

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 2 (evaluaciones anteriores)

### Consigna

Consideremos las siguientes sucesiones de números reales:

- $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2} \quad (n \geq 2)$
- $b_n = \frac{1}{n \ln(n)(\ln(\ln(n)))^2} \quad (n \geq 3)$

1. Para la sucesión  $(a_n)$ , estudiar su monotonía y convergencia.
2. Para la sucesión  $(b_n)$ , estudiar su monotonía y convergencia.

### Resolución

#### Parte 1

- $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2} \quad (n \geq 2)$

Veremos si la sucesión es monótona estudiando términos consecutivos, consideremos  $a_{n+1}$ :

- $a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{n+3}$

Comparemos:

$$\begin{aligned}
a_n &\geq a_{n+1} \\
&\iff \text{(reemplazando por la definición)} \\
\frac{\sqrt{n}}{n+2} &\geq \frac{\sqrt{n+1}}{n+3} \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
\sqrt{n}(n+3) &\geq \sqrt{n+1}(n+2) \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
n\sqrt{n} + 3\sqrt{n} &\geq n\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n+1} \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
3\sqrt{n} &\geq 2\sqrt{n+1} \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
9n &\geq 4(n+1) \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
9n &\geq 4n+4 \\
&\iff \text{(operatoria)} \\
n &\geq \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Que es claramente cierto pues estamos considerando  $n \geq 2$ .

Además es convergente y su límite es cero:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2} \\
&= \text{(equivalencia)} \\
&\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \\
&= \text{(operatoria)} \\
&\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= \text{(operatoria)} \\
&0
\end{aligned}$$

## Parte 2

- $b_n = \frac{1}{n \ln(n) (\ln(\ln(n)))^2}$  ( $n \geq 3$ )

Notemos que para  $n \geq 3$ :

- $\ln(n)$  es estrictamente creciente y positiva, por lo tanto:
- $\ln(\ln(n))$  también es estrictamente creciente y positiva, por lo tanto:
- $(\ln(\ln(n)))^2$  también es estrictamente creciente y positiva.

Por otra parte,  $n \ln(n)$  también es estrictamente creciente y positiva, así que tomando el producto entre estas dos sucesiones, el resultado es otra sucesión estrictamente creciente

y positiva. Por lo tanto tomando el inverso, tenemos que la función es estrictamente decreciente. Además, la función está acotada inferiormente (por cero), por lo tanto como es monótona y acotada tiene límite.