Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 13

Consigna

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

- $f(x, 1) = x^3 + x^2$, $\forall x \neq 0$
- $f(0, y) = y^2 - 2y + 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$
- $f(x, 1 - x) = x$, $\forall x \neq 0$

Queremos cumplir con los siguientes puntos:

1. Indicar en qué puntos es posible hallar $\partial f / \partial x$ o $\partial f / \partial y$. En qué puntos es posible hallar el gradiente?
2. Calcular la derivada direccional en $(0, 1)$ respecto a $v = (1, -1)$.
3. Indicar en qué puntos se puede decir algo sobre la diferenciabilidad de f.

Resolución

Parte 1

- Indicar en qué puntos es posible hallar $\partial f / \partial x$ o $\partial f / \partial y$. En qué puntos es posible hallar el gradiente?

Queremos determinar donde podemos hallar f_x y f_y, para esto los puntos candidatos son aquellos donde tenemos definida la función. Separaremos los puntos según su forma.

El principal problema con el que nos podemos encontrar, es que la función no esté definida cuando nos movamos según el incremento h.

Puntos de la forma $(x, 1), \ \forall x \neq 0$

Podríamos plantear la defición de derivada parcial, pero también podemos conformarnos con verificar si la función está bien definida para el punto en el que queremos calcular la derivada y también en el punto más el incremento.

Derivada f_x:

- La función está claramente definida para los puntos $(x, 1)$ y $(x + h, 1)$ para cualquier h. Además la definición para estos puntos es la misma.
  - Concluimos que $f_x(x, 1) = 3x^2 + 2x$

Derivada f_y:

- La función está definida para $(x, 1)$, pero no sabemos su definición para $(x, 1+h)$ para cualquier h.
    - Concluimos que f_y no se puede definir para estos puntos.

Puntos de la forma $(0, y), \ \forall y \in \mathbb{R}$

Derivada f_x:

- La función está bien definida para los puntos de la forma $(0, y)$, pero no sabemos cual es su definición para (h, y) para cualquier h.
    - Concluimos que f_x no se puede definir para estos puntos.

Derivada f_y:

- La función está bien definida para ambos los puntos $(0, y)$ y $(0, y+h)$ para cualquier h. Además la definición es la misma.
    - Concluimos que $f_y(0, y) = 2y - 2$

Puntos de la forma $(x, 1-x), \forall y \neq 0$

Derivada f_x:

- La función está bien definida para los puntos de la forma $(x, 1-x)$, pero no sabemos cual es su definición para $(x+h, 1-x)$ para cualquier h.
    - Concluimos que f_x no se puede definir para estos puntos.
- La función está bien definida para los puntos de la forma $(x, 1-x)$, pero no sabemos cual es su definición para $(x, 1-x+h)$ para cualquier h.
    - Concluimos que f_y no se puede definir para estos puntos.

Resumiendo:

- f_x solo existe para los puntos de la forma $(x, 1)$ y vale $3x^2 + 2x$
- f_y solo existe para los puntos de la forma $(0, y)$ y vale $2y - 2$
- El gradiente solo se puede calcular para $(0, 1)$, donde existen ambas f_x y f_y: $\nabla f(0, 1) = (0, 0)$

Parte 2

- Calcular la derivada direccional en $(0, 1)$ respecto a $v = (1, -1)$.

Acá planteamos la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial(1,-1)}(0,1)$$

$$=^{\text{(definición de derivada direccional)}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h, 1-h) - f(0,1)}{h}$$

$$=^{\text{(definición de la función)}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h}$$

$$=^{\text{(operatoria)}}$$

$$1$$

Parte 3

- Indicar en qué puntos se puede decir algo sobre la diferenciabilidad de f.

La respuesta es bastante directa. En todo punto distinto de $(0,1)$ no podemos afirmar nada sobre la diferenciabilidad, pues solo tenemos definida la función en rectas unidimensionales. Necesitaríamos la información sobre un entorno abierto alrededor de cualquier punto (esto es por la naturaleza de la diferenciabilidad de funciones).

Sin embargo, para $(0,1)$ si somos capaces de analizar más, pues conocemos a ambas las derivadas parciales. Entonces se tiene que cumplir lo siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial(-1,1)}(0,1)$$

$$=^{\text{(propiedades de funciones diferenciables)}}$$

$$\langle \nabla f(0,1), (-1,1) \rangle$$

$$=^{\text{(operatoria)}}$$

$$0+0$$

$$=^{\text{(operatoria)}}$$

$$0$$

Pero sabemos que la derivada direccional para este punto y dirección vale 1. Esto implica que la función no es diferenciable en $(0,1)$.