

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el **criterio del equivalente**:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)-\log(n)}{10n+1}$

Resolución

Serie #1

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Veamos a que es equivalente el término general:

$$\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Entonces como $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente, también lo es $\sum \frac{1}{n^2+1}$.

Serie #2

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$$

Veamos a que es equivalente el término general:

$$\frac{n^2+1}{n^3} \sim \frac{n^2}{n^3} \sim \frac{1}{n}$$

Entonces como $\sum \frac{1}{n}$ es divergente, también lo es $\sum \frac{n^2+1}{n^3}$.

Serie #3

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1) - \log(n)}{10n+1}$$

Veamos a que es equivalente el término general:

$$\begin{aligned} & \frac{\log(n+1) - \log(n)}{10n+1} \\ &= (\text{propiedades de logaritmos}) \\ & \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{10n+1} \\ &= (\text{operatoria}) \\ & \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{10n+1} \end{aligned}$$

Por desarrollo de Taylor, tenemos que si $x \rightarrow 0$, entonces $\log(1+x) \rightarrow x$. Entonces aplicando en nuestro caso:

$$\begin{aligned} & \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{10n+1} \\ &= (\text{por el argumento anterior}) \\ & \frac{\frac{1}{n}}{10n+1} \\ &= (\text{operatoria}) \\ & \frac{1}{(10n+1)n} \end{aligned}$$

Y observemos que:

$$\bullet \frac{1}{(10n+1)n} \sim \frac{1}{n^2}$$

Entonces como $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, también lo hace $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1) - \log(n)}{10n+1}$