Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 12

Consigna

Se sabe que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el origen y verifica:

- $f_x(0,0) = 2$,
- $f_y(0,0) = -1$

Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para $v = (h,k)$ no nulo.

Resolución

Este ejercicio es muy básico, como la función es diferenciable en el origen, podemos aplicar el teorema sobre la diferenciabilidad que nos dice que:

- Si una función es diferenciable en un punto, entonces en ese punto existen todas las derivadas direccionales y valen $\frac{\partial f}{\partial (v_1,v_2)}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_2 = \langle \nabla f(x_0,y_0), (v_1,v_2) \rangle$

Entonces simplemente aplicamos esto:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial (h,k)}(0,0) \\
&=_{\text{(por el teorema mencionado anteriormente)}} \\
&\langle \nabla f(0,0), (h,k) \rangle \\
&=_{\text{(conociendo } \nabla f(0,0))} \\
&\langle (2,-1), (h,k) \rangle \\
&=_{\text{(producto interno estándar)}} \\
&2h - k
\end{aligned}
$$

Esto resuelve el ejercicio.