Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 6

Consigna

Clasificar:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$
2. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$
3. $\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} dx$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$
5. $\int_0^{+\infty} \sin^2(t) dt$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$
7. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)} dx$
8. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-1}$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$
10. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
11. $\int_0^{+\infty} e^{x^2-\frac{1}{x^2}} dx$
12. $\int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} dx$
13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^\alpha(x)\cos^\beta(x)}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Resolución

Integral #1

- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

La integral no tiene puntos problemáticos, pero tenemos que separar en dos para contemplar los intervalos infinitos.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^{x^2}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} dx$

Observemos además que la función es par, es decir que:

- $f(-x) = f(x)$, se verifica:
- $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$

Por lo que basta con estudiar:

- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} dx$

Para esto sabemos que a partir de $x = 1$ se cumple la siguiente desigualdad:

- $e^{x^2} \geq x^2$

Tomando opuestos:

- $\frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2}$

Por lo tanto para el intervalo $[1, +\infty)$ podemos decir que la integral impropia es convergente por comparación con $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Por último nos resta el intervalo $[0, 1]$, que es directo pues es una integral de CDIV en un intervalo donde la función es continua (es un número).

Conclusión: La integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ es convergente pues:

- La función integrando es par.
- La integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ es convergente por comparación.

Integral #2

- $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$

Por Taylor, podemos expresar e^{-x} cerca de 0 de la siguiente forma:

- $e^{-x} = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 - ...$

Entonces la función que queremos integrar cerca de 0 es:

$$\frac{1 - x + \frac{x^2}{2}}{x}$$
$$=$$
$$\frac{1}{x} - 1 + \frac{x}{2} - ...$$

Entonces al integrar en el intervalo $[0, 1]$, se observa que el único término problemático es $\frac{1}{x}$. Por lo que la convergencia de la integral se juega ahí, pero ya la sabemos clasificar:

- $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ diverge, pues $\alpha = 1$

Conclusión: La integral impropia $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$ diverge.

Integral #3

- $\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} dx$

Este ejemplo nos lleva a formalizar un aspecto importante de la integración por partes de integrales impropias. Este método se puede usar sii:

- udu y vdu son integrables.

- Los límites "frontera" existen y son finitos.

En este caso se puede hacer y veremos porque:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}dx \\
&= \\
&\int_0^1 \log(x)x^{-\frac{1}{2}}dx \\
&=\text{(integración por partes } (*_1)) \\
&2\sqrt{x}\log(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{x}dx \\
&= \\
&2\log(1) - \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\log(x) - 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\
&= \\
&0 - 0 - 2\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx \\
&= \\
&-2\cdot\left(2\sqrt{x}\Big|_0^1\right) \\
&= \\
&4
\end{aligned}
$$

Observación $(*_1)$**:**

- $u = \log x \to du = \frac{1}{x}$
- $dv = x^{\frac{-1}{2}} \to v = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

Cómo los límites frontera existen, podemos realizar esta integral por partes.

Conclusión: La integral impropia $\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}dx$ es convergente.

Integral #4

- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}dx$

Ya hecha en ejercicios anteriores, se resuelve por convergencia absoluta.

Integral #5

- $\int_0^{+\infty} \sin^2(t)dt$

Usando la siguiente identidad trigonométrica:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Tenemos que:

$$\int_0^{+\infty} \sin^2(t)dt$$
$$=$$
$$\int_0^{+\infty} 1 - \cos^2(t)dt$$
$$=$$
$$\int_0^{+\infty} 1dt + \int_0^{+\infty} \cos^2(t)dt$$

Donde claramente $\int_0^{+\infty} 1dt$ diverge.

Conclusión: $\int_0^{+\infty} \sin^2(t)dt$ diverge.

Integral #6

- $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$

Esta integral también ya se hizo en el teórico, es muy simple y se resuelve por comparación.

Es divergente.

Integral #7

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)}dx$

Recordatorio: Observemos que:

- $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

Bajo este contexto, la integral impropia con la que estamos trabajando es:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{e^x+e^{-x}}dx$

Observemos que la función es impar, es decir:

- $f(-x) = -f(x)$, verificando:
- $f(-x) = \frac{-2x}{e^{-x}+e^x} = -(\frac{-2x}{e^x+e^{-x}}) = -f(x)$

Lo que implica que podemos trabajar en uno solo de los intervalos infinitos, por lo que la convergencia se juega en:

- $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{e^x+e^{-x}}dx$

Tenemos que la función en $+\infty$ es equivalente a $\frac{x}{e^x}$, es decir que tendríamos que estudiar la convergencia de la integral impropia:

- $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

Veamos esta integral por partes utilizando:

- $u = x \rightarrow du = 1$
- $dv = e^{-x} \rightarrow v = -e^{-x}$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$
$$=$$
$$-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}$$
$$=$$
$$0 - 0 - \left(e^{-x}\Big|_0^{+\infty}\right)$$
$$=$$
$$0 + 1$$
$$=$$
$$1$$

Entonces esta integral impropia converge.

Conclusión: La integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)}dx$ es convergente pues:

- La función integrando es par.
- La integral $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ es convergente.

Integral #8

- $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-1}$

Tenemos puntos problemáticos en 1 y -1, por lo que tenemos que separar la integral de la siguiente forma:

- $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-1}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2-1}dx$

Veamos de hallar una primitiva:

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx$$
$=$(fracciones simples)
$$\int \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}dx$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}\left(-1\cdot\int \frac{1}{x+1}dx+\int \frac{1}{x-1}dx\right)$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}(-\log|x+1|+\log|x-1|)$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

Entonces evaluemos la primitiva en los intervalos que corresponden.

Intervalo #1: $(-1,0]$

$$\left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Big|_{-1}^{0}$$
$$=$$
$$=\frac{1}{2}\log 1-\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}\log 1+\infty$$

Como en este intervalo la integral ya diverge, podemos saltar directo a la conclusión:

Conclusión: La integral impropia $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-1}$ es divergente.

Integral #9

- $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$

Empecemos separando la integral mixta en:

- $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{1}\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$

Donde nos vamos a centrar en la segunda integral dado que la primera es absolutamente convergente, pues por comparación:

- $|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}|\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$

Entonces veamos de calcular una primitiva para la parte que no podemos clasificar todavía:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$
$$=$$
$$\int \cos x \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx$$
$$=\text{(integración por partes } (*_1))$$
$$\sin(x)x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$
$$=$$
$$0 - \sin(1) + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

Observación $(*_1)$**:**

- $u = x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow du = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$
- $dv = cos(x) \rightarrow v = \sin(x)$

Donde la última integral $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ es absolutamente convergente, pues:

- $|\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

Conclusión: La integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ es convergente pues:

- $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ es absolutamente convergente y,
- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ es absolutamente convergente

Integral #10

- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Separemos la integral mixta según los puntos problemáticos:

- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Ninguna de las dos se puede resolver facilmente, por lo que calcularemos la primitiva:

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$
$$=\text{(cambio de variable } x{=}t^2; dx{=}2tdt; \sqrt{x}{=}t\text{)}$$
$$\int \frac{e^{-t}}{t} 2tdt$$
$$=$$
$$2 \int e^{-t} dt$$
$$=$$
$$-2e^{-t}$$
$$=\text{(deshaciendo el cambio de variable)}$$
$$-2e^{-\sqrt{x}}$$

Entonces queremos evaluar la primitiva en los intervalos que obtuvimos al principio:

Intervalo #1:

$$-2e^{-\sqrt{x}}\Big|_0^1$$
$$=$$
$$\frac{-2}{e} + 2e^0$$
$$=$$
$$\frac{-2}{e} + 2$$

Por lo que esta parte es convergente.

Intervalo #2:

$$-2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^{+\infty}$$
$$=$$
$$0 + \frac{2}{e}$$

Por lo que esta parte también es convergente.

Conclusión: La integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ es convergente.

Integral #11

- $\int_0^{+\infty} e^{x^2 - \frac{1}{x^2}} dx$

Esta integral diverge, pues cuando $x \to \infty$ tenemos que:

- $e^{x^2 - \frac{1}{x^2}} \sim e^{x^2}$

Que es una función no acotada, obviamente diverge.