

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 1 (evaluaciones anteriores)

### Consigna

Considere las siguientes afirmaciones sobre series:

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log(1+\frac{1}{n})}$  es convergente.
2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$  es absolutamente convergente.
3.  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(2) \log(3) \log(4) \cdots \log(n)}{n!}$  es convergente.

Entonces:

- (A) Solamente las afirmaciones (1) y (2) son verdaderas.
- (B) Solamente las afirmaciones (2) y (3) son verdaderas.
- (C) Todas las afirmaciones son verdaderas.
- (D) Solamente la afirmación (2) es verdadera.
- (E) Solamente las afirmaciones (1) y (3) son verdaderas.

### Resolución

#### Serie #1

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log(1+\frac{1}{n})}$

Veamos que sucede con el término general cuando  $n \rightarrow +\infty$ , teniendo presente la siguiente observación:

- $(*)_1$  Cuando  $u \rightarrow 0$ ,  $\log(1+u) \sim u$

Por lo tanto cuando  $n \rightarrow +\infty$  el término general es equivalente a:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \\
& = (\text{definición del término general}) \\
& \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
& = (\text{usando la observación } *_1) \\
& \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \cdot \frac{1}{n}} \\
& = (\text{operatoria}) \\
& 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto el término general tiende a uno cuando  $n$  tiende a infinito, con esto concluimos que la serie no puede ser convergente.

## Serie #2

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$$

Queremos ver si es absolutamente convergente, es decir si:

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} \text{ es convergente.}$$

Para esto usaremos el criterio de la raíz enésima:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} \\
& = (\text{operatoria}) \\
& \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \\
& = (\text{operatoria}) \\
& \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} \\
& = (\text{operatoria}) \\
& \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\log(n^{\frac{1}{n}})} \\
& = (\text{operatoria}) \\
& \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \log(n)} \\
& = (\text{operatoria}) \\
& \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log(n)}{n}} \\
& = (\text{operatoria}) \\
& \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Como el resultado  $\frac{1}{3} < 1$ , el resultado nos dice que la serie es convergente. Por lo tanto, la serie original es absolutamente convergente.

### Serie #3

$$\bullet \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(2) \log(3) \log(4) \cdots \log(n)}{n!}$$

Para verificar si esta serie es convergente, usaremos el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(2) \cdots \log(n) \log(n+1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\log(2) \cdots \log(n)} \\ & = (\text{operatoria}) \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n+1) \cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1)} \\ & = (\text{operatoria}) \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)} \\ & = (\text{por órdenes}) \\ & 0 \end{aligned}$$

Como el límite es menor que 1, entonces la serie es convergente. Concluimos que la respuesta correcta es:

(B) Solamente las afirmaciones (2) y (3) son verdaderas.