

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 22 - 28/10/2025

### Funciones en $\mathbb{R}^n$

Recordemos que una función consta de tres elementos: un dominio, un codominio y una regla que a cada elemento del dominio, le asigna uno del codominio. Trabajaremos fundamentalmente con funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , veamos algunos ejemplos que ya conocemos.

#### Ejemplos 6.1 (dominio $\mathbb{R}^2$ )

##### Ejemplo 1

Las normas con las que trabajamos en el capítulo anterior son funciones que toman valores reales (positivos específicamente):

$$f_1(x, y) = \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \quad f_2(x, y) = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

##### Ejemplo 2

Otras clases de funciones conocidas son las transformaciones lineales. En particular un ejemplo como:

$$f_3(x, y) = 2x - 3y$$

##### Ejemplo 3

Podemos también definir una función en el plano de forma arbitraria como:

$$f_4(x, y) = e^{x^2 y} + \sin(x + y) + 1$$

### Representación gráfica de una función

Si queremos representar una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , lo debemos hacer en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . Considerando las coordenadas de este espacio como  $(x, y, z)$ , usaremos el “piso” para representar el dominio y la “altura” para representar las imágenes de la función.

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Figura 2

Figure 2: Figura 2

Notemos que cuando trabajabamos con funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  la figura que obteníamos al graficar era una curva, es fácil observar que al trabajar en funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  estas resultan en una superficie de “dimensión dos”. Veamos una herramienta para obtener información parcial sobre la forma del gráfico de una función.

### Conjuntos de nivel

Los conjuntos de nivel son subconjuntos del dominio, cuyos puntos tienen la misma imagen por la función. Dado un número  $k \in \mathbb{R}$ , el conjunto de nivel de  $k$  es:

- $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\}$

Tomemos por ejemplo la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . La curva de nivel  $k = 1$  son los puntos  $(x, y)$  del plano tales que  $f(x, y) = 1$ . Veámoslo gráficamente, mostrando los conjuntos de nivel en el plano (primera imagen), y luego gráficándolos en la altura correspondiente al nivel que representan.

Otra forma de obtener información adicional es observando cortes complementarios. Por ejemplo, podemos ver cómo es el comportamiento cuando  $y = 0$ , es decir estudiar  $f(x, 0)$ . En el caso de  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , resulta  $f(x, 0) = x^2$ . Tenemos entonces que el corte de la superficie-gráfico con el plano  $y = 0$  es una parábola. Lo mismo ocurre si trabajamos con el plano  $x = 0$ . El gráfico de esta función tiene como nombre paraboloides.

Sin embargo, cuando consideramos la función  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , al cortar con el plano  $y = 0$ , resulta  $f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$ . Lo mismo ocurre con el plano  $x = 0$ . Observemos que los conjuntos de nivel son circunferencias, por lo que el gráfico es como un cono:

## Límites y continuidad

### Definición 6.4 (límite)

Dado un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in \mathbb{R}^n$  un punto de acumulación de  $D$ , decimos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= L \\ \iff \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in B^*(a, \delta) \cap D \text{ se cumple } f(x) &\in B(L, \varepsilon) \end{aligned}$$

Figura 3

Figure 3: Figura 3

Figura 4

Figure 4: Figura 4

Figura 5

Figure 5: Figura 5

Observemos que no necesitamos que la función esté definida en el punto  $a$ , e incluso si está definida en ese punto, no influye en la definición.

### Definición 6.5 (continuidad)

Dado un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $a \in \mathbb{R}^n$  un punto de  $D$ , decimos que  $f$  es continua en  $a$  sii:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in B(a, \delta) \cap D \text{ se cumple } f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$$

### Observación 6.6

El punto  $a$  debe estar en el dominio (en particular porque calculamos  $f(a)$ ), pero no necesariamente debe ser un punto de acumulación. Así podemos distinguir dos casos:

1. Si  $a$  es un punto de acumulación de  $D$ , entonces la definición de continuidad coincide con la de límite, con  $L = f(a)$ . Es decir, en ese caso:

$$f \text{ es continua en } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

2. Si  $a$  no es un punto de acumulación de  $D$ , entonces es un punto aislado. Es decir existe un radio  $\delta > 0$  tal que no hay puntos de  $D$  en  $B(a, \delta)$ . Entonces una función  $f$  siempre será continua en los puntos aislados del dominio.