Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 8

Consigna

Hallar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales dadas:

1. $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
3. $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) + \sin(2x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
4. $y'' + y = 3x^2 - 5x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
5. $y'' + 4y' + 3y = 3e^x + x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
6. $y'' + y = (1 + x)^2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
7. $y'' + 2y' + y = x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
8. $y'' + y = \cos x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

Resolución

Ecuación 1

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

Tenemos las siguientes ecuaciones por resolver:

- $(H) \quad y'' + 2y' + 2y = 0$
- $(NH) \quad y'' + 2y' + 2y = cos(2x)$

Solución de (H)

Hallemos las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$:

- $\lambda_1 = -1 + i$
- $\lambda_2 = -1 - i$

Como son imaginarias y diferentes, tenemos que la solución general es la siguiente:

- $y_H = C_1 e^{-x} cos(x) + C_2 e^{-x} sin(x)$ y su derivada:
- $y'_H = C_1(-e^{-x} cos(x) - e^{-x} sin(x)) + C_2(-e^{-x} sin(x) + e^{-x} cos(x))$

Solución de (NH)

Buscamos una solución y_P que tenga la siguiente forma:

- $y_P = Acos(2x) + Bsin(2x)$
- $y_P' = -2Asin(2x) + 2Bcos(2x)$
- $y_P'' = -4Acos(2x) - 4Bsin(2x)$

Con esto podemos sustituir en la ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$$
$$\iff$$
$$-4Acos(2x) - 4Bsin(2x) + 2(-2Asin(2x) + 2Bcos(2x)) + 2(Acos(2x) + Bsin(2x)) = cos(2x)$$
$$\iff$$
$$sin(2x)(-4B - 4A + 2B) + cos(2x)(-4A + 4B + 2A) = cos(2x)$$

De donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -4A - 2B = 0 \\ -2A + 4B = 1 \end{cases}$$

De donde obtenemos:

- $B = \frac{1}{5}$
- $A = -\frac{1}{10}$

Entonces la solución particular de (NH) es la siguiente:

$y_P = -\frac{1}{10}cos(2x) + \frac{1}{5}sin(2x)$

Solución general de (NH)

- $y_G = y_H + y_P$
- $y_G = C_1e^{-x}cos(x) + C_2e^{-x}sin(x) - \frac{1}{10}cos(2x) + \frac{1}{5}sin(2x)$
- $y_G' = C_1(-e^{-x}cos(x) - e^{-x}sin(x)) + C_2(-e^{-x}sin(x) + e^{-x}cos(x)) + \frac{2}{10}sin(2x) + \frac{2}{5}cos(2x)$

Ahora usamos las condiciones iniciales:

- $y(0) = 1$, entonces:

$$C_1e^{-0}cos(0) + C_2e^{-0}sin(0) - \frac{1}{10}cos(0) + \frac{1}{5}sin(0) = 1$$
$$\iff$$
$$C_1 - \frac{1}{10} = 1$$
$$\iff$$
$$C_1 = \frac{11}{10}$$

- $y'(0) = 0$, entonces:

$$C_1(-e^{-0}cos(0) - e^{-0}sin(0)) + C_2(-e^{-0}sin(0) + e^{-0}cos(0)) + \frac{2}{10}sin(0) + \frac{2}{5}cos(0)$$
$$\iff$$
$$-C_1 + C_2 + \frac{2}{5} = 0$$
$$\iff_{(C_1 = \frac{11}{10})}$$
$$-\frac{11}{10} + C_2 + \frac{2}{5} = 0$$
$$\iff$$
$$C_2 = \frac{7}{10}$$

Entonces la solución al problema es:

- $\frac{11}{10}e^{-x}cos(x) + \frac{7}{10}e^{-x}sin(x) - \frac{1}{10}cos(2x) + \frac{1}{5}sin(2x)$

Ecuación 2

- $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x), \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

Tenemos las siguientes ecuaciones por resolver:

- $(H) \quad y'' + 2y' + 2y = 0$
- $(NH) \quad y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$

Solución de (H)

Hallemos las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$:

- $\lambda_1 = -1 + i$
- $\lambda_2 = -1 - i$

Como son imaginarias y diferentes, tenemos que la solución general es la siguiente:

- $y_H = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x)$ y su derivada:
- $y_H' = C_1(-e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x)) + C_2(-e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x))$

Solución de (NH)

Buscamos una solución y_P que tenga la siguiente forma:

- $y_P = A\cos(2x) + B\sin(2x)$
- $y_P' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$
- $y_P'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$

Con esto podemos sustituir en la ecuación diferencial:

$y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$

$\iff$

$-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + 2(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)) + 2(A\cos(2x) + B\sin(2x)) = \sin(2x)$

$\iff$

$\sin(2x)(-4B - 4A + 2B) + \cos(2x)(-4A + 4B + 2A) = \sin(2x)$

De donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -4A - 2B = 1 \\ -2A + 4B = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos que:

- $A = -\frac{1}{5}$
- $B = -\frac{1}{10}$

Entonces la solución particular de (NH) es la siguiente:

- $y_P = -\frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$

Solución general de (NH)

- $y_G = y_H + y_P$
- $y_G = C_1 e^{-x} cos(x) + C_2 e^{-x} sin(x) - \frac{1}{5} cos(2x) - \frac{1}{10} sin(2x)$
- $y'_G = C_1(-e^{-x} cos(x) - e^{-x} sin(x)) + C_2(-e^{-x} sin(x) + e^{-x} cos(x)) - \frac{2}{5} sin(2x) - \frac{1}{5} cos(2x)$

Ahora usamos las condiciones iniciales:

- $y(0) = 1$, entonces:

$$C_1 e^{-0} cos(0) + C_2 e^{-0} sin(0) - \frac{1}{5} cos(0) - \frac{1}{10} sin(0) = 1$$
$$\iff$$
$$C_1 - \frac{1}{5} = 1$$
$$\iff$$
$$C_1 = \frac{6}{5}$$

- $y'(0) = 0$, entonces:

$$C_1(-e^{-0}cos(0) - e^{-0}sin(0)) + C_2(-e^{-0}sin(0) + e^{-0}cos(0)) - \frac{2}{5}sin(0) - \frac{1}{5}cos(0) = 0$$

$$\iff$$

$$-C_1 + C_2 - \frac{1}{5} = 0$$

$$\iff_{(C_1 = \frac{6}{5})}$$

$$-\frac{6}{5} + C_2 - \frac{1}{5} = 0$$

$$\iff$$

$$C_2 = \frac{7}{5}$$

Entonces la solución al problema es:

- $y_G = \frac{6}{5}e^{-x}cos(x) + \frac{7}{5}e^{-x}sin(x) - \frac{1}{5}cos(2x) - \frac{1}{10}sin(2x)$

Ecuación 3

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) + \sin(2x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

Observemos que ya tenemos una solución general para:

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$
- $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$

Sumar las soluciones generales, nos da la solución general de la ecuación diferencial que queremos resolver, entonces hacemos eso:

$$y_G = (C_1e^{-x}cos(x) + C_2e^{-x}sin(x) - \frac{1}{10}cos(2x) + \frac{1}{5}sin(2x)) + (C_1e^{-x}cos(x) + C_2e^{-x}sin(x) - \frac{1}{5}cos(2$$

$$y_G = C_1e^{-x}cos(x) + C_2e^{-x}sin(x) - \frac{3}{10}cos(2x) + \frac{1}{10}sin(2x)$$

Calculamos también la derivada ya que la vamos a utilizar:

- $y'_G = C_1(-e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x)) + C_2(-e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x)) + \frac{3}{5}\sin(2x) + \frac{1}{5}\cos(2x)$, simplificando:
- $y'_G = C_1e^{-x}(-\cos(x) - \sin(x)) + C_2e^{-x}(-\sin(x) + \cos(x)) + \frac{3}{5}\sin(2x) + \frac{1}{5}\cos(2x)$

Ahora, aplicando las condiciones iniciales:

- $y(0) = 1$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&C_1 e^{-0} cos(0) + C_2 e^{-0} sin(0) - \frac{3}{10} cos(0) + \frac{1}{10} sin(0) = 1 \\
&\iff \\
&C_1 - \frac{3}{10} = 1 \\
&\iff \\
&C_1 = \frac{13}{10}
\end{aligned}
$$

- $y'(0) = 0$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&C_1 e^{-0}(-\cos(0) - \sin(0)) + C_2 e^{-0}(-\sin(0) + \cos(0)) + \frac{3}{5}\sin(0) + \frac{1}{5}\cos(0) = 0 \\
&\iff \\
&-C_1 + C_2 + \frac{1}{5} = 0 \\
&\iff_{(C_1 = \frac{13}{10})} \\
&-\frac{13}{10} + C_2 + \frac{1}{5} = 0 \\
&\iff \\
&C_2 = \frac{11}{10}
\end{aligned}
$$

Entonces la solución al problema es:

- $y_G = \frac{13}{10} e^{-x} cos(x) + \frac{11}{10} e^{-x} sin(x) - \frac{3}{10} cos(2x) + \frac{1}{10} sin(2x)$

Ecuación 4

- $y'' + y = 3x^2 - 5x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

Tenemos las siguientes ecuaciones por resolver:

- $(H) \quad y'' + y = 0$
- $(NH) \quad y'' + y = 3x^2 - 5x$

Solución de (H)

Hallemos las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$:

- $\lambda_1 = i$
- $\lambda_2 = -i$

Como son imaginarias y diferentes, tenemos que la solución general es la siguiente:

- $y_H = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$ y su derivada:
- $y'_H = -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$

Solución de (NH)

Buscamos una solución y_P que tenga la siguiente forma:

- $y_P = Ax^2 + Bx + C$
- $y'_P = 2Ax + B$
- $y''_P = 2A$

Con esto podemos sustituir en la ecuación diferencial:

$$
\begin{aligned}
& y'' + y = 3x^2 - 5x \\
& \iff \\
& 2A + Ax^2 + Bx + C = 3x^2 - 5x \\
& \iff \\
& Ax^2 + Bx + (C + 2A) = 3x^2 - 5x
\end{aligned}
$$

De donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{cases}
A = 3 \\
B = -5 \\
C + 2A = 0
\end{cases}
$$

De donde obtenemos que:

- $C = -6$

Entonces la solución particular de (NH) es la siguiente:

- $y_P = 3x^2 - 5x - 6$

Solución general de (NH)

- $y_G = y_H + y_P$
- $y_G = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + 3x^2 - 5x - 6$
- $y'_G = -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + 6x - 5$

Ahora usamos las condiciones iniciales:

- $y(0) = 1$, entonces:

$$
\begin{aligned}
& C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + 3x^2 - 5x - 6 \\
& \iff \\
& C_1 - 6 = 1 \\
& \iff \\
& C_1 = 7
\end{aligned}
$$

- $y'(0) = 0$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&-C_1\sin(x)+C_2\cos(x)+6x-5=0\\
&\iff\\
&C_2-5=0\\
&\iff\\
&C_2=5
\end{aligned}
$$

Entonces la solución al problema es:

- $y_G = 7\cos(x) + 5\sin(x) + 3x^2 - 5x - 6$