Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

1. Investigar si las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ son normas:
    1. $N(x, y) = |x| + |y|$
    2. $N(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
    3. $N(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$
    4. $N(x, y) = |x + y|$
2. Para aquellas que sean normas, dibujar la bola de centro en el origen y radio 1. Indicar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la bola de centro $(3, 4)$ y radio 2: $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(0, 1)$.
3. Decimos que dos normas N_1, N_2 son equivalentes si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que:
    - $\alpha N_1(u) \leq N_2(u) \leq \beta N_1(u)$.

    Probar que aquellas funciones que son normas de este ejercicio son equivalentes dos a dos.

Resolución

Recordatorio

Decimos que una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una *norma* si verifica las siguientes tres propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$, y $\|x\| = 0$ solamente si $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ que se denomina la desigualdad triangular

Parte 1

Norma #1

- $N(x,y) = |x| + |y|$

1. Cumple con esta propiedad pues se están sumando dos valores siempre positivos. La única forma de que sea 0 es que ambos sean 0.
2. Queremos verificar que $N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| N(x,y)$, es decir:
   - $|\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|(|x| + |y|)$

   Esto también se cumple, pues es el resultado de sacar factor común $|\lambda|$
3. Queremos verificar que $N(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2)$, es decir:
   - $|x_1 + x_2| + |y_1 + y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$

Concluyendo, la función es una norma.

Norma #2

- $N(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Es claramente una norma, es la norma euclidea en $\mathbb{R}^2$.

Norma #3

- $N(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$

Es claramente una normal, es la norma infinito en $\mathbb{R}^2$

Norma #4

- $N(x,y) = |x + y|$

1. Esta propiedad no se cumple, veamos un contraejemplo:
   - $(x,y) = (1,-1)$

   Por lo tanto $N(1,-1) = 0$, sin embargo $(1,-1) \neq (0,0)$

Concluyendo, la función NO es una norma.

Parte 2

Esta parte consiste en gráficar, por lo que se va a saltear. De todos modos en el teórico se ve en detalle la bola abierta para cada una de las normas vistas.

Parte 3

Decimos que dos normas N_1, N_2 son equivalentes si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que:

- $\alpha N_1(u) \leq N_2(u) \leq \beta N_1(u)$.

Trabajaremos con estas normas:

1. $N_1(x,y) = |x| + |y|$

2. $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

3. $N_3(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$

Como la efectivamente la relación es de equivalencia, bastará con probar que:

- $N_1 \sim N_3$
- $N_2 \sim N_3$

Consideremos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, y supongamos que $x \geq y$ (sin perder generalidad). Entonces $N_3(x,y) = |x|$.

Caso $N_1 \sim N_3$:

Queremos probar que:

- $\alpha(|x|+|y|) \leq |x| \leq \beta(|x|+|y|)$

Notemos que con $\alpha = \frac{1}{2}; \beta = 1$ se cumple la desigualdad.

Caso $N_2 \sim N_3$:

Queremos probar que:

- $\alpha\sqrt{x^2+y^2} \leq |x| \leq \beta\sqrt{x^2+y^2}$

Operemos un poco:

$$\alpha\sqrt{x^2+y^2} \leq \alpha\sqrt{x^2+x^2} \leq \sqrt{2}\alpha|x| \leq^? |x| \leq^? \beta\sqrt{x^2+y^2}$$

Entonces, esto último se cumple para:

- $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\beta = 1$

Conclusión: Las normas son equivalentes dos a dos.