

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 3

### Consigna

Sea  $y(x)$  la solución a la ecuación diferencial

$$\frac{y'(x)e^{x^2}}{x} = -2(1 + y^2(x))$$

que cumple  $y(0) = 0$ . Entonces:

(A)  $y(\sqrt{2}) = -e$

(B)  $y(\sqrt{2}) = \tan(1 + e^2)$

(C)  $y(\sqrt{2}) = \tan(1)$

(D)  $y(\sqrt{2}) = 1$

(E)  $y(\sqrt{2}) = \tan(e^{-2} - 1)$

### Resolución

Queremos resolver la ecuación diferencial planteada, para esto veamos a que podemos llegar despejando:

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)e^{x^2}}{x} &= -2(1 + y^2(x)) \\ \iff (\text{operatoria}) \quad y'(x)e^{x^2} &= -2x(1 + y^2(x)) \\ \iff (\text{operatoria}) \quad \frac{y'(x)}{1 + y^2(x)} &= -2xe^{-x^2} \end{aligned}$$

Perfecto, es una ecuación de variables separables, por lo tanto podemos resolverla operando:

$$\begin{aligned}
\frac{y'(x)}{1+y^2(x)} &= -2xe^{-x^2} \\
&\iff \text{(integrando ambas partes respecto de } x) \\
\int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)} dx &= \int -2xe^{-x^2} dx \\
&\iff \text{(cambio de variable: } u=y(x)dx; du=y'(x)dx) \\
\int \frac{1}{1+u^2} du &= \int -2xe^{-x^2} dx \\
&\iff \text{(cambio de variable: } v=-x^2; dv=-2xdx) \\
\int \frac{1}{1+u^2} du &= \int e^v dv \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
\arctan(u) + k_1 &= e^v + k_2 \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
u &= \tan(e^v + k_2 - k_1) \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
u &= \tan(e^v + C) \\
&\iff \text{(deshaciendo cambios de variable)} \\
y(x) &= \tan(e^{-x^2} + C)
\end{aligned}$$

Apliquemos la condición inicial:  $y(0) = 0$ :

- $\tan(e^0 + C) = 0 \implies \tan(1 + C) = 0$

De donde concluimos que  $C = -1$ , por lo tanto tenemos que:

- $y(\sqrt{2}) = \tan(e^{-\sqrt{2}^2} - 1) = \tan(e^{-2} - 1)$

Con esto concluimos que la respuesta correcta es la opción (E).