Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 11

Consigna

Sean $f : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y
$g : U \subset \mathbb{R}^2 \to V$, con $g(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$.
Calcular $\frac{\partial(f \circ g)}{\partial \rho}$ y $\frac{\partial(f \circ g)}{\partial \theta}$.

Resolución

Llamemos $h = f \circ g : U \to \mathbb{R}$. Queremos calcular $\frac{\partial h}{\partial \rho}$ y $\frac{\partial h}{\partial \theta}$, para esto podemos usar la regla de la cadena. También consideremos las funciones coordenadas de g como:

- $g_1(\rho, \theta) = \rho \cos\theta$
- $g_2(\rho, \theta) = \rho \sin\theta$

Con esto estamos en condiciones de aplicar el teorema de la regla de la cadena:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho, \theta) \\
&=^{\text{(definición de la regla de la cadena 2)}} \\
&\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\frac{\partial g_1}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\cos\theta)\frac{\partial g_2}{\partial \rho}(\rho, \theta) \\
&=^{\text{(reemplazando funciones conocidas)}} \\
&\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\cos\theta)\sin\theta
\end{aligned}
$$

Ahora vayamos con la derivada con respecto de θ.

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(\rho, \theta)$$

$=$(definición de la regla de la cadena 2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\frac{\partial g_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\frac{\partial g_2}{\partial \theta}(\rho, \theta)$$

$=$(reemplazando funciones conocidas)

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\cos\theta$$