Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 14

Consigna

Se sabe que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifica: - $f(x, x) = x$ para todo x - $f(0, y) = 0$ para todo y

Además, f es diferenciable en el origen. Calcular $f_x(0, 0)$.

Resolución

La estrategia es observar bien los datos que tenemos y sacar el máximo provecho de ellos. Por ejemplo:

- Lo primero que podemos observar fácilmente es que la derivada con respecto de y existe en los puntos de la forma $(0, y)$ para todo y. El razonamiento es análogo al que hicimos en el ejercicio 13.
- Por otro lado, como la función es diferenciable en el origen, tenemos que:
  - $\langle \nabla f(0, 0), (v_1, v_2) \rangle = \frac{\partial f}{\partial (v_1, v_2)}(0, 0)$ para cualquier dirección.

Entonces llegados a este punto, con estas observaciones relativamente simples, sabemos donde tenemos que usar la propiedad de la diferenciabilidad. Nos preguntamos entonces: ¿Para el punto $(0, 0)$ que es en donde podemos trabajar con la diferenciabilidad, existe alguna dirección para la cual conocemos la definición de la función? La respuesta es si, para cualquier dirección de la forma $v = (v_1, v_1)$, conocemos la definición de la función para $(0 + hv_1, 0 + hv_1)$, pues tiene la forma de $f(x, x)$.

Con esto en mente, consideramos el vector $v = (1, 1)$ y planteamos la definición para hallar cuanto vale:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial (1,1)}(0,0)\\
&=\text{(definición de derivada direccional)}\\
&\lim_{h \to 0} \frac{f(h,h) - f(0,0)}{h}\\
&=\text{(definición de la función)}\\
&\lim_{h \to 0} \frac{h}{h}\\
&=\text{(operatoria)}\\
&1
\end{aligned}
$$

También necesitamos calcular f_y para $(0,0)$:

$$
\begin{aligned}
&f_y(0,0)\\
&=\text{(definición de derivada parcial)}\\
&\lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}\\
&=\text{(definición de la función)}\\
&\lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h}\\
&=\text{(operatoria)}\\
&0
\end{aligned}
$$

Entonces ahora podemos plantear lo que observamos sobre la diferenciabilidad en $(0,0)$.

$$
\begin{aligned}
&\langle \nabla f(0,0), (1,1) \rangle = \frac{\partial f}{\partial (1,1)}(0,0)\\
&\iff \text{(desarrollando el producto interno)}\\
&f_x(0,0) \cdot 1 + f_y(0,0) \cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial (1,1)}(0,0)\\
&\iff \text{(reemplazando valores conocidos)}\\
&f_x(0,0) \cdot 1 + 0 = 1\\
&\iff \text{(operatoria)}\\
&f_x(0,0) = 1
\end{aligned}
$$

Con esto concluimos el ejercicio.