Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 7

Consigna

Estudiar la convergencia de las siguientes series alternadas. En caso de que sean convergentes, estudiar si también lo son absolutamente:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{6n-5}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n^3+2n^2+8n+5)}{n^5+4n^3+15}$

Resolución

El único criterio para clasificar series alternadas es el criterio de Leibnitz, veamos su enunciado a continuación:

Si a_n es una sucesión monótona decreciente que tiende a 0, entonces la serie alternada $\sum(-1)^n a_n$ es convergente.

Serie #1

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$

Estudiemos primero convergencia absoluta. Es decir que queremos clasificar la siguiente serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$

Esta es una sucesión geométrica:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{3})^n$

Y como $\frac{1}{3} < 1$ la serie converge.

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ es absolutamente convergente, es decir, también es convergente.

Serie #2

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$

Estudiemos primero convergencia absoluta. Es decir que queremos clasificar la siguiente serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$

Utilizando el criterio de equivalentes, tenemos que $\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$, y como $\sum \frac{1}{n}$ diverge:

- $\sum \frac{n}{n^2+1}$ diverge también

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$ NO es absolutamente convergente.

Ahora podemos pasar a estudiar convergencia, para lo que vamos a estudiar la monotonía de:

- $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

La estrategia que emplearemos será probar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

- $a_n \geq a_{n+1}$

Desarrollemos:

$$
\begin{aligned}
& a_n \geq a_{n+1} \\
& \iff \\
& \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \\
& \iff \\
& n((n+1)^2+1) \geq (n+1)(n^2+1) \\
& \iff \\
& n(n+1)\cancel{(n+1)} + n \geq \cancel{(n+1)}(n^2+1) \\
& \iff \\
& n(n+1) + n \geq (n^2+1) \\
& \iff \\
& \cancel{n^2} + 2n \geq \cancel{n^2} + 1
\end{aligned}
$$

Y esto último es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1$ que es el dominio en el que estamos trabajando. Por lo que concluimos que a_n es monótona decreciente.

Por otra parte, tenemos que:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$

Entonces usando el criterio de Leibnitz, podemos concluir que la serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$ es convergente.

Serie #3

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{6n-5}$

Estudiemos primero convergencia absoluta. Es decir que queremos clasificar la siguiente serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{6n-5}$

Inmediatamente podemos ver que la serie no es absolutamente convergente pues:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{6n-5}$$
$$\sim$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{6n}$$
$$=$$
$$\frac{1}{6}$$

Como el término general no tiende a 0, la serie no puede ser convergente. Concluimos que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{6n-5}$ NO es absolutamente convergente.

Y ni siquiera entramos a estudiar convergencia, pues por el mismo argumento, la sucesión $a_n = \frac{n}{6n-5}$ no converge a 0.

Serie #4

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n^3+2n^2+8n+5)}{n^5+4n^3+15}$

Estudiemos primero convergencia absoluta. Es decir que queremos clasificar la siguiente serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+2n^2+8n+5}{n^5+4n^3+15}$

Por criterio de equivalentes, como $\frac{n^3+2n^2+8n+5}{n^5+4n^3+15} \sim \frac{n^3}{n^5} \sim \frac{1}{n^2}$ la serie converge, pues $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n^3+2n^2+8n+5)}{n^5+4n^3+15}$ es absolutamente convergente, es decir, también es convergente.