Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Expresar los siguientes números complejos en:

- Forma binómica: $a + bi$, con $a,\ b \in \mathbb{R}$
- Notación polar: $re^{i\theta}$, con $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$

1. $(1+i)^2$
2. $\frac{1}{i}$
3. $\frac{1}{1+i}$
4. $(2+3i)(3-4i)$
5. $(1+i)(1-2i)$
6. $i^5 + i^{16}$
7. -1
8. $-3i$
9. $1 + i + i^2 + i^3$
10. $\frac{1}{2}(1+i)(1-i^{-8})$
11. $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
12. $\frac{1}{(1+i)^2}$

Resolución

Parte 4

Forma binómica y representación en el plano

- $z = (2+3i)(3-4i)$

Operando:

$$\begin{aligned}(2+3i)(3-4i) &= 6 - 8i + 6i + 7 \\ &= 13 - 2i\end{aligned}$$

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Figura 2

Figure 2: Figura 2

Notación polar

- Módulo: $|z| = \sqrt{13^2 + 2^2} = \sqrt{173}$
- Ángulo: $arctan(\frac{-2}{13}) \simeq -0,15264$

Es muy importante observar si el argumento tiene algún sentido o no. En este caso, si tiene sentido pues el ángulo nos lleva al cuadrante correcto.

Parte 5

Forma binómica y representación en el plano

- $z = (1+i)(1-2i)$

Operando:

$$\begin{aligned}(1+i)(1-2i) &= 1 - 2i + i + 2 \\ &= 3 + i\end{aligned}$$

Notación polar

- Módulo: $|z| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
- Ángulo: $arctan(\frac{1}{3}) \simeq -0,32175$

Es muy importante observar si el argumento tiene algún sentido o no. En este caso, si tiene sentido pues el ángulo nos lleva al cuadrante correcto.

Parte 10

- $z = \frac{1}{2}(1+i)(1-i^{-8})$

Operando:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1+i)(1-i^{-8}) &= \frac{1}{2}(1+i)(1-1) \\ &= 0\end{aligned}$$

Entonces este complejo es simplemente el 0.

Parte 11

- $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Figura 3

Figure 3: Figura 3

Figura 4

Figure 4: Figura 4

Forma binómica y representación en el plano

En este caso no tenemos que operar, la forma binómica es:

- $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

Notación polar

- Módulo: $|z| = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$
- Ángulo: $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Observación: El ángulo se determina muy fácilmente usando el gráfico.

Parte 12

- $z = \frac{1}{(1+i)^2}$

Forma binómica y representación en el plano

Operando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+i)^2} &= \frac{1}{1+2i-1} \\ &= \frac{1}{2i} \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{-2i}{-2i} \\ &= \frac{1-2i}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Notación polar

- Módulo: $|z| = \sqrt{\frac{1}{4}^2 + (\frac{-1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$
- Ángulo: $arctan(\frac{1}{4} \cdot (-2)) = arctan(\frac{-1}{2}) \simeq -0,46364$

Es muy importante observar si el argumento tiene algún sentido o no. En este caso, si tiene sentido pues el ángulo nos lleva al cuadrante correcto.