:
  - $4\overline{z} = 4\rho e^{-i\theta}$
  - $z^3 = \rho^3 e^{3i\theta}$

Con esto igualamos módulo y ángulo teniendo en cuenta la ecuación original:

- $\rho^3 = 4\rho$
- $-\theta = 3\theta + 2k\pi$

Operemos con ambas para ver que se obtiene:

$$\rho^3 = 4\rho \implies \rho^2 = 4 \implies \rho = 2$$

$$-\theta = 3\theta + 2k\pi \implies -4\theta = 2k\pi \implies \theta = -\frac{k\pi}{2}$$

Entonces veamos que sucede con el ángulo para ver cuando se empieza a repetir:

- $k = 0 \implies \theta = 0$
- $k = 1 \implies \theta = -\frac{\pi}{2}$
- $k = 2 \implies \theta = -\pi$
- $k = 3 \implies \theta = -\frac{3\pi}{2}$
- $k = 4 \implies \theta = -2\pi = 0$

Por lo tanto, tenemos cuatro soluciones diferentes para $\rho = 2$, donde dos de ellas son imaginarias puras ($k = 1, 3$), mientras que las otras dos ($k = 0, 2$) son reales.

Ojo… Podríamos ponernos a revisar soluciones ahora, pero nos estamos olvidando de una solución trivial. Que pasa si el módulo es 0? De hecho esta es otra solución.

Por lo tanto tenemos cinco soluciones, estamos entre la respuesta A y la respuesta C, pero sabemos que hay dos soluciones con la parte imaginaria nula, si a esto le sumamos la que tiene módulo cero, tenemos que la respuesta correcta es la C.