

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## CLASE 16 - 30/09/2025

### Integrales impropias de primera especie

#### Teorema 4.11 (criterio serie-integral)

Sea  $f : [k, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  monótona decreciente, y  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$ . Entonces:

- $\sum_{n=k}^{+\infty} f(n)$  y  $\int_k^{+\infty} f(x)dx$  son de la misma clase.

#### Demostración

Supongamos que  $k$  es entero, o tomamos el primer entero mayor que  $k$ .

Como  $f$  es decreciente, en cada intervalo de la forma  $[n, n+1]$  tenemos que:

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) \quad \forall t \in [n, n+1]$$

Si integramos en el intervalo mencionado, obtenemos que:

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} f(n)dt \quad \forall t \in [n, n+1]$$

Y como  $f(n)$  y  $f(n+1)$  son constantes:

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \quad \forall t \in [n, n+1]$$

Y como este razonamiento es válido para todo  $n$ , podemos sumar desde  $k$  hasta  $n$ , obteniendo:

$$\sum_{n=k}^{n+1} f(n) \leq \int_k^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{n=k}^n f(n) \quad \forall t \in [n, n+1]$$

Marcamos las desigualdades para usarlas más adelante:

- $(*)_1 : \sum_{n=k}^{n+1} f(n) \leq \int_k^{n+1} f(t)dt$

Figura 1

Figure 1: Figura 1

Figura 2

Figure 2: Figura 2

- $(*_2) : \int_k^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{n=k}^n f(n)$

Ahora veamos una representación geométrica de lo que estamos haciendo:

Bien, ahora llamemos  $F(x) = \int_k^{+\infty} f(t)dt$ . Observar que  $F$  es creciente, pues  $f$  es positiva. Por lo tanto el límite de  $F(x)$  cuando  $x$  tiende a infinito puede ser finito (en caso de que  $F$  esté acotada) o infinito (en caso de que  $F$  no esté acotada). Entonces:

- Si  $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$  es convergente, entonces sabemos que  $F(x)$  está acotada por el valor de la serie (por la desigualdad  $(*_2)$ ), por lo que  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$  es finito, y entonces la integral impropia es convergente.
- Si por el contrario  $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$  es divergente, entonces tenemos que  $F(x)$  es no acotada (por la desigualdad  $(*_1)$ ), de donde  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$ , y entonces la integral impropia es divergente.

En la mayoría de los casos, es más fácil hallar una primitiva que calcular la reducida enésima, o incluso que clasificar la serie mediante otros métodos.

### Ejemplo 4.12

Tomemos  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ , con  $\alpha > 0$ . Se puede ver que  $f$  es decreciente, por lo que podemos concluir que:

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  y  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  son de la misma clase.

En particular, esto nos permite clasificar la serie para valores de  $\alpha$  en  $(1, 2)$ , que era lo que nos faltaba del capítulo pasado.

Resumiendo entonces, tanto para la integral impropia  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  como para la serie  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  tenemos el siguiente comportamiento:

### Ejemplo 4.13

Clasifiquemos la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log(n)}$ . Si tomamos la función  $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x \log(x)}$ , tenemos que  $f$  es positiva, y decreciente (calculable viendo la derivada por ejemplo). Por otro lado, mediante un cambio de variable podemos calcular la primitiva:

$$\begin{aligned}
& F(x) \\
& = \\
& \int_2^x \frac{1}{t \log(t)} dt \\
& = (\text{cambio de variable } u=\log(t); du=\frac{1}{t} dt) \\
& \int_{\log(2)}^{\log(x)} \frac{1}{u} du \\
& = \\
& \log(u) \Big|_{\log(2)}^{\log(x)} \\
& = \\
& \log(\log(x)) - \log(\log(2))
\end{aligned}$$

Entonces observamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$ , entonces la integral impropia  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log(x)} dx$  diverge, y por lo tanto:

- La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$  también diverge.