

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 9 - 27/08/2025

### Sucesiones

#### Ejercicio 3.10

1. Demostrar que si  $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$  y ambas tienen límite, entonces  $\lim a_n \leq \lim b_n$
2. Si  $a_n$  es acotada y  $\lim b_n = 0$ , demostrar que  $\lim a_n b_n = 0$

#### Parte 1

Llamemos:

- $A = \lim a_n$ , y
- $B = \lim b_n$

Probaremos esta propiedad por absurdo, entonces supongamos que  $B < A$ :

Como sabemos que ambas sucesiones tienen límite, tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_1 : a_n \in E(A, \varepsilon)$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_2 : b_n \in E(B, \varepsilon)$

Esto nos permite considerar:

- $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , y
- $\varepsilon = \frac{|A-B|}{2}$

De forma que  $E(B, \varepsilon) \cap E(A, \varepsilon) = \emptyset$ . Gráficamente la situación se ve algo así:

Entonces ahora consideremos cualquier  $n > n_0$ , para este se tiene que cumplir que:

- $a_n \in E(A, \varepsilon)$
- $b_n \in E(B, \varepsilon)$

Pero como son disjuntos y el entorno  $E(A, \varepsilon)$  está más adelante en la recta que  $E(B, \varepsilon)$ , necesariamente vamos a tener que:

- $b_n < a_n$  para todo  $n > n_0$

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Pero esto es absurdo pues estamos contradiciendo la hipótesis que nos dice que:

- $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Por lo que queda probada la propiedad.

## Parte 2

Como  $\lim b_n = 0$ , tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0 : |b_n - 0| < \varepsilon$

Como  $a_n$  es acotada, tenemos que:

- $\exists K \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < K$

Tomamos  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{K} > 0$  y como  $\lim b_n = 0$  tenemos que:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0 : |b_n| < \frac{\varepsilon}{K}$

Operando a partir de este punto,  $\forall n > n_0$  tenemos que:

$$\begin{aligned} |b_n| &< \frac{\varepsilon}{K} \\ &\iff (\text{operando}) \\ K|b_n| &< \varepsilon \\ &\iff (a_n \text{ acotada}) \\ |a_n||b_n| &< K|b_n| < \varepsilon \\ &\iff (\text{operando}) \\ |a_n b_n| &< K|b_n| < \varepsilon \\ &\iff (\text{simplificando}) \\ |a_n b_n| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Como demostramos esto para todo  $n > n_0$ , probamos que efectivamente:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0 : |a_n b_n| < \varepsilon$

Lo que es equivalente a decir que:

- $\lim a_n b_n = 0$

## Teorema 3.11 (propiedades de límite)

Sean  $a_n, b_n$  dos sucesiones tales que  $\lim a_n = A$  y  $\lim b_n = B$ . Entonces:

1.  $\lim a_n + b_n = A + B$
2.  $\lim a_n b_n = AB$
3. Si  $B \neq 0$ , entonces  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

En todos los casos, por hipótesis tenemos que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1$  tal que  $\forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$  ( $*_1$ )
- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2$  tal que  $\forall n > n_0 : |b_n - B| < \varepsilon$  ( $*_2$ )

## Demostración 1

- $\lim a_n + b_n = A + B$

Por definición de límite, queremos probar que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$  tal que  $\forall n > n_0 : |a_n + b_n - A - B| < \varepsilon$

Consideremos  $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$  y  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  y el siguiente razonamiento  $\forall n > n_0$ :

$$\begin{aligned}
 & |a_n + b_n - A - B| \\
 & \stackrel{\text{=(reordenando)}}{=} |a_n - A + b_n - B| \\
 & \stackrel{\text{≤(desigualdad triangular)}}{\leq} |a_n - A| + |b_n - B| \\
 & \stackrel{\text{<(def. de límite)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 & = \\
 & \varepsilon
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, probamos lo que queríamos verificar, y eso implica que:

- $\lim a_n + b_n = A + B$

**Observación:** Esta propiedad es válida también cuando hay una resta, y su prueba es análoga.

## Demostración 2

- $\lim a_n b_n = AB$

Por definición de límite, queremos probar que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0 : |a_n b_n - AB| < \varepsilon$

Consideremos  $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$  y  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  y el siguiente razonamiento  $\forall n > n_0$ :

$$\begin{aligned}
 & |a_n b_n - AB| \\
 & = \\
 & |a_n b_n + Ab_n - Ab_n - AB| \\
 & = \\
 & |A(b_n - B) + b_n(a_n - A)| \\
 & \stackrel{\text{≤(desigualdad triangular)}}{\leq} |A||b_n - B| + |b_n||a_n - A|
 \end{aligned}$$

Observemos los sumados por separado por  $a_n$  y  $b_n$ :

- $|A||b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$ , por definición de límite. ( $*_1$ )

**Atención:** Si  $A = 0$  entonces la propiedad cae en las hipótesis de la vista en la parte 3.10, por lo que consideramos  $A \neq 0$

Por otra parte tenemos que, como  $\lim b_n = B$ , tenemos que  $b_n$  es acotada (propiedad vista anteriormente), por lo tanto:

- $\exists K \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < K$

Con esto, veamos que:

- $|b_n||a_n - A| < K|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2K}$ , por definición de límite.  $(*_2)$

**Atención:** En ambos puntos  $(*_1)$  y  $(*_2)$  estamos considerando  $n > n_0$  para usar la definición de límite.

Ahora podemos redondear el ejercicio retomando el primer razonamiento que hicimos:

$$\begin{aligned} & |A||b_n - B| + |b_n||a_n - A| \\ & \quad <_{(\text{por } (*_1), (*_2))} \\ & |A| \cdot \frac{\varepsilon}{2|A|} + |b_n| \frac{\varepsilon}{2K} \\ & \quad =_{(\text{simplificando})} \\ & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ & \quad = \\ & \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, probamos lo que queríamos verificar, y eso implica que:

- $\lim a_n b_n = AB$

### Ejercicio 3.13

Decimos que un par de sucesiones  $a_n$  y  $b_n$  forman un par de sucesiones monótonas convergentes (PSMC) si:

- $(*_1)$   $a_n$  es creciente y  $b_n$  es decreciente.
- $(*_2)$   $a_n \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$
- $(*_3)$  Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$

Queremos probar lo siguiente:

1. Demostrar que  $a_n \leq b_m$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}$
2. Demostrar que ambas sucesiones tienen límite, que llamaremos  $\lim a_n = L$  y  $\lim b_n = L'$ .
3. Deducir que  $L \leq L'$
4. Demostrar que  $L = L'$  (y observar que recién ahora es necesaria la propiedad  $(*_3)$ )

### Resolución 3.13

#### Parte 1

- Demostrar que  $a_n \leq b_m$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}$

Separemos en tres casos:

- $n = m$  trivial por  $(*_1)$
- $n \leq m$
- $m \leq n$

$n \leq m$ :

Observemos que por  $(*_1)$  tenemos que:

- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Y ahora, considerando que  $a_n$  es creciente, tenemos que:

$$\begin{aligned} & a_n \\ & \leq_{(a_n \text{ es creciente})} \\ & a_m \\ & \leq_{(\text{por } (*_1))} \\ & b_m \end{aligned}$$

Por lo tanto esta parte cumple.

$m \leq n$ :

Observemos que por  $(*_1)$  tenemos que:

- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Y ahora, observando que  $b_n$  es decreciente, tenemos que:

$$\begin{aligned} & a_n \\ & \leq_{(\text{por } (*_1))} \\ & b_n \\ & \leq_{(b_n \text{ decreciente})} \\ & b_m \end{aligned}$$

Y como esta parte también se cumple, queda probada la propiedad para cualesquiera  $n, m \in \mathbb{N}$

## Parte 2

- Demostrar que ambas sucesiones tienen límite, que llamaremos  $\lim a_n = L$  y  $\lim b_n = L'$ .

Primero probemos que  $a_n$  tiene límite, esto es sencillo pues:

- $a_n \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Entonces considerando  $b_1$ , tenemos que:

- $a_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces  $a_n$  está acotada superiormente por  $b_1$ . Y como  $a_n$  es monótona y está acotada: tiene límite.

Ahora veamos que podemos hacer el mismo razonamiento para  $b_n$  considerando como cota inferior  $a_1$ .

Por lo tanto  $b_n$  está acotada inferiormente por  $a_1$ . Y como  $b_n$  es monótona y está acotada: tiene límite.

### Parte 3

- Deducir que  $L \leq L'$

Directo por el ejercicio 3.10

### Parte 4

- Demostrar que  $L = L'$  (y observar que recién ahora es necesaria la propiedad  $(*_3)$ )

Teniendo que  $L \leq L'$ , supongamos que  $L < L'$ . En particular, como tenemos:

- $a_n \leq L$  por ser creciente y,
- $L' \leq b_n$  por ser decreciente

Se cumple la siguiente desigualdad:

- $a_n \leq L < L' \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

De donde se obtiene la siguiente desigualdad:

- $b_n - a_n \geq L' - L \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Recordemos la propiedad:

- $(*_3)$  Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$

Si consideramos  $\varepsilon = L' - L$ , esta propiedad no se cumple. Por lo tanto llegamos a un absurdo, con esto podemos concluir que:

- $L = L'$

## Definición 3.16

Decimos que dos sucesiones  $a_n$  y  $b_n$ , ambas con límite 0 o  $\infty$ , son equivalentes si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

**Atención:** Hay que tener cuidado cuando sustituimos por sucesiones equivalentes, cuando resulta en la resta de dos equivalentes que se anulan.

## Ejemplo 3.17

Las sucesiones  $a_n = 4n^3 + 2n + 1$  y  $b_n = 4n^3$  son equivalentes. En efecto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 2n + 1}{4n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3}{4n^3} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4n^3} = 1$$

Cuando tenemos un polinomio en  $n$ , es equivalente a su término de mayor grado. En general, tenemos las mismas equivalencias que teníamos para funciones.

### Ejemplo

Las sucesiones  $a_n = \operatorname{sen}(\frac{1}{n})$  y  $b = \frac{1}{n}$  son equivalentes.

Observemos que cuando  $x$  tiende a 0  $\operatorname{sen}(\frac{1}{n}) \sim x$  (desarrollo de Taylor).

Entonces como  $\frac{1}{n}$  tiende a 0 cuando  $n$  tiende a  $\infty$ :

- $\operatorname{sen}(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ .