Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial

$$\frac{y'(x)e^{x^2}}{x} = -2(1+y^2(x))$$

que cumple $y(0) = 0$. Entonces:

(A) $y(\sqrt{2}) = -e$

(B) $y(\sqrt{2}) = \tan(1+e^2)$

(C) $y(\sqrt{2}) = \tan(1)$

(D) $y(\sqrt{2}) = 1$

(E) $y(\sqrt{2}) = \tan(e^{-2}-1)$

Resolución

Queremos resolver la ecuación diferencial planteada, para esto veamos a que podemos llegar despejando:

$$\begin{gathered}\frac{y'(x)e^{x^2}}{x} = -2(1+y^2(x)) \\ \iff \text{(operatoria)} \\ y'(x)e^{x^2} = -2x(1+y^2(x)) \\ \iff \text{(operatoria)} \\ \frac{y'(x)}{1+y^2(x)} = -2xe^{-x^2}\end{gathered}$$

Perfecto, es una ecuación de variables separables, por lo tanto podemos resolverla operando:

$$\begin{aligned}
&\frac{y'(x)}{1+y^2(x)} = -2xe^{-x^2} \\
&\iff \text{(integrando ambas partes respecto de } x\text{)} \\
&\int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)}dx = \int -2xe^{-x^2}dx \\
&\iff \text{(cambio de variable: } u{=}y(x)dx;\ du{=}y'(x)dx\text{)} \\
&\int \frac{1}{1+u^2}du = \int -2xe^{-x^2}dx \\
&\iff \text{(cambio de variable: } v{=}-x^2;\ dv{=}-2xdx\text{)} \\
&\int \frac{1}{1+u^2}du = \int e^v dv \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
&\arctan(u) + k_1 = e^v + k_2 \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
&u = \tan(e^v + k_2 - k_1) \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
&u = \tan(e^v + C) \\
&\iff \text{(deshaciendo cambios de variable)} \\
&y(x) = \tan(e^{-x^2} + C)
\end{aligned}$$

Apliquemos la condición inicial: $y(0) = 0$:

- $\tan(e^0 + C) = 0 \implies \tan(1 + C) = 0$

De donde concluimos que $C = -1$, por lo tanto tenemos que:

- $y(\sqrt{2}) = \tan(e^{-\sqrt{2}^2} - 1) = \tan(e^{-2} - 1)$

Con esto concluimos que la respuesta correcta es la opción (E).