Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

1. Sean $a > 0$ y $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(t) \geq 0$. Definimos $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Demostrar que:
   - $F(x)$ es creciente.
   - $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge sii $F(x)$ está acotada superiormente.
2. Sea $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica $0 \leq f(t) \leq g(t)$ para todo $t \geq a$.
   1. Probar que si $\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ también converge.
   2. Si $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ diverge.

Resolución

Parte 1

Para esta parte queremos demostrar que:

- $F(x)$ es creciente.
- $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge sii $F(x)$ está acotada superiormente.

Lo primero viene dado gratis, pues la función $f(t) \geq 0$ por hipótesis, esto significa que al aumentar x voy a estar sumando un poquito más de area a la integral.

Para la segunda parte, expandamos un poco sobre lo que tenemos que probar. En primer lugar, que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ sea convergente, significa que:

- $\lim_{x \to \infty} F(x) = L < \infty$

En este caso como $F(x)$ es creciente, por definición de límite se tiene que:

- $F(x) \leq L$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Es decir que $F(x)$ está acotada superiormente.

Ahora, partamos del otro lado, si $F(x)$ está acotada superiormente, es decir:

- $F(x) < K$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Considerando K como el supremo del conjunto de cotas superiores, tenemos que: Dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in [a, +\infty)$ tal que $\forall x > x_0 : x \in (K - \varepsilon, K]$. Esto último la definición de límite para K, solo considerando un lado del entorno, por lo que necesariamente $F(x)$ converge a K.