Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

CLASE 25 - 04/11/2025

Límites y continuidad

Proposición 6.18

Si f y g son dos funciones continuas en a, entonces:

1. $f + g$ es continua en a
2. $f \cdot g$ es continua en a
3. Si $g(a) \neq 0$ entonces f/g es continua en a

Demostración

Veremos solo la demostración de la suma, pues las demás son muy similares. La estrategia será utilizar el teorema 6.9, es decir:

Recordatorio: Sea un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, una función $f : D \to \mathbb{R}$, y $a \in \mathbb{R}^n$ un punto de D. Entonces:

- f es continua $\iff$ para toda sucesión x_k de elementos de D tal que $\lim_{k \to +\infty} x_k = a$, tenemos que $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = f(a)$

Continuación: Como tenemos que f y g son continuas, tomamos una sucesión genérica $x_k \in \mathbb{R}^n$ que cumple que $\lim_{k \to +\infty} x_k = a$, y sabemos que esta cumple que:

- $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = f(a)$
- $\lim_{k \to +\infty} g(x_k) = g(a)$

Entonces podemos usar la suma de límite en sucesiones (que ya probamos en el curso):

- $\lim_{k \to +\infty} (f + g)(x_k) = f(x_k) + g(x_k) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$

Entonces, cómo es cierto que para toda sucesión $x_k \in \mathbb{R}^n$ que tiende a a, sus imágenes por la función $f + g$ tienden a $(f + g)(a)$, concluimos que la función es continua (también por el teorema 6.9).

Proposición 6.19

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en $a \in \mathbb{R}^n$, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $f(a) \in \mathbb{R}$. Entonces la composición $g \circ f$ es continua en a.

Teorema 6.20 (Weierstrass)

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, y $f : C \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f alcanza mínimo y máximo en C. Es decir que existen $x_m, x_M \in \mathbb{C}$, tales que:

- $f(x) \geq f(x_m) \quad \forall x \in C$
- $f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in C$

Demostración

Primer parte: Primero probaremos que f es acotada (superiormente). Para esto suponemos que no lo es, es decir que para todo $B \in \mathbb{R}$, existe un punto $x \in C$ tal que $f(x) > B$.

Consideramos entonces una sucesión de valores crecientes de B, por ejemplo $B_k = k$. Como estamos suponiendo que f no es acotada, para cada uno de estos B_k podemos conseguir un $x_k \in C$ tal que $f(x_k) > B_k$.

De este modo construimos una sucesión x_k tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x_k) = +\infty$. Por otro lado notemos que la sucesión está contenida en C por construcción, y como C es un conjunto compacto (corolario 5.32), tiene una subsucesión convergente. Llamaremos x_{k_j} a esta subsucesión y $\overline{x} \in \mathbb{C}$ a su límite.

Como f es continua en todo el conjunto C, en particular en $\overline{x}$, tenemos que para toda sucesión que tienda a $\overline{x}$, entonces sus imágenes por f tienden a $f(\overline{x})$ (teorema 6.9). Sin embargo x_{k_j} es una sucesión de estas características, pero sus imágenes por f tienden a infinito. Esto es absurdo, pues contradice un teorema. Por lo tanto f es acotada (superiormente).

Segunda parte: Consideremos el conjunto imagen de la función $Im(f) = \{f(x) : x \in C\}$. Como probamos que f es acotada, y no vacía (pues sino estaría mal definida), por el axioma de completitud tenemos que $Im(f)$ tiene supremo, llamemosle $M = sup(Im(f))$.

Usando la propiedad fundamental del supremo, podemos obtener elementos de $Im(f)$ cada vez más cerca de M, de forma que podemos construir una sucesión x_k tal que $f(x_k)$ tienda a M. Esto lo podemos hacer por ejemplo tomando $\varepsilon = \frac{1}{k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y tomando un elemento $x_k \in C$ tal que $f(x_k) \in (M - \frac{1}{k}, M]$.

Entonces, como $\{x_k\} \subset C$ (compacto), x_k tiene una subsucesión convergente, llamemosla x_{k_j} y a su límite $\overline{x}$. Y cómo f es continua en $\overline{x}$, $f(x_{k_j})$ tiende a $f(\overline{x})$. Como además $f(x_k) \to M$, en particular $f(x_{k_j})$ también tiende a M, por lo que juntando las últimas dos afirmaciones:

- $f(\overline{x}) = M$

Esto concluye la prueba, pues construimos M como el supremo del conjunto imagen de f, y probamos que tiene preimagen en C.