Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Clasificar y hallar la integral en caso de convergencia:

1. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^\alpha(x)}$
2. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$
3. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x}) dx$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Resolución

Integral #1

- $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^\alpha(x)}$

Esta integral es equivalente a la siguiente:

- $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\log(x))^\alpha}$

Por lo tanto podemos avanzar con un cambio de variable:

$$\lim_{x \to +\infty} F(x)$$
$$=$$
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log(x)^\alpha}$$
$$=_{(\text{cambio de variable } u = \log(x); du = \frac{1}{x} dx)}$$
$$\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha}$$

A partir de este punto tenemos que distinguir entre dos casos según el valor de α:

Caso 1: $\alpha = 1$

$$\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{du}{u}$$

$$=$$

$$\log(u)\Big|_{\log(2)}^{+\infty}$$

$$=$$

$$\lim_{u\to\infty} \log(u) - \log(\log(2))$$

Por lo tanto en este caso la integral diverge.

Caso 2: $\alpha \neq 1$

$$\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha}$$

$$=$$

$$\int_{\log(2)}^{+\infty} u^{-\alpha} du$$

$$=$$

$$\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} du$$

$$=$$

$$\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{\log(2)}^{+\infty}$$

$$=$$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\log(2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Por lo tanto el comportamiento para este caso queda determinado por el límite:

- $\lim_{u\to\infty} \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Y este tiene el siguiente comportamiento:

- Si $1-\alpha < 0$ (es decir si $\alpha > 1$), entonces el límite es 0, y la integral converge a $\frac{1}{(\alpha+1)\log(2)^{\alpha-1}}$
- Si $1-\alpha > 0$, entonces el límite es $+\infty$, por lo que la integral diverge.

Esto define el comportamiento de la integral que queríamos clasificar, resumiendo: $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log^\alpha(x)}$

- Converge a $\frac{1}{(\alpha+1)\log(2)^{\alpha-1}}$ si $\alpha > 1$
- Diverge si $\alpha \leq 1$

Integral #2

- $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

Avancemos con un cambio de variable:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)$$
$$=$$
$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$$
$$=$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2x} x^3 e^{-x^2} 2x dx$$
$$=$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{-x^2} 2x dx$$
$$=^{(\text{cambio de variable } t=x^2; dt=2xdx)}$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{2} e^{-t} dt$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$$
$$=^{(\text{integración por partes } (*_1))}$$
$$\frac{1}{2}\left(-te^{-t}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t}\right)$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}\left(-te^{-t}\Big|_0^{+\infty} - e^{-t}\Big|_0^{+\infty}\right)$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}(0-(-1))$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}$$

Observación $(*_1)$**:** Utilizamos lo siguiente:

- $u = t \to du = 1$
- $dv = e^{-t} \to v = -e^{-t}$

Por lo tanto, la integral converge a $\frac{1}{2}$.

Integral #3

- $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x}) dx$

Avancemos con un cambio de variable:

$$F(x)$$
$$=$$
$$\int_{x}^{1} \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$
$$=_{(\text{cambio de variable } u=\frac{1}{t}; du=-\frac{1}{t^2}dt)}$$
$$-\int_{\frac{1}{x}}^{1} \sin(u) du$$
$$=$$
$$-\left(\cos(u)\Big|_{\frac{1}{x}}^{1}\right)$$
$$=$$
$$-\left(cos(1) - cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Al tomar límite, observamos que la expresión no tiene límite cuando $x \to +\infty$. Por lo que podemos concluir que la integral oscila.

Integral #4

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Es una integral mixta, por lo que vamos a trabajar con ella separando como corresponde:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$
$$=$$
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

A partir de este punto tenemos que estudiar las dos impropias que nos resultaron:

Integrando #1:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx$$
$$=$$
$$\arctan(x)\Big|_{-\infty}^{0}$$
$$=$$
$$0 + \frac{\pi}{2}$$
$$=$$
$$\frac{\pi}{2}$$

Integrando #2:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$
$$=$$
$$\arctan(x)\Big|_0^{+\infty}$$
$$=$$
$$\frac{\pi}{2} - 0$$
$$=$$
$$\frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, juntando ambas partes, tenemos que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge a π.