Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Probar que en los siguientes casos no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

1. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0, & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

Resolución

Función #1

- $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Verifiquemos los límites direccionales para cuando $y = mx$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2}$$
$$=$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-m^2)x^2}{(1+m^2)x^2}$$
$$=$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-m^2)}{(1+m^2)}$$
$$=$$
$$\frac{(1-m^2)}{(1+m^2)}$$

Por lo tanto, el límite depende siempre del valor de m. Esto no puede pasar pues el valor del límite tiene que ser único.

Función #2

- $f(x,y) = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$

Transformemos a coordenadas polares.

- $x = \rho\cos\theta$
- $y = \rho\sin\theta$

Entonces ahora operamos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=$$
$$\lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^3\cos^3(\theta)\rho\sin(\theta)}{(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)^2}$$
$$=$$
$$\lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^3\cos^3(\theta)\rho\sin(\theta)}{(\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta))^2}$$
$$=$$
$$\lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^3\cos^3(\theta)\rho\sin(\theta)}{(\rho^2)^2}$$
$$=$$
$$\lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^3\cos^3(\theta)\rho\sin(\theta)}{\rho^4}$$
$$=$$
$$\lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^4\cos^3(\theta)\sin(\theta)}{\rho^4}$$
$$=$$
$$\lim_{\rho\to 0} 2\cos^3(\theta)\sin(\theta)$$
$$=$$
$$2\cos^3(\theta)\sin(\theta)$$

Pero esta expresión es totalmente dependiente de θ, por lo tanto el límite puede tender a diferentes valores según la dirección de la que nos acerquemos. Esto no puede pasar porque el límite es único.

Función #3

- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0, & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$

En este caso también probaremos con los límites direccionales para cuando $y = mx$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{xmx}{x + mx}$$
$$=$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{xmx}{x(1+m)}$$
$$=$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{mx}{1+m}$$
$$=$$
$$0$$

Esto no nos permite descartar que el límite exista, pero sabemos que si o si tiene que ser 0 si efectivamente existe. Probemos ahora cuando $y = x^2 - x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(x^2 - x)}{x + x^2 - x}$$
$$=$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2(x-1)}{x^2}$$
$$=$$
$$\lim_{x \to 0} (x-1)$$
$$=$$
$$-1$$

Entonces encontramos una dirección para la que el límite no es 0, por lo que podemos concluir que el límite no existe.

Función #4

- $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

Consideremos dos direcciones:

- $y = \frac{1}{2}x^2$
- $y = x^2$

Primera dirección: $y = \frac{1}{2}x^2$:

- En este caso, tenemos que $f(x,y) = 1$, por lo tanto el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$ es 1

Segunda dirección: $y = x^2$:

- En este caso, tenemos que $f(x,y) = 0$, por lo tanto el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$ es 0

Como obtuvimos dos resultados diferentes, el límite no puede existir.