Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 5

Consigna

Sabiendo que $a_n \geq 0$ y que $\sum a_n$ converge, indicar si las siguientes series son convergentes o no, explicando por qué:

1. $\sum \frac{1}{a_n}$
2. $\sum a_n^2$
3. $\sum \sqrt{a_n}$
4. $\sum \log(1 + a_n)$

Resolución

Serie #1

- $\sum \frac{1}{a_n}$

Consideremos para este caso que $a_n > 0$, de lo contrario la sucesión no queda bien definida para todo $n \in \mathbb{N}$

Analizando el término general, como $a_n \to 0$, vamos a tener que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$$

Y como el término general no tiende a 0, la serie es divergente.

Serie #2

- $\sum a_n^2$

Considerando que a_n converge, tenemos que a partir de cierto $n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0$ se cumple la siguiente desigualdad:

- $0 \leq a_n \leq 1$

Entonces, a partir de este n_0 se va a cumplir la siguiente desigualdad:

- $a_n^2 \leq a_n$, por lo visto en la anterior desigualdad.

Entonces, utilizando el criterio de comparación, como $\sum a_n$ converge:

- $\sum a_n^2$ también converge.

Serie #3

- $\sum \sqrt{a_n}$

Esta serie no necesariamente converge, veámoslo con el contraejemplo: $\sum \frac{1}{n^2}$. La serie mencionada converge, pero al tomar raíz obtenemos lo siguiente:

- $\sum \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \sum \frac{1}{n}$

Y sabemos que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Por otra parte podemos ver otro ejemplo en el que la serie resultante si converge:

- $\sum \frac{1}{n^4}$

Por lo que no podemos afirmar nada sobre esta serie.

Serie #4

- $\sum \log(1 + a_n)$

Observación: Si $x \geq 0$, entonces:

- $\log(1 + x) \leq x$

Utilizamos entonces la observación con $a_n = x$, dado que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, obteniendo:

- $\sum \log(1 + a_n) \leq \sum a_n$

Y por criterio de comparación, como a_n converge, entonces:

- $\sum \log(1 + a_n)$ también converge.