Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Sean a_n y b_n dos sucesiones reales convergentes tales que $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to+\infty} b_n = B$.

1. Probar que la sucesión $c_n = a_n + b_n$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} c_n = A + B$.
2. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la sucesión $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$.
3. Probar que la sucesión $d_n = a_n b_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} d_n = AB$.
4. Sea (e_n) una sucesión acotada y suponga que $A = 0$. Probar que $\lim_{n\to+\infty} e_n a_n = 0$.

Parte 1

Hecho en el teórico, clase 9, sección 3.11

Parte 2

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la sucesión $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$.

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$

Tomamos $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, entonces a partir de un $n_0 \in \mathbb{N}$ se cumple el siguiente razonamiento:

$$
\begin{gathered}
|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \\
\iff \text{(operando)} \\
|\lambda||a_n - A| < \varepsilon \\
\iff \text{(operando)} \\
|\lambda(a_n - A)| < \varepsilon \\
\iff \text{(operando)} \\
|\lambda a_n - \lambda A| < \varepsilon \\
\iff (\tilde{a}_n = \lambda a_n) \\
|\tilde{a}_n - \lambda A| < \varepsilon
\end{gathered}
$$

Por lo tanto demostramos lo que queríamos verificar, es decir que:

- $\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$

Parte 3

Hecho en el teórico, clase 9, sección 3.11

Parte 4

Hecho en el teórico, clase 9, sección 3.10