

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 8 - 26/08/2025

### Sucesiones

#### Definición 3.5

Decimos que una sucesión  $a_n$  está acotada si  $\exists K \in \mathbb{R}$  tal que  $|a_n| \leq K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . También decimos que la sucesión está acotada superiormente cuando existe un  $K \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n < K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y de manera similar se define la acotación inferior.

#### Proposición 3.6

Si  $a_n$  tiene límite, entonces está acotada.

#### Demostración

Tomemos  $\varepsilon > 0$  cualquiera, por ejemplo  $\varepsilon = 1$ . Como  $a_n$  converge, tenemos que:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0 : a_n \in E(L, 1)$

A partir de esto podemos deducir que:

- $|a_n| < |L| + 1$

Por lo tanto esta cota nos vale para todos los  $n > n_0$ . Veamos que podemos hacer con todos los elementos anteriores a  $n_0$ :

- $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}$

Como es un conjunto finito, podemos tomar:

- $k = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|\}$

Y con esto podemos finalizar tomando:

- $K = \max\{k, |L| + 1\}$

Esto concluye la prueba, pues con esto se tiene que:

- $|a_n| < K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$

Que significa que la sucesión  $a_n$  está acotada.

**Observación:** Para recordar mejor esta prueba, siempre lo ideal es pensar en el caso de una sucesión con todo positivo, a partir de la misma se puede derivar todo lo equivalente a ese razonamiento cuando la sucesión tiene términos negativos y hasta un límite negativo.

### Definición 3.7

Decimos que el límite de  $a_n$  es infinito,  $\lim_{n \rightarrow \infty} = +\infty$  sii:

- $\forall K > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0 : a_n > K$

De forma equivalente, definimos que el límite de  $a_n$  es menos infinito,  $\lim_{n \rightarrow \infty} = -\infty$  sii:

- $\forall K < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n < n_0 : a_n < K$

**Observación:** Entonces tenemos que las sucesiones acotadas pueden ser convergentes o no. Qué pasa con las sucesiones no acotadas? La respuesta es que no necesariamente tienen límite más o menos infinito, por ejemplo, considerar el ejemplo de  $a_n = (-1)^n$

### Definición 3.8

Decimos que una sucesión  $a_n$  es:

- Mónotona creciente sii  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , o
- Mónotona decreciente sii  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Cuando la desigualdad es estricta, decimos que la sucesión es estrictamente mónotona.

### Teorema 3.9

Si  $a_n$  es una sucesión mónotona creciente y acotada superiormente, entonces tiene límite.

#### Demostración

Sea  $L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ , es decir, el supremo del conjunto imagen de la sucesión. Sabemos que existe por el Axioma de Completitud en los reales (ya que el conjunto es no vacío y acotado). Ahora consideremos  $\varepsilon > 0$ , queremos probar que:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > 0 : a_n \in (L - \varepsilon, L]$  (pues no es necesario considerar lo que está “a la derecha” de  $L$  ya que es supremo)

Observemos que si no existe ningún elemento  $a_n$  en el intervalo dado, entonces tendríamos que:

- $L - \frac{\varepsilon}{2}$  es cota superior, además:
- $L - \frac{\varepsilon}{2} < L$

Por lo tanto,  $L - \frac{\varepsilon}{2}$  es supremo, lo cual es absurdo pues  $L$  es el supremo. Entonces necesariamente tiene que existir un elemento  $a_{n_0} \in E(L - \varepsilon, L]$ .

Cómo  $a_n$  es monótona creciente, tenemos que todos los elementos “posteriores” a  $a_{n_0}$  cumplen con lo siguiente:

- $\forall a_n > a_{n_0} : a_n \in [a_{n_0}, L]$

Por lo tanto, a partir de  $n_0$ , se cumple que  $a_n \in (L - \varepsilon, L]$ , como queríamos probar.

**Observación:** De forma análoga tenemos que toda sucesión monótona decreciente acotada inferiormente tiene límite.