Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 10

Consigna

Discutir según $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la existencia del límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + xy + y^2}$$

Resolución

Lo primero que tenemos que notar para empezar el ejercicio es que el denominador parece tener un buen comportamiento si expresamos con coordenadas polares, por lo que empezaremos por ahí:

- $x = \rho\cos\theta$
- $y = \rho\sin\theta$

Entonces, sustituyendo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + xy + y^2} \\
&=^{\text{(reemplazando por polares)}} \\
&\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\alpha+\beta}\cos^\alpha \sin^\beta}{\rho^2 + \rho^2\cos\theta\sin\theta} \\
&=^{\text{(operando)}} \\
&\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\alpha+\beta}\cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta}{\rho^2(1 + \cos\theta\sin\theta)} \\
&=^{\text{(operando)}} \\
&\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\alpha+\beta-2}\cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta}{1 + \cos\theta\sin\theta}
\end{aligned}$$

En este punto, tenemos que:

- Si $\alpha + \beta \leq 2$, entonces el límite no existe pues depende de que θ tomemos.

- Si $\alpha + \beta > 2$, entonces tenemos algo que tiende a 0, multiplicando a algo acotado $\left(\frac{\cos^\alpha \theta \sin^\beta \theta}{1+\cos\theta\sin\theta}\right)$.

Pero cuidado con esto último, que pasa si α o β son negativos? Consideremos el caso donde $\alpha + \beta > 2$ y $\beta < 0 < 2 < \alpha$ (el otro es análogo), y la dirección cuando $y = x^{\frac{\alpha}{-\beta}}$, entonces:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + xy + y^2} \\
&=_{(y=x^{\frac{\alpha}{-\beta}})} \\
&\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha (x^{\frac{\alpha}{-\beta}})^\beta}{x^2 + x^{\frac{\alpha+1}{-\beta}} + x^{\frac{\alpha}{-\beta}}} \\
&=_{(\text{operando})} \\
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2 + x^{\frac{\alpha}{-\beta}+1} + x^{\frac{2\alpha}{-\beta}}} \\
&=_{(\text{operando})} \\
&\infty
\end{aligned}$$

Ahora tomemos la dirección $y = x$, entonces:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + xy + y^2} \\
&=_{(y=x)} \\
&\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha x^\beta}{x^2 + x^2 + x^2} \\
&=_{(\text{operando})} \\
&\lim_{x\to 0} (x^{\alpha+\beta-2}) \frac{x^2}{x^2 + x^2 + x^2}
\end{aligned}$$

Que es un límite de 0 por acotado, de modo que entonces hallamos dos direcciones dan límites distintos. Con esto concluimos el ejercicio, marcando cuando el límite existe:

- Si $\alpha + \beta > 2$ y ambos α, β son positivos entonces el límite existe.
- En cualquier otro caso, el límite no existe.