

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales mediante el cambio de variables $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, de forma de llevarlas a ecuaciones de variables separadas del tipo $u' = A(u)B(x)$:

1. $x^2y' + y(y - x) = 0$
2. $(x + y)y' = x - y$

Resolución

Parte 1

- $x^2y' + y(y - x) = 0$

El cambio de variables a utilizar es el siguiente:

- $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, por lo tanto:
- $u'(x) = \frac{x \cdot y'(x) - y(x)}{x^2}$

En base a esto, veamos de despejar y' e y para sustituirlas por una expresión en función de u y x :

- $y(x) = x \cdot u(x)$

Veamos para $y'(x)$:

$$\begin{aligned}y'(x) &= \frac{u'(x)x^2 + y(x)}{x} \\&\Leftrightarrow \\y'(x) &= \frac{u'(x)x^2 + x \cdot u(x)}{x} \\&\Leftrightarrow \\y'(x) &= u'(x)x + u(x)\end{aligned}$$

Ahora si, sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
& x^2 y' + y(y - x) = 0 \\
& \iff (y=xu; y'=u'x+u) \\
& x^2(u'x + u) + xu(xu - x) = 0 \\
& \iff \\
& x^2(u'x + u) + x^2u(u - 1) = 0 \\
& \iff \\
& x^3u' + x^2u + x^2u^2 - x^2u = 0 \\
& \iff \\
& x^3u' + x^2u^2 = 0 \\
& \iff (\text{divido por } x^2 \neq 0) \\
& xu' + u^2 = 0 \\
& \iff \\
& u' = \frac{-u^2}{x}
\end{aligned}$$

Donde esto último si es de variables separables, operando:

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{-u^2}{x} \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{u'}{-u^2} &= \frac{1}{x} \\
&\Leftrightarrow \\
\int \frac{u'}{-u^2} dx &= \int \frac{1}{x} dx \\
&\Leftrightarrow (v=u(x); dv=u'(x)dx) \\
\int \frac{u'}{-u^2} dx &= \ln|x| + k_1 \\
&\Leftrightarrow \\
\int -v^{-2} dv &= \ln|x| + k_1 \\
&\Leftrightarrow \\
-\left(\frac{v^{-1}}{-2+1} + k_2\right) &= \ln|x| + k_1 \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{1}{v} - k_2 &= \ln|x| + k_1 \\
&\Leftrightarrow (C=k_1+k_2) \\
v &= \frac{1}{\ln|x| + C} \\
&\Leftrightarrow (\text{deshaciendo el cambio de variable}) \\
u &= \frac{1}{\ln|x| + C}
\end{aligned}$$

Y ahora recordando que $y = ux$:

- $y = \frac{x}{\ln|x|+C}$

Parte 2

- $(x+y)y' = x-y$

El cambio de variables a utilizar es el siguiente:

- $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, por lo tanto:
- $u'(x) = \frac{x \cdot y'(x) - y(x)}{x^2}$

En base a esto, veamos de despejar y' e y para sustituirlas por una expresión en función de u y x :

- $y(x) = x \cdot u(x)$

Veamos para $y'(x)$:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{u'(x)x^2 + y(x)}{x} \\
&\iff \\
y'(x) &= \frac{u'(x)x^2 + x \cdot u(x)}{x} \\
&\iff \\
y'(x) &= u'(x)x + u(x)
\end{aligned}$$

Ahora si, sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
(x+y)y' &= x-y \\
&\iff \\
(x+xu)(u'x+u) &= x-xu \\
&\iff \\
x(1+u)(u'x+u) &= x(1-u) \\
&\iff \text{(dividimos por } x \neq 0) \\
(1+u)(u'x+u) &= 1-u \\
&\iff \\
u'x+u+uu'x+u^2 &= 1-u \\
&\iff \\
u'(x+xu) &= 1-2u-u^2 \\
&\iff \\
u'x(1+u) &= 1-2u-u^2 \\
&\iff \\
u' &= \frac{1-2u-u^2}{x(1+u)} \\
&\iff \\
u' &= \frac{1-2u-u^2}{1+u} \cdot \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Donde esto último si es de variables separables, operando:

$$\begin{aligned}
u' \frac{1+u}{1-2u-u^2} &= \frac{1}{x} \\
\iff \\
\int u' \frac{1+u}{2-(u+1)^2} dx &= \int \frac{1}{x} dx \\
\iff (v=1+u(x); dv=u'(x)dx) \\
\int \frac{v}{2-v^2} dv &= \ln|x| + k_1 \\
\iff (w=2-v^2; dw=-2v dv) \\
-\frac{1}{2} \int \frac{dw}{w} &= \ln|x| + k_1 \\
\iff \\
-\frac{1}{2} \ln|w| + k_2 &= \ln|x| + k_1 \\
\iff (\text{deshaciendo cambio de variables}) \\
-\frac{1}{2} \ln|2-v^2| + k_2 &= \ln|x| + k_1 \\
\iff (\text{deshaciendo cambios de variables}) \\
\ln|2-(1+u)^2| + k_2 &= -2(\ln|x| + k_1) \\
\iff (C=-2(k_1-k_2)) \\
\ln|2-(1+u)^2| &= \ln|x^{-2}| + C \\
\iff \\
2-(1+u)^2 &= \pm C \left| \frac{1}{x^2} \right| \\
\iff (K=\pm C) \\
(1+u)^2 &= 2 - \frac{K}{x^2} \\
\iff \\
u &= -1 \pm \sqrt{2 - \frac{K}{x^2}}
\end{aligned}$$

Y ahora recordando que $y = ux$:

- $y = -x \pm \sqrt{2x^2 - K}$