Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales mediante el cambio de variables $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, de forma de llevarlas a ecuaciones de variables separadas del tipo $u' = A(u)B(x)$:

1. $x^2y' + y(y - x) = 0$
2. $(x + y)y' = x - y$

Resolución

Parte 1

- $x^2y' + y(y - x) = 0$

El cambio de variables a utilizar es el siguiente:

- $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, por lo tanto:
- $u'(x) = \frac{x \cdot y'(x) - y(x)}{x^2}$

En base a esto, veamos de despejar y' e y para sustituirlas por una expresión en función de u y x:

- $y(x) = x \cdot u(x)$

Veamos para $y'(x)$:

$$
\begin{gathered}
y'(x) = \frac{u'(x)x^2 + y(x)}{x} \\
\iff \\
y'(x) = \frac{u'(x)x^2 + x \cdot u(x)}{x} \\
\iff \\
y'(x) = u'(x)x + u(x)
\end{gathered}
$$

Ahora si, sustituimos en la ecuación diferencial:

$$
\begin{aligned}
&x^2y' + y(y-x) = 0\\
&\iff_{(y=xu;y'=u'x+u)}\\
&x^2(u'x+u) + xu(xu-x) = 0\\
&\iff\\
&x^2(u'x+u) + x^2u(u-1) = 0\\
&\iff\\
&x^3u' + x^2u + x^2u^2 - x^2u = 0\\
&\iff\\
&x^3u' + x^2u^2 = 0\\
&\iff_{(\text{divido por } x^2\neq 0)}\\
&xu' + u^2 = 0\\
&\iff\\
&u' = \frac{-u^2}{x}
\end{aligned}
$$

Donde esto último si es de variables separables, operando:

$$u' = \frac{-u^2}{x}$$
$$\iff$$
$$\frac{u'}{-u^2} = \frac{1}{x}$$
$$\iff$$
$$\int \frac{u'}{-u^2}dx = \int \frac{1}{x}dx$$
$$\iff_{(v=u(x);dv=u'(x)dx)}$$
$$\int \frac{u'}{-u^2}dx = ln|x| + k_1$$
$$\iff$$
$$\int -v^{-2}dv = ln|x| + k_1$$
$$\iff$$
$$-(\frac{v^{-1}}{-2+1} + k_2) = ln|x| + k_1$$
$$\iff$$
$$\frac{1}{v} - k_2 = ln|x| + k_1$$
$$\iff_{(C=k_1+k_2)}$$
$$v = \frac{1}{ln|x| + C}$$
$$\iff_{\text{(deshaciendo el cambio de variable)}}$$
$$u = \frac{1}{ln|x| + C}$$

Y ahora recordando que $y = ux$:

- $y = \frac{x}{ln|x|+C}$

Parte 2

- $(x + y)y' = x - y$

El cambio de variables a utilizar es el siguiente:

- $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, por lo tanto:
- $u'(x) = \frac{x \cdot y'(x) - y(x)}{x^2}$

En base a esto, veamos de despejar y' e y para sustituirlas por una expresión en función de u y x:

- $y(x) = x \cdot u(x)$

Veamos para $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{u'(x)x^2 + y(x)}{x}$$
$$\iff$$
$$y'(x) = \frac{u'(x)x^2 + x \cdot u(x)}{x}$$
$$\iff$$
$$y'(x) = u'(x)x + u(x)$$

Ahora si, sustituimos en la ecuación diferencial:

$$(x+y)y' = x - y$$
$$\iff$$
$$(x+xu)(u'x+u) = x - xu$$
$$\iff$$
$$x(1+u)(u'x+u) = x(1-u)$$
$$\iff \text{(dividimos por } x \neq 0\text{)}$$
$$(1+u)(u'x+u) = 1-u$$
$$\iff$$
$$u'x + u + uu'x + u^2 = 1 - u$$
$$\iff$$
$$u'(x+xu) = 1 - 2u - u^2$$
$$\iff$$
$$u'x(1+u) = 1 - 2u - u^2$$
$$\iff$$
$$u' = \frac{1-2u-u^2}{x(1+u)}$$
$$\iff$$
$$u' = \frac{1-2u-u^2}{1+u} \cdot \frac{1}{x}$$

Donde esto último si es de variables separables, operando:

$$u'\frac{1+u}{1-2u-u^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int u'\frac{1+u}{2-(u+1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Longleftrightarrow \text{(v=1+u(x);dv=u'(x)dx)}$$

$$\int \frac{v}{2-v^2}dv = ln|x| + k_1$$

$$\Longleftrightarrow (w{=}2{-}v^2;dw{=}{-}2vdv)$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} = ln|x| + k_1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}ln|w| + k_2 = ln|x| + k_1$$

$$\Longleftrightarrow \text{(deshaciendo cambio de variables)}$$

$$-\frac{1}{2}ln|2-v^2| + k_2 = ln|x| + k_1$$

$$\Longleftrightarrow \text{(deshaciendo cambios de variables)}$$

$$ln|2-(1+u)^2| + k_2 = -2(ln|x| + k_1)$$

$$\Longleftrightarrow (C{=}{-}2(k_1{-}k_2))$$

$$ln|2-(1+u)^2| = ln|x^{-2}| + C$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2-(1+u)^2 = \pm C|\frac{1}{x^2}|$$

$$\Longleftrightarrow (K{=}\pm C)$$

$$(1+u)^2 = 2 - \frac{K}{x^2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$u = -1 \pm \sqrt{2-\frac{K}{x^2}}$$

Y ahora recordando que $y = ux$:

- $y = -x \pm \sqrt{2x^2 - K}$