

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 3

### Consigna

Dibuje el dominio y los conjuntos de nivel de las siguientes funciones:

1.  $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
2.  $\log\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$
3.  $\tan\left(\frac{x^2}{y}\right)$
4.  $\arctan\left(\frac{x^2}{y}\right)$

## Resolución

### Función #1

- $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Veamos el dominio de la función:

- $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Veamos ahora los conjuntos de nivel:

- Si  $a < 0$  entonces  $C_a = \emptyset$ , pues ambos el numerador y denominador siempre son positivos
- Si  $a = 0$  también  $C_0 = \emptyset$ , pues el numerador es constante 1.
- Si  $a > 0$ , entonces  $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow 1 = a(x^2 + y^2)$ . Por lo tanto  $C_a = \{(x,y) \in D : \| (x,y) \|^2 = \frac{1}{a}\}$

### Función #2

- $\log\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$

Veamos el dominio de la función, para esto tenemos dos partes que verificar, primero que el denominador de la fracción no se anule, y luego que el término al que aplicamos logaritmo sea mayor que 0.

**Primera restricción:**

Queremos excluir  $(x, y) = (0, 0)$  pues es el único punto que anula la fracción.

**Segunda restricción:**

- $\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0$

Esto sucede si  $1 - x^2 - y^2 > 0$ , es decir si:

- $x^2 + y^2 < 1$

Entonces juntando las restricciones, tenemos que:

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$

Ahora vayamos por los conjuntos de nivel, para esto tenemos que hacer un despeje:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) &= a \\ \iff \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2} &= e^a \\ \iff 1-x^2-y^2 &= e^a(x^2+y^2) \\ \iff 1 &= e^a x^2 + e^a y^2 + x^2 + y^2 \\ \iff 1 &= x^2(e^a + 1) + y^2(e^a + 1) \\ \iff 1 &= (e^a + 1)(x^2 + y^2) \\ \iff \frac{1}{e^a + 1} &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que los conjuntos de nivel para cualquier  $a$  son:

- $C_a = \{(x, y) \in D : \|(x, y)\|^2 = \frac{1}{e^a + 1}\}$

### Función #3

- $\tan\left(\frac{x^2}{y}\right)$

Veamos el dominio de la función, para esto observemos que la función  $\tan(x)$  está bien definida si  $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Apliquemos esta idea a la función.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{y} &\neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
&\iff \\
\frac{x^2}{y} &\neq \frac{(4k+1)\pi}{2} \\
&\iff \\
x^2 &\neq \frac{(4k+1)\pi}{2} y \\
&\iff \\
x^2 \cdot \frac{2}{(4k+1)\pi} &\neq y \\
&\iff \\
\frac{2x^2}{(4k+1)\pi} &\neq y
\end{aligned}$$

Además  $y$  tiene que ser distinto de 0 pues sino anularía la fracción. Entonces:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, y \neq \frac{2x^2}{(4k+1)\pi}\}$$

Ahora podemos pasar a los conjuntos de nivel:

- Si  $a = 0$ , entonces  $C_0 = \{(x, y) \in D : x = 0\}$
- Si  $a \neq 0$ , vale el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{x^2}{y}\right) &= a \\
&= \\
\frac{x^2}{y} &= \arctan(a) \\
&= \\
y &= \frac{x^2}{\arctan(a)}
\end{aligned}$$

- Por lo tanto, si  $a \neq 0$ , entonces  $C_a = \{(x, y) \in D : y = \frac{x^2}{\arctan(a)}\}$

## Función #4

- $\arctan\left(\frac{x^2}{y}\right)$

Para el dominio solamente tenemos que excluir los puntos tales que  $y = 0$ , pues la función  $\arctan(x)$  está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y \neq 0\}$

Veamos ahora los conjuntos de nivel:

- Si  $a \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , entonces  $C_a = \emptyset$ , pues  $\arctan(x)$  solo devuelve valores en ese intervalo.

- Si  $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{(0,0)\}$ , entonces podemos obtener su conjunto de nivel operando:

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{x^2}{y}\right) &= a \\ \iff \frac{x^2}{y} &= \tan(a) \\ \iff y &= \frac{x^2}{\tan(a)} \end{aligned}$$

- Por lo tanto  $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{(0,0)\}$ , entonces  $C_a = \{(x,y) \in D : y = \frac{x^2}{\tan(a)}\}$
- Si  $a = 0$ , entonces  $C_0 = \{(x,y) \in D : x = 0\}$