

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 1

### Consigna

1. Investigar si las siguientes funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  son normas:

1.  $N(x, y) = |x| + |y|$

2.  $N(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

3.  $N(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$

4.  $N(x, y) = |x + y|$

2. Para aquellas que sean normas, dibujar la bola de centro en el origen y radio 1. Indicar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la bola de centro  $(3, 4)$  y radio 2:  $(3, 4)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(0, 1)$ .

3. Decimos que dos normas  $N_1, N_2$  son equivalentes si existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  tales que:

•  $\alpha N_1(u) \leq N_2(u) \leq \beta N_1(u)$ .

Probar que aquellas funciones que son normas de este ejercicio son equivalentes dos a dos.

## Resolución

### Recordatorio

Decimos que una función  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una *norma* si verifica las siguientes tres propiedades:

1.  $\|x\| \geq 0$ , y  $\|x\| = 0$  solamente si  $x = 0$ .
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  que se denomina la desigualdad triangular

## Parte 1

### Norma #1

- $N(x, y) = |x| + |y|$
- 1. Cumple con esta propiedad pues se están sumando dos valores siempre positivos.  
La única forma de que sea 0 es que ambos sean 0.
- 2. Queremos verificar que  $N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|N(x, y)$ , es decir:
  - $|\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|(|x| + |y|)$Esto también se cumple, pues es el resultado de sacar factor común  $|\lambda|$
- 3. Queremos verificar que  $N(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2)$ , es decir:
  - $|x_1 + x_2| + |y_1 + y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$

Concluyendo, la función es una norma.

### Norma #2

- $N(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Es claramente una norma, es la norma euclídea en  $\mathbb{R}^2$ .

### Norma #3

- $N(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$

Es claramente una norma, es la norma infinito en  $\mathbb{R}^2$

### Norma #4

- $N(x, y) = |x + y|$
- 1. Esta propiedad no se cumple, veamos un contraejemplo:
  - $(x, y) = (1, -1)$Por lo tanto  $N(1, -1) = 0$ , sin embargo  $(1, -1) \neq (0, 0)$

Concluyendo, la función NO es una norma.

## Parte 2

Esta parte consiste en graficar, por lo que se va a saltar. De todos modos en el teórico se ve en detalle la bola abierta para cada una de las normas vistas.

## Parte 3

Decimos que dos normas  $N_1, N_2$  son equivalentes si existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  tales que:

- $\alpha N_1(u) \leq N_2(u) \leq \beta N_1(u)$ .

Trabajaremos con estas normas:

1.  $N_1(x, y) = |x| + |y|$

$$2. N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$3. N_3(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$$

Como la efectivamente la relación es de equivalencia, bastará con probar que:

- $N_1 \sim N_3$
- $N_2 \sim N_3$

Consideremos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  cualquiera, y supongamos que  $x \geq y$  (sin perder generalidad). Entonces  $N_3(x, y) = |x|$ .

**Caso  $N_1 \sim N_3$ :**

Queremos probar que:

- $\alpha(|x| + |y|) \leq |x| \leq \beta(|x| + |y|)$

Notemos que con  $\alpha = \frac{1}{2}; \beta = 1$  se cumple la desigualdad.

**Caso  $N_2 \sim N_3$ :**

Queremos probar que:

- $\alpha\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| \leq \beta\sqrt{x^2 + y^2}$

Operemos un poco:

$$\alpha\sqrt{x^2 + y^2} \leq \alpha\sqrt{x^2 + x^2} \leq \sqrt{2}\alpha|x| \stackrel{?}{\leq} |x| \stackrel{?}{\leq} \beta\sqrt{x^2 + y^2}$$

Entonces, esto último se cumple para:

- $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\beta = 1$

**Conclusión:** Las normas son equivalentes dos a dos.