

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 25 - 04/11/2025

### Límites y continuidad

#### Proposición 6.18

Si  $f$  y  $g$  son dos funciones continuas en  $a$ , entonces:

1.  $f + g$  es continua en  $a$
2.  $f \cdot g$  es continua en  $a$
3. Si  $g(a) \neq 0$  entonces  $f/g$  es continua en  $a$

#### Demostración

Veremos solo la demostración de la suma, pues las demás son muy similares. La estrategia será utilizar el teorema 6.9, es decir:

**Recordatorio:** Sea un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $a \in \mathbb{R}^n$  un punto de  $D$ . Entonces:

- $f$  es continua  $\iff$  para toda sucesión  $x_k$  de elementos de  $D$  tal que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = a$ , tenemos que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = f(a)$

**Continuación:** Como tenemos que  $f$  y  $g$  son continuas, tomamos una sucesión genérica  $x_k \in \mathbb{R}^n$  que cumple que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = a$ , y sabemos que esta cumple que:

- $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = f(a)$
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(x_k) = g(a)$

Entonces podemos usar la suma de límite en sucesiones (que ya probamos en el curso):

- $\lim_{k \rightarrow +\infty} (f + g)(x_k) = f(x_k) + g(x_k) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$

Entonces, cómo es cierto que para toda sucesión  $x_k \in \mathbb{R}^n$  que tiende a  $a$ , sus imágenes por la función  $f + g$  tienden a  $(f + g)(a)$ , concluimos que la función es continua (también por el teorema 6.9).

#### Proposición 6.19

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $a \in \mathbb{R}^n$ , y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $f(a) \in \mathbb{R}$ . Entonces la composición  $g \circ f$  es continua en  $a$ .

## Teorema 6.20 (Weierstrass)

Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto, y  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces  $f$  alcanza mínimo y máximo en  $C$ . Es decir que existen  $x_m, x_M \in C$ , tales que:

- $f(x) \geq f(x_m) \quad \forall x \in C$
- $f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in C$

### Demostración

**Primer parte:** Primero probaremos que  $f$  es acotada (superiormente). Para esto suponemos que no lo es, es decir que para todo  $B \in \mathbb{R}$ , existe un punto  $x \in C$  tal que  $f(x) > B$ .

Consideramos entonces una sucesión de valores crecientes de  $B$ , por ejemplo  $B_k = k$ . Como estamos suponiendo que  $f$  no es acotada, para cada uno de estos  $B_k$  podemos conseguir un  $x_k \in C$  tal que  $f(x_k) > B_k$ .

De este modo construimos una sucesión  $x_k$  tal que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = +\infty$ . Por otro lado notemos que la sucesión está contenida en  $C$  por construcción, y como  $C$  es un conjunto compacto (corolario 5.32), tiene una subsucesión convergente. Llamaremos  $x_{k_j}$  a esta subsucesión y  $\bar{x} \in C$  a su límite.

Como  $f$  es continua en todo el conjunto  $C$ , en particular en  $\bar{x}$ , tenemos que para toda sucesión que tienda a  $\bar{x}$ , entonces sus imágenes por  $f$  tienden a  $f(\bar{x})$  (teorema 6.9). Sin embargo  $x_{k_j}$  es una sucesión de estas características, pero sus imágenes por  $f$  tienden a infinito. Esto es absurdo, pues contradice un teorema. Por lo tanto  $f$  es acotada (superiormente).

**Segunda parte:** Consideremos el conjunto imagen de la función  $Im(f) = \{f(x) : x \in C\}$ . Como probamos que  $f$  es acotada, y no vacía (pues sino estaría mal definida), por el axioma de completitud tenemos que  $Im(f)$  tiene supremo, llamémosle  $M = \sup(Im(f))$ .

Usando la propiedad fundamental del supremo, podemos obtener elementos de  $Im(f)$  cada vez más cerca de  $M$ , de forma que podemos construir una sucesión  $x_k$  tal que  $f(x_k)$  tienda a  $M$ . Esto lo podemos hacer por ejemplo tomando  $\varepsilon = \frac{1}{k}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$  y tomando un elemento  $x_k \in C$  tal que  $f(x_k) \in (M - \frac{1}{k}, M]$ .

Entonces, como  $\{x_k\} \subset C$  (compacto),  $x_k$  tiene una subsucesión convergente, llamémosla  $x_{k_j}$  y a su límite  $\bar{x}$ . Y cómo  $f$  es continua en  $\bar{x}$ ,  $f(x_{k_j})$  tiende a  $f(\bar{x})$ . Como además  $f(x_k) \rightarrow M$ , en particular  $f(x_{k_j})$  también tiende a  $M$ , por lo que juntando las últimas dos afirmaciones:

- $f(\bar{x}) = M$

Esto concluye la prueba, pues construimos  $M$  como el supremo del conjunto imagen de  $f$ , y probamos que tiene preimagen en  $C$ .