

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Encontrar los límites de las siguientes sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

1. $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$
2. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $a_n = \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}}$
4. $a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$
5. $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n)$
6. $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
7. $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$

Resolución

Sucesión #1

- $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} \\ & = (\text{operando}) \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n) \cdot \frac{1}{n} \\ & = (\cos(n) \text{ acotado y } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0) \\ & 0 \end{aligned}$$

Sucesión #2

- $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
& = (\text{sustitución por sucesiones equivalentes}) \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n} \\
& = (\text{operando}) \\
& 0
\end{aligned}$$

Sucesión #3

- $a_n = \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}}$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}} \\
& = (\text{sustitución por sucesiones equivalentes}) \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} \\
& = (\text{operando}) \\
& 2
\end{aligned}$$

Sucesión #4

- $a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

En este caso hay que dar algún pasito más, consideremos:

- $M = \max\{\alpha, \beta\}$

Y lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& M^n \leq \alpha^n + \beta^n \leq 2M^n \\
& \iff (\text{tomando raíz enésima}) \\
& M \leq \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} \leq 2^{\frac{1}{n}} M \\
& \iff (\text{tomando el límite}) \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} M \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} M \\
& \iff (\text{operando y considerando } 2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1) \\
& M \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} \leq M
\end{aligned}$$

Por el teorema del Sándwich entonces:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} = M = \max\{\alpha, \beta\}$

Sucesión #5

- $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n)$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n) \\
& = (\text{sustitución por sucesiones equivalentes}) \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos(n) \\
& = (\text{límite ya conocido}) \\
& 0
\end{aligned}$$

Sucesión #6

$$\bullet \quad a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Este límite es teórico, por orden de crecimiento se tiene que e^n crece más rápido que n^α para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{e^n} \\
& = (\text{orden de crecimiento}) \\
& 0
\end{aligned}$$

Sucesión #7

$$\bullet \quad a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$$

Antes de empezar, factorizemos la sucesión de una forma más conveniente:

$$\begin{aligned}
& \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} \\
& = (\text{sacando factor común } 3^n) \\
& \frac{3^n(1 + (\frac{-2}{3})^n)}{3^n(3 + (-2)(\frac{-2}{3})^n)} \\
& = (\text{sacando factor común}) \\
& \frac{1 + (\frac{-2}{3})^n}{3 + (-2)(\frac{-2}{3})^n}
\end{aligned}$$

Ahora busquemos el límite:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (\frac{-2}{3})^n}{3 + (-2)(\frac{-2}{3})^n} \\
& = (\text{como } (\frac{-2}{3})^n \rightarrow 0) \\
& \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Observación: Esta idea es clave para rematar el ejercicio:

- $(\frac{-2}{3})^n \rightarrow 0$

Y la misma nace de que cuando trabajamos con límites en infinito, cualquier número $x \in (-1, 1)$ elevado a n tiende a 0.