Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Clase 2

Números complejos

Recordatorio: funciones trigonométricas

Recordemos que:

- $sen(\theta) = \frac{op}{hip}$
- $cos(\theta) = \frac{ady}{hip}$
- $tan(\theta) = \frac{op}{ady}$

Obteniendo partes real e imaginaria a partir de módulo y ángulo

Volviendo a la imagen de la clase pasada:

Observemos que se cumple lo siguiente:

- $cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$, y
- $sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$

De donde podemos derivar que:

- $a = |z| \cdot cos(\theta)$, y
- $b = |z| \cdot sen(\theta)$

Propiedades del módulo

1. $|z| \geq 0$, además $|z| = 0 \leftrightarrow z = 0$
2. $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$
3. $|z \cdot w| = |z||w|$ y si $w \neq 0$ entonces $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$
4. $|z + w| \leq |z| + |w|$

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Manejo de complejos en las diferentes notaciones

Ejemplo 1

Calculemos el módulo y ángulo del siguiente complejo:

- $z_1 = 1$
- $|z_1| = \sqrt{1} = 1$
- $\theta = 0$

Ejemplo 2

Calculemos el módulo y ángulo del siguiente complejo:

- $z_2 = -1$
- $|z_2| = \sqrt{1} = 1$
- $\theta = \pi$

Ejemplo 3

Calculemos el módulo y ángulo del siguiente complejo:

- $z_3 = i$
- $|z_3| = \sqrt{1} = 1$
- $\theta = \frac{\pi}{2}$

Ejemplo 4

Calculemos el módulo y ángulo del siguiente complejo:

- $z_4 = -i$
- $|z_4| = \sqrt{1} = 1$
- $\theta = \frac{-\pi}{2}$

Ejemplo 5

Calculemos el módulo y ángulo del siguiente complejo:

- $z_5 = 1 - i$
- $|z_5| = \sqrt{2}$
- $\theta = \frac{-\pi}{4}$

Observación

Siempre para este tipo de cosas, pensar en la representación gráfica, esto ayuda para calcular el ángulo en la mayoría de los casos.

Definición (complejo conjugado)

Dado $z = a + bi$ definimos su conjugado como $\overline{z} = a - bi$

Figura 2

Figure 2: Figura 2

Observación

- $|z| = |\overline{z}|$ y,
- z y $\overline{z}$ tienen ángulos opuestos

Propiedades del complejo conjugado

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $z + \overline{z} = 2Re(z)$
4. $z - \overline{z} = i2Im(z)$
5. $\overline{\overline{z}} = z$
6. $z\overline{z} = |z|^2$

Observación

Todas las propiedades son triviales menos la última, que se deriva de:

$$\begin{aligned}(a+bi)(a-bi) &= a^2 - abi + abi - bi^2 \\ &= a^2 - bi^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2\end{aligned}$$

División entre complejos usando el conjugado

El conjugado es una herramienta muy útil cuando queremos dividir dos complejos, esto porque vimos que $z\overline{z} = |z|^2$, que es un número real. Veamos un ejemplo:

- $z_1 = 2 + i$
- $z_2 = 1 - i$

$$\begin{aligned}\frac{2+i}{1-i} &= \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \\ &= \frac{2+2i+i+i^2}{2} \\ &= \frac{1+3i}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\end{aligned}$$

Círculo trigonométrico y relación con el argumento y módulo

Consideremos θ un número real cualquiera, sea $z = cos\theta + isen\theta$

Al graficarlo, vamos a observar dos cosas inmediatamente:

Figura 4

Figure 3: Figura 4

- $|z| = \sqrt{cos^2\theta + sen^2\theta} = 1$
- θ es el argumento de z

Con esto en mente, podemos construir cualquier $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$ utilizando esta forma.

Ahora, observando que $\forall z \in \mathbb{C} : |\frac{z}{|z|}| = 1$, podemos construir cualquier complejo z a partir de lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{z}{|z|} &= cos^2\theta + isen^2\theta \\ &= |z|(cos^2\theta + isen^2\theta)\end{aligned}$$

Exponencial compleja

Queremos definir una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que extienda la exponencial real que ya conocemos.

Dado $z = a + bi$, definimos:

- $e^z = e^a(cos(b) + isen(b))$

Observación 1

Sea $z = a + bi$, entonces el módulo de e^z es:

$$\begin{aligned}|e^z| &= |e^a(cos(b) + isen(b))| \\ &= |e^a| \cdot |cos(b) + isen(b)| \\ &= |e^a| \cdot 1 \\ &= e^a\end{aligned}$$

Como e^a es real, entonces también sabemos que el ángulo de e^z es b.

Observación 2

Veamos ahora que la definición que dimos de e^z para los complejos, efectivamente extiende la definición que conocemos de la exponencial real. Sea $z = a + 0i$, entonces:

$$\begin{aligned}e^z &= e^a(cos(0) + isen(0)) \\ &= e^a\end{aligned}$$

Por lo que efectivamente, extiende a la función exponencial real.

Proposición

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces:

- $e^{z+w} = e^z + e^w$

Demostración

Por un lado tenemos que:

- $z + w = a + c + (b + d)i$, entonces
- $e^{z+w} = e^{a+c}(cos(b + d) + isen(b + d))$

Ahora del otro lado, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& e^z e^w \\
& =\text{(desarrollo)} \\
& e^a(cos(b) + isen(b)) \cdot e^c(cos(d) + isen(d)) \\
& =\text{(a,c son reales, propiedad de exponencial real)} \\
& e^{a+c}(cos(b) + isen(b)) \cdot (cos(d) + isen(d)) \\
& =\text{(distributiva y agrupación de términos)} \\
& e^{a+c}((cos(b)cos(d) - sen(b)sen(d)) + i(cos(b)sen(d) + sen(b)cos(d))) \\
& =\text{(propiedades trigonométricas)} \\
& e^{a+c}(cos(b + d) + isen(b + d))
\end{aligned}
$$

Por lo que queda demostrado que también tenemos la propiedad fundamental de la función exponencial para complejos.

Observación: Las propiedades trigonométricas utilizadas en el último paso son:

- $cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b) = cos(a + b)$
- $cos(a)sen(b) + sen(a)cos(b) = sen(a + b)$

Estas son las fórmulas para el seno y coseno de la suma.

Notación polar

Si z es un complejo de módulo $|z| = \varrho$ y ángulo θ, entonces:

- $z = \varrho e^{i\theta}$

Llamamos a esta notación, la notación polar.

Observación

Sean $z_1 = \varrho_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = \varrho_2 e^{i\theta_2}$, entonces multiplicarlos resulta en lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \varrho_1 e^{i\theta_1} \cdot \varrho_2 e^{i\theta_2} \\
&= \varrho_1 \varrho_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} \\
&= \varrho_1 \varrho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}
$$

Por lo que el producto se transforma en una operación muy sencilla en esta notación:

- Multiplico los módulos
- Sumo los ángulos