

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 8

Consigna

Usando el **criterio serie-integral**, clasificar las siguientes series:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log(n)}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2}$

Resolución

Serie #1

- $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Consideremos la función $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = xe^{-x^2}$. Lo primero que hay que hacer para es determinar si la función es decreciente. Para esto, hallemos su derivada:

$$\begin{aligned}(xe^{-x^2})' &= (\text{regla del producto}) \\ &= -2x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} \\ &= (\text{operatoria}) \\ &= e^{-x^2}(-2x^2 + 1)\end{aligned}$$

Observemos que quién determina el signo es el polinomio $-2x^2 + 1$, pues en el intervalo que queremos evaluar la función e^{-x^2} es siempre positiva.

Veamos intervalo a intervalo como se comporta el signo entonces:

- $(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}})$: Negativo
- $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$: Positivo
- $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$: Negativo

Por lo tanto, en el intervalo que nos interesa $[1, +\infty)$, la derivada es negativa. Entonces la función es decreciente.

Por lo tanto podemos estudiar la primitiva para determinar el comportamiento de la serie.

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} xe^{-x^2} dx \\ & = (\text{cambio de variable } t = -x^2; dt = -2x dx) \\ & = -\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} e^t dt \\ & = (\text{deshaciendo el cambio de variable}) \\ & = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_1^{+\infty} \end{aligned}$$

Y dicho límite en $+\infty$ claramente tiende a 0. Por lo que entonces $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ es convergente, y utilizando el criterio serie-integral:

Conclusión: $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ es convergente

Conclusión

Las demás partes son análogas, es calcular la integral impropia para inferir el resultado sobre las series.