Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

CLASE 9 - 27/08/2025

Sucesiones

Ejercicio 3.10

1. Demostrar que si $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ y ambas tienen límite, entonces $\lim a_n \leq \lim b_n$
2. Si a_n es acotada y $\lim b_n = 0$, demostrar que $\lim a_n b_n = 0$

Parte 1

Llamemos:

- $A = \lim a_n$, y
- $B = \lim b_n$

Probaremos esta propiedad por absurdo, entonces supongamos que $B < A$:

Como sabemos que ambas sucesiones tienen límite, tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_1 : a_n \in E(A, \varepsilon)$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_2 : b_n \in E(B, \varepsilon)$

Esto nos permite considerar:

- $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, y
- $\varepsilon = \frac{|A-B|}{2}$

De forma que $E(B, \varepsilon) \cap E(A, \varepsilon) = \emptyset$. Gráficamente la situación se ve algo así:

Entonces ahora consideremos cualquier $n > n_0$, para este se tiene que cumplir que:

- $a_n \in E(A, \varepsilon)$
- $b_n \in E(B, \varepsilon)$

Pero como son disjuntos y el entorno $E(A, \varepsilon)$ está más adelante en la recta que $E(B, \varepsilon)$, necesariamente vamos a tener que:

- $b_n < a_n$ para todo $n > n_0$

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Pero esto es absurdo pues estamos contradiciendo la hipótesis que nos dice que:

- $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Por lo que queda probada la propiedad.

Parte 2

Como $\lim b_n = 0$, tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 : |b_n - 0| < \varepsilon$

Como a_n es acotada, tenemos que:

- $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < K$

Tomamos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{K} > 0$ y como $\lim b_n = 0$ tenemos que:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 : |b_n| < \frac{\varepsilon}{K}$

Operando a partir de este punto, $\forall n > n_0$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&|b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \\
&\iff \text{(operando)} \\
&K|b_n| < \varepsilon \\
&\iff (a_n \text{ acotada}) \\
&|a_n||b_n| < K|b_n| < \varepsilon \\
&\iff \text{(operando)} \\
&|a_n b_n| < K|b_n| < \varepsilon \\
&\iff \text{(simplificando)} \\
&|a_n b_n| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Como demostramos esto para todo $n > n_0$, probamos que efectivamente:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 : |a_n b_n| < \varepsilon$

Lo que es equivalente a decir que:

- $\lim a_n b_n = 0$

Teorema 3.11 (propiedades de límite)

Sean a_n, b_n dos sucesiones tales que $\lim a_n = A$ y $\lim b_n = B$. Entonces:

1. $\lim a_n + b_n = A + B$
2. $\lim a_n b_n = AB$
3. Si $B \neq 0$, entonces $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

En todos los casos, por hipótesis tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1$ tal que $\forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \quad (*_1)$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2$ tal que $\forall n > n_0 : |b_n - B| < \varepsilon \quad (*_2)$

Demostración 1

- $\lim a_n + b_n = A + B$

Por definición de límite, queremos probar que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tal que $\forall n > n_0 : |a_n + b_n - A - B| < \varepsilon$

Consideremos $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ y $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y el siguiente razonamiento $\forall n > n_0$:

$$
\begin{aligned}
&|a_n + b_n - A - B| \\
&=_{\text{(reordenando)}} \\
&|a_n - A + b_n - B| \\
&\leq_{\text{(desigualdad triangular)}} \\
&|a_n - A| + |b_n - B| \\
&<_{\text{(def. de límite)}} \\
&\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \\
&\varepsilon
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, probamos lo que queríamos verificar, y eso implica que:

- $\lim a_n + b_n = A + B$

Observación: Esta propiedad es válida también cuando hay una resta, y su prueba es análoga.

Demostración 2

- $\lim a_n b_n = AB$

Por definición de límite, queremos probar que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 : |a_n b_n - AB| < \varepsilon$

Consideremos $\varepsilon =$ y $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y el siguiente razonamiento $\forall n > n_0$:

$$
\begin{aligned}
&|a_n b_n - AB| \\
&= \\
&|a_n b_n + A b_n - A b_n - AB| \\
&= \\
&|A(b_n - B) + b_n(a_n - A)| \\
&\leq_{\text{(desigualdad triangular)}} \\
&|A||b_n - B| + |b_n||a_n - A|
\end{aligned}
$$

Observemos los sumados por separado por a_n y b_n:

- $|A||b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$, por definición de límite. $(*_1)$

Atención: Si $A = 0$ entonces la propiedad cae en las hipótesis de la vista en la parte 3.10, por lo que consideramos $A \neq 0$

Por otra parte tenemos que, como $\lim b_n = B$, tenemos que b_n es acotada (propiedad vista anteriormente), por lo tanto:

- $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < K$

Con esto, veamos que:

- $|b_n||a_n - A| < K|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2K}$, por definición de límite. $(*_2)$

Atención: En ambos puntos $(*_1)$ y $(*_2)$ estamos considerando $n > n_0$ para usar la definición de límite.

Ahora podemos redondear el ejercicio retomando el primer razonamiento que hicimos:

$$|A||b_n - B| + |b_n||a_n - A|$$
$$<_{(\text{por } (*_1),(*_2))}$$
$$|A| \cdot \frac{\varepsilon}{2|A|} + |b_n|\frac{\varepsilon}{2K}$$
$$=_{(\text{simplificando})}$$
$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$=$$
$$\varepsilon$$

Por lo tanto, probamos lo que queríamos verificar, y eso implica que:

- $\lim a_n b_n = AB$

Ejercicio 3.13

Decimos que un par de sucesiones a_n y b_n forman un par de sucesiones monótonas convergentes (PSMC) sii:

- $(*_1)$ a_n es creciente y b_n es decreciente.
- $(*_2)$ $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- $(*_3)$ Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$

Queremos probar lo siguiente:

1. Demostrar que $a_n \leq b_m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$
2. Demostrar que ambas sucesiones tienen límite, que llamaremos $\lim a_n = L$ y $\lim b_n = L'$.
3. Deducir que $L \leq L'$
4. Demostrar que $L = L'$ (y observar que recién ahora es necesaria la propiedad $(*_3)$)

Resolución 3.13

Parte 1

- Demostrar que $a_n \leq b_m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$

Separemos en tres casos:

- $n = m$ trivial por $(*_1)$
- $n \leq m$
- $m \leq n$

$n \leq m$:

Observemos que por $(*_1)$ tenemos que:

- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Y ahora, considerando que a_n es creciente, tenemos que:

$$a_n \leq_{(a_n \text{ es creciente})} a_m \leq_{(\text{por } (*_1))} b_m$$

Por lo tanto esta parte cumple.

$m \leq n$:

Observemos que por $(*_1)$ tenemos que:

- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Y ahora, observando que b_n es decreciente, tenemos que:

$$a_n \leq_{(\text{por } (*_1))} b_n \leq_{(b_n \text{decreciente})} b_m$$

Y como esta parte también se cumple, queda probada la propiedad para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$

Parte 2

- Demostrar que ambas sucesiones tienen límite, que llamaremos $\lim a_n = L$ y $\lim b_n = L'$.

Primero probemos que a_n tiene límite, esto es sencillo pues:

- $a_n \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Entonces considerando b_1, tenemos que:

- $a_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces a_n está acotada superiormente por b_1. Y como a_n es monótona y está acotada: tiene límite.

Ahora veamos que podemos hacer el mismo razonamiento para b_n considerando como cota inferior a_1.

Por lo tanto b_n está acotada inferiormente por a_1. Y como b_n es monótona y está acotada: tiene límite.

Parte 3

- Deducir que $L \leq L'$

Directo por el ejercicio 3.10

Parte 4

- Demostrar que $L = L'$ (y observar que recién ahora es necesaria la propiedad $(*_3)$)

Teniendo que $L \leq L'$, supongamos que $L < L'$. En particular, como tenemos:

- $a_n \leq L$ por ser creciente y,
- $L' \leq b_n$ por ser decreciente

Se cumple la siguiente desigualdad:

- $a_n \leq L < L' \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

De donde se obtiene la siguiente desigualdad:

- $b_n - a_n \geq L' - L \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Recordemos la propiedad:

- $(*_3)$ Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$

Si consideramos $\varepsilon = L' - L$, esta propiedad no se cumple. Por lo tanto llegamos a un absurdo, con esto podemos concluir que:

- $L = L'$

Definición 3.16

Decimos que dos sucesiones a_n y b_n, ambas con límite 0 o ∞, son equivalentes si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Atención: Hay que tener cuidado cuando sustituimos por sucesiones equivalentes, cuando resulta en la resta de dos equivalentes que se anulan.

Ejemplo 3.17

Las sucesiones $a_n = 4n^3 + 2n + 1$ y $b_n = 4n^3$ son equivalentes. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 2n + 1}{4n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3}{4n^3} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4n^3} = 1$$

Cuando tenemos un polinomio en n, es equivalente a su término de mayor grado. En general, tenemos las mismas equivalencias que teníamos para funciones.

Ejemplo

Las sucesiones $a_n = sen(\frac{1}{n})$ y $b = \frac{1}{n}$ son equivalentes.

Observemos que cuando x tiende a 0 $sen(\frac{1}{n}) \sim x$ (desarrollo de Taylor).

Entonces como $\frac{1}{n}$ tiende a 0 cuando n tiende a ∞:

- $sen(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$

Cuando $n \to \infty$.