

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2 (evaluaciones anteriores)

Consigna

Consideremos las siguientes sucesiones de números reales:

- $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2} \quad (n \geq 2)$
- $b_n = \frac{1}{n \ln(n)(\ln(\ln(n)))^2} \quad (n \geq 3)$

1. Para la sucesión (a_n) , estudiar su monotonía y convergencia.
2. Para la sucesión (b_n) , estudiar su monotonía y convergencia.

Resolución

Parte 1

- $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2} \quad (n \geq 2)$

Veremos si la sucesión es monótona estudiando términos consecutivos, consideremos a_{n+1} :

- $a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{n+3}$

Comparemos:

$$\begin{aligned}
a_n &\geq a_{n+1} \\
&\iff (\text{reemplazando por la definici3n}) \\
\frac{\sqrt{n}}{n+2} &\geq \frac{\sqrt{n+1}}{n+3} \\
&\iff (\text{operatoria}) \\
\sqrt{n}(n+3) &\geq \sqrt{n+1}(n+2) \\
&\iff (\text{operatoria}) \\
n\sqrt{n} + 3\sqrt{n} &\geq n\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n+1} \\
&\iff (\text{operatoria}) \\
3\sqrt{n} &\geq 2\sqrt{n+1} \\
&\iff (\text{operatoria}) \\
9n &\geq 4(n+1) \\
&\iff (\text{operatoria}) \\
9n &\geq 4n+4 \\
&\iff (\text{operatoria}) \\
n &\geq \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Que es claramente cierto pues estamos considerando $n \geq 2$.

Adem3s es convergente y su l3mite es cero:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2} \\
&= (\text{equivalencia}) \\
&\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \\
&= (\text{operatoria}) \\
&\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= (\text{operatoria}) \\
&0
\end{aligned}$$

Parte 2

$$\bullet \quad b_n = \frac{1}{n \ln(n) (\ln(\ln(n)))^2} \quad (n \geq 3)$$

Notemos que para $n \geq 3$:

- $\ln(n)$ es estrictamente creciente y positiva, por lo tanto:
- $\ln(\ln(n))$ tambi3n es estrictamente creciente y positiva, por lo tanto:
- $(\ln(\ln(n)))^2$ tambi3n es estrictamente creciente y positiva.

Por otra parte, $n \ln(n)$ tambi3n es estrictamente creciente y positiva, as3 que tomando el producto entre estas dos sucesiones, el resultado es otra sucesi3n estrictamente creciente

y positiva. Por lo tanto tomando el inverso, tenemos que la función es estrictamente decreciente. Además, la función está acotada inferiormente (por cero), por lo tanto como es monótona y acotada tiene límite.