Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 5

Consigna

Verificar que la función $u(x,t) = e^{-a^2k^2t}\sin(kx)$ satisface la ecuación del calor.

- $u_t = a^2 u_{xx}$

Resolución

La solución es bastante fácil, calcular u_{xx} es lo primero:

- $u_x(x,t) = ke^{-a^2k^2t}\cos(kx)$
- $u_{xx}(x,t) = -k^2e^{-a^2k^2t}\sin(kx)$

Por otra parte, tenemos que calcular u_t:

- $u_t(x,t) = -a^2k^2e^{-a^2k^2t}\sin(kx)$

Esto efectivamente verifica que:

$$\begin{aligned}
&u_t = a^2u_{xx}\\
&\iff \text{(reemplazando por lo calculado)}\\
&-a^2k^2e^{-a^2k^2t}\sin(kx) = a^2(-k^2e^{-a^2k^2t}\sin(kx))\\
&\iff \text{(operatoria)}\\
&-a^2k^2e^{-a^2k^2t}\sin(kx) = -a^2k^2e^{-a^2k^2t}\sin(kx)
\end{aligned}$$

Como lo último se cumple, tenemos que la función $u(x,t)$ cumple con la ecuación del calor.