Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1 (evaluaciones anteriores)

Consigna

Considere las siguientes afirmaciones sobre series:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log(1+\frac{1}{n})}$ es convergente.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$ es absolutamente convergente.
3. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(2)\log(3)\log(4)\cdots\log(n)}{n!}$ es convergente.

Entonces:

(A) Solamente las afirmaciones (1) y (2) son verdaderas.

(B) Solamente las afirmaciones (2) y (3) son verdaderas.

(C) Todas las afirmaciones son verdaderas.

(D) Solamente la afirmación (2) es verdadera.

(E) Solamente las afirmaciones (1) y (3) son verdaderas.

Resolución

Serie #1

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log(1+\frac{1}{n})}$

Veamos que sucede con el término general cuando $n \to +\infty$, teniendo presente la siguiente observación:

- $(*_1)$ Cuando $u \to 0$, $\log(1+u) \sim u$

Por lo tanto cuando $n \to +\infty$ el término general es equivalente a:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n$$
$$=\text{(definición del término general)}$$
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
$$=\text{(usando la observación } *_1\text{)}$$
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n \cdot \frac{1}{n}}$$
$$=\text{(operatoria)}$$
$$1$$

Por lo tanto el término general tiende a uno cuando n tiende a infinito, con esto concluimos que la serie no puede ser convergente.

Serie #2

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$

Queremos ver si es absolutamente convergente, es decir si:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$ es convergente.

Para esto usaremos el criterio de la raíz enésima:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}$$
$$=\text{(operatoria)}$$
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3}$$
$$=\text{(operatoria)}$$
$$\frac{1}{3} \lim_{n \to +\infty} n^{\frac{1}{n}}$$
$$=\text{(operatoria)}$$
$$\frac{1}{3} \lim_{n \to +\infty} e^{\log(n^{\frac{1}{n}})}$$
$$=\text{(operatoria)}$$
$$\frac{1}{3} \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}\log(n)}$$
$$=\text{(operatoria)}$$
$$\frac{1}{3} \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{\log(n)}{n}}$$
$$=\text{(operatoria)}$$
$$\frac{1}{3}$$

Como el resultado $\frac{1}{3} < 1$, el resultado nos dice que la serie es convergente. Por lo tanto, la serie original es absolutamente convergente.

Serie #3

- $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(2)\log(3)\log(4)\cdots\log(n)}{n!}$

Para verificar si esta serie es convergente, usaremos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{\log(2)}\cdots\cancel{\log(n)}\log(n+1)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\cancel{\log(2)}\cdots\cancel{\log(n)}}$$
$$=_{(\text{operatoria})}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1)}$$
$$=_{(\text{operatoria})}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)}$$
$$=_{(\text{por órdenes})}$$
$$0$$

Como el límite es menor que 1, entonces la serie es convergente. Concluimos que la respuesta correcta es:

(B) Solamente las afirmaciones (2) y (3) son verdaderas.