

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 en $(0, 0)$ de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x^2+1}\right)$
2. $f(x, y) = e^x \cos(y)$
3. $f(x, y) = \log(xy + 1)$

Resolución

Parte 1

- $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x^2+1}\right)$

Vamos a saltar esta parte por la complejidad de los cálculos. No es demasiado difícil, pero no es lo más importante de estudiar para este momento.

Parte 2

- $f(x, y) = e^x \cos(y)$

La resolución para este ejercicio es más fácil usando la propiedad que vimos en el ejercicio uno. La propiedad nos dice que dada $f(x) = g(x)h(x)$, entonces $T_3 f = T_3 g \cdot T_3 h$ removiendo todos los términos de orden mayor a tres.

Entonces trabajamos con las funciones:

- $g(x) = e^x$
- $h(y) = \cos y$

Son funciones de cálculo uno, veamos directamente su desarrollo de Taylor en 0:

- $T_3 g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
- $T_3 h(y) = 1 + 0 + \frac{y^2}{2} + 0 = 1 - \frac{y^2}{2}$

Por lo tanto, utilizando la propiedad vista anteriormente:

$$\begin{aligned}
& T_3 f(\Delta x, \Delta y) \\
& \quad = (\text{propiedad descrita al inicio}) \\
& T_3 g(\Delta x) \cdot T_3 h(\Delta y) \\
& \quad = (\text{operatoria (ya eliminando términos de orden mayor a tres)}) \\
& 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^2 x}{2}
\end{aligned}$$

Parte 3

- $f(x, y) = \log(xy + 1)$

La estrategia para esta parte será usar la propiedad que ya vimos sobre la composición, teniendo que $f(x, y) = h(g(x, y))$ con:

- $h(x) = \log(x)$
- $g(x, y) = xy + 1$

Lo bueno es que ya tenemos parte del problema resuelto, pues g es una función polinómica, por lo tanto su diferencial de grado tres es exactamente si misma:

- $T_3 g(\Delta x, \Delta y) = \Delta x \Delta y + 1$

Por otra parte, cómo tenemos que $g(0, 0) = 1$ (que es el punto para el que queremos calcular el desarrollo de Taylor), queremos obtener $T_3 h$ para el punto $x = 1$. Al ser una función de cálculo uno, sabemos que esto está dado por:

- $T_3 h(\Delta x) = 0 + (\Delta x - 1) - \frac{(\Delta x - 1)^2}{2} + \frac{(\Delta x - 1)^3}{6}$

Nota: Los -1 que vemos, son parte de la definición, solo que por lo general trabajamos en el punto $x = 0$, cuando esto no es cierto, a las variables que multiplican a los coeficientes hay que restarles el punto en el que evaluamos Taylor.

Entonces, ahora tenemos todos los ingredientes para usar la propiedad de la composición que conocemos:

$$\begin{aligned}
& T_3 f(\Delta x, \Delta y) \\
& \quad = (\text{propiedad de la composición}) \\
& T_3 h \circ T_3 g \\
& \quad = (\text{reemplazando lo conocido (ya eliminando términos de grado mayor a tres)}) \\
& 0 + \Delta x \Delta y \\
& \quad = (\text{operatoria}) \\
& \Delta x \Delta y
\end{aligned}$$