

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 6

Consigna

Clasificar:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$
2. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$
3. $\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} dx$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$
5. $\int_0^{+\infty} \sin^2(t) dt$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$
7. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)} dx$
8. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1}$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$
10. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
11. $\int_0^{+\infty} e^{x^2 - \frac{1}{x^2}} dx$
12. $\int_{-1}^1 \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} dx$
13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^\alpha(x) \cos^\beta(x)}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Resolución

Integral #1

$$\bullet \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

La integral no tiene puntos problemáticos, pero tenemos que separar en dos para contemplar los intervalos infinitos.

$$\bullet \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{e^{x^2}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} dx$$

Observemos además que la función es par, es decir que:

- $f(-x) = f(x)$, se verifica:
- $f(-x) = e^{-(x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$

Por lo que basta con estudiar:

- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} dx$

Para esto sabemos que a partir de $x = 1$ se cumple la siguiente desigualdad:

- $e^{x^2} \geq x^2$

Tomando opuestos:

- $\frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2}$

Por lo tanto para el intervalo $[1, +\infty)$ podemos decir que la integral impropia es convergente por comparación con $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Por último nos resta el intervalo $[0, 1]$, que es directo pues es una integral de CDIV en un intervalo donde la función es continua (es un número).

Conclusión: La integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ es convergente pues:

- La función integrando es par.
- La integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ es convergente por comparación.

Integral #2

- $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$

Por Taylor, podemos expresar e^{-x} cerca de 0 de la siguiente forma:

- $e^{-x} = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 - \dots$

Entonces la función que queremos integrar cerca de 0 es:

$$\begin{aligned} & \frac{1-x+\frac{x^2}{2}}{x} \\ &= \\ & \frac{1}{x} - 1 + \frac{x}{2} - \dots \end{aligned}$$

Entonces al integrar en el intervalo $[0, 1]$, se observa que el único término problemático es $\frac{1}{x}$. Por lo que la convergencia de la integral se juega ahí, pero ya la sabemos clasificar:

- $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ diverge, pues $\alpha = 1$

Conclusión: La integral impropia $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$ diverge.

Integral #3

- $\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} dx$

Este ejemplo nos lleva a formalizar un aspecto importante de la integración por partes de integrales impropias. Este método se puede usar si:

- udu y vdu son integrables.

- Los límites “frontera” existen y son finitos.

En este caso se puede hacer y veremos porque:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} dx \\
&= \\
& \int_0^1 \log(x) x^{-\frac{1}{2}} dx \\
&= (\text{integración por partes } (*_1)) \\
& 2\sqrt{x} \log(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx \\
&= \\
& 2\log(1) - \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \log(x) - 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
&= \\
& 0 - 0 - 2 \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \\
&= \\
& -2 \cdot \left(2\sqrt{x} \Big|_0^1 \right) \\
&= \\
& 4
\end{aligned}$$

Observación ($*_1$):

- $u = \log x \rightarrow du = \frac{1}{x}$
- $dv = x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow v = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

Como los límites frontera existen, podemos realizar esta integral por partes.

Conclusión: La integral impropia $\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} dx$ es convergente.

Integral #4

- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$

Ya hecha en ejercicios anteriores, se resuelve por convergencia absoluta.

Integral #5

- $\int_0^{+\infty} \sin^2(t) dt$

Usando la siguiente identidad trigonométrica:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \sin^2(t) dt \\
 &= \\
 & \int_0^{+\infty} 1 - \cos^2(t) dt \\
 &= \\
 & \int_0^{+\infty} 1 dt + \int_0^{+\infty} \cos^2(t) dt
 \end{aligned}$$

Donde claramente $\int_0^{+\infty} 1 dt$ diverge.

Conclusión: $\int_0^{+\infty} \sin^2(t) dt$ diverge.

Integral #6

- $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$

Esta integral también ya se hizo en el teórico, es muy simple y se resuelve por comparación.

Es divergente.

Integral #7

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)} dx$

Recordatorio: Observemos que:

- $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Bajo este contexto, la integral impropia con la que estamos trabajando es:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{e^x + e^{-x}} dx$

Observemos que la función es impar, es decir:

- $f(-x) = -f(x)$, verificando:
- $f(-x) = \frac{-2x}{e^{-x} + e^x} = -\left(\frac{-2x}{e^x + e^{-x}}\right) = -f(x)$

Lo que implica que podemos trabajar en uno solo de los intervalos infinitos, por lo que la convergencia se juega en:

- $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{e^x + e^{-x}} dx$

Tenemos que la función en $+\infty$ es equivalente a $\frac{x}{e^x}$, es decir que tendríamos que estudiar la convergencia de la integral impropia:

- $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$

Veamos esta integral por partes utilizando:

- $u = x \rightarrow du = 1$
- $dv = e^{-x} \rightarrow v = -e^{-x}$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx \\
&= \\
& -xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x} \\
&= \\
& 0 - 0 - \left(e^{-x} \Big|_0^{+\infty} \right) \\
&= \\
& 0 + 1 \\
&= \\
& 1
\end{aligned}$$

Entonces esta integral impropia converge.

Conclusión: La integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)} dx$ es convergente pues:

- La función integrando es par.
- La integral $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ es convergente.

Integral #8

- $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1}$

Tenemos puntos problemáticos en 1 y -1, por lo que tenemos que separar la integral de la siguiente forma:

- $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-1} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2-1} dx$

Veamos de hallar una primitiva:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{x^2 - 1} dx \\
& = (\text{fracciones simples}) \\
& \int \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx \\
& = \\
& \frac{1}{2} \int \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1} dx \\
& = \\
& \frac{1}{2} \left(-1 \cdot \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x-1} dx \right) \\
& = \\
& \frac{1}{2} (-\log|x+1| + \log|x-1|) \\
& = \\
& \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right|
\end{aligned}$$

Entonces evaluemos la primitiva en los intervalos que corresponden.

Intervalo #1: $(-1, 0]$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \Big|_{-1}^0 \\
& = \\
& = \frac{1}{2} \log 1 - \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \\
& = \\
& = \frac{1}{2} \log 1 + \infty
\end{aligned}$$

Como en este intervalo la integral ya diverge, podemos saltar directo a la conclusión:

Conclusión: La integral impropia $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1}$ es divergente.

Integral #9

$$\bullet \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

Empecemos separando la integral mixta en:

$$\bullet \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

Donde nos vamos a centrar en la segunda integral dado que la primera es absolutamente convergente, pues por comparación:

$$\bullet \quad \left| \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Entonces veamos de calcular una primitiva para la parte que no podemos clasificar todavía:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \\
 & \int \cos x \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx \\
 & \stackrel{\text{=(integración por partes } (*_1))}{=} \\
 & \sin(x)x^{-\frac{1}{2}} \Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx \\
 &= \\
 & 0 - \sin(1) + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx
 \end{aligned}$$

Observación ($*_1$):

- $u = x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow du = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$
- $dv = \cos(x) \rightarrow v = \sin(x)$

Donde la última integral $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ es absolutamente convergente, pues:

- $\left| \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

Conclusión: La integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ es convergente pues:

- $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ es absolutamente convergente y,
- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ es absolutamente convergente

Integral #10

- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Separaremos la integral mixta según los puntos problemáticos:

- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Ninguna de las dos se puede resolver fácilmente, por lo que calcularemos la primitiva:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \\
& = (\text{cambio de variable } x=t^2; dx=2tdt; \sqrt{x}=t) \\
& \int \frac{e^{-t}}{t} 2tdt \\
& = \\
& 2 \int e^{-t} dt \\
& = \\
& -2e^{-t} \\
& = (\text{deshaciendo el cambio de variable}) \\
& -2e^{-\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Entonces queremos evaluar la primitiva en los intervalos que obtuvimos al principio:

Intervalo #1:

$$\begin{aligned}
& -2e^{-\sqrt{x}} \Big|_0^1 \\
& = \\
& \frac{-2}{e} + 2e^0 \\
& = \\
& \frac{-2}{e} + 2
\end{aligned}$$

Por lo que esta parte es convergente.

Intervalo #2:

$$\begin{aligned}
& -2e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^{+\infty} \\
& = \\
& 0 + \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

Por lo que esta parte también es convergente.

Conclusión: La integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ es convergente.

Integral #11

$$\bullet \int_0^{+\infty} e^{x^2 - \frac{1}{x^2}} dx$$

Esta integral diverge, pues cuando $x \rightarrow \infty$ tenemos que:

$$\bullet e^{x^2 - \frac{1}{x^2}} \sim e^{x^2}$$

Que es una función no acotada, obviamente diverge.