Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 11

Consigna

Determinar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son continuas y discontinuas:

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^3}{4x^2+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} x/y, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y-1, & x \geq 0 \\ 3x+y^2, & x < 0 \end{cases}$

Resolución

Función #1

- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^3}{4x^2+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Para este tipo de ejercicios, hay que revisar los puntos problemáticos, en este caso el punto que genera inconvenientes es $(0,0)$, ya que en todos los demás la función es la división de dos polinomios, donde el denominador no se anula.

Entonces queremos evaluar que pasa en el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y^3}{4x^2+y^6}$$
$$=$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^3 \frac{4x^2}{4x^2+y^6}$$

Donde $y^3 \to 0$ y la función $\frac{4x^2}{4x^2+y^6}$ está acotada entre 0 y 1. Además no se anula donde estamos evaluando pues solo se anula si $x = y = 0$.

Función #2

- $f(x,y) = \begin{cases} x/y, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$

Nuevamente, tenemos que encontrar los puntos problemáticos, en este caso son todos aquellos tales que $y = 0$. Tomemos uno genérico de ellos de la forma $(a, 0)$ y evaluemos la continuidad en este punto, es decir queremos verificar que:

- $\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = 0$

Evaluemos este límite para la dirección $y = x$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) \\
&=\text{(definición de la función)} \\
&\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{x}{y} \\
&=\text{(reemplazando } y{=}x\text{)} \\
&\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \\
&=\text{(operando)} \\
&1
\end{aligned}$$

Entonces encontramos una dirección para la cual el límite no equivale con el valor de la función en ese punto. Esto implica que la función no es continua para ningún punto tal que $y = 0$.

Entonces, la función es continua en el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

Función #3

- $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y - 1, & x \geq 0 \\ 3x + y^2, & x < 0 \end{cases}$

En este caso, los puntos problemáticos son aquellos tales que $x = 0$, pues a su alrededor tienen puntos tales que su función valen $x^2 + 2y - 1$ y también $3x + y^2$ arbitrariamente cerca.

Sea un punto $(0, b)$ genérico, para que la función sea continua en este punto, necesitamos que $\lim_{(x,y)\to(0,b)} x^2 + 2y - 1 = \lim_{(x,y)\to(0,b)} 3x + y^2$. Si esto no sucede, entonces el límite dependerá de la dirección en la que nos acerquemos al punto, por lo que no existirá.

Teniendo en cuenta la observación anterior, podemos calcular los límites fácilmente:

- $\lim_{(x,y)\to(0,b)} x^2 + 2y - 1 = 2b - 1$
- $\lim_{(x,y)\to(0,b)} 3x + y^2 = b^2$

Entonces el límite solo existe si $2b - 1 = b^2$. Hallando las raíces de ese polinomio con variable b, llegamos a que $b = 1$.

Esto significa que el límite de $f(x, y)$ en un punto $(0, b)$ genérico solo existe si $b = 1$, por lo tanto solo si $(0, b) = (0, 1)$.

Podemos concluir el ejercicio entonces, la función es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \neq 1\}$