

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Sea $k > 0$. Hallar el valor de k para que la integral

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2 + 2k} - \frac{k}{x+1} \right) dx$$

sea convergente y calcularla.

Resolución

Operemos un poco con la integral para simplificar la expresión:

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2 + 2k} - \frac{k}{x+1} \right) dx \\ &= \\ & \int_1^{+\infty} \left(\frac{x^2 + x - 2kx^2 - 2k^2}{2x^3 + 2kx + 2x^2 + 2k} \right) dx \\ &= \\ & \int_1^{+\infty} \left(\frac{(1-2k)x^2 + x - 2k^2}{2x^3 + 2kx + 2x^2 + 2k} \right) dx \end{aligned}$$

Observemos que $1 - 2k$ determina si la integral converge o no.

- Si $1 - 2k = 0$, entonces la impropia equivale a $\frac{1}{x^2}$, por lo que convergería
- Si $1 - 2k \neq 0$, entonces la impropia equivale a $\frac{1}{x}$, por lo que divergería

De esto concluimos que la integral impropia converge si $k = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto queremos trabajar con la siguiente integral:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2 + 1} - \frac{1}{2(x+1)} \right) dx$$

Entonces, tenemos dos primitivas que calcular, vamos paso a paso para cada una:

Primitiva #1

$$\begin{aligned} & \int \frac{x}{2x^2 + 1} dx \\ & = \\ & \frac{1}{2} \int \frac{2x}{2x^2 + 1} dx \\ & =(cambio\ de\ variable\ u=x^2; du=2xdx) \\ & \frac{1}{2} \int \frac{du}{2u + 1} \\ & =(*_1) \\ & \frac{1}{4} \log(2u + 1) \\ & =(deshaciendo\ cambio\ de\ variable) \\ & \frac{1}{4} \log(2x^2 + 1) \end{aligned}$$

Observación (*₁): En este paso usamos la regla de la cadena con las siguientes funciones:

- $f(x) = \log(x)$
- $g(x) = 2u + 1$

Entonces: $(f \circ g)' = \frac{1}{2u+1} \cdot 2 = \frac{2}{2u+1}$.

Esto es casi lo que buscábamos, pero multiplicado por dos. Fácilmente vemos que si consideramos la función

- $\frac{1}{2} \log(2u + 1)$

La regla de la cadena devuelve lo que estamos necesitando.

Primitiva #2

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{2(x + 1)} dx \\ & = \\ & \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx \\ & = \\ & \frac{1}{2} \log(x + 1) \end{aligned}$$

Primitiva original

Entonces la primitiva que queríamos calcular queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{x}{2x^2 + 1} - \frac{1}{2(x+1)} \right) dx \\
&= \\
& \frac{1}{4} \log(2x^2 + 1) - \frac{1}{2} \log(x+1) \\
&= \\
& \frac{\log(2x^2 + 1) - 2 \log(x+1)}{4} \\
&= \\
& \frac{\log(2x^2 + 1) - \log((x+1)^2)}{4} \\
&= \\
& \frac{1}{4} \log \left(\frac{2x^2 + 1}{(x+1)^2} \right)
\end{aligned}$$

Y ahora tendríamos que evaluarla en los extremos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \log \left(\frac{2x^2 + 1}{(x+1)^2} \right) \Big|_1^{+\infty} \\
&= \\
& \frac{1}{4} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{2x^2 + 1}{(x+1)^2} \right) - \log \left(\frac{3}{4} \right) \right) \\
&= \\
& \frac{1}{4} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{2x^2}{x^2} \right) - \log \left(\frac{3}{4} \right) \right) \\
&= \\
& \frac{1}{4} \left(\log(2) - \log \left(\frac{3}{4} \right) \right) \\
&= \\
& \frac{1}{4} \log \left(\frac{8}{3} \right)
\end{aligned}$$

Conclusión

La integral impropia $\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2 + 2k} - \frac{k}{x+1} \right) dx$ converge a $\frac{1}{4} \log \left(\frac{8}{3} \right)$ si $k = \frac{1}{2}$. En cualquier otro caso la integral diverge.