

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 7 - 26/08/2025

### Sucesiones

#### Definición 3.1

Una sucesión es una función de naturales en los reales  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Al elemento enésimo de la sucesión, es decir  $a(n)$ , se lo denota  $a_n$ , y a toda la sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Muchas veces hacemos un abuso de notación y nos referimos a la sucesión entera simplemente como  $a_n$ , en estos casos nos vamos a basar en el contexto para entender a que nos estamos refiriendo.

#### Ejemplos 3.2

1.  $a_n = \frac{1}{n}$ 
  - Sus elementos son  $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$
2.  $a_n = 1 \quad \forall n$ 
  - Sus elementos son  $\{1\}$
3.  $a_n = (-1)^n$ 
  - Sus elementos son  $\{-1, 1\}$
4.  $a_n = n$ 
  - Sus elementos son  $\{1, 2, 3, \dots\}$

Es importante notar que al listar sus elementos como un conjunto, perdemos por ejemplo el orden de los mismos en la sucesión. En general el comportamiento que más nos va a importar de una sucesión es lo que pasa con ella “en el infinito”, para eso, veamos la definición de límite.

#### Definición 3.3

Decimos que la sucesión  $a_n$  tiene límite  $L \in \mathbb{R}$ , y lo denotamos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  sii:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0 : a_n \in E(L, \varepsilon)$

Recordemos que el entorno  $E(L, \varepsilon)$  es el conjunto de puntos  $x \in \mathbb{R}$  tales que  $|x - L| < \varepsilon$ .

Es decir, que para cualquier valor de  $\varepsilon$  positivo, existe un valor natural  $n_0$ , tal que para cualquier  $n$  mayor a dicho valor, el valor de la sucesión  $a_n$  está en un entorno de centro  $L$  y radio  $\varepsilon$ .

Figura 1

Figure 1: Figura 1

### Ejemplo

En el ejemplo que vimos anteriormente, con la sucesión  $a_n = \frac{1}{n}$ , vemos que a medida que  $n$  crece,  $a_n$  va decreciendo. Probemos que su límite es 0. Tomamos  $\varepsilon > 0$  cualquiera, lo que queremos probar es que  $a_n \in E(0, \varepsilon)$ , que es lo mismo que:

- $|a_n - 0| < \varepsilon$ , es decir que:
- $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Observemos (despejando) que esto último, se cumple sii:

- $n > \frac{1}{\varepsilon}$

Por lo tanto, tomando  $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ , tenemos resuelto el ejercicio.

### Proposición 3.4

Si existe el límite de  $a_n$ , entonces es único.

### Demostración

Supongamos que existen dos límites distintos  $L$  y  $L'$ . Por lo tanto tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_1 : a_n \in E(L, \varepsilon)$
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_2 : a_n \in E(L', \varepsilon)$

Tomemos  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  y  $\varepsilon = \frac{|L-L'|}{2}$  de modo que  $E(L, \varepsilon) \cap E(L', \varepsilon) = \emptyset$ . Como los dos son límites, a partir de  $n_0$  sabemos que  $a_n$  tiene que pertenecer a ambos:

- $E(L, \varepsilon)$ , y
- $E(L', \varepsilon)$

Pero esto es imposible pues son disjuntos. Con esto concluimos que  $L = L'$  y por lo tanto el límite es único.