

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 11

Consigna

Sean $f : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y
 $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$, con $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.
Calcular $\frac{\partial(f \circ g)}{\partial \rho}$ y $\frac{\partial(f \circ g)}{\partial \theta}$.

Resolución

Llamemos $h = f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Queremos calcular $\frac{\partial h}{\partial \rho}$ y $\frac{\partial h}{\partial \theta}$, para esto podemos usar la regla de la cadena. También consideremos las funciones coordenadas de g como:

- $g_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta$
- $g_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta$

Con esto estamos en condiciones de aplicar el teorema de la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho, \theta) \\ &= (\text{definición de la regla de la cadena 2}) \\ & \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \frac{\partial g_1}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \frac{\partial g_2}{\partial \rho}(\rho, \theta) \\ &= (\text{reemplazando funciones conocidas}) \\ & \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta \end{aligned}$$

Ahora vayamos con la derivada con respecto de θ .

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(\rho, \theta)$$

=(definición de la regla de la cadena 2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \frac{\partial g_2}{\partial \theta}(\rho, \theta)$$

=(reemplazando funciones conocidas)

$$- \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \cos \theta$$