Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 5

Consigna

Representar geométricamente los complejos:

1. $(1+i)^n - (1-i)^n$, para algunos valores naturales n
2. Las raíces quintas de 1: los z tales que $z^5 = 1$
3. Las raíces décimas de 1
4. Los z tales que $z^6 = 8(\sqrt{3} - i)$

Resolución

Parte 1

Consideremos la notación polar de los siguientes complejos:

- $i + 1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$
- $i - 1 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

Por lo tanto el complejo que queremos representar es:

$(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^n - (\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^n$

$=$(operatoria)

$\sqrt{2}^n e^{n\frac{\pi}{4}i} - \sqrt{2}^n e^{-n\frac{\pi}{4}i}$

$=$(operatoria)

$\sqrt{2}^n (e^{n\frac{\pi}{4}i} - e^{-n\frac{\pi}{4}i})$

$=$(notación binómica)

$\sqrt{2}^n \left(\left(cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) - \left(cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{-n\pi}{4}\right)\right)\right)$

$=$(usando que $cos(-\theta){=}cos(\theta), sen(-\theta){=}{-}sen(\theta)$)

$\sqrt{2}^n \left(\left(cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) - \left(cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - isen\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\right)$

$=$(operatoria)

$\sqrt{2}^n 2isen\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

Observación: Con respecto a la propiedad $cos(-\theta) = cos(\theta), sen(-\theta) = -sen(\theta)$. Quizás parezca que es complicado recordar esto, pero nos simplificó mucho las cuentas (incluso de otra forma quizás no salían) y no es tan díficil de ver. Gráficar las funciones seno y coseno nos permiten ver visualmente dichas igualdades.

Entonces con esta expresión, podemos calcular fácilmente cualquier potencia de la expresión.

- $n = 1 \rightarrow \sqrt{2} \cdot 2isen(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot 2i\frac{\sqrt{2}}{2} = 2i$
- $n = 2 \rightarrow \sqrt{2}^2 \cdot 2isen(\frac{2\pi}{4}) = 4i \cdot 1 = 4i$
- $n = 3 \rightarrow \sqrt{2}^3 \cdot 2isen(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot 4i(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -4i$
- $n = 4 \rightarrow \sqrt{2}^4 \cdot 2isen(\pi) = 8i(0) = 0$

Y así sucesivamente. La representación geométrica de esto es todo sobre la recta de los imaginarios, pues por la fórmula hallada solo tenemos parte imaginaria.

Parte 4

Queremos representar los z tales que $z^6 = 8(\sqrt{3} - i)$.

Para esto hallemos la notación polar de $8(\sqrt{3} - i)$:

- $8(\sqrt{3} - i) = 8\sqrt{3} - 8i$

Por lo tanto tenemos que:

- Módulo: $\sqrt{8\sqrt{3}^2 + 8^2} = \sqrt{256} = 16$
- Argumento: $arctan(\frac{-8}{8\sqrt{3}}) = arctan(\frac{-1}{\sqrt{3}}) = arctan(\frac{-\sqrt{3}}{3}) = \frac{-\pi}{6}$

Por lo tanto queremos hallar un $z = re^{i\theta}$ que cumpla lo siguiente:

- $r^6 e^{i6\theta} = 16e^{i\frac{\pi}{6}}$

Esto deriva en las siguientes ecuaciones:

Figura 1

Figure 1: Figura 1

- $r^6 = 16 \to r = \sqrt[6]{16}$
- $6\theta = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \to \theta = \frac{-\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$

De donde obtenemos las raíces sextas de $8(\sqrt{3} - i)$:

- $z_0 = \sqrt[6]{16} e^{i\frac{-\pi}{36}}$
- $z_1 = \sqrt[6]{16} e^{i(\frac{-\pi}{36} + \frac{\pi}{3})}$
- $z_2 = \sqrt[6]{16} e^{i(\frac{-\pi}{36} + \frac{2\pi}{3})}$
- $z_3 = \sqrt[6]{16} e^{i(\frac{-\pi}{36} + \pi)}$
- $z_4 = \sqrt[6]{16} e^{i(\frac{-\pi}{36} + \frac{4\pi}{3})}$
- $z_5 = \sqrt[6]{16} e^{i(\frac{-\pi}{36} + \frac{5\pi}{3})}$

La imagen de lo que hallamos sería algo así (no encontré una imagen mejor):