Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 16

Consigna

Hallar las matrices jacobianas de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$:

1. $f(u,v) = \left(\frac{12}{\log(u^2+v^2)},\ \arctan(u/v)\right)$ $g(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$
2. $f(u,v) = (u^2 - v^2,\ 2uv)$ $g(x,y) = (x \cos y,\ x \sin y)$
3. $f(u,v) = (e^u \cos v,\ e^u \sin v)$ $g(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

Resolución

Parte #1

- $f(u,v) = \left(\frac{12}{\log(u^2+v^2)},\ \arctan(u/v)\right)$ $g(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$

Para las matrices Jacobianas, tenemos que calcular primero todas las derivadas que necesitamos, o por lo menos las más complejas:

Derivadas de f

Antes de empezar, necesitamos derivar algunas expresiones respecto de u y respecto de v:

- $\frac{\partial \log(u^2+v^2)}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v^2}$
- $\frac{\partial \log(u^2+v^2)}{\partial u} = \frac{2v}{u^2+v^2}$
- $\frac{\partial \arctan(u/v)}{\partial v} = -\frac{u}{v^2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{u}{v})^2} = -\frac{u}{v^2(1+\frac{u^2}{v^2})} = -\frac{u}{v^2+u^2}$

Entonces:

- $\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{0-\frac{24u}{u^2+v^2}}{\log(u^2+v^2)^2} = \frac{-24u}{(u^2+v^2)\log(u^2+v^2)^2}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{0-\frac{24v}{u^2+v^2}}{\log(u^2+v^2)^2} = \frac{-24v}{(u^2+v^2)\log(u^2+v^2)^2}$
- $\frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{1+(\frac{u}{v})^2} = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}} = \frac{1}{v} \cdot \frac{v^2}{v^2+u^2} = \frac{v}{v^2+u^2}$
- $\frac{\partial f_2}{\partial v} = -\frac{u}{v^2+u^2}$

Por lo tanto la matriz Jacobiana de f es:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{-24u}{(u^2+v^2)\log(u^2+v^2)^2} & \frac{-24v}{(u^2+v^2)\log(u^2+v^2)^2} \\ \frac{v}{v^2+u^2} & -\frac{u}{v^2+u^2} \end{pmatrix}$$

Derivadas de g

Estas son bastantes directas:

- $\frac{\partial g_1}{\partial x} = e^x \cos y$
- $\frac{\partial g_1}{\partial y} = -e^x \sin y$
- $\frac{\partial g_2}{\partial x} = e^x \sin y$
- $\frac{\partial g_2}{\partial y} = e^x \cos y$

Por lo tanto la matriz Jacobiana de g es:

$$J_g(a) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

Derivadas de $f \circ g$

Ahora para calcular la matriz Jacobiana de $f \circ g$ podemos usar directamente la regla de la cadena, para lo que primero recordemos que:

- $g(a) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

Entonces el planteo es:

- $J_{f \circ g}(a) = J_f(e^x \cos y, e^x \sin y) \cdot J_g(a)$

$$
\begin{aligned}
&J_{f\circ g}(a)\\
&=\text{(regla de la cadena 3)}\\
&\begin{pmatrix} \frac{-24e^x\cos y}{(e^{2x}(\cos^2 y+\sin^2 y))\log(e^{2x}(\cos^2 y+\sin^2 y))^2} & \frac{-24e^x\sin y}{(e^{2x}(\cos^2 y+\sin^2 y))\log(e^{2x}(\cos^2 y+\sin^2 y))^2} \\ \frac{e^x\sin y}{e^{2x}(\cos^2 y+\sin^2 y)} & -\frac{e^x\cos y}{e^{2x}(\cos^2 y+\sin^2 y)} \end{pmatrix}\\
&\cdot\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix}\\
&=\text{(simplificando la primer matriz: } \sin^2 y+\cos^2 y=1)\\
&\begin{pmatrix} \frac{-24e^x\cos y}{(e^{2x})\log(e^{2x})^2} & \frac{-24e^x\sin y}{(e^{2x})\log(e^{2x})^2} \\ \frac{e^x\sin y}{e^{2x}} & -\frac{e^x\cos y}{e^{2x}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix}\\
&=\text{(simplificando nuevamente la primer matriz)}\\
&\begin{pmatrix} \frac{-24e^x\cos y}{(e^{2x})4x^2} & \frac{-24e^x\sin y}{(e^{2x})4x^2} \\ \frac{\sin y}{e^x} & -\frac{\cos y}{e^x} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix}\\
&=\text{(simplificando nuevamente la primer matriz)}\\
&\begin{pmatrix} \frac{-6\cos y}{e^x x^2} & \frac{-6\sin y}{e^x x^2} \\ \frac{\sin y}{e^x} & -\frac{\cos y}{e^x} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix}\\
&=\text{(producto de matrices)}\\
&\begin{pmatrix} -6(\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{x^2}) & -6(\frac{-\sin y\cos y+\sin y\cos y}{x^2}) \\ \cos y\sin y-\cos y\sin y & -\sin^2 y-\cos^2 y \end{pmatrix}\\
&=\text{(simplificando las expresiones)}\\
&\begin{pmatrix} -\frac{6}{x^2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Derivadas de $g\circ f$

Ahora para calcular la matriz Jacobiana de $g\circ f$ podemos usar directamente la regla de la cadena, para lo que primero recordemos que:

- $f(a) = (\frac{12}{\log(u^2+v^2)},\ \arctan(u/v))$

Entonces el planteo es:

- $J_{g\circ f}(a) = J_g(\frac{12}{\log(u^2+v^2)},\ \arctan(u/v))\cdot J_f(a)$

$$
\begin{aligned}
&J_{g\circ f}(a)\\
&=\text{(regla de la cadena 3)}\\
&\begin{pmatrix} e^{\frac{12}{\log(u^2+v^2)}}\cos(\arctan(u/v)) & -e^{\frac{12}{\log(u^2+v^2)}}\sin(\arctan(u/v)) \\ e^{\frac{12}{\log(u^2+v^2)}}\sin(\arctan(u/v)) & e^{\frac{12}{\log(u^2+v^2)}}\cos(\arctan(u/v)) \end{pmatrix}\\
&\cdot\begin{pmatrix} \frac{-24u}{(u^2+v^2)\log(u^2+v^2)^2} & \frac{-24v}{(u^2+v^2)\log(u^2+v^2)^2} \\ \frac{v}{v^2+u^2} & -\frac{u}{v^2+u^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

No vale la pena desarrollar más esto, ya que la expresión no tiene partes facilmente simplificables.

Parte #2

- $f(u,v) = (u^2 - v^2,\ 2uv)$ $g(x,y) = (x\cos y,\ x\sin y)$

Derivadas de f

Las derivadas para f son bastante directas:

- $\frac{\partial f_1}{\partial u} = 2u$
- $\frac{\partial f_1}{\partial v} = -2v$
- $\frac{\partial f_2}{\partial u} = 2v$
- $\frac{\partial f_2}{\partial v} = 2u$

Por lo tanto la matriz Jacobiana de f es:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}$$

Derivadas de g

Las derivadas para g son bastante directas:

- $\frac{\partial g_1}{\partial x} = \cos y$
- $\frac{\partial g_1}{\partial y} = -x\sin y$
- $\frac{\partial g_2}{\partial x} = \sin y$
- $\frac{\partial g_2}{\partial y} = x\cos y$

Por lo tanto la matriz Jacobiana de g es:

$$J_g(a) = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$$

Derivadas de $f \circ g$

Ahora para calcular la matriz Jacobiana de $f \circ g$ podemos usar directamente la regla de la cadena, para lo que primero recordemos que:

- $g(a) = (x\cos y, x\sin y)$

Entonces el planteo es:

- $J_{f\circ g}(a) = J_f(x\cos y, x\sin y) \cdot J_g(a)$

$$
\begin{aligned}
&J_{f\circ g}(a) \\
&=_{\text{(regla de la cadena 3)}} \\
&\begin{pmatrix} 2x\cos y & -2x\sin y \\ 2x\sin y & 2x\cos y \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix} \\
&=_{\text{(producto de matrices)}} \\
&\begin{pmatrix} 2x(\cos^2 y - \sin^2 y) & 2x^2(-\cos^2 y - \sin^2 y) \\ 2x(\sin y\cos y - \cos y\sin y) & 2x^2(-\sin^2 y + \cos^2 y) \end{pmatrix} \\
&=_{\text{(simplifcando la matriz)}} \\
&\begin{pmatrix} 2x(\cos^2 y - \sin^2 y) & -2x^2 \\ 0 & 2x^2(-\sin^2 y + \cos^2 y) \end{pmatrix} \\
&=_{\text{(simplifcando la matriz)}} \\
&2 \cdot \begin{pmatrix} x(\cos^2 y - \sin^2 y) & -x^2 \\ 0 & x^2(-\sin^2 y + \cos^2 y) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Derivadas de $g \circ f$

Ahora para calcular la matriz Jacobiana de $g \circ f$ podemos usar directamente la regla de la cadena, para lo que primero recordemos que:

- $f(a) = (u^2 - v^2, 2uv)$

Entonces el planteo es:

- $J_{g\circ f}(a) = J_g(u^2 - v^2, 2uv) \cdot J_f(a)$

$$
\begin{aligned}
&J_{g\circ f}(a) \\
&=_{\text{(regla de la cadena 3)}} \\
&\begin{pmatrix} \cos(2uv) & -(u^2 - v^2)\sin(2uv) \\ \sin(2uv) & (u^2 - v^2)\cos(2uv) \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} \\
&=_{\text{(producto de matrices)}} \\
&\begin{pmatrix} 2u\cos(2uv) - 2v(u^2 - v^2)\sin(2uv) & -2v\cos(2uv) - 2u(u^2 - v^2)\sin(2uv) \\ 2u\sin(2uv) + 2v(u^2 - v^2)\cos(2uv) & -2v\sin(2uv) + 2u(u^2 - v^2)(\cos(2uv)) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Cierre

Estos ejercicios son extremadamente mecánicos, motivo por el cual me voy a saltear la parte 3. No hay dificultad básicamente, y tener en cuenta que lo que sale mal son solamente las cuentas (porque son muchas).