

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 6

### Consigna

Probar los siguientes resultados:

1.  $A$  es abierto si y sólo si  $A \cap \partial A = \emptyset$ .
2.  $\mathring{A} = \overline{A} - \partial A$  es un conjunto abierto; más aún, es la unión de los subconjuntos abiertos contenidos en  $A$ .
3.  $A$  es cerrado si y sólo si  $\partial A \subseteq A$  si y sólo si  $A' \subseteq A$ .
4.  $\overline{A} = A \cup \partial A$  es un conjunto cerrado; más aún, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a  $A$ .
5.  $A'$  es un conjunto cerrado.

## Resolución

### Parte 1

- $A$  es abierto si y sólo si  $A \cap \partial A = \emptyset$ .

#### Directo ( $\rightarrow$ )

- (H)  $A$  es abierto  
(I)  $A \cap \partial A = \emptyset$

Supongamos que  $A \cap \partial A \neq \emptyset$ , consideremos  $p \in A \cap \partial A$ , esto significa que  $p \in A$  y además  $p \in \partial A$ . Por lo tanto:

- $(p \in \partial A) : \forall \delta > 0 : B(p, \delta) \cap A \neq \emptyset \wedge B(p, \delta) \cap A^C \neq \emptyset$
- $(p \in A) : \exists \delta > 0 : B(p, \delta) \subset A$  ( $A$  es abierto)

Por lo que esto es absurdo, pues  $B(p, \delta)$  tiene que estar incluido en  $A$  y a la vez tener al menos un punto en  $A^C$

#### Recíproco ( $\leftarrow$ )

- (H)  $A \cap \partial A = \emptyset$   
(I)  $A$  es abierto

Supongamos que  $A$  no es abierto, es decir que existe  $p \in A$  tal que  $A$  es frontera (pues no puede ser interior).

Esto es directamente absurdo pues por hipótesis  $A \cap \partial A = \emptyset$

## Parte 2

- $\mathring{A} = \overline{A} - \partial A$  es un conjunto abierto; más aún, es la unión de los subconjuntos abiertos contenidos en  $A$ .

Para probar esta parte, verificaremos las siguientes expresiones:

- $\mathring{A} \subseteq \overline{A} - \partial A$
- $\overline{A} - \partial A \subseteq \mathring{A}$

### Expresión #1

- $\mathring{A} \subseteq \overline{A} - \partial A$

Sea  $p \in \mathring{A}$ , queremos verificar que  $p \in \overline{A} - \partial A$ , es decir:

- $p \in \overline{A}$ , y
- $p \notin \partial A$

Probemos ambas expresiones:

- $p \in \mathring{A} \rightarrow p \in A \rightarrow p \in A \cup \partial A \rightarrow p \in \overline{A}$
- $p \in \mathring{A} \rightarrow p \notin \partial A$  (definición de punto interior)

### Expresión #2

- $\overline{A} - \partial A \subseteq \mathring{A}$

Sea  $p \in \overline{A} - \partial A$ , queremos verificar que  $p \in \mathring{A}$  es decir:

- $p$  es interior de  $A$

Recordemos que como  $p \in \overline{A} - \partial A$  se cumple que:

- $p \in \overline{A}$ , y
- $p \notin \partial A$

Como  $p \notin \partial A$ , tenemos que existe algún  $\delta_0 > 0$  tal que  $B(p, \delta_0) \cap A^C = \emptyset$ . Por lo tanto, necesariamente  $B(p, \delta_0) \subset A$ .

Concluimos que  $p$  es interior pues se cumple la definición para  $\delta_0$ .

**Conclusión:**  $\overline{A} - \partial A$  es un conjunto abierto pues verificamos que es igual a  $\mathring{A}$

## Parte 3

- $A$  es cerrado si y sólo si  $\partial A \subseteq A$  si y sólo si  $A' \subseteq A$ .

Separamos las pruebas en:

- $A$  es cerrado  $\leftrightarrow \partial A \subseteq A$

- $A$  es cerrado  $\leftrightarrow A' \subseteq A$

Si probamos estas dos, habriamos probado todas las equivalencias.

### Equivalencia #1

- $A$  es cerrado  $\leftrightarrow \partial A \subseteq A$

#### Directo ( $\rightarrow$ )

- (H)  $A$  es cerrado  
(I)  $\partial A \subseteq A$

Supongamos que  $\partial A \not\subseteq A$ , es decir que existe  $p \in \partial A$  tal que  $p \notin A$ . Esto significa que  $p \in A^C$ , por lo tanto esto contradice que  $A$  sea cerrado, pues  $A^C$  no es abierto (contiene un punto frontera)

Queda probado el directo por absurdo.

#### Recíproco ( $\leftarrow$ )

- (H)  $\partial A \subseteq A$   
(I)  $A$  es cerrado

Suspongamos que  $A$  no es cerrado, es decir que  $A^C$  no es abierto. Esto significa que existe  $p \in A^C$  tal que  $p$  es frontera. Pero esto no puede pasar pues  $\forall p \in \partial A, p \in A$  por hipótesis.

Queda probado el recíproco por absurdo.

### Equivalencia #2

- $A$  es cerrado  $\leftrightarrow A' \subseteq A$

Hecho en la clase 20 del teórico.

**Conclusión:** Las tres expresiones son equivalentes.