Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Sea

$$f(x,y) = e^{\sin(x)+y}, \qquad g(x,y) = \sin(x) + y.$$

1. Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de g en $(0,0)$.
2. Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de f en $(0,0)$.

Observación: $T_3(f)$ puede obtenerse componiendo $T_3 h \circ T_3 g$, donde $h(x) = e^x$, y luego removiendo los términos de orden mayor a 3.

Resolución

Parte 1

- Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de g en $(0,0)$

Para el desarrollo de orden tres de g, necesitamos hallar hasta $d^3 g$, por lo que primero calcularemos todas las derivadas que necesitaremos:

- $g_x(x,y) = \cos x \implies g_x(0,0) = 1$
- $g_y(x,y) = 1 \implies g_x(0,0) = 1$
- $g_{xx}(x,y) = -\sin x \implies g_{xx}(0,0) = 0$
- $g_{xy}(x,y) = 0 \implies g_{xy}(0,0) = 0$
- $g_{yy}(x,y) = 0 \implies g_{yy}(0,0) = 0$
- $g_{xxx}(x,y) = -\cos x \implies g_{xxx}(0,0) = -1$
- $g_{xxy}(x,y) = 0 \implies g_{xxy}(0,0) = 0$
- $g_{yyx}(x,y) = 0 \implies g_{yyx}(0,0) = 0$
- $g_{yyy}(x,y) = 0 \implies g_{yyy}(0,0) = 0$

Con esto podemos calcular los diferenciales que necesitamos:

- $dg_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = 0 + 1 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y = \Delta x + \Delta y$
- $d^2 g_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = 0 + 0 + 0 = 0$
- $d^3 g_{(0,0)}(\Delta x, \Delta y) = -\Delta x^3 + 0 + 0 + 0 = -\Delta x^3$

Por lo tanto, podemos realizar el desarrollo de Taylor:

$$g(0+\Delta x, 0+\Delta y)$$

$$=^{\text{(teorema de Taylor)}}$$

$$0+\Delta x+\Delta y+0-\frac{\Delta x^3}{3!}+r(\Delta x,\Delta y)$$

$$=^{\text{(operatoria)}}$$

$$\Delta x+\Delta y-\frac{\Delta x^3}{6}+r(\Delta x,\Delta y)$$

Parte 2

- Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de f en $(0,0)$.

La estrategia para esta parte, será utilizar la observación de la consigna para el desarrollo. Notemos bien que f es exactamente $h \circ g$ con $h(x) = e^x$.

En el ejercicio uno (en realidad en cálculo uno también) ya sabemos quién es el desarrollo de Taylor de orden tres de h para cuando x tiende a cero:

- $h(0+\Delta x) = 1+\Delta x+\frac{\Delta x^2}{2}+\frac{\Delta x^3}{6}+r(\Delta x)$

Con esto estamos en condiciones de usar la observación:

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y)$$

$$=^{\text{(por la observación de la consigna)}}$$

$$T_3 h \circ T_3 g$$

$$=^{\text{(sustituyendo por lo que conocemos (ya eliminando los términos con órden mayor a 3))}}$$

$$1+\Delta x+\Delta y-\frac{\Delta x^3}{6}+\frac{\Delta x^2+2\Delta x\Delta y+\Delta y^2}{2}+\frac{\Delta x^3+3\Delta x^2\Delta y+3\Delta x\Delta y^2+\Delta y^3}{6}$$

$$=^{\text{(operatoria)}}$$

$$1+\Delta x+\Delta y+\frac{\Delta x^2+\Delta y^2}{2}+\Delta x\Delta y+\frac{\Delta y^3}{6}+\frac{\Delta x^2\Delta y+\Delta x\Delta y^2}{2}$$

Esto concluye el ejercicio.