

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 16

Consigna

Hallar las matrices jacobianas de f , g , $f \circ g$ y $g \circ f$:

1. $f(u, v) = \left(\frac{12}{\log(u^2+v^2)}, \arctan(u/v) \right)$ $g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$
2. $f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ $g(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$
3. $f(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v)$ $g(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right)$

Resolución

Parte #1

- $f(u, v) = \left(\frac{12}{\log(u^2+v^2)}, \arctan(u/v) \right)$ $g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

Para las matrices Jacobianas, tenemos que calcular primero todas las derivadas que necesitamos, o por lo menos las más complejas:

Derivadas de f

Antes de empezar, necesitamos derivar algunas expresiones respecto de u y respecto de v :

- $\frac{\partial \log(u^2+v^2)}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v^2}$
- $\frac{\partial \log(u^2+v^2)}{\partial v} = \frac{2v}{u^2+v^2}$
- $\frac{\partial \arctan(u/v)}{\partial v} = -\frac{u}{v^2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{u}{v})^2} = -\frac{u}{v^2(1+\frac{u^2}{v^2})} = -\frac{u}{v^2+u^2}$

Entonces:

- $\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{0 - \frac{24u}{u^2+v^2}}{\log(u^2+v^2)^2} = \frac{-24u}{(u^2+v^2) \log(u^2+v^2)^2}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{0 - \frac{24v}{u^2+v^2}}{\log(u^2+v^2)^2} = \frac{-24v}{(u^2+v^2) \log(u^2+v^2)^2}$
- $\frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{1+(\frac{u}{v})^2} = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}} = \frac{1}{v} \cdot \frac{v^2}{v^2+u^2} = \frac{v}{v^2+u^2}$
- $\frac{\partial f_2}{\partial v} = -\frac{u}{v^2+u^2}$

Por lo tanto la matriz Jacobiana de f es:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{-24u}{(u^2+v^2)\log(u^2+v^2)^2} & \frac{-24v}{(u^2+v^2)\log(u^2+v^2)^2} \\ \frac{v}{v^2+u^2} & -\frac{u}{v^2+u^2} \end{pmatrix}$$

Derivadas de g

Estas son bastantes directas:

- $\frac{\partial g_1}{\partial x} = e^x \cos y$
- $\frac{\partial g_1}{\partial y} = -e^x \sin y$
- $\frac{\partial g_2}{\partial x} = e^x \sin y$
- $\frac{\partial g_2}{\partial y} = e^x \cos y$

Por lo tanto la matriz Jacobiana de g es:

$$J_g(a) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

Derivadas de $f \circ g$

Ahora para calcular la matriz Jacobiana de $f \circ g$ podemos usar directamente la regla de la cadena, para lo que primero recordemos que:

- $g(a) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

Entonces el planteo es:

- $J_{f \circ g}(a) = J_f(e^x \cos y, e^x \sin y) \cdot J_g(a)$

$$\begin{aligned}
& J_{f \circ g}(a) \\
& = (\text{regla de la cadena 3}) \\
& \left(\begin{array}{cc} \frac{-24e^x \cos y}{(e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)) \log(e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y))^2} & \frac{-24e^x \sin y}{(e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)) \log(e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y))^2} \\ \frac{e^x \sin y}{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} & -\frac{e^x \cos y}{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} \end{array} \right) \\
& \cdot \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \\
& = (\text{simplificando la primer matriz: } \sin^2 y + \cos^2 y = 1) \\
& \left(\begin{array}{cc} \frac{-24e^x \cos y}{(e^{2x}) \log(e^{2x})^2} & \frac{-24e^x \sin y}{(e^{2x}) \log(e^{2x})^2} \\ \frac{e^x \sin y}{e^{2x}} & -\frac{e^x \cos y}{e^{2x}} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \\
& = (\text{simplificando nuevamente la primer matriz}) \\
& \left(\begin{array}{cc} \frac{-24e^x \cos y}{(e^{2x}) 4x^2} & \frac{-24e^x \sin y}{(e^{2x}) 4x^2} \\ \frac{\sin y}{e^x} & -\frac{\cos y}{e^x} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \\
& = (\text{simplificando nuevamente la primer matriz}) \\
& \left(\begin{array}{cc} \frac{-6 \cos y}{\frac{e^x x^2}{e^x}} & \frac{-6 \sin y}{\frac{e^x x^2}{e^x}} \\ \frac{\sin y}{e^x} & -\frac{\cos y}{e^x} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \\
& = (\text{producto de matrices}) \\
& \begin{pmatrix} -6 \left(\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{x^2} \right) & -6 \left(\frac{-\sin y \cos y + \sin y \cos y}{x^2} \right) \\ \cos y \sin y - \cos y \sin y & -\sin^2 y - \cos^2 y \end{pmatrix} \\
& = (\text{simplificando las expresiones}) \\
& \begin{pmatrix} -\frac{6}{x^2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Derivadas de $g \circ f$

Ahora para calcular la matriz Jacobiana de $g \circ f$ podemos usar directamente la regla de la cadena, para lo que primero recordemos que:

- $f(a) = \left(\frac{12}{\log(u^2 + v^2)}, \arctan(u/v) \right)$

Entonces el planteo es:

- $J_{g \circ f}(a) = J_g \left(\frac{12}{\log(u^2 + v^2)}, \arctan(u/v) \right) \cdot J_f(a)$

$$\begin{aligned}
& J_{g \circ f}(a) \\
& = (\text{regla de la cadena 3}) \\
& \left(\begin{array}{cc} e^{\frac{12}{\log(u^2 + v^2)}} \cos(\arctan(u/v)) & -e^{\frac{12}{\log(u^2 + v^2)}} \sin(\arctan(u/v)) \\ e^{\frac{12}{\log(u^2 + v^2)}} \sin(\arctan(u/v)) & e^{\frac{12}{\log(u^2 + v^2)}} \cos(\arctan(u/v)) \end{array} \right) \\
& \cdot \begin{pmatrix} \frac{-24u}{(u^2 + v^2) \log(u^2 + v^2)^2} & \frac{-24v}{(u^2 + v^2) \log(u^2 + v^2)^2} \\ \frac{v}{v^2 + u^2} & -\frac{u}{v^2 + u^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

No vale la pena desarrollar más esto, ya que la expresión no tiene partes fácilmente simplificables.

Parte #2

- $f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ $g(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$

Derivadas de f

Las derivadas para f son bastante directas:

- $\frac{\partial f_1}{\partial u} = 2u$
- $\frac{\partial f_1}{\partial v} = -2v$
- $\frac{\partial f_2}{\partial u} = 2v$
- $\frac{\partial f_2}{\partial v} = 2u$

Por lo tanto la matriz Jacobiana de f es:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}$$

Derivadas de g

Las derivadas para g son bastante directas:

- $\frac{\partial g_1}{\partial x} = \cos y$
- $\frac{\partial g_1}{\partial y} = -x \sin y$
- $\frac{\partial g_2}{\partial x} = \sin y$
- $\frac{\partial g_2}{\partial y} = x \cos y$

Por lo tanto la matriz Jacobiana de g es:

$$J_g(a) = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}$$

Derivadas de $f \circ g$

Ahora para calcular la matriz Jacobiana de $f \circ g$ podemos usar directamente la regla de la cadena, para lo que primero recordemos que:

- $g(a) = (x \cos y, x \sin y)$

Entonces el planteo es:

- $J_{f \circ g}(a) = J_f(x \cos y, x \sin y) \cdot J_g(a)$

$$\begin{aligned}
& J_{f \circ g}(a) \\
& \quad = (\text{regla de la cadena 3}) \\
& \quad \begin{pmatrix} 2x \cos y & -2x \sin y \\ 2x \sin y & 2x \cos y \end{pmatrix} \\
& \quad \cdot \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix} \\
& \quad = (\text{producto de matrices}) \\
& \quad \begin{pmatrix} 2x(\cos^2 y - \sin^2 y) & 2x^2(-\cos^2 y - \sin^2 y) \\ 2x(\sin y \cos y - \cos y \sin y) & 2x^2(-\sin^2 y + \cos^2 y) \end{pmatrix} \\
& \quad = (\text{simplificando la matriz}) \\
& \quad \begin{pmatrix} 2x(\cos^2 y - \sin^2 y) & -2x^2 \\ 0 & 2x^2(-\sin^2 y + \cos^2 y) \end{pmatrix} \\
& \quad = (\text{simplificando la matriz}) \\
& \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} x(\cos^2 y - \sin^2 y) & -x^2 \\ 0 & x^2(-\sin^2 y + \cos^2 y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Derivadas de $g \circ f$

Ahora para calcular la matriz Jacobiana de $g \circ f$ podemos usar directamente la regla de la cadena, para lo que primero recordemos que:

$$\bullet f(a) = (u^2 - v^2, 2uv)$$

Entonces el planteo es:

$$\bullet J_{g \circ f}(a) = J_g(u^2 - v^2, 2uv) \cdot J_f(a)$$

$$\begin{aligned}
& J_{g \circ f}(a) \\
& \quad = (\text{regla de la cadena 3}) \\
& \quad \begin{pmatrix} \cos(2uv) & -(u^2 - v^2) \sin(2uv) \\ \sin(2uv) & (u^2 - v^2) \cos(2uv) \end{pmatrix} \\
& \quad \cdot \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} \\
& \quad = (\text{producto de matrices}) \\
& \quad \begin{pmatrix} 2u \cos(2uv) - 2v(u^2 - v^2) \sin(2uv) & -2v \cos(2uv) - 2u(u^2 - v^2) \sin(2uv) \\ 2u \sin(2uv) + 2v(u^2 - v^2) \cos(2uv) & -2v \sin(2uv) + 2u(u^2 - v^2) \cos(2uv) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cierre

Estos ejercicios son extremadamente mecánicos, motivo por el cual me voy a saltar la parte 3. No hay dificultad básicamente, y tener en cuenta que lo que sale mal son solamente las cuentas (porque son muchas).