

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 5 - 07/08/2025

### Ecuaciones diferenciales

#### Ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea

##### Definición 4.1

Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea a una ecuación del tipo:

- $y' + a(x)y = 0$

Donde  $a(x)$  es una función dada.

**Observación:** Claramente se ve que la ecuación diferencial mencionada, es de variables separables, pues:

- $y' = -a(x) \cdot y$

Por lo tanto se resuelve como se vió en la sección de variables separables.

#### Ecuación diferencial lineal de primer orden NO homogénea

##### Definición 5.1

Se llama ecuación diferencial NO homogénea a una ecuación del tipo:

- $y' + a(x)y = r(x)$

Donde  $a(x)$  y  $r(x)$  son funciones conocidas, definidas y continuas para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $r(x)$  no es idénticamente nula.

**Observación:** Consideramos la ecuación diferencial homogénea asociada a la siguiente ecuación diferencial:

- $y' + a(x)y = 0$

#### Procedimiento de resolución de una ecuación diferencial lineal NO homogénea 5.2

Basaremos nuestro procedimiento de resolución en el siguiente teorema:

### Teorema 5.3

La solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea es igual a la solución general de la ecuación homogénea asociada, más una (y solo una, cualquiera) solución particular de la ecuación diferencial dada NO homogénea. Representamos este teorema con la siguiente notación:

- $y_G = y_H + y_P$ , donde:
  - $y_G$  es la solución general de la ecuación diferencial **NO homogénea**
  - $y_H$  es la solución general de la ecuación diferencial **homogénea**
  - $y_P$  es una solución particular de la ecuación diferencial **NO homogénea**

**Observación:** La demostración del teorema está hecha en las notas, pero no se hace formalmente en las clases, por esto no voy a reescribirla en los apuntes. De todos modos la intuición que se da en la clase hace entender que no es muy complicado el porque este teorema se cumple.

A continuación, describimos el procedimiento para la resolución de una ecuación diferencial lineal NO homogénea.

1. Hallar la solución general  $y_H(x)$  de la ecuación lineal homogénea asociada.
2. Hallar una solución particular  $y_P(x)$  de la ecuación diferencial dada NO homogénea. En la siguiente sección veremos como hallar dicha  $y_P$  usando el “método de variación de constante”.
3. Sumar la solución general de la homogénea  $y_H(x)$  con la solución particular  $y_P(x)$  para obtener la solución final  $y_G(x)$

### Método de variación de constante 5.4

Este método se usará para hallar (en cualquier caso) una solución particular  $y_P$  para poder aplicar el método de resolución descrito anteriormente.

1. En la solución general  $y_H(x)$  de la ecuación diferencial homogénea asociada ( $H$ ) siempre aparecerá una constante  $C$  real arbitraria (se verá más claro al hacer un ejemplo).
2. Tomaremos  $y_P(x)$  igual a  $y_H(x)$ , pero reemplazaremos donde tenemos  $C$ , la constante arbitraria, con  $C(x)$  una función genérica que depende de  $x$ .
3. Sustituyendo la función  $y_P(x)$  descrita en el paso anterior, en la ecuación diferencial NO homogénea ( $NH$ ), haciendo que la verifique, se despeja y se encuentra  $C(x)$ . De todas las posibles funciones  $C(x)$  que se despejen habrá que elegir solo una.
4. La función  $C(x)$  se sustituye en la expresión de  $y_P(x)$  que teníamos hasta ahora para obtener la solución particular de ( $NH$ )

### Ejemplo 5.5

Queremos resolver  $y' = \cos(x)y + \cos(x)$ , definimos las siguientes ecuaciones diferenciales con las que vamos a trabajar:

- $y' - \cos(x)y = 0$  ( $H$ )
- $y' - \cos(x)y = \cos(x)$  ( $NH$ )

Entonces ahora hallamos la solución general para ( $H$ ).

### Solución de (H)

Desarrollemos:

$$y' - \cos(x)y = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y' = \cos(x)y$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int \cos(x) dx$$

$$\Leftrightarrow (u=y(x), du=y'(x)dx)$$

$$\int \frac{du}{u} dx = \sin(x) + C$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\ln|u| = \sin(x) + C$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|u| = e^C e^{\sin(x)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$u = k e^{\sin(x)}$$

$$\Leftrightarrow (\text{deshago el cambio de variable})$$

$$y(x) = k e^{\sin(x)}$$

Por lo tanto concluimos que:

- $y_H(x) = k e^{\sin(x)}$

### Solución particular (NH)

Consideramos  $y_P(x) = C(x)e^{\sin(x)}$  y sustituimos en (NH) para despejar  $C(x)$ :

$$\begin{aligned}
y' - \cos(x)y &= \cos(x) \\
&\iff \\
(C(x)e^{\sin(x)})' &= \cos(x) + \cos(x)C(x)e^{\sin(x)} \\
&\iff (\text{derivada del producto}) \\
C'(x)e^{\sin(x)} + C(x)e^{\sin(x)}\cos(x) &= \cos(x) + \cos(x)C(x)e^{\sin(x)} \\
&\iff (\text{simplificando}) \\
C'(x)e^{\sin(x)} &= \cos(x) \\
&\iff \\
C'(x) &= \cos(x)e^{-\sin(x)} \\
&\iff \\
\int C'(x)dx &= \int \cos(x)e^{-\sin(x)}dx \\
&\iff (u=\sin(x), du=\cos(x)dx) \\
C(x) + k_1 &= \int \cos(x)e^{-\sin(x)}dx \\
&\iff \\
C(x) + k_1 &= \int e^{-u}du \\
&\iff \\
C(x) + k_1 &= -e^{-u} + k_2 \\
&\iff \\
C(x) &= -e^{-u} + k \\
&\iff (\text{deshaciendo el cambio de variable}) \\
C(x) &= -e^{-\sin(x)} + k
\end{aligned}$$

Ahora elegimos una sola de estas soluciones, con  $k = 0$ :

- $C(x) = -e^{-\sin(x)}$ , por lo tanto:
- $y_P(x) = -e^{-\sin(x)}e^{\sin(x)} = -1$

### Conclusión del problema

La solución general de la ecuación diferencial dada (NH) es:

- $y(x) = Ce^{\sin(x)} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$