

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 14 - 22/09/2025

### Series de términos positivos

#### Criterio de la raíz enésima (de Cauchy)

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos, tal que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ . Entonces:

- Si  $L < 1$ , entonces  $a_n$  converge.
- Si  $L > 1$ , entonces  $a_n$  diverge.

#### Demostración

##### CASO 1 ( $L < 1$ ):

Observemos que por definición de límite, podemos llegar a la siguiente desigualdad a partir de un cierto  $n_0 \in \mathbb{N}$ :

$$\sqrt[n]{a_n} < k < 1$$

**Observación:** Esto lo hacemos tomando  $\varepsilon := \frac{1-L}{2} > 0$  por ejemplo.

Despejando, llegamos a:

- $a_n < k^n$

Observando que  $k^n$  converge pues es una serie geométrica y  $k < 1$ , por el criterio de comparación tenemos que:

- $a_n$  converge.

##### CASO 2 ( $L > 1$ ):

Observemos que por definición de límite, podemos llegar a la siguiente desigualdad a partir de un cierto  $n_0 \in \mathbb{N}$ :

$$\sqrt[n]{a_n} > k > 1$$

**Observación:** Esto lo hacemos tomando  $\varepsilon := \frac{L-1}{2} > 0$  por ejemplo.

Despejando, llegamos a:

- $a_n > k^n$

Observando que  $k^n$  diverge pues es una serie geométrica y  $k > 1$ , por el criterio de comparación tenemos que:

- $a_n$  diverge.

### Ejemplos 3.45

#### Ejemplo 1

- $\sum (\frac{\log(n)}{n})^n$  es convergente pues:  
 –  $\lim \sqrt[n]{a_n} = (\frac{\log(n)}{n})^n = \lim \frac{\log(n)}{n} = 0$

#### Ejemplo 2

- $\sum \frac{n^5}{2^n}$  es convergente pues:  
 –  $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n}} = \frac{1}{2}$

**Observación:** Podemos expandir sobre este último límite:

$$\begin{aligned}
 & \lim \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n}} \\
 &= \\
 & \lim \frac{n^{\frac{5}{n}}}{2} \\
 &= \\
 & \frac{1}{2} \lim n^{\frac{5}{n}} \\
 &= \\
 & \frac{1}{2} \lim e^{\log(n^{\frac{5}{n}})} \\
 &= \\
 & \frac{1}{2} \lim e^{\frac{5}{n} \log(n)} \\
 &= \\
 & \frac{1}{2} \lim e^{\frac{5 \log(n)}{n}} \\
 &= \\
 & \frac{1}{2} e^0 \\
 &= \\
 & \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

## Series alternadas

En esta breve sección estudiaremos funciones que no necesariamente son de signos constantes.

### Definición 3.46

Decimos que una serie  $\sum a_n$  es absolutamente convergente sii  $\sum |a_n|$  es convergente.

Intuitivamente, si una serie es absolutamente convergente, debería ser convergente también  $\sum a_n$ , pues sumar el valor absoluto de los términos es de alguna forma el “peor caso”. Veamos de formalizar este resultado.

### Teorema 3.47

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

#### Demostración

Sea  $\sum a_n$  la serie absolutamente convergente, y separemos los términos  $a_n$  en los positivos y negativos, formando así dos nuevas sucesiones:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Es decir, en  $a_n^+$  ponemos los términos positivos de  $a_n$ , y los negativos los cambiamos por 0. Mientras que en  $a_n^-$  cambiamos los términos positivos por 0, y ponemos los términos negativos de  $a_n$  cambiados de signo. De esta forma ambas las nuevas sucesiones son de términos positivos.

Observemos que:

- $a_n = a_n^+ - a_n^-$
- $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$
- $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$
- $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$

Por hipótesis, tenemos que  $\sum |a_n|$  converge, y por lo tanto usando el criterio de comparación:

- $\sum a_n^+$  es convergente.
- $\sum a_n^-$  es convergente.

Con esto podemos concluir que:

- $\sum (a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n$  es convergente

### Ejemplo 3.48

- $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$

Queremos estudiar si es absolutamente convergente, por lo tanto queremos estudiar:

- $\sum \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right|$

Veamos lo siguiente:

- $\frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

Y como  $\sum \frac{1}{n^2}$  es convergente, por criterio de comparación también lo es  $\sum \frac{|\sin(n)|}{n^2}$ .

Veremos a continuación el único criterio de convergencia para series alternadas, el cual no vamos a demostrar.

### Proposición 3.49 (criterio de Leibnitz)

Si  $a_n$  es una sucesión monótona decreciente que tiende a 0, entonces la serie alternada  $\sum (-1)^n a_n$  es convergente.

#### Ejemplo 3.50

##### Ejemplo 1

- $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$

Es convergente por el criterio de Leibnitz, pero no es absolutamente convergente, pues:

- $\sum |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum \frac{1}{n}$

Que ya vemos que es divergente.

##### Ejemplo 2

- $\sum (-1)^n \log(1 + \frac{1}{n})$

Es convergente por el criterio de Leibnitz.