Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 5

Consigna

Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de dichas subsucesiones.

1. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$
2. $a_n = (-1)^n n$
3. $a_n = 3\cos(n\pi)$
4. $a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$
5. $a_n = n^2(1+(-1)^n)$
6. $a_n = n^{(-1)^n}$
7. $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

Resolución

Sucesión #1

- $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$

Veamos los primeros términos de la sucesión para agarrar intuición sobre lo que pasa:

- $\{0, 1, 0, 1, 0, ...\}$

Claramente a_n no converge, pero tenemos dos subsucesiones convergentes en:

- $a_{2k+1} \to 0$
- $a_{2k} \to 1$

Sucesión #2

- $a_n = (-1)^n n$

Veamos los primeros términos de la sucesión para agarrar intuición sobre lo que pasa:

- $\{-1, 2, -3, 4, -5, ...\}$

Claramente a_n no converge. Pero en este caso tampoco ninguna subsucesión converge, pues la función va oscilando entre términos cada vez mayores por el lado positivo, y cada vez menores por el lado negativo.

Sucesión #3

- $a_n = 3\cos(n\pi)$

Veamos los primeros términos de la sucesión para agarrar intuición sobre lo que pasa:

- $\{3, -3, 3, -3, 3, -3 \ldots\}$

Claramente a_n no converge, pero tenemos dos subsucesiones convergentes en:

- $a_{2k+1} \to 3$
- $a_{2k} \to -3$

Sucesión #4

- $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

Veamos los primeros términos de la sucesión para agarrar intuición sobre lo que pasa:

- $a_1 = 0$
- $a_2 = \frac{1}{3}\cos(\frac{4\pi}{3}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{6}$
- $a_3 = \frac{1}{2}\cos(2\pi) = \frac{1}{2}$
- $a_4 = \frac{3}{5}\cos(\frac{8\pi}{3}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{3}{10}$
- $a_5 = \frac{2}{3}\cos(\frac{10\pi}{3}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{3}$
- $a_6 = \frac{5}{7}\cos(\frac{12\pi}{3}) = \frac{5}{7}$

A partir de estos valores, podemos separar entre los múltiplos de 3, y los que no son múltiplos de 3:

- $a_{3k} = \frac{3k-1}{3k+1}\cos(2k\pi) = \frac{3k-1}{3k+1}$
  - $\lim a_{3k} = 1$
- $a_{3k+1} = \frac{3k}{3k+2}\cos(\frac{2(3k+1)\pi}{3}) = \frac{3k}{3k+2}\cos(\frac{6k\pi+2\pi}{3}) = \frac{3k}{3k+2}\cos(\frac{2\pi}{3})$
  - $\lim a_{3k+1} = \frac{-1}{2}$
- $a_{3k+2} = \frac{3k+1}{3k+3}\cos(\frac{2(3k+2)\pi}{3}) = \frac{3k+1}{3k+3}\cos(\frac{6k\pi+4\pi}{3}) = \frac{3k+1}{3k+3}\cos(\frac{4\pi}{3})$
  - $\lim a_{3k+2} = \frac{-1}{2}$

Por lo tanto:

- Para toda subsucesión que a partir de un punto tome solo valores de n múltiplos de 3 converge a 1.
- Para toda subsucesión que a partir de un punto tome solo valores de n NO múltiples de 3 converge a $\frac{-1}{2}$

Sucesión #5

- $a_n = n^2(1 + (-1)^n)$

Veamos los primeros términos de la sucesión para agarrar intuición sobre lo que pasa:

- $\{0, 8, 0, 32, 0, 72\}$

Claramente a_n no converge, pero el comportamiento que tiene nos hace separar por múltiplos de 2:

- $a_{2k} = 8k^2$

    - $\lim a_{2k} = +\infty$
- $a_{2k+1} = 0$
    - $\lim a_{2k+1} = 0$

Por lo tanto:

- Para toda subsucesión que a partir de un punto tome solo valores de n tales que: $n = 2k + 1$, converge a 0.

Sucesión #6

- $a_n = n^{(-1)^n}$

Veamos los primeros términos de la sucesión para agarrar intuición sobre lo que pasa:

- $\{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6\}$

Claramente a_n no converge, pero el comportamiento que tiene nos hace separar por múltiplos de 2:

- $a_{2k} = 2k^{(-1)^{2k}} = 2k$
    - $\lim a_{2k} = +\infty$
- $a_{2k+1} = (2k+1)^{(-1)^{2k+1}} = \frac{1}{2k+1}$
    - $\lim a_{2k+1} = 0$

Por lo tanto:

- Para toda subsucesión que a partir de un punto tome solo valores de n tales que: $n = 2k + 1$, converge a 0.

Sucesión #5

- $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

Veamos los primeros términos de la sucesión para agarrar intuición sobre lo que pasa:

- $\{-1, \frac{3}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{5}{4}, \frac{-1}{5}\}$

Claramente a_n no converge, pero el comportamiento que tiene nos hace separar por múltiplos de 2:

- $a_{2k} = \frac{1}{2k} + 1$
    - $\lim a_{2k} = 1$
- $a_{2k+1} = \frac{-1}{2k+1}$
    - $\lim a_{2k+1} = 0$

Por lo tanto:

- Para toda subsucesión que a partir de un punto tome solo valores de n tales que $n = 2k$, converge a 1.
- Para toda subsucesión que a partir de un punto tome solo valores de n tales que: $n = 2k + 1$, converge a 0.