

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 15 - 24/09/2025

### Integrales impropias

Cuando inicialmente fue definida la integral, teníamos que tener en cuenta dos aspectos:

- Que el intervalo de integración fuera acotado, y
- Que la función a integrar fuera acotada en dicho intervalo.

En lo que sigue, vamos a levantar estas dos consideraciones, dando lugar a las integrales impropias de primera y segunda especie respectivamente.

### Integrales impropias de primera especie

#### Definición 4.1

Sea  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua, y llamemos  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ . Consideremos  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ :

- Si es finito, entonces decimos que la integral impropia  $\int_a^\infty f(x)dx$  converge a ese valor.
- Si es infinito, entonces decimos que la integral impropia  $\int_a^\infty f(x)dx$  diverge.
- Por último, si el límite no existe, decimos que la integral impropia  $\int_a^\infty f(x)dx$  oscila.

#### Ejemplos 4.2

##### Ejemplo 1

El primer caso que estudiaremos es el de la impropia:

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$

Para esto, queremos calcular la primitiva:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^x t^{-\alpha} dt$$

Entonces tenemos dos casos para distinguir:

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Figura 2

Figure 2: Figura 2

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \log(t) & \text{si } t = 1 \\ \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^x & \text{si } t \neq 1 \end{cases} \\ &= \\ & \begin{cases} \log(t) & \text{si } t = 1 \\ \frac{x^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} & \text{si } t \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

- Si  $\alpha > 1$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{1}{\alpha-1}$   
– Por lo que la integral impropia  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$  converge a  $\frac{1}{\alpha-1}$  en este caso.
- Si  $\alpha \leq 1$ , entonces la integral impropia  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$  diverge.

## Ejemplo 2

Estudiemos la impropia:

$$\bullet \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Para esto, queremos calcular la primitiva:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan(x)$$

Entonces tenemos que:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

**Observación:** Para el cálculo de este límite, lo mejor es graficar la función y observar su comportamiento a partir de la función inversa ( $\tan(x)$ )

## Proposición 4.3

Si  $\int_a^\infty f(t)dt$  y  $\int_a^\infty g(t)dt$  convergen, entonces:

- $\int_a^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t))dt$  también converge y vale:
- $\alpha \int_a^\infty f(t)dt + \beta \int_a^\infty g(t)dt$

En el caso de las series, teníamos que si una serie converge, entonces necesariamente su término general  $a_n$  converge a 0. Será que para las integrales impropias tenemos un resultado similar? Es decir, seremos capaces de construir una función  $f(t)$  que no tienda a cero, cuya integral impropia sea convergente? El siguiente ejemplo muestra que con las funciones tenemos un poco más de libertad que con las sucesiones.

Figura 3

Figure 3: Figura 3

## Ejemplo 4.4

Tomemos la función  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [n, n + \frac{1}{2^n}], \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, son escalones de altura constante, que empiezan en cada natural y tienen un ancho cada vez menor (ver figura). Entonces si  $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ , es claro que  $F(n)$  es la suma de las áreas de los primeros  $n$  escalones:  $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$ , que forma una serie geométrica que converge a 2.

Entonces la integral impropia  $\int_0^{+\infty} f(t)dt$  es convergente, aunque la función  $f(t)$  no tienda a 0 cuando  $x$  tiende a infinito.

En este caso particular, la función no tiene límite cuando  $x \rightarrow \infty$ . Sin embargo, si agregamos como hipótesis que el límite exista, entonces si tenemos una condición similar a la que teníamos con series.

## Proposición 4.5

Sea  $f$  tal que  $\int_a^\infty f(t)dt$  converge, y existe  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ . Entonces  $L = 0$ .

**Observación:** No se demuestra en las notas, pero la idea es que si la función tiende a un  $L \neq 0$ , entonces me puedo construir un rectángulo con area divergente, que es más pequeño que el área de la función, por lo que  $L$  tiene que ser 0.

## Proposición 4.6 (criterio de comparación)

Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas tales que  $0 \leq f(t) \leq g(t)$  para todo  $t > a$ . Entonces:

- Si  $\int_a^\infty g(t)dt$  converge, entonces  $\int_a^\infty f(t)dt$  también converge.
- Si  $\int_a^\infty f(t)dt$  diverge, entonces  $\int_a^\infty g(t)dt$  también diverge.

La demostración es análoga a la hecha en el capítulo de series.

## Ejemplos 4.7

### Ejemplo 1

A pesar de que ya calculamos el valor de  $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$ , podemos clasificarla observando que:

- $\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}$

Y como tenemos que  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$  converge, también lo hace  $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx$ . Observar que pudimos utilizar el resultado aunque las impropias empiecen en diferentes puntos, esto porque lo que importa realmente es el comportamiento en el infinito.

## Ejemplo 2

$\int_2^\infty \frac{1}{\log(x)} dx$  diverge, pues  $\log(x) \leq x$  a partir de un cierto punto. Entonces tenemos que:

- $\frac{1}{\log(x)} \geq \frac{1}{x}$

Y como  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$  diverge, también lo hace  $\int_2^\infty \frac{1}{\log(x)} dx$ .

## Ejemplo 3

Clasifiquemos  $\int_0^\infty e^{-x} x^2$ . Observemos que a partir de un cierto punto, se cumple que:

- $e^x \geq x^4$ , por lo tanto:
- $e^{-x} \leq \frac{1}{x^4}$

Podemos dar un paso más multiplicando ambos lados por  $x^2 \geq 0$ , obteniendo:

- $e^{-x} x^2 \leq \frac{1}{x^2}$

Y como  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$  converge, también lo hace  $\int_0^\infty e^{-x} x^2$

## Proposición 4.8 (criterio de equivalencia)

Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas con  $f(t) \geq 0, g(t) \geq 0$  para todo  $t$ , y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$ . Entonces:

- $\int_a^\infty f(t) dt$  y  $\int_a^\infty g(t) dt$  son de la misma clase.

Es decir que para clasificar una integral impropia de primera especie, basta con estudiar el comportamiento de la función en el infinito.

## Ejemplos 4.9

### Ejemplo 1

Clasifiquemos  $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$ . Para esto observemos que cuando  $x \rightarrow \infty$ , se tiene que:

$$\frac{x}{\sqrt{x^4+1}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^4}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Y como  $\int_1^\infty \frac{1}{x}$  diverge, entonces  $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$  también diverge.

### Ejemplo 2

Clasifiquemos  $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ . Para esto observemos que cuando  $x \rightarrow \infty$ , se tiene que:

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} \sim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{4}{2}}} = x^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Por lo tanto  $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$  es convergente.