Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 5

Consigna

1. Probar que si $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ y g es una función acotada en una bola reducida de centro p, entonces $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$.
2. Calcular los límites de las siguientes funciones para $(x, y) \to (0, 0)$:
    1. $x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
    2. $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$
    3. $\frac{xy^3}{x^2+y^4} = y\frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Resolución

Parte 1

- Probar que si $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ y g es una función acotada en una bola reducida de centro p, entonces $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$.

Escribamos el significado de las hipótesis para trabajar con ellas.

Hipótesis #1

- $\lim_{x \to p} f(x) = 0$

Esto significa que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in B^*(p, \delta) \cap D : |f(x)| < \varepsilon$

Hipótesis #2

- g es una función acotada en una bola reducida de centro p

Esto significa que existen $K > 0$ y $r > 0$ tales que $\forall x \in B^*(p, r)$ se cumple que $|g(x)| < K$

Razonamiento

Por la primer hipótesis, podemos considerar $\varepsilon := \frac{\varepsilon}{K}$, para el cual tenemos que:

- $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tal que $\forall x \in B^*(p, \delta_\varepsilon) \cap D : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$

Ahora consideremos $\delta_0 := \max\{\delta_\varepsilon, r\}$. Entonces para este δ_0 se van a cumplir simultaneamente las siguientes condiciones:

- $\forall x \in B^*(p, \delta_0) \cap D : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$
- $\forall x \in B^*(p, \delta_0)$ se cumple que $|g(x)| < K$

Entonces en particular, para todo $x \in B^*(p, \delta_0) \cap D$:

- $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon$

Por lo tanto, obtuvimos lo que queríamos probar, es decir que:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in B^*(p, \delta_0) \cap D : |f(x)g(x)| < \varepsilon$

Esto concluye esta parte del ejercicio.

Parte 2

- Calcular los límites de las siguientes funciones para $(x, y) \to (0, 0)$:
    1. $x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
    2. $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$
    3. $\frac{xy^3}{x^2+y^4} = y\frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Límite #1

- $x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

Notemos que:

- Si $(x, y) \to (0, 0)$ entonces $x \to 0$.
- $\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$ siempre está acotada entre 0 y 1

Por lo tanto podemos aplicar lo probamos en la primer parte del ejercicio para concluir que:

- $\lim_{x\to(0,0)} x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$

Límite #2

- $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Consideremos el cambio por coordenadas polares:

- $x = \rho \cos\theta$
- $y = \rho \sin\theta$

Entonces:

$$\frac{xy^2}{x^2+y^2}$$
$$=$$
$$\frac{\rho^3 cos(\theta)\sin^2(\theta)}{\rho^2}$$
$$=$$
$$\rho\cos(\theta)\sin^2(\theta)$$

Por lo tanto el límite que queremos calcular equivale a:

- $\lim_{\rho\to 0}\rho\cos(\theta)\sin^2(\theta)$

Y tenemos que:

- Cuando $\rho\to 0$ entonces $\rho\to 0$ (trivial)
- $\cos(\theta)\sin^2(\theta)$ es una función siempre acotada para cualquier valor de θ

Límite #3

- $\frac{xy^3}{x^2+y^4} = y\frac{xy^2}{x^2+y^4}$

La resolución consiste en encontrar una cota, pero al revisar las soluciones se ve muy absurdo obtener esas cotas de la nada. Voy a saltear esta parte del ejercicio, revisar en las soluciones del práctico.