Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 7

Consigna

Sea (a_n) una sucesión tal que sus subsucesiones a_{2n}, a_{2n+1} y a_{3n} convergen. Probar que (a_n) es convergente.

Resolución

Por hipótesis tenemos que:

- $a_{2n} \to L_1$
- $a_{2n+1} \to L_2$
- $a_{3n} \to L_3$

Intentaremos afirmar que las tres subsucesiones convergen al mismo punto para poder afirmar que a_n es convergente.

Primero, observemos que a_{6n} es a la vez una subsucesión de a_{2n} y de a_{3n}, por lo que:

- $a_{6n} \to L_1$
- $a_{6n} \to L_3$

Y por lo tanto $L_1 = L_3$.

En segundo lugar, observemos que a_{6n+3} es a la vez una subsucesión de a_{3n} y de a_{2n+1}, por lo que:

- $a_{6n+3} \to L_3$
- $a_{6n+3} \to L_2$

Y por lo tanto $L_2 = L_3$.

Esto nos deja con que:

- $L_1 = L_2 = L_3$, y por lo tanto:
- $a_{2n} \to L$
- $a_{2n+1} \to L$

Podemos establecer la definición de límite para las dos subsucesiones:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$ tal que $\forall k > k_0 : |a_{2k} - L| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists k_1$ tal que $\forall k > k_1 : |a_{2k+1} - L| < \varepsilon$

Por lo tanto, tomamos $n_0 := \max\{k_0, k_1\}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

- $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$, o
- $n = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{N}$

Entonces en particular $\forall \varepsilon > 0, \forall n > n_0 : |a_n - L| < \varepsilon$

Finalizando, esto significa que:

- $a_n \to L$