Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 15

Consigna

Calcular la matriz jacobiana en el punto a y el diferencial $df(a)(\Delta x, \Delta y)$ de:

1. $f(x,y) = e^{x+y} + 2\sin(2x-y)$, $a = (0,0)$
2. $f(x,y,z) = (e^{z+x+y},\ x+y+2z)$, $a = (0,1,2)$
3. $f(x,y) = (e^{x+y},\ \sin(2x-y),\ \log(1+y^2))$, $a = (\pi,\pi)$
4. $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $f(x) = Ax$ con A matriz $q \times p$
5. $f(x,y) = \langle g(x,y), h(x,y) \rangle$, con $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1

Resolución

Función #1

- $f(x,y) = e^{x+y} + 2\sin(2x-y)$, $a = (0,0)$

Calculemos las derivadas que necesitamos

- $f_x(x,y) = e^{x+y} + 4\cos(2x-y)$
- $f_y(x,y) = e^{x+y} - 2\cos(2x-y)$

Evaluando en $(0,0)$, ya definimos la Matriz Jacobiana para $(0,0)$:

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Con esto podemos calcular el diferencial de la siguiente forma (esto es general, respetando las dimensiones):

$$\begin{aligned} & df_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) \\ & =_{\text{(cálculo del diferencial)}} \\ & J_f(0,0) \cdot (\Delta x, \Delta y)^t \\ & =_{\text{(operatoria)}} \\ & 5\Delta x - \Delta y \end{aligned}$$

Función #2

- $f(x,y,z) = (e^{z+x+y},\ x+y+2z)$, $a = (0,1,2)$

Calculemos las derivadas que necesitamos:

- $\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^{z+x+y}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial y} = e^{z+x+y}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial z} = e^{z+x+y}$
- $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$
- $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$
- $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 2$

Evaluando en $(0,1,2)$, ya definimos la Matriz Jacobiana para $(0,1,2)$:

$$J_f(0,1,2) = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & e^3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con esto podemos calcular el diferencial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & df_{(0,1,2)}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \\ & =_{\text{(cálculo del diferencial)}} \\ & J_f(0,1,2) \cdot (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^t \\ & =_{\text{(operatoria)}} \\ & e^3(\Delta x + \Delta y + \Delta z) + \Delta x + \Delta y + 2\Delta z \\ & =_{\text{(operatoria)}} \\ & (e^3+1)\Delta x + (e^3+1)\Delta y + (e^3+2)\Delta z \end{aligned}$$

Función #3

- $f(x,y) = (e^{x+y},\ \sin(2x-y),\ \log(1+y^2))$, $a = (\pi,\pi)$

Calculemos las derivadas que necesitamos:

- $\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^{x+y}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial y} = e^{x+y}$
- $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2\cos(2x-y)$
- $\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\cos(2x-y)$
- $\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0$
- $\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{2y}{1+y^2}$

Evaluando en (π,π), ya definimos la Matriz Jacobiana para (π,π):

$$J_f(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & e^{2\pi} \\ -2 & 1 \\ 0 & \frac{2\pi}{1+\pi^2} \end{pmatrix}$$

Con esto podemos calcular el diferencial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& df_{(\pi,\pi)}(\Delta x, \Delta y) \\
& =\text{(cálculo del diferencial)} \\
& J_f(\pi,\pi) \cdot (\Delta x, \Delta y)^t \\
& =\text{(operatoria)} \\
& e^{2\pi}\Delta x + e^{2\pi}\Delta y - 2\Delta x + \Delta y + \frac{2\pi}{1+\pi^2}\Delta y \\
& =\text{(operatoria)} \\
& (e^{2\pi} - 2)\Delta x + \left(e^{2\pi} + 1 + \frac{2\pi}{1+\pi^2}\right)\Delta y
\end{aligned}$$

Función #4

- $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $f(x) = Ax$ con A matriz $q \times p$

Este caso es un poco diferente a los anteriores, agarremos algo de intuición sobre quién es quién.

- x es un punto de $\mathbb{R}^p$, por lo que tiene la siguiente forma: $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$
- Con lo que ya sabemos de la matriz A, tenemos que:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \dots + a_{qp}x_p \end{pmatrix}$$

Que corresponde a un vector de tamaño q (tiene sentido dada la definición de la función f). Podemos observar fácilmente que los coeficientes de la forma a_{ij} son quienes conformarán la matriz jacobiana, pues tomando como ejemplo f_1, tenemos que:

- $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = a_{11}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = a_{12}$
- Y así sucesivamente hasta…
- $\frac{\partial f_1}{\partial x_p} = a_{1p}$

Este razonamiento es análogo para las demás funciones $f_2, \dots f_q$. Por lo tanto tenemos que:

- $J_f(a) = A$

Esto es válido para cualquier punto $a \in \mathbb{R}^p$.

En cuanto al diferencial $df_a(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_p) = A(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_p)^t$, no hay otra mejor expresión que esta.

Función #5

- $f(x,y) = \langle g(x,y), h(x,y) \rangle$, con $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1

Lo primero que nos conviene hacer, es nomenclar las funciones del producto interno según las subfunciones coordenadas que tienen.

- $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$
- $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$

Con esto, podemos expresar con más detalle $f(x, y)$:

- $f(x, y) = g_1(x, y)h_1(x, y) + g_2(x, y)h_2(x, y)$

Entonces, podemos calcular las derivadas parciales de f, en base a su expresión usando g_1, g_2, h_1, h_2:

Derivada f_x:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = &\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y)h_1(x, y) + g_1(x, y)\frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) \\ &+ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y)h_2(x, y) + g_2(x, y)\frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Nota: Esto se puede expresar como el siguiente producto de matrices:

$$f_x(x, y) = (h_1(x, y), g_1(x, y), h_2(x, y), g_2(x, y))(\tfrac{\partial g_1}{\partial x}(x, y), \tfrac{\partial h_1}{\partial x}(x, y), \tfrac{\partial g_2}{\partial x}(x, y), \tfrac{\partial h_2}{\partial x}(x, y))^t$$

Derivada f_y:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = &\frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y)h_1(x, y) + g_1(x, y)\frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \\ &+ \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y)h_2(x, y) + g_2(x, y)\frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Nota: Esto se puede expresar como el siguiente producto de matrices.

$$f_y(x, y) = (h_1(x, y), g_1(x, y), h_2(x, y), g_2(x, y))(\tfrac{\partial g_1}{\partial y}(x, y), \tfrac{\partial h_1}{\partial y}(x, y), \tfrac{\partial g_2}{\partial y}(x, y), \tfrac{\partial h_2}{\partial y}(x, y))^t$$

Conclusión

A partir de lo que hallamos en el razonamiento anterior: Podemos expresar la matriz Jacobiana para un punto a cualquiera de la siguiente forma:

$$J_f(a) = (h_1(x, y), g_1(x, y), h_2(x, y), g_2(x, y)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$