

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 2

### Consigna

Se definen los siguientes conjuntos:

- $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\}$
- $B = A_1 \cap \mathbb{Q}^2$
- $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$
- $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$
- $C = A_3 \cap \mathbb{Q}^2$
- $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$
- $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n + \frac{1}{n}, y = 1, n \geq 1\}$
- $A_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$
- $A_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 1 \leq z\}$

1. Representarlos gráficamente e investigar si están acotados.
2. Hallar el interior, la frontera y la clausura de cada uno de ellos.
3. Hallar el conjunto de sus puntos de acumulación.
4. Indicar si son abiertos.
5. Indicar si son cerrados.
6. Indicar si son compactos.

### Resolución

#### Conjunto $A_1$

- $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\}$

1. Efectivamente el conjunto está acotado considerando  $K = 4$  por la bola  $B(0, 4)$

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Figura 1

Figure 2: Figura 1

2. Veamos los conjuntos:

- $\mathring{A}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, 1 < y < 3\}$
- $\partial A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, y \in \{1, 3\}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \{1, 2\}, 1 \leq y \leq 3\}$
- $\overline{A}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}$

3. El conjunto de puntos de acumulación es  $A'_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}$

4.  $A_1$  no es abierto, pues contiene puntos frontera.

5.  $A_1$  no es cerrado, pues  $A_1^C$  contiene puntos frontera.

6.  $A_1$  no es cerrado, por lo que no es compacto.

## Conjunto $B$

- $B = A_1 \cap \mathbb{Q}^2$

Este conjunto no es graficable, pero la intuición está en el gráfico de  $A_1$ .

1. Efectivamente el conjunto está acotado considerando  $K = 4$  por la bola  $B(0, 4)$

2. Veamos los conjuntos:

- $\mathring{B} = \emptyset$  pues para cualquier  $B(p, \delta)$  existe por lo menos algún punto de coordenadas irracionales que queda por fuera del conjunto.
- $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\} = \overline{A}_1$
- $\overline{B} = \partial B$

3. El conjunto de puntos de acumulación es:

- $B' = \partial B$

4.  $B$  no es abierto, pues no tiene ningún punto interior.

5.  $B$  no es cerrado, pues su complemento  $B^C$  contiene puntos frontera (no es abierto).

6.  $B$  no es cerrado, por lo que no es compacto.

## Conjunto $A_2$

- $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

1. Claramente el conjunto  $A_2$  es NO acotado.

2. Veamos los conjuntos:

- $\mathring{A}_2 = \emptyset$
- $\partial A_2 = A_2$
- $\overline{A}_2 = A_2$

3. El conjunto de puntos de acumulación es:

- $A'_2 = A_2$

4. El conjunto  $A_2$  no es abierto pues no tiene puntos internos.

5. El conjunto  $A_2$  es cerrado, pues su complemento  $A_2^C$  no contiene puntos frontera.

6. El conjunto  $A_2$  no es compacto pues no está acotado.

## Conjunto $A_3$

- $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$

Figura 3

Figure 3: Figura 3

Figura 4

Figure 4: Figura 4

1. El conjunto  $A_3$  está acotado considerando  $K = 2$  por la bola  $B(0, 2)$
2. Veamos los conjuntos:
  - $\overset{\circ}{A}_3 = A_3$
  - $\partial A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$
  - $\overline{A}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
3. El conjunto de puntos de acumulación es:
  - $A'_3 = \overline{A}_3$
4. El conjunto  $A_3$  es abierto pues contiene a todos sus puntos interiores
5. El conjunto  $A_3$  no es cerrado pues su complemento  $A_3^C$  contiene puntos frontera (no es abierto)
6. El conjunto  $A_3$  no es cerrado, por lo tanto no es compacto

### Conjunto $C$

- $C = A_3 \cap \mathbb{Q}^2$

El conjunto no es gráficable, pero la intuición de como funciona está en la gráfica de  $A_3$

1. El conjunto  $C$  está acotado considerando  $K = 2$  por la bola  $B(0, 2)$
2. Veamos los conjuntos:
  - $\overset{\circ}{C} = \emptyset$
  - $\partial C = A_3 \cup \partial A_3 = \overline{A}_3$
  - $\overline{C} = \overline{A}_3$
3. El conjunto de puntos de acumulación es:
  - $C' = \overline{C}$
4. El conjunto  $C$  no es abierto pues no tiene puntos interiores
5. El conjunto  $C$  no es cerrado pues su complemento  $C^C$  contiene puntos frontera (no es abierto)
6. El conjunto  $C$  no es cerrado, por lo tanto no es compacto

### Conjunto $A_4$

- $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$

1. El conjunto claramente es no acotado.
2. Veamos los conjuntos:
  - $\overset{\circ}{A}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 1\}$
  - $\partial A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1\} \cup (\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 1\})$
  - $\overline{A}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$
3. El conjunto de puntos de acumulación es:
  - $A'_4 = \overline{A}_4$
4. El conjunto  $A_4$  no es abierto pues contiene puntos frontera.

5. El conjunto  $A_4$  no es cerrado pues su complemento  $A_4^C$  contiene puntos frontera (no es cerrado)
6. El conjunto  $A_4$  no es cerrado, por lo tanto tampoco es compacto.