

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Clasificar y hallar la integral en caso de convergencia:

1. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^\alpha(x)}$
2. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$
3. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

Resolución

Integral #1

- $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^\alpha(x)}$

Esta integral es equivalente a la siguiente:

- $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log(x))^\alpha}$

Por lo tanto podemos avanzar con un cambio de variable:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \\ &= \\ & \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log(x)^\alpha} \\ &= (\text{cambio de variable } u = \log(x); du = \frac{1}{x} dx) \\ & \int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha} \end{aligned}$$

A partir de este punto tenemos que distinguir entre dos casos según el valor de α :

Caso 1: $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
& \int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{du}{u} \\
&= \\
& \log(u) \Big|_{\log(2)}^{+\infty} \\
&= \\
& \lim_{u \rightarrow \infty} \log(u) - \log(\log(2))
\end{aligned}$$

Por lo tanto en este caso la integral diverge.

Caso 2: $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned}
& \int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha} \\
&= \\
& \int_{\log(2)}^{+\infty} u^{-\alpha} du \\
&= \\
& \int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} du \\
&= \\
& \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{\log(2)}^{+\infty} \\
&= \\
& \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\log(2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Por lo tanto el comportamiento para este caso queda determinado por el límite:

- $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Y este tiene el siguiente comportamiento:

- Si $1 - \alpha < 0$ (es decir si $\alpha > 1$), entonces el límite es 0, y la integral converge a $\frac{1}{(\alpha+1)\log(2)^{\alpha-1}}$
- Si $1 - \alpha > 0$, entonces el límite es $+\infty$, por lo que la integral diverge.

Esto define el comportamiento de la integral que queríamos clasificar, resumiendo:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^\alpha(x)}$$

- Converge a $\frac{1}{(\alpha+1)\log(2)^{\alpha-1}}$ si $\alpha > 1$
- Diverge si $\alpha \leq 1$

Integral #2

- $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

Avancemos con un cambio de variable:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \\
 &= \\
 & \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx \\
 &= \\
 & \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x} x^3 e^{-x^2} 2x dx \\
 &= \\
 & \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{-x^2} 2x dx \\
 &= (\text{cambio de variable } t=x^2; dt=2x dx) \\
 & \int_0^{+\infty} \frac{t}{2} e^{-t} dt \\
 &= \\
 & \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt \\
 &= (\text{integración por partes } (*_1)) \\
 & \frac{1}{2} \left(-t e^{-t} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t} \right) \\
 &= \\
 & \frac{1}{2} \left(-t e^{-t} \Big|_0^{+\infty} - e^{-t} \Big|_0^{+\infty} \right) \\
 &= \\
 & \frac{1}{2} (0 - (-1)) \\
 &= \\
 & \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Observación $(*_1)$: Utilizamos lo siguiente:

- $u = t \rightarrow du = 1$
- $dv = e^{-t} \rightarrow v = -e^{-t}$

Por lo tanto, la integral converge a $\frac{1}{2}$.

Integral #3

- $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

Avancemos con un cambio de variable:

$$\begin{aligned}
& F(x) \\
& = \\
& \int_x^1 \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt \\
& = (\text{cambio de variable } u = \frac{1}{t}; du = -\frac{1}{t^2} dt) \\
& - \int_{\frac{1}{x}}^1 \sin(u) du \\
& = \\
& - \left(\cos(u) \Big|_{\frac{1}{x}}^1 \right) \\
& = \\
& - \left(\cos(1) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)
\end{aligned}$$

Al tomar límite, observamos que la expresión no tiene límite cuando $x \rightarrow +\infty$. Por lo que podemos concluir que la integral oscila.

Integral #4

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Es una integral mixta, por lo que vamos a trabajar con ella separando como corresponde:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\
& = \\
& \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}
\end{aligned}$$

A partir de este punto tenemos que estudiar las dos impropias que nos resultaron:

Integrando #1:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx \\
& = \\
& \arctan(x) \Big|_{-\infty}^0 \\
& = \\
& 0 + \frac{\pi}{2} \\
& = \\
& \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Integrando #2:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \\ & \arctan(x) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \\ & \frac{\pi}{2} - 0 \\ &= \\ & \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, juntando ambas partes, tenemos que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge a π .