

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 8

Consigna

Calcular:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 + xy + 1}{x^2 - x - y}$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log |y|$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - y^2}$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x-y} - 1}{x^2 - y^2}$
6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2 + y^2 + x^3 y}$

Resolución

Límite #1

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 + xy + 1}{x^2 - x - y}$$

Simplemente sustituimos:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 + xy + 1}{x^2 - x - y} \\ &= \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{1 + 2 + 1}{1 - 1 - 2} \\ &= \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{4}{-3} \\ &= \\ & -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 + xy + 1}{x^2 - x - y} = -\frac{4}{3}$

Límite #2

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log |y|$

Notemos que el límite se puede separar en dos factores:

- x
- $y \log |y|$

Donde la primera tiende claramente a 0, mientras que la segunda se puede deducir por órdenes (x crece más rápido que $\log(x)$), también tiende a 0. Por lo tanto tenemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log |y| = 0$.

Límite #3

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - y^2}$

Podemos operar con la función:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - y^2} \\ &= \\ & \frac{(x-y)(x+2y)}{(x+y)(x-y)} \\ &= \\ & \frac{x+2y}{x+y} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x+2y}{x+y} = \frac{3}{2}$

Límite #4

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

Consideremos el cambio por polares:

- $x = \rho \cos \theta$
- $y = \rho \sin \theta$

Entonces:

$$\begin{aligned}
& \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \\
&= \\
& \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3(\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta))}{\rho^2} \\
&= \\
& \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho(\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta))
\end{aligned}$$

Como $\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)$ está acotada para cualquier θ y $\rho \rightarrow 0$, podemos concluir que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$

Límite #5

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2}$

Nota: Recordemos que $e^u - 1 \sim u$ cuando $u \rightarrow 0$

Aplicando la nota, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2} \\
&= \\
& \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{(x+y)(x-y)} \\
&= \\
& \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x+y}
\end{aligned}$$

Entonces esto tiende a infinito, pero qué pasa con el signo? Si nos acercamos de con $x = 0^-$ e $y = 0^-$, tendremos que el límite es $-\infty$. Sin embargo si nos acercamos por el lado positivo tendremos que el límite es $+\infty$.

Con esta observación, podemos concluir que el límite no existe.

Límite #6

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$

Nota: Recordemos que $\log(1+u) \sim u$ cuando $u \rightarrow 0$.

Aplicando la nota, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y} \\
&= \\
& \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x^3y}
\end{aligned}$$

Ahora podemos pasar a polares:

- $x = \rho \cos \theta$
- $y = \rho \sin \theta$

Entonces:

$$\begin{aligned}
& \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x^3y} \\
&= \\
& \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\rho^2 + \rho^4 \cos^3 \theta \sin \theta} \\
&= \\
& \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \rho^2 \cos^3 \theta \sin \theta} \\
&= \\
& 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y} = 1$