Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

Indicar si las siguientes series son convergentes o no, hallando su suma en caso de serlo:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} 5^{n+1}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n(n+3)}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\arctan(n+1)-(n+1)\arctan(n)}{n(n+1)}$

Resolución

Recordatorio

Recordemos que una serie geométrica es una serie con la siguiente cara:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

Sabemos que:

- Si $q < 1$ entonces la serie converge a $\lim \frac{1+q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$
- Si $q > 1$ entonces la serie diverge

Serie #1

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Esta serie es geométrica, por lo que como $q < 1$ sabemos que:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge a $\frac{3}{2}$

Serie #2

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3}$

Esta serie también se parece mucho a la geométrica, pero no lo es exactamente. Operaremos para llegar a la forma deseada:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3}$$
$$=\text{(operatoria)}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$$
$$=\text{(operatoria)}$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$$
$$=\text{(operatoria y reindización de la sumatoria)}$$
$$\frac{1}{9}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n}$$

Entonces ahora podemos calcular a que converge usando la fórmula para las series geométricas:

- $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n}$ converge a $\frac{1}{9(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}})}$

Serie #3

- $\sum_{n=1}^{+\infty}5^{n+1}$

Esta serie claramente diverge, pues su término general no tiende a 0.

Serie #4

- $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n(n+3)}$

Busquemos expresar el término general de la serie usando fracciones simples:

$$\frac{3}{n(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+3}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

Entonces podemos expresar la serie como:

- $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}$

Ahora podemos expandir los primeros términos para ver a que equivale la serie:

$$\left(1-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)++\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{8}}\right)+...+\left(\cancel{\frac{1}{n-3}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\frac{1}{n+1}\right)++\left(\right.$$

Por lo tanto la reducida enésima es:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

Y tomando límite:

- $\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}=\frac{11}{6}$

Concluyendo:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n(n+3)}$ converge a $\frac{11}{6}$

Serie #5

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)$

Simplifiquemos la expresión del término general:

$$\begin{aligned}
&\log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)\\
&=_{\text{(factorización de polinomios)}}\\
&\log\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right)\\
&=_{\text{(propiedades de logaritmos)}}\\
&\log((n+1)^2)-\log(n^2)\\
&=_{\text{(operatoria)}}\\
&2\log(n+1)-2\log(n)
\end{aligned}$$

Por lo tanto se puede simplificar la reducida enésima a:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} 2\log(n+1)-2\log(n)\\
&=\\
&2\log(n+1)-2\log(1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, al tomar límite observamos que esta serie diverge.

Serie #6

Se resuelve por fracciones simples, similar a la serie #4.

Serie #7

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\arctan(n+1)-(n+1)\arctan(n)}{n(n+1)}$

Simplifiquemos la expresión del término general:

$$\frac{n\arctan(n+1)-(n+1)\arctan(n)}{n(n+1)}$$
$$=_{\text{(operatoria)}}$$
$$\frac{n\arctan(n+1)}{n(n+1)} - \frac{(n+1)\arctan(n)}{n(n+1)}$$
$$=_{\text{(operatoria)}}$$
$$\frac{\arctan(n+1)}{n+1} - \frac{\arctan(n)}{n}$$

Por lo tanto se puede simplificar su reducida enésima a:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\arctan(n+1)}{n+1} - \frac{\arctan(n)}{n}$$
$$=$$
$$\frac{\arctan(n+1)}{n+1} - \arctan(1)$$

Tomando límite:

- $\lim \frac{\arctan(n+1)}{n+1} - \arctan(1) = -arctan(1) = \frac{-\pi}{4}$

Concluyendo:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\arctan(n+1)-(n+1)\arctan(n)}{n(n+1)}$ converge a $\frac{-\pi}{4}$