Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Dibuje el dominio y los conjuntos de nivel de las siguientes funciones:

1. $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
2. $\log\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$
3. $\tan\left(\frac{x^2}{y}\right)$
4. $\arctan\left(\frac{x^2}{y}\right)$

Resolución

Función #1

- $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Veamos el dominio de la función:

- $D = R^2 \setminus \{(0,0)\}$

Veamos ahora los conjuntos de nivel:

- Si $a < 0$ entonces $C_a = \emptyset$, pues ambos el numerador y denominador siempre son positivos
- Si $a = 0$ también $C_0 = \emptyset$, pues el numerador es constante 1.
- Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 1 = a(x^2+y^2)$. Por lo tanto $C_a = \{(x,y) \in D : \|(x,y)\|^2 = \frac{1}{a}\}$

Función #2

- $\log\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$

Veamos el dominio de la función, para esto tenemos dos partes que verificar, primero que el denominador de la fracción no se anule, y luego que el término al que aplicamos logarítmo sea mayor que 0.

Primera restricción:

Queremos excluir $(x, y) = (0, 0)$ pues es el único punto que anula la fracción.

Segunda restricción:

- $\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0$

Esto sucede sii $1 - x^2 - y^2 > 0$, es decir sii:

- $x^2 + y^2 < 1$

Entonces juntando las restricciones, tenemos que:

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$

Ahora vayamos por los conjuntos de nivel, para esto tenemos que hacer un despeje:

$$\begin{aligned}
&\log\left(\frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = a \\
&\iff \\
&\frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = e^a \\
&\iff \\
&1 - x^2 - y^2 = e^a(x^2 + y^2) \\
&\iff \\
&1 = e^a x^2 + e^a y^2 + x^2 + y^2 \\
&\iff \\
&1 = x^2(e^a + 1) + y^2(e^a + 1) \\
&\iff \\
&1 = (e^a + 1)(x^2 + y^2) \\
&\iff \\
&\frac{1}{e^a + 1} = x^2 + y^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que los conjuntos de nivel para cualquier a son:

- $C_a = \{(x, y) \in D : \|(x, y)\|^2 = \frac{1}{e^a+1}\}$

Función #3

- $\tan\left(\frac{x^2}{y}\right)$

Veamos el dominio de la función, para esto observemos que la función $\tan(x)$ está bien definida sii $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Apliquemos esta idea a la función.

$$\frac{x^2}{y} \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\iff$$

$$\frac{x^2}{y} \neq \frac{(4k+1)\pi}{2}$$

$$\iff$$

$$x^2 \neq \frac{(4k+1)\pi}{2} y$$

$$\iff$$

$$x^2 \cdot \frac{2}{(4k+1)\pi} \neq y$$

$$\iff$$

$$\frac{2x^2}{(4k+1)\pi} \neq y$$

Además y tiene que ser distinto de 0 pues sino anularía la fracción. Entonces:

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, y \neq \frac{2x^2}{(4k+1)\pi}\}$

Ahora podemos pasar a los conjuntos de nivel:

- Si $a = 0$, entonces $C_0 = \{(x, y) \in D : x = 0\}$
- Si $a \neq 0$, vale el siguiente razonamiento:

$$\tan\left(\frac{x^2}{y}\right) = a$$

$$=$$

$$\frac{x^2}{y} = \arctan(a)$$

$$=$$

$$y = \frac{x^2}{\arctan(a)}$$

- Por lo tanto, si $a \neq 0$, entonces $C_a = \{(x, y) \in D : y = \frac{x^2}{\arctan(a)}\}$

Función #4

- $\arctan\left(\frac{x^2}{y}\right)$

Para el dominio solamente tenemos que excluir los puntos tales que $y = 0$, pues la función $\arctan(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y \neq 0\}$

Veamos ahora los conjuntos de nivel:

- Si $a \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, entonces $C_a = \emptyset$, pues $\arctan(x)$ solo devuelve valores en ese intervalo.

- Si $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{(0,0)\}$, entonces podemos obtener su conjunto de nivel operando:

$$
\begin{aligned}
&\arctan\left(\frac{x^2}{y}\right) = a \\
&\iff \\
&\frac{x^2}{y} = \tan(a) \\
&\iff \\
&y = \frac{x^2}{\tan(a)}
\end{aligned}
$$

- Por lo tanto $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{(0,0)\}$, entonces $C_a = \{(x,y) \in D : y = \frac{x^2}{\tan(a)}\}$
- Si $a = 0$, entonces $C_0 = \{(x,y) \in D : x = 0\}$