

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 15

Consigna

Calcular la matriz jacobiana en el punto a y el diferencial $df(a)(\Delta x, \Delta y)$ de:

1. $f(x, y) = e^{x+y} + 2 \sin(2x - y)$, $a = (0, 0)$
2. $f(x, y, z) = (e^{z+x+y}, x + y + 2z)$, $a = (0, 1, 2)$
3. $f(x, y) = (e^{x+y}, \sin(2x - y), \log(1 + y^2))$, $a = (\pi, \pi)$
4. $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $f(x) = Ax$ con A matriz $q \times p$
5. $f(x, y) = \langle g(x, y), h(x, y) \rangle$, con $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1

Resolución

Función #1

- $f(x, y) = e^{x+y} + 2 \sin(2x - y)$, $a = (0, 0)$

Calculemos las derivadas que necesitamos

- $f_x(x, y) = e^{x+y} + 4 \cos(2x - y)$
- $f_y(x, y) = e^{x+y} - 2 \cos(2x - y)$

Evaluando en $(0, 0)$, ya definimos la Matriz Jacobiana para $(0, 0)$:

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Con esto podemos calcular el diferencial de la siguiente forma (esto es general, respetando las dimensiones):

$$\begin{aligned} df_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) \\ &= (\text{cálculo del diferencial}) \\ &= J_f(0, 0) \cdot (\Delta x, \Delta y)^t \\ &= (\text{operatoria}) \\ &= 5\Delta x - \Delta y \end{aligned}$$

Función #2

- $f(x, y, z) = (e^{z+x+y}, x + y + 2z), a = (0, 1, 2)$

Calculemos las derivadas que necesitamos:

- $\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^{z+x+y}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial y} = e^{z+x+y}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial z} = e^{z+x+y}$
- $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$
- $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$
- $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 2$

Evaluando en $(0, 1, 2)$, ya definimos la Matriz Jacobiana para $(0, 1, 2)$:

$$J_f(0, 1, 2) = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & e^3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con esto podemos calcular el diferencial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} df_{(0,1,2)}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \\ = & (\text{cálculo del diferencial}) \\ = & J_f(0, 1, 2) \cdot (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^t \\ = & (\text{operatoria}) \\ = & e^3(\Delta x + \Delta y + \Delta z) + \Delta x + \Delta y + 2\Delta z \\ = & (\text{operatoria}) \\ = & (e^3 + 1)\Delta x + (e^3 + 1)\Delta y + (e^3 + 2)\Delta z \end{aligned}$$

Función #3

- $f(x, y) = (e^{x+y}, \sin(2x - y), \log(1 + y^2)), a = (\pi, \pi)$

Calculemos las derivadas que necesitamos:

- $\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^{x+y}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial y} = e^{x+y}$
- $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2 \cos(2x - y)$
- $\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\cos(2x - y)$
- $\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0$
- $\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{2y}{1+y^2}$

Evaluando en (π, π) , ya definimos la Matriz Jacobiana para (π, π) :

$$J_f(\pi, \pi) = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & e^{2\pi} \\ -2 & 1 \\ 0 & \frac{2\pi}{1+\pi^2} \end{pmatrix}$$

Con esto podemos calcular el diferencial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 df_{(\pi,\pi)}(\Delta x, \Delta y) &= (\text{cálculo del diferencial}) \\
 J_f(\pi, \pi) \cdot (\Delta x, \Delta y)^t &= (\text{operatoria}) \\
 e^{2\pi} \Delta x + e^{2\pi} \Delta y - 2\Delta x + \Delta y + \frac{2\pi}{1 + \pi^2} \Delta y &= (\text{operatoria}) \\
 (e^{2\pi} - 2)\Delta x + \left(e^{2\pi} + 1 + \frac{2\pi}{1 + \pi^2}\right) \Delta y &
 \end{aligned}$$

Función #4

- $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $f(x) = Ax$ con A matriz $q \times p$

Este caso es un poco diferente a los anteriores, agarremos algo de intuición sobre quién es quién.

- x es un punto de \mathbb{R}^p , por lo que tiene la siguiente forma: $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$
- Con lo que ya sabemos de la matriz A , tenemos que:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \dots + a_{qp}x_p \end{pmatrix}$$

Que corresponde a un vector de tamaño q (tiene sentido dada la definición de la función f). Podemos observar fácilmente que los coeficientes de la forma a_{ij} son quienes conformarán la matriz jacobiana, pues tomando como ejemplo f_1 , tenemos que:

- $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = a_{11}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = a_{12}$
- Y así sucesivamente hasta...
- $\frac{\partial f_1}{\partial x_p} = a_{1p}$

Este razonamiento es análogo para las demás funciones f_2, \dots, f_q . Por lo tanto tenemos que:

- $J_f(a) = A$

Esto es válido para cualquier punto $a \in \mathbb{R}^p$.

En cuanto al diferencial $df_a(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_p) = A(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_p)^t$, no hay otra mejor expresión que esta.

Función #5

- $f(x, y) = \langle g(x, y), h(x, y) \rangle$, con $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1

Lo primero que nos conviene hacer, es nombrar las funciones del producto interno según las subfunciones coordenadas que tienen.

- $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$
- $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$

Con esto, podemos expresar con más detalle $f(x, y)$:

- $f(x, y) = g_1(x, y)h_1(x, y) + g_2(x, y)h_2(x, y)$

Entonces, podemos calcular las derivadas parciales de f , en base a su expresión usando g_1, g_2, h_1, h_2 :

Derivada f_x :

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y)h_1(x, y) + g_1(x, y)\frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) \\ &\quad + \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y)h_2(x, y) + g_2(x, y)\frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Nota: Esto se puede expresar como el siguiente producto de matrices:

$$f_x(x, y) = (h_1(x, y), g_1(x, y), h_2(x, y), g_2(x, y))(\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y))^t$$

Derivada f_y :

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y)h_1(x, y) + g_1(x, y)\frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \\ &\quad + \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y)h_2(x, y) + g_2(x, y)\frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Nota: Esto se puede expresar como el siguiente producto de matrices.

$$f_y(x, y) = (h_1(x, y), g_1(x, y), h_2(x, y), g_2(x, y))(\frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y), \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y), \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y), \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y))^t$$

Conclusión

A partir de lo que hallamos en el razonamiento anterior: Podemos expresar la matriz Jacobiana para un punto a cualquiera de la siguiente forma:

$$J_f(a) = (h_1(x, y), g_1(x, y), h_2(x, y), g_2(x, y)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$