

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 6

Consigna

Encontrar el conjunto de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las condiciones, y representarlos geométricamente:

1. $|z| > 1$
2. $z - \bar{z} = i$
3. $|z - i| = |z + i|$
4. $\text{Im}(z) < 2$
5. $|z - \bar{z}| = 2\text{Re}(z - 1)$

Resolución

Parte 1

- $|z| > 1$

Esta parte se entiende muy fácilmente con su representación gráfica:

Parte 2

- $z - \bar{z} = i$

En este caso operemos un poco para simplificar la expresión, sea $z = a + bi$:

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Figura 2

Figure 2: Figura 2

Figura 3

Figure 3: Figura 3

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= i \\ \Leftrightarrow \\ a + bi - (a - bi) &= i \\ \Leftrightarrow \\ 2bi &= i \\ \Leftrightarrow \\ 2b &= 1 \\ \Leftrightarrow \\ b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto la representación gráfica es la siguiente:

Parte 3

$$\bullet \quad |z - i| = |z + i|$$

En este caso operemos un poco para simplificar la expresión, sea $z = a + bi$:

$$\begin{aligned} |z - i| &= |z + i| \\ \Leftrightarrow \\ |a + bi - i| &= |a + bi + i| \\ \Leftrightarrow \\ |a + (b - 1)i| &= |a + (b + 1)i| \\ \Leftrightarrow \\ \sqrt{a^2 + (b - 1)^2} &= \sqrt{a^2 + (b + 1)^2} \\ \Leftrightarrow \\ a^2 + b^2 - 2b + 1 &= a^2 + b^2 + 2b + 1 \\ \Leftrightarrow \\ -2b &= 2b \\ \Leftrightarrow \\ 4b &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la representación gráfica es la siguiente:

Figura 4

Figure 4: Figura 4

Figura 5

Figure 5: Figura 5

Parte 4

- $Im(z) < 2$

Esta parte se entiende muy fácilmente con su representación gráfica

Parte 5

- $|z - \bar{z}| = 2Re(z - 1)$

En este caso operemos un poco para simplificar la expresión, sea $z = a + bi$:

$$|z - \bar{z}| = 2Re(z - 1)$$

$$\iff$$

$$|i2b| = 2(a - 1)$$

$$\iff$$

$$|i2b| = 2(a - 1)$$

$$\iff$$

$$2b = 2a - 2$$

$$\iff$$

$$b = a - 1$$

Por lo tanto la representación gráfica es la siguiente: