Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

CLASE 14 - 22/09/2025

Series de términos positivos

Criterio de la raíz enésima (de Cauchy)

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos, tal que existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Entonces:

- Si $L < 1$, entonces a_n converge.
- Si $L > 1$, entonces a_n diverge.

Demostración

CASO 1 ($L < 1$)**:**

Observemos que por definición de límite, podemos llegar a la siguiente desigualdad a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{a_n} < k < 1$$

Observación: Esto lo hacemos tomando $\varepsilon := \frac{1-L}{2} > 0$ por ejemplo.

Despejando, llegamos a:

- $a_n < k^n$

Observando que k^n converge pues es una serie geométrica y $k < 1$, por el criterio de comparación tenemos que:

- a_n converge.

CASO 2 ($L > 1$)**:**

Observemos que por definición de límite, podemos llegar a la siguiente desigualdad a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{a_n} > k > 1$$

Observación: Esto lo hacemos tomando $\varepsilon := \frac{L-1}{2} > 0$ por ejemplo.

Despejando, llegamos a:

- $a_n > k^n$

Observando que k^n diverge pues es una serie geométrica y $k > 1$, por el criterio de comparación tenemos que:

- a_n diverge.

Ejemplos 3.45

Ejemplo 1

- $\sum(\frac{\log(n)}{n})^n$ es convergente pues:
  - $\lim \sqrt[n]{a_n} = (\frac{\log(n)}{n})^n = \lim \frac{log(n)}{n} = 0$

Ejemplo 2

- $\sum \frac{n^5}{2^n}$ es convergente pues:
  - $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n}} = \frac{1}{2}$

Observación: Podemos expandir sobre este último límite:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n}}$$

$$=$$

$$\lim \frac{n^{\frac{5}{n}}}{2}$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \lim n^{\frac{5}{n}}$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \lim e^{\log(n^{\frac{5}{n}})}$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \lim e^{\frac{5}{n} \log(n)}$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \lim e^{\frac{5 \log(n)}{n}}$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} e^0$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}$$

Series alternadas

En esta breve sección estudiaremos funciones que no necesariamente son de signos constantes.

Definición 3.46

Decimos que una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente sii $\sum |a_n|$ es convergente.

Intuitivamente, si una serie es absolutamente convergente, debería ser convergente también $\sum a_n$, pues sumar el valor absoluto de los términos es de alguna forma el "peor caso". Veamos de formalizar este resultado.

Teorema 3.47

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Demostración

Sea $\sum a_n$ la serie absolutamente convergente, y separemos los términos a_n en los positivos y negativos, formando así dos nuevas sucesiones:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{y } a_n^- \begin{cases} 0 & \text{si } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Es decir, en a_n^+ ponemos los términos positivos de a_n, y los negativos los cambiamos por 0. Mientras que en a_n^- cambiamos los términos positivos por 0, y ponemos los términos negativos de a_n cambiados de signo. De esta forma ambas las nuevas sucesiones son de términos positivos.

Observemos que:

- $a_n = a_n^+ - a_n^-$
- $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$
- $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$
- $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$

Por hipótesis, tenemos que $\sum |a_n|$ converge, y por lo tanto usando el criterio de comparación:

- $\sum a_n^+$ es convergente.
- $\sum a_n^-$ es convergente.

Con esto podemos concluir que:

- $\sum (a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n$ es convergente

Ejemplo 3.48

- $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$

Queremos estudiar si es absolutamente convergente, por lo tanto queremos estudiar:

- $\sum |\frac{\sin(n)}{n^2}|$

Veamos lo siguiente:

- $\frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

Y como $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente, por criterio de comparación también lo es $\sum \frac{|\sin(n)|}{n^2}$.

Veremos a continuación el único criterio de convergencia para series alternadas, el cual no vamos a demostrar.

Proposición 3.49 (criterio de Leibnitz)

Si a_n es una sucesión monótona decreciente que tiende a 0, entonces la serie alternada $\sum(-1)^n a_n$ es convergente.

Ejemplo 3.50

Ejemplo 1

- $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$

Es convergente por el criterio de Leibnitz, pero no es absolutamente convergente, pues:

- $\sum |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum \frac{1}{n}$

Que ya vemos que es divergente.

Ejemplo 2

- $\sum(-1)^n \log(1 + \frac{1}{n})$

Es convergente por el criterio de Leibnitz.