Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas como:

- $g(x) = e^x$
- $h(x) = \sin(x)$

1. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de g y h en $x = 0$.
2. Considere ahora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = g(x)h(y)$. Calcular df y $d^2 f$ en $(0, 0)$ y escribir el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en $(0, 0)$.

Observación: $T_2 f$ en $(0, 0)$ puede obtenerse multiplicando los polinomios de Taylor de orden 2 de g y h, y luego removiendo los términos de orden mayor a 2. Este procedimiento es válido para cualquier orden, para cualquier par de funciones g y h, y puede utilizarse para realizar cálculos de manera más eficiente.

Resolución

Parte 1

- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de g y h en $x = 0$.

Para empezar calculemos las derivadas que vamos a necesitar (tengamos en cuenta que estamos en una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$):

- $g_x(x) = e^x \implies g_x(0) = 1$
- $h_x(x) = \cos x \implies h_x(0) = 1$
- $g_{xx}(x) = e^x \implies g_{xx}(0) = 1$
- $h_{xx}(x) = -\sin x \implies h_{xx}(0) = 0$

Recordemos que en este tipo de funciones el diferencial es más simple (llamamos k al punto donde evaluamos la función):

- $dg_x(k) = e^x k$
- $dh_x(k) = k \cos x$
- $d^2 g_x(k) = e^x k^2$
- $d^2 h_x(k) = -k \sin x$

Función g

Planteemos el desarrollo de Taylor de orden dos para g, utilizando los diferenciales que calculamos anteriormente (llamamos k al incremento en el punto):

$$\begin{aligned}
&g(0+k)\\
&=_{\text{(teorema de Taylor)}}\\
&g(0)+dg_0(k)+\frac{d^2g_0(k)}{2}+r(k)\\
&=_{\text{(sustituyendo por lo que kallamos)}}\\
&1+k+\frac{k^2}{2}+r(k)
\end{aligned}$$

Que corresponde con lo que hallamos usando la definición para funciones de cálculo uno.

Función h

Planteemos el desarrollo de Taylor de orden dos para g, utilizando los diferenciales que calculamos anteriormente (llamamos k al incremento en el punto):

$$\begin{aligned}
&h(0+k)\\
&=_{\text{(teorema de Taylor)}}\\
&h(0)+dh_0(k)+\frac{d^2h_0(k)}{2}+r(k)\\
&=_{\text{(sustituyendo por lo que kallamos)}}\\
&0+k+0+r(k)\\
&=_{\text{(operatoria)}}\\
&k+r(k)
\end{aligned}$$

Que también corresponde con lo que hallamos usando la definición para funciones de cálculo uno.

Parte 2

- Considere ahora $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida como $f(x,y)=g(x)h(y)$. Calcular df y d^2f en $(0,0)$ y escribir el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en $(0,0)$.

La estrategia para resolver esta parte será usar la observación indicada en la consigna. Con esta podremos hallar directamente el desarrollo de Taylor de orden dos de f en $(0,0)$. Luego hallaremos df y d^2f en $(0,0)$.

$$
\begin{aligned}
&f(0+\Delta x, 0+\Delta y) \\
&=_{\text{(por la observación de la consigna)}} \\
&T_2 g(\Delta x) T_2 h(\Delta y) \\
&=_{\text{(sustituyendo por los desarrollos conocidos)}} \\
&\left(1+\Delta x+\frac{\Delta x^2}{2}\right)\Delta y \\
&=_{\text{(operatoria)}} \\
&\Delta y+\Delta x\Delta y+r(\Delta x, \Delta y)
\end{aligned}
$$

Recordemos que eliminamos el término con órden mayor a dos (recordemos que contamos los órdenes de ambas variables sumados), de igual forma que agregamos el resto también.

Vayamos por otro lado con los diferenciales, tenemos que la función f está definida por $f(x, y) = e^x \sin y$, calculemos las derivadas que necesitamos:

- $f_x(x, y) = e^x \sin y$
- $f_y(x, y) = e^x \cos y$
- $f_{xx}(x, y) = e^x \sin y$
- $f_{xy}(x, y) = e^x \cos y$
- $f_{yy}(x, y) = -e^x \sin y$

Con esto, tenemos que:

- $df_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y = 0 + \Delta y = \Delta y$
- $d^2 f_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = f_{xx}(0,0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(0,0)\Delta x\Delta y + f_{yy}(0,0)\Delta y^2 = 0 + 2\Delta x\Delta y + 0 = 2\Delta x\Delta y$

Por completitud, planteemos el teorema de Taylor para verificar que lo que hallamos inicialmente es correcto:

$$
\begin{aligned}
&f(0+\Delta x, 0+\Delta y) \\
&=_{\text{(teorema de Taylor)}} \\
&f(0,0)+df_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y)+\frac{d^2 f_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y)}{2} \\
&=_{\text{(reemplazando por valores conocidos)}} \\
&0+\Delta y+\frac{2\Delta x\Delta y}{2} \\
&=_{\text{(operatoria)}} \\
&\Delta y+\Delta x\Delta y+r(\Delta x, \Delta y)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el razonamiento que hicimos con la observación es correcto. Esto concluye el ejercicio.