Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1 - Evaluaciones anteriores

Consigna

Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial:

- $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = -2x^2 + 3$, que además cumple:
- $y(0) = 0$
- $y'(0) = 2$

Entonces:

1. $y(1) = e^2 - e^{-1}$
2. $y(1) = \frac{e^2 - e^{-1}}{2}$
3. $y(1) = e^{-1} - e^2 + 1$
4. $y(1) = \frac{e^2 - e^{-1}}{e^2 + e^{-1}}$
5. $y(1) = e^2 - 1$

Resolución

Separemos el problema en las dos ecuaciones diferenciales que queremos resolver:

- $(H) \quad y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$
- $(NH) \quad y''(x) - y'(x) - 2y(x) = -2x^2 + 3$

Homogénea

- $(H) \quad y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$

Para resolver la homogénea queremos obtener las raíces de la ecuación característica:

- $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

Para esto usamos Bháskara:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$
$$\iff \text{(operatoria)}$$
$$\lambda = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Esto resulta en:

- $\lambda_1 = 2$
- $\lambda_2 = -1$

Como las raíces son reales y diferentes, tenemos que la forma de la solución para la homogénea es:

- $y_H(x) = K_1 e^{2x} + K_2 e^{-x}$, y su derivada:
- $y_H'(x) = 2K_1 e^{2x} - K_2 e^{-x}$

No homogénea

- $(NH) \quad y''(x) - y'(x) - 2y(x) = -2x^2 + 3$

Ahora queremos encontrar una solución particular para esta ecuación. Buscamos claramente algo polinómico.

- $y_P(x) = Ax^2 + Bx + C$
- $y_P'(x) = 2Ax + B$
- $y_P''(x) = 2A$

Sustituimos esto en la ecuación:

$$\begin{aligned} &2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = -2x^2 + 3 \\ &\iff \text{(separando términos según órdenes)} \\ &-2Ax^2 + (-2A - 2B)x + (2A - B - 2C) = -2x^2 + 3 \end{aligned}$$

Esto nos deja con el sistema:

$$\begin{cases} -2A = -2 \\ -2A - 2B = 0 \\ 2A - B - 2C = 3 \end{cases}$$

De donde sacamos que:

- $A = 1$
- $B = -1$
- $C = 0$

Por lo tanto la solución particular es:

- $y_P(x) = x^2 - x$

General

Tenemos la solución general de la homogénea, y una solución particular de la no homogénea. Con esto tenemos que una forma de la solución general es:

$$
\begin{aligned}
&y_G(x) = y_H(x) + y_P(x)\\
&\iff \text{(reemplazando por lo conocido)}\\
&y_G(x) = K_1 e^{2x} + K_2 e^{-x} + x^2 - x
\end{aligned}
$$

También vamos a precisar su derivada así que:

- $y'_G(x) = 2K_1 e^{2x} - K_2 e^{-x} + 2x - 1$

Usemos las condiciones iniciales:

- $y(0) = 0$
- $y'(0) = 2$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
&y_G(0) = K_1 e^0 + K_2 e^0\\
&\iff \text{(reemplazando lo conocido)}\\
&0 = K_1 e^0 + K_2 e^0\\
&=\text{(operatoria)}\\
&0 = K_1 + K_2
\end{aligned}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
&y'_G(0) = 2K_1 e^0 - K_2 e^0 - 1\\
&\iff \text{(reemplazando lo conocido)}\\
&2 = 2K_1 e^0 - K_2 e^0 - 1\\
&\iff \text{(operatoria)}\\
&3 = 2K_1 - K_2
\end{aligned}
$$

Vayamos con el sistema de ecuaciones entonces:

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right)
$$

De donde obtenemos que:

- $K_2 = -1$
- $K_1 = 1$

Por lo tanto, la función solución es:

- $y_G(x) = e^{2x} - e^{-x} + x^2 - x$

Calculemos $y(1)$:

$$
y_G(1) = e^2 - e^{-1}
$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la respuesta uno (o A).