

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial

$$\frac{y'(x)e^{x^2}}{x} = -2(1 + y^2(x))$$

que cumple $y(0) = 0$. Entonces:

(A) $y(\sqrt{2}) = -e$

(B) $y(\sqrt{2}) = \tan(1 + e^2)$

(C) $y(\sqrt{2}) = \tan(1)$

(D) $y(\sqrt{2}) = 1$

(E) $y(\sqrt{2}) = \tan(e^{-2} - 1)$

Resolución

Queremos resolver la ecuación diferencial planteada, para esto veamos a que podemos llegar despejando:

$$\begin{aligned}\frac{y'(x)e^{x^2}}{x} &= -2(1 + y^2(x)) \\ \Leftrightarrow (\text{operatoria}) \\ y'(x)e^{x^2} &= -2x(1 + y^2(x)) \\ \Leftrightarrow (\text{operatoria}) \\ \frac{y'(x)}{1 + y^2(x)} &= -2xe^{-x^2}\end{aligned}$$

Perfecto, es una ecuación de variables separables, por lo tanto podemos resolverla operando:

$$\frac{y'(x)}{1+y^2(x)} = -2xe^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{(integrando ambas partes respecto de } x)$$

$$\int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)} dx = \int -2xe^{-x^2} dx$$

$$\Leftrightarrow \text{(cambio de variable: } u=y(x)dx; du=y'(x)dx)$$

$$\int \frac{1}{1+u^2} du = \int -2xe^{-x^2} dx$$

$$\Leftrightarrow \text{(cambio de variable: } v=-x^2; dv=-2xdx)$$

$$\int \frac{1}{1+u^2} du = \int e^v dv$$

$$\Leftrightarrow \text{(operatoria)}$$

$$\arctan(u) + k_1 = e^v + k_2$$

$$\Leftrightarrow \text{(operatoria)}$$

$$u = \tan(e^v + k_2 - k_1)$$

$$\Leftrightarrow \text{(operatoria)}$$

$$u = \tan(e^v + C)$$

$$\Leftrightarrow \text{(deshaciendo cambios de variable)}$$

$$y(x) = \tan(e^{-x^2} + C)$$

Aplicamos la condición inicial: $y(0) = 0$:

$$\bullet \tan(e^0 + C) = 0 \implies \tan(1 + C) = 0$$

De donde concluimos que $C = -1$, por lo tanto tenemos que:

$$\bullet y(\sqrt{2}) = \tan(e^{-\sqrt{2}^2} - 1) = \tan(e^{-2} - 1)$$

Con esto concluimos que la respuesta correcta es la opción (E).