Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 9

Consigna

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Probar que existen derivadas parciales en todos los puntos y calcularlas.

2. Probar que f es diferenciable.

3. Probar que f no es de clase C^1.

Resolución

Parte 1

Queremos probar que existen derivadas parciales en todos los puntos. La estrategia es bastante simple, para $(0,0)$ usaremos la definición, mientras que para cualquier otro punto se calcula directamente:

Derivadas auxiliares:

- $\frac{\partial(\frac{1}{x^2+y^2})}{\partial x} = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}2x = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$
- $\frac{\partial(\frac{1}{x^2+y^2})}{\partial y} = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}2y = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$

Derivada respecto de x:

$$
\begin{aligned}
&f_x(x,y)\\
&=_{\text{(operatoria)}}\\
&2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x\cancel{(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\\
&=_{\text{(operatoria)}}\\
&2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)
\end{aligned}
$$

Derivada respecto de y:

$$
\begin{aligned}
&f_y(x,y)\\
&=_{\text{(operatoria)}}\\
&2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2y\cancel{(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\\
&=_{\text{(operatoria)}}\\
&2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)
\end{aligned}
$$

Esto es válido para cualquier punto $(x,y)\neq(0,0)$. Vayamos con ese caso ahora.

$$
\begin{aligned}
&f_x(0,0)\\
&=_{\text{(definición de derivada parcial)}}\\
&\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\\
&=_{\text{(definición de la función)}}\\
&\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(\frac{1}{h^2})}{h}\\
&=_{\text{(operatoria)}}\\
&\lim_{h\to 0}h\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)\\
&=_{\text{(límite de cero por acotado)}}\\
&0
\end{aligned}
$$

El razonamiento para $f_y(0,0)$ es análogo. Con esto concluimos que las derivadas parciales existen para todo punto (x,y).

Parte 2

Para probar que la función es diferenciable, notaremos primero que:

- La función f es diferenciable para todo punto $(x,y)\neq(0,0)$ ya que sus derivadas parciales son continuas en dichos puntos.

Entonces el problema está en $(0,0)$, si la función es diferenciable en este punto, entonces el candidato a diferencial es la transformación lineal nula (por lo que sabemos de las derivadas parciales en este punto). Por lo tanto podemos despejar el resto al plantear la definición:

$$\begin{aligned}f(\Delta x, \Delta y) &= f(0,0) + 0\Delta x + 0\Delta y + r(\Delta x, \Delta y)\\ f(\Delta x, \Delta y) &= r(\Delta x, \Delta y)\end{aligned}$$

Ahora, queremos verificar que el resto cumple la propiedad fundamental:

$$\begin{aligned}&\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0} \frac{r(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}\\ &=_{\text{(sustituyendo la función resto)}}\\ &\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}\\ &=_{\text{(definición de la función)}}\\ &\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0} \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\left(\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}\\ &=_{\text{(notando que } \Delta x^2+\Delta y^2=\|(\Delta x,\Delta y)\|^2)}\\ &\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0} \|(\Delta x, \Delta y)\| \sin\left(\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)\\ &=_{\text{(límite de cero por acotado)}}\\ &0\end{aligned}$$

Como el resto cumple con la propiedad fundamental, la función es diferenciable para $(0,0)$ (y por lo tanto para todos los puntos).

Parte 3

Queremos probar que f no es de clase C^1. Para ser de clase C^1 tendríamos que tener que $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ son funciones continuas. Centraremos nuestro foco en una de ellas, porque nos bastará para probar que la función f no es de clase C^1, tomaremos $f_x(x,y)$.

Por lo que vimos en las partes anteriores, podríamos definir a la función $f_x(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0)\\ 0 & (x,y) = (0,0)\end{cases}$$

Veamos el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$ para verificar si la función es continua en dicho punto.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$=$(límite direccional cuando $x=y^2$)

$$\lim_{y\to 0} 2y^2\sin\left(\frac{1}{y^2(y^2+1)}\right) - \frac{2y^2}{y^2(y^2+1)}\cos\left(\frac{1}{y^2(y^2+1)}\right)$$

$=$(operatoria y límite de cero por acotado)

$$\lim_{y\to 0} -\frac{2}{y^2+1}\cos\left(\frac{1}{y^2(y^2+1)}\right)$$

$=$(operatoria)

$$\lim_{y\to 0} -2\cos\left(\frac{1}{y^2(y^2+1)}\right)$$

Pero este límite oscila, pues $\cos\left(\frac{1}{y^2(y^2+1)}\right)$ oscila cuando $y \to 0$, y por lo tanto no existe.

Nota: Me compliqué con la elección del límite direccional, podría haber elegido $y = 0$ y hubiera sido más directo.

Con esto, podemos concluir que la función no es de clase C^1.