Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1 (evaluaciones anteriores)

Consigna

Parte 1

1) Definir límite finito de una sucesión:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \text{ sii } ...$$

2) Definir sucesión acotada. Se dice que una sucesión a_n es acotada sii ...

Parte 2

Sean a_n y b_n sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n es acotada. Demostrar que:

- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

Parte 3

1) Dar un ejemplo de un par de sucesiones a_n y b_n, con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n no acotada, tales que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
2) Dar un ejemplo de un par de sucesiones a_n y b_n, con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n no acotada, tales que el límite de $a_n b_n$ no sea cero (infinito u otro límite real no nulo).

Resolución

Parte 1

1. Definir límite finito de una sucesión.

Decimos que $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ sii:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 : a_n \in E(L, \varepsilon)$, o alternativamente:
- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 : |a_n - L| < \varepsilon$

2. Definir sucesión acotada.

Decimos que una sucesión a_n es acotada sii:

- $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$

Parte 2

Sean a_n y b_n sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n es acotada. Demostrar que:

- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

Planteemos la definición de lo que queremos probar:

- $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 : |a_n b_n| < \varepsilon$

Por otra parte, lo que sabemos es que para cualquier $\varepsilon > 0$:

- $(*_1)$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$ Además, como b_n es acotada, tenemos que:
- $(*_2)$ $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < K$

Ahora, consideremos la afirmación $(*_1)$ con $\varepsilon := \frac{\varepsilon}{K}$, entonces a partir de un cierto n_0 tenemos que:

$$\begin{aligned}
&|a_n| < \frac{\varepsilon}{K} \\
&\iff \text{(considerando que } |b_n| < K\text{)} \\
&|a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
&|a_n b_n| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Que es exactamente lo que queríamos probar para cualquier $\varepsilon > 0$.

Parte 3

1) Dar un ejemplo de un par de sucesiones a_n y b_n, con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n no acotada, tales que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
   - Consideremos $a_n = \frac{1}{n^2}$ y $b_n = n$, entonces $a_n b_n = \frac{1}{n}$ que claramente converge a cero.
2) Dar un ejemplo de un par de sucesiones a_n y b_n, con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n no acotada, tales que el límite de $a_n b_n$ no sea cero (infinito u otro límite real no nulo).
   - Consideremos $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = n^2$ entonces $a_n b_n = n$, que claramente es divergente.