

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 8

### Consigna

Estudiar la convergencia de las siguientes series:

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$
2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$
3.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$
4.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

### Resolución

#### Serie #1

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$

Es una serie de términos positivos, por lo que estudiemos convergencia usando el criterio de equivalencia:

- $\frac{n}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

Y como  $\sum \frac{1}{n}$  diverge:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$  también diverge.

#### Serie #2

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$

Es una serie de términos positivos, por lo que lo primero que haremos será simplificar la expresión del término general:

$$\begin{aligned}
& \frac{n}{(n+1)\log(n+1)} \\
&= \\
& \frac{n}{n\log(n+1) + \log(n+1)} \\
&= \\
& \frac{1}{\log(n+1) + \log(n+1)} \\
&= \\
& \frac{1}{2\log(n+1)}
\end{aligned}$$

Ahora podemos usar la siguiente desigualdad de logaritmo  $\forall x \geq 0$ :

- $\log(1+x) \leq x$

Y por consecuente obtenemos que:

- $\frac{1}{2\log(n+1)} \geq \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{n}$

Entonces como tenemos que  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, por comparación:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$  diverge también

### Serie #3

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$

Es una serie de términos positivos, por lo que lo primero que haremos será utilizar el criterio de la raíz enésima:

$$\begin{aligned}
& \lim \sqrt[n]{\frac{n^3}{e^n}} \\
&= \\
& \lim \frac{\sqrt[n]{n^3}}{e} \\
&= \\
& \frac{1}{e} \lim e^{\log(n^{\frac{3}{n}})} \\
&= \\
& \frac{1}{e} \lim e^{\frac{3}{n} \log(n)} \\
&= \\
& \frac{1}{e} \lim e^{\frac{3\log(n)}{n}} \\
&= \\
& \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Como  $\frac{1}{e} < 1$ , la serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$  converge

## Serie #4

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

Es una serie alternada, por lo que primero estudiaremos convergencia absoluta clasificando la siguiente serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Podemos usar el criterio de comparación y tenemos lo siguiente:

- Como  $\sqrt{n} \leq n$ , tenemos que  $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces como  $\sum \frac{1}{n}$  diverge,  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  también diverge. Por lo que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$  NO es absolutamente convergente.

Para verificar si la misma es convergente, vamos a probar que  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  es monótona decreciente, es decir que:

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Esto es directo, pues  $\sqrt{x}$  es una función creciente, por lo que  $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$ , es decir que  $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ .

Además tenemos que  $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ . Por lo tanto, por el criterio de Leibnitz tenemos que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$  es convergente.