

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 7

### Consigna

Estudiar la convergencia de las siguientes series alternadas. En caso de que sean convergentes, estudiar si también lo son absolutamente:

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$
2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1}$
3.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{6n - 5}$
4.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n^3 + 2n^2 + 8n + 5)}{n^5 + 4n^3 + 15}$

### Resolución

El único criterio para clasificar series alternadas es el criterio de Leibnitz, veamos su enunciado a continuación:

Si  $a_n$  es una sucesión monótona decreciente que tiende a 0, entonces la serie alternada  $\sum (-1)^n a_n$  es convergente.

### Serie #1

$$\bullet \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$$

Estudiemos primero convergencia absoluta. Es decir que queremos clasificar la siguiente serie:

$$\bullet \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$$

Esta es una sucesión geométrica:

$$\bullet \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Y como  $\frac{1}{3} < 1$  la serie converge.

Por lo tanto  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$  es absolutamente convergente, es decir, también es convergente.

### Serie #2

$$\bullet \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1}$$

Estudiemos primero convergencia absoluta. Es decir que queremos clasificar la siguiente serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$

Utilizando el criterio de equivalentes, tenemos que  $\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ , y como  $\sum \frac{1}{n}$  diverge:

- $\sum \frac{n}{n^2+1}$  diverge también

Por lo tanto  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}$  NO es absolutamente convergente.

Ahora podemos pasar a estudiar convergencia, para lo que vamos a estudiar la monotonía de:

- $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

La estrategia que emplearemos será probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

- $a_n \geq a_{n+1}$

Desarrollemos:

$$\begin{aligned}
 a_n &\geq a_{n+1} \\
 &\iff \\
 \frac{n}{n^2+1} &\geq \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \\
 &\iff \\
 n((n+1)^2+1) &\geq (n+1)(n^2+1) \\
 &\iff \\
 n(n+1)\cancel{(n+1)} + n &\geq \cancel{(n+1)}(n^2+1) \\
 &\iff \\
 n(n+1) + n &\geq (n^2+1) \\
 &\iff \\
 n^2 + 2n &\geq n^2 + 1
 \end{aligned}$$

Y esto último es cierto  $\forall n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq 1$  que es el dominio en el que estamos trabajando. Por lo que concluimos que  $a_n$  es monótona decreciente.

Por otra parte, tenemos que:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$

Entonces usando el criterio de Leibnitz, podemos concluir que la serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}$  es convergente.

### Serie #3

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{6n-5}$

Estudiemos primero convergencia absoluta. Es decir que queremos clasificar la siguiente serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{6n-5}$

Inmediatamente podemos ver que la serie no es absolutamente convergente pues:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n-5} \\ & \sim \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n} \\ & = \\ & \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Como el término general no tiende a 0, la serie no puede ser convergente. Concluimos que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{6n-5}$  NO es absolutamente convergente.

Y ni siquiera entramos a estudiar convergencia, pues por el mismo argumento, la sucesión  $a_n = \frac{n}{6n-5}$  no converge a 0.

## Serie #4

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n^3+2n^2+8n+5)}{n^5+4n^3+15}$

Estudiemos primero convergencia absoluta. Es decir que queremos clasificar la siguiente serie:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+2n^2+8n+5}{n^5+4n^3+15}$

Por criterio de equivalentes, como  $\frac{n^3+2n^2+8n+5}{n^5+4n^3+15} \sim \frac{n^3}{n^5} \sim \frac{1}{n^2}$  la serie converge, pues  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge.

Por lo tanto  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n^3+2n^2+8n+5)}{n^5+4n^3+15}$  es absolutamente convergente, es decir, también es convergente.