Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Sean A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $C = A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$.
Hallar $\mathring{C}$, $\overline{C}$ y ∂C.

Resolución

Tengamos presente la siguiente afirmación que vale para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2$:

- $\exists q \in \mathbb{Q} : x_1 \leq q \leq x_2$
- $\exists i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x_1 \leq i \leq x_2$

Que significa que ambos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$.

Puntos interiores

Trabajemos primero con el conjunto de puntos interiores. Consideremos $p = (p_1, p_2) \in C$ un punto cualquiera de C. Queremos verificar si este punto p es interior a C, entonces queremos probar que existe un $\delta > 0$ tal que:

- $B(p, \delta) \subset A \cap \mathbb{Q}^2$

Pero esto no es posible, ya que para cualquier $\delta > 0$ se cumple que:

- $\exists r_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : p_1 - \delta \leq r_1 \leq p_1 + \delta$
- $\exists r_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : p_2 - \delta \leq r_2 \leq p_2 + \delta$

Entonces considerando el punto $r = (r_1, r_2)$, tendríamos un punto conformado por coordenadas irracionales dentro de la bola abierta $B(p, \delta)$, lo que nos dice que p no puede ser interior.

Conclusión: $\mathring{C} = \emptyset$

Puntos frontera

Nuevamente consideremos $p = (p_1, p_2) \in A$. Queremos ver si el punto p es frontera de C, para esto queremos probar:

- $\forall \delta > 0 : B(p, \delta) \cap C \neq \emptyset \land B(p, \delta) \cap C^C \neq \emptyset$

Esto es bastante trivial, pues usando la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, obtenemos:

- $\exists q_1 \in \mathbb{Q} : p_1 - \delta \leq q_1 \leq p_1 + \delta$
- $\exists q_2 \in \mathbb{Q} : p_2 - \delta \leq q_2 \leq p_2 + \delta$
- $\exists r_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : p_1 - \delta \leq r_1 \leq p_1 + \delta$
- $\exists r_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : p_2 - \delta \leq r_2 \leq p_2 + \delta$

Por lo que considerando $q = (q_1, q_2)$ y $r = (r_1, r_2)$, tenemos que:

- $q \in C$ y $r \in C^C$
- Por construcción, ambos q, r pertenecen a la bola abierta $B(p, \delta)$

Conclusión: $p \in A$ es un punto frontera, y como consideramos uno genérico, este razonamiento vale para todo $p \in A$, es decir que $\partial C = A \cup \partial A$

Clausura de C

La clasura de C es por definición:

- $\overline{C} = A \cup \partial C = A \cup \partial A = \overline{A}$