

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 1

### Consigna

1. Sean  $a > 0$  y  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(t) \geq 0$ . Definimos  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Demostrar que:
  - $F(x)$  es creciente.
  - $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge sii  $F(x)$  está acotada superiormente.
2. Sea  $g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que verifica  $0 \leq f(t) \leq g(t)$  para todo  $t \geq a$ .
  1. Probar que si  $\int_a^{+\infty} g(t) dt$  converge, entonces  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  también converge.
  2. Si  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  diverge, entonces  $\int_a^{+\infty} g(t) dt$  diverge.

### Resolución

#### Parte 1

Para esta parte queremos demostrar que:

- $F(x)$  es creciente.
- $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge sii  $F(x)$  está acotada superiormente.

Lo primero viene dado gratis, pues la función  $f(t) \geq 0$  por hipótesis, esto significa que al aumentar  $x$  voy a estar sumando un poquito más de area a la integral.

Para la segunda parte, expandamos un poco sobre lo que tenemos que probar. En primer lugar, que  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  sea convergente, significa que:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = L < \infty$

En este caso como  $F(x)$  es creciente, por definición de límite se tiene que:

- $F(x) \leq L$  para todo  $x \in \mathbb{R}$

Es decir que  $F(x)$  está acotada superiormente.

Ahora, partamos del otro lado, si  $F(x)$  está acotada superiormente, es decir:

- $F(x) < K$  para todo  $x \in \mathbb{R}$

Considerando  $K$  como el supremo del conjunto de cotas superiores, tenemos que: Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_0 \in [a, +\infty)$  tal que  $\forall x > x_0 : x \in (K - \varepsilon, K]$ . Esto último la definición de límite para  $K$ , solo considerando un lado del entorno, por lo que necesariamente  $F(x)$  converge a  $K$ .