

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas:

1. $y' + y \cos x = 0$

2. $x(x-1)y' + (1-2x)y = 0$

3. $y' - \frac{2}{x}y = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no homogéneas:

1. $y' + y \cos x = \cos x \sin x$

2. $x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0$

3. $y' - \frac{2}{x}y = x^4$

Resolución

Se harán la parte 1 y 2 simultáneamente, ya que para resolver las ecuaciones lineales no homogéneas necesitamos también resolver las homogéneas.

Ecuación 1

- $y' + y \cos x = \cos x \sin x$

Tenemos las siguientes ecuaciones por resolver:

- (H) $y' + y \cos x = 0$

- (NH) $y' + y \cos x = \cos x \sin x$

Solución de (H)

Operemos:

$$\begin{aligned}
y' + y \cos x &= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{y'}{y} &= -\cos x \\
&\Leftrightarrow \\
\int \frac{y'}{y} dx &= \int -\cos x dx \\
&\Leftrightarrow (u=y(x); du=y'(x)dx) \\
\int \frac{1}{u} du &= -\sin x + k_1 \\
&\Leftrightarrow \\
\ln|u| + k_2 &= -\sin x + k_1 \\
&\Leftrightarrow (C=k_1-k_2) \\
\ln|u| &= -\sin x + C \\
&\Leftrightarrow \\
u &= \pm e^C e^{-\sin x} \\
&\Leftrightarrow (K_1=\pm e^C) \\
u &= K_1 e^{-\sin x} \\
&\Leftrightarrow (\text{deshaciendo el cambio de variables}) \\
y_H &= K_1 e^{-\sin x}
\end{aligned}$$

Solución de (NH)

Para esta parte consideramos el método de variación de constantes, y en base a la solución de (H) procedemos:

- $y_P = C(x)e^{-\sin x}$
- $y'_P = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x} \cos(x)$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
y' + y \cos x &= \cos x \sin x \\
&\Leftrightarrow \\
C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x} \cos(x) + C(x)e^{-\sin x} \cos x &= \cos x \sin x \\
&\Leftrightarrow \\
e^{-\sin x}(C'(x) - C(x)\cos(x) + C(x)\cos x) &= \cos x \sin x \\
&\Leftrightarrow \\
C'(x) - C(x)\cos(x) + C(x)\cos x &= \frac{\cos x \sin x}{e^{-\sin x}} \\
&\Leftrightarrow \\
C'(x) &= \frac{\cos x \sin x}{e^{-\sin x}} \\
&\Leftrightarrow \\
\int C'(x)dx &= \int \frac{\cos x \sin x}{e^{-\sin x}} dx \\
&\Leftrightarrow (u=\sin x; du=\cos(x)dx) \\
C(x) + k_1 &= \int \frac{u}{e^{-u}} du \\
&\Leftrightarrow \\
C(x) + k_1 &= \int ue^u du \\
&\Leftrightarrow (\text{integración por partes}) \\
C(x) + k_1 &= ue^u - \int 1e^u du \\
&\Leftrightarrow \\
C(x) + k_1 &= ue^u - e^u + k_2 \\
&\Leftrightarrow \\
C(x) + k_1 &= e^u(u - 1) + k_2 \\
&\Leftrightarrow (K_2=k_1-k_2) \\
C(x) &= e^u(u - 1) + K_2 \\
&\Leftrightarrow (\text{deshago cambio de variable}) \\
C(x) &= e^{\sin x}(\sin(x) - 1) + K_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos hallar la solución particular de (NH) :

$$\begin{aligned}
y_P &= C(x)e^{-\sin x} \\
&\Leftrightarrow \\
y_P &= (e^{\sin x}(\sin(x) - 1) + K_2)e^{-\sin x} \\
&\Leftrightarrow \\
y_P &= \sin(x) - 1 + K_2e^{-\sin x} \\
&\Leftrightarrow (\text{eligiendo } K_2=0) \\
y_P &= \sin(x) - 1
\end{aligned}$$

Conclusión

Por lo tanto, la solución general para (NH) es la siguiente:

- $y_G = y_H + y_P$, entonces:
- $y_G = Ke^{-\sin x} + \sin(x) - 1$

Lo que finaliza esta parte.

Ecuación 2

- $x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0$

Tenemos las siguientes ecuaciones por resolver:

- $(H) \quad x(x-1)y' + (1-2x)y = 0$
- $(NH) \quad x(x-1)y' + (1-2x)y = -x^2$

Solución de (H)

Operemos:

$$\begin{aligned}
& x(x-1)y' + (1-2x)y = 0 \\
& \iff \\
& y' = \frac{1-2x}{x(x-1)}y \\
& \iff \\
& \frac{y'}{y} = \frac{1-2x}{x(x-1)} \\
& \iff \\
& \int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{1-2x}{x(x-1)} dx \\
& \iff (u=y(x); du=y'(x)dx) \\
& \int \frac{1}{u} du = \int \frac{1-2x}{x(x-1)} dx \\
& \iff (\text{fracciones simples}) \\
& \ln|u| + k_1 = \int \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x-1} dx \\
& \iff \\
& \ln|u| + k_1 = \int \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x-1} dx \\
& \iff \\
& \ln|u| + k_1 = - \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx \\
& \iff (v=x-1; dv=1dx) \\
& \ln|u| + k_1 = -\ln|x| + k_2 - \int \frac{1}{v} dv \\
& \iff \\
& \ln|u| + k_1 = -\ln|x| + k_2 - \ln|v| + k_3 \\
& \iff (\text{deshago cambios de variables y } k_4=k_2+k_3-k_1) \\
& \ln|y| = -\ln|x| - \ln|x-1| + k_4 \\
& \iff \\
& \ln|y| = -(\ln|x| + \ln|x-1|) + k_4 \\
& \iff \\
& \ln|y| = -\ln|x(x-1)| + k_4 \\
& \iff (n \cdot \ln(a) = \ln(a^n)) \\
& \ln|y| = \ln\left(\frac{1}{|x(x-1)|}\right) + k_4 \\
& \iff \\
& |y| = \frac{e^{k_4}}{|x(x-1)|} \\
& \iff (K=e^{k_4}) \\
& y = \frac{K}{x(x-1)} \\
& \iff (C=\frac{1}{K}) \\
& y = Cx(x-1)
\end{aligned}$$

Solución de (NH)

Para esta parte consideramos el método de variación de constantes, y en base a la solución de (H) procedemos:

- $y_P = C(x)x(x-1)$
- $y'_P = C'(x)x(x-1) + C(x)(2x-1)$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$x(x-1)y' + (1-2x)y = -x^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x(x-1)(C'(x)x(x-1) + C(x)(2x-1)) + (1-2x)(C(x)x(x-1)) = -x^2$$

$$\Leftrightarrow \text{(divido por } x(x-1) \neq 0,1)$$

$$x(x-1)(C'(x)x(x-1) + C(x)(2x-1)) + (1-2x)(C(x)x(x-1)) = -x^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(C'(x)x(x-1) + C(x)(2x-1)) + (1-2x)C(x) = \frac{-x^2}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$C'(x)x(x-1) = \frac{-x^2}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$C'(x) = \frac{-x^2}{x^2(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$C'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int C'(x)dx = -\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$\Leftrightarrow \text{(recordatorio } (*_1))$$

$$C(x) + k_1 = -\frac{1}{(-1)(x-1)} + k_2$$

$$\Leftrightarrow (K=k_2-k_1)$$

$$C(x) + k_1 = \frac{1}{x-1} + k_2$$

$$\Leftrightarrow (K=k_2-k_1)$$

$$C(x) = \frac{1}{x-1} + K$$

Recordatorio $(*_1)$

En este paso se aplica la regla de la potencia:

$$\int (x-a)^n = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con } n \neq -1$$

También se puede hacer cambio de variable que quizás pueda resultar más simple.

Continuando con el ejercicio, ahora podemos hallar la solución particular de (NH) :

$$\begin{aligned} y_P &= C(x)x(x-1) \\ &\Leftrightarrow \\ y_P &= \left(\frac{1}{x-1} + K \right) x(x-1) \\ &\Leftrightarrow \\ y_P &= \frac{x(x-1)}{x-1} + Kx(x-1) \\ &\Leftrightarrow \\ y_P &= x + Kx(x-1) \\ &\Leftrightarrow \text{(eligiendo } K=0) \\ y_P &= x \end{aligned}$$

Conclusión

Por lo tanto, la solución general para (NH) es la siguiente:

- $y_G = y_H + y_P$, entonces:
- $y_G = Cx(x-1) + x$, o:
- $y_G = x(C(x-1) + 1)$

Lo que finaliza esta parte.

Ecuación 3

- $y' - \frac{2}{x}y = x^4$

Tenemos las siguientes ecuaciones por resolver:

- $(H) \quad y' - \frac{2}{x}y = 0$
- $(NH) \quad y' - \frac{2}{x}y = x^4$

Solución de (H)

Operemos:

$$\begin{aligned}
y' - \frac{2}{x}y &= 0 \\
&\iff \\
y' &= \frac{2}{x}y \\
&\iff \\
\int \frac{y'}{y} dx &= \int \frac{2}{x} dx \\
&\iff (u=y(x); du=y'(x)dx) \\
\int \frac{1}{u} du &= 2 \int \frac{1}{x} dx \\
&\iff \\
\ln|u| + k_1 &= 2\ln|x| + k_1 \\
&\iff (\text{deshaciendo el cambio de variables y } C=k_1-k_2) \\
\ln|y| &= \ln|x^2| + C \\
&\iff \\
|y| &= |x^2|e^C \\
&\iff (K=e^C) \\
y &= Kx^2
\end{aligned}$$

Solución de (NH)

Para esta parte consideramos el método de variación de constantes, y en base a la solución de (H) procedemos:

- $y_P = C(x)x^2$
- $y'_P = C'(x)x^2 + C(x)2x$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
y' - \frac{2}{x}y &= x^4 \\
&\iff \\
C'(x)x^2 + C(x)2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 &= x^4 \\
&\iff \\
C'(x)x^2 + C(x)2x - 2xC(x) &= x^4 \\
&\iff \\
C'(x)x^2 &= x^4 \\
&\iff (\text{divido por } x^2 \neq 0) \\
C'(x) &= x^2 \\
&\iff \\
\int C'(x)dx &= \int x^2 dx \\
&\iff \\
C(x) + k_1 &= \frac{x^3}{3} + k_2 \\
&\iff (K=k_2-k_1) \\
C(x) &= \frac{x^3}{3} + K
\end{aligned}$$

Ahora podemos hallar la solución particular de (NH) :

$$\begin{aligned}
y_P &= C(x)x^2 \\
&\iff \\
y_P &= \left(\frac{x^3}{3} + K \right) x^2 \\
&\iff \\
y_P &= \frac{x^5}{3} + Kx^2 \\
&\iff (\text{considerando } K=0) \\
y_P &= \frac{x^5}{3}
\end{aligned}$$

Conclusión

Por lo tanto, la solución general para (NH) es la siguiente:

- $y_G = y_H + y_P$, entonces:
- $y_G = Kx^2 + \frac{x^5}{3}$

Lo que finaliza esta parte.