

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 8

Consigna

Hallar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales dadas:

1. $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
3. $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) + \sin(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
4. $y'' + y = 3x^2 - 5x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
5. $y'' + 4y' + 3y = 3e^x + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
6. $y'' + y = (1+x)^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
7. $y'' + 2y' + y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
8. $y'' + y = \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Resolución

Ecuación 1

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Tenemos las siguientes ecuaciones por resolver:

- (H) $y'' + 2y' + 2y = 0$
- (NH) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$

Solución de (H)

Hallemos las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$:

- $\lambda_1 = -1 + i$
- $\lambda_2 = -1 - i$

Como son imaginarias y diferentes, tenemos que la solución general es la siguiente:

- $y_H = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x)$ y su derivada:
- $y'_H = C_1 (-e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)) + C_2 (-e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x))$

Solución de (NH)

Buscamos una solución y_P que tenga la siguiente forma:

- $y_P = A\cos(2x) + B\sin(2x)$
- $y'_P = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$
- $y''_P = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$

Con esto podemos sustituir en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 2y &= \cos(2x) \\ \iff -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + 2(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)) + 2(A\cos(2x) + B\sin(2x)) &= \cos(2x) \\ \iff \sin(2x)(-4B - 4A + 2B) + \cos(2x)(-4A + 4B + 2A) &= \cos(2x) \end{aligned}$$

De donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -4A - 2B = 0 \\ -2A + 4B = 1 \end{cases}$$

De donde obtenemos:

- $B = \frac{1}{5}$
- $A = -\frac{1}{10}$

Entonces la solución particular de (NH) es la siguiente:

$$y_P = -\frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{5}\sin(2x)$$

Solución general de (NH)

- $y_G = y_H + y_P$
- $y_G = C_1e^{-x}\cos(x) + C_2e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{5}\sin(2x)$
- $y'_G = C_1(-e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x)) + C_2(-e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x)) + \frac{2}{10}\sin(2x) + \frac{2}{5}\cos(2x)$

Ahora usamos las condiciones iniciales:

- $y(0) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} C_1e^{-0}\cos(0) + C_2e^{-0}\sin(0) - \frac{1}{10}\cos(0) + \frac{1}{5}\sin(0) &= 1 \\ \iff C_1 - \frac{1}{10} &= 1 \\ \iff C_1 &= \frac{11}{10} \end{aligned}$$

- $y'(0) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
 & C_1(-e^{-0}\cos(0) - e^{-0}\sin(0)) + C_2(-e^{-0}\sin(0) + e^{-0}\cos(0)) + \frac{2}{10}\sin(0) + \frac{2}{5}\cos(0) \\
 & \iff \\
 & -C_1 + C_2 + \frac{2}{5} = 0 \\
 & \iff (C_1 = \frac{11}{10}) \\
 & -\frac{11}{10} + C_2 + \frac{2}{5} = 0 \\
 & \iff \\
 & C_2 = \frac{7}{10}
 \end{aligned}$$

Entonces la solución al problema es:

- $\frac{11}{10}e^{-x}\cos(x) + \frac{7}{10}e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{5}\sin(2x)$

Ecuación 2

- $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Tenemos las siguientes ecuaciones por resolver:

- (H) $y'' + 2y' + 2y = 0$
- (NH) $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$

Solución de (H)

Hallamos las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$:

- $\lambda_1 = -1 + i$
- $\lambda_2 = -1 - i$

Como son imaginarias y diferentes, tenemos que la solución general es la siguiente:

- $y_H = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x)$ y su derivada:
- $y'_H = C_1 (-e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)) + C_2 (-e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x))$

Solución de (NH)

Buscamos una solución y_P que tenga la siguiente forma:

- $y_P = A \cos(2x) + B \sin(2x)$
- $y'_P = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$
- $y''_P = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)$

Con esto podemos sustituir en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
y'' + 2y' + 2y &= \sin(2x) \\
\Leftrightarrow \\
-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + 2(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)) + 2(A\cos(2x) + B\sin(2x)) &= \sin(2x) \\
\Leftrightarrow \\
\sin(2x)(-4B - 4A + 2B) + \cos(2x)(-4A + 4B + 2A) &= \sin(2x)
\end{aligned}$$

De donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -4A - 2B = 1 \\ -2A + 4B = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos que:

- $A = -\frac{1}{5}$
- $B = -\frac{1}{10}$

Entonces la solución particular de (NH) es la siguiente:

- $y_P = -\frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$

Solución general de (NH)

- $y_G = y_H + y_P$
- $y_G = C_1e^{-x}\cos(x) + C_2e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$
- $y'_G = C_1(-e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x)) + C_2(-e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x)) - \frac{2}{5}\sin(2x) - \frac{1}{5}\cos(2x)$

Ahora usamos las condiciones iniciales:

- $y(0) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
C_1e^{-0}\cos(0) + C_2e^{-0}\sin(0) - \frac{1}{5}\cos(0) - \frac{1}{10}\sin(0) &= 1 \\
\Leftrightarrow \\
C_1 - \frac{1}{5} &= 1 \\
\Leftrightarrow \\
C_1 &= \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

- $y'(0) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
C_1(-e^{-0}\cos(0) - e^{-0}\sin(0)) + C_2(-e^{-0}\sin(0) + e^{-0}\cos(0)) - \frac{2}{5}\sin(0) - \frac{1}{5}\cos(0) &= 0 \\
\Leftrightarrow \\
-C_1 + C_2 - \frac{1}{5} &= 0 \\
\Leftrightarrow (C_1 = \frac{6}{5}) \\
-\frac{6}{5} + C_2 - \frac{1}{5} &= 0 \\
\Leftrightarrow \\
C_2 &= \frac{7}{5}
\end{aligned}$$

Entonces la solución al problema es:

- $y_G = \frac{6}{5}e^{-x}\cos(x) + \frac{7}{5}e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$

Ecuación 3

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) + \sin(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Observemos que ya tenemos una solución general para:

- $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$
- $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$

Sumar las soluciones generales, nos da la solución general de la ecuación diferencial que queremos resolver, entonces hacemos eso:

$$\begin{aligned}
y_G &= (C_1e^{-x}\cos(x) + C_2e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{5}\sin(2x)) + (C_1e^{-x}\cos(x) + C_2e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(2x) \\
y_G &= C_1e^{-x}\cos(x) + C_2e^{-x}\sin(x) - \frac{3}{10}\cos(2x) + \frac{1}{10}\sin(2x)
\end{aligned}$$

Calculamos también la derivada ya que la vamos a utilizar:

- $y'_G = C_1(-e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x)) + C_2(-e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x)) + \frac{3}{5}\sin(2x) + \frac{1}{5}\cos(2x)$, simplificando:
- $y'_G = C_1e^{-x}(-\cos(x) - \sin(x)) + C_2e^{-x}(-\sin(x) + \cos(x)) + \frac{3}{5}\sin(2x) + \frac{1}{5}\cos(2x)$

Ahora, aplicando las condiciones iniciales:

- $y(0) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
C_1 e^{-0} \cos(0) + C_2 e^{-0} \sin(0) - \frac{3}{10} \cos(0) + \frac{1}{10} \sin(0) &= 1 \\
\Leftrightarrow \\
C_1 - \frac{3}{10} &= 1 \\
\Leftrightarrow \\
C_1 &= \frac{13}{10}
\end{aligned}$$

- $y'(0) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
C_1 e^{-0} (-\cos(0) - \sin(0)) + C_2 e^{-0} (-\sin(0) + \cos(0)) + \frac{3}{5} \sin(0) + \frac{1}{5} \cos(0) &= 0 \\
\Leftrightarrow \\
-C_1 + C_2 + \frac{1}{5} &= 0 \\
\Leftrightarrow (C_1 = \frac{13}{10}) \\
-\frac{13}{10} + C_2 + \frac{1}{5} &= 0 \\
\Leftrightarrow \\
C_2 &= \frac{11}{10}
\end{aligned}$$

Entonces la solución al problema es:

- $y_G = \frac{13}{10} e^{-x} \cos(x) + \frac{11}{10} e^{-x} \sin(x) - \frac{3}{10} \cos(2x) + \frac{1}{10} \sin(2x)$

Ecuación 4

- $y'' + y = 3x^2 - 5x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

Tenemos las siguientes ecuaciones por resolver:

- (H) $y'' + y = 0$
- (NH) $y'' + y = 3x^2 - 5x$

Solución de (H)

Hallamos las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$:

- $\lambda_1 = i$
- $\lambda_2 = -i$

Como son imaginarias y diferentes, tenemos que la solución general es la siguiente:

- $y_H = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$ y su derivada:
- $y'_H = -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$

Solución de (NH)

Buscamos una solución y_P que tenga la siguiente forma:

- $y_P = Ax^2 + Bx + C$
- $y'_P = 2Ax + B$
- $y''_P = 2A$

Con esto podemos sustituir en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y'' + y &= 3x^2 - 5x \\ \iff 2A + Ax^2 + Bx + C &= 3x^2 - 5x \\ \iff Ax^2 + Bx + (C + 2A) &= 3x^2 - 5x \end{aligned}$$

De donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A = 3 \\ B = -5 \\ C + 2A = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos que:

- $C = -6$

Entonces la solución particular de (NH) es la siguiente:

- $y_P = 3x^2 - 5x - 6$

Solución general de (NH)

- $y_G = y_H + y_P$
- $y_G = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + 3x^2 - 5x - 6$
- $y'_G = -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + 6x - 5$

Ahora usamos las condiciones iniciales:

- $y(0) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + 3x^2 - 5x - 6 &\\ \iff C_1 - 6 &= 1 \\ \iff C_1 &= 7 \end{aligned}$$

- $y'(0) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + 6x - 5 &= 0 \\ \iff C_2 - 5 &= 0 \\ \iff C_2 &= 5 \end{aligned}$$

Entonces la solución al problema es:

- $y_G = 7 \cos(x) + 5 \sin(x) + 3x^2 - 5x - 6$