Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Expresar en notación binómica:

1. $e^{i\frac{\pi}{2}}$
2. $3e^{\pi i}$
3. $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}i}}{1+e^{\frac{\pi}{2}i}}$
4. $(i+1)^{100}$

Resolución

Parte 2

- $z = 3e^{i\pi}$
  - Módulo: $|z| = 3$
  - Argumento: $\theta = \pi$

Para hallar la notación binómica utilizamos que:

- $a = |z| \cdot cos\theta = 3 \cdot cos(\pi) = -3$
- $b = |z| \cdot sen\theta = 3 \cdot sen(\pi) 0$

Por lo tanto:

- $z = -3 + 0i$

Parte 3

- $z = \frac{1-e^{\frac{\pi}{2}i}}{1+e^{\frac{\pi}{2}i}}$

Antes que nada, obtengamos la notación binómica de $e^{i\frac{\pi}{2}}$ para obtener una expresión más fácil:

- Módulo: $|e^{i\frac{\pi}{2}}| = 1$
- Argumento: $|e^{i\frac{\pi}{2}}| = \frac{\pi}{2}$

Entonces:

- $a = 1 \cdot cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

- $b = 1 \cdot sen(\frac{\pi}{2}) = 1$

Por lo tanto:

- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Ahora, volviendo a z, tenemos que:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1-i}{1+i} \\ &= \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \\ &= \frac{1-2i-1}{2} \\ &= \frac{-2i}{2} \\ &= -i \end{aligned}$$

Parte 4

- $z = (i+1)^{100}$

Claramente es imposible calcular esto con la notación binómica que tenemos, y recordando que para calcular productos, la notación polar es mucho más práctica, transformemos $i+1$ a dicha notación para facilitar el cálculo:

- $i + 1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} z &= (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{100} \\ &= \sqrt{2}^{100} e^{i\frac{100\pi}{4}} \\ &= 2^{50}e^{i25\pi} \end{aligned}$$

Lo que nos deja el siguiente módulo y argumento:

- Módulo: 2^{50}
- Argumento: $25\pi \sim \pi$

Entonces ahora hallemos a, b para la notación binómica:

- $a = 2^{50}cos(\pi) = -2^{50}$
- $b = 2^{50}sen(\pi) = 0$

Entonces $z = -2^{50}$