

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 05 - Análisis dimensional

Fecha: 10-02-2026 Estado: Con ayuda

Consigna

Considera un péndulo constituido por una masa m colgando de un hilo inextensible y sin masa de largo l .

Mediante un análisis dimensional, determina la relación funcional entre el período p de las oscilaciones del péndulo y los parámetros del problema (m , l y la aceleración de la gravedad g).

- ¿Cómo podría determinarse empíricamente la validez del resultado?
- ¿Cómo podríamos, a partir de los experimentos, determinar el valor de una constante de proporcionalidad adimensionada en la ecuación?

Resolución

Queremos determinar la relación funcional entre el periodo p de las oscilaciones del péndulo y los parámetros del problema. Primero tengamos en cuenta que:

- $[p] = T$

Por otra parte, sabemos que la aceleración es la velocidad que tiene un objeto por unidad de tiempo. A su vez, la velocidad es la longitud que recorre un objeto por unidad de tiempo. Eso nos deja con:

$$\begin{aligned} [g] & \\ &= (\text{definición de aceleración}) \\ [v] \cdot T^{-1} & \\ &= (\text{definición de velocidad: } [v] = LT^{-1}) \\ LT^{-2} & \end{aligned}$$

Por lo tanto, de forma general, los parámetros del problema tienen una dimensión:

- $[p] = [g^a][m^b][l^c] = L^a T^{-2a} M^b L^c = L^{a+c} T^{-2a} M^b$

Sabiendo que $[p] = T$, podemos obtener un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ -2a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos que:

- $b = 0$
- $a = -0.5$
- $c = 0.5$

Por lo tanto, tenemos que $p \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$. Vayamos ahora con las preguntas:

1. ¿Cómo podría determinarse empíricamente la validez del resultado?

El resultado obtenido nos dice que el período **NO** depende de la masa y que crece como \sqrt{l} . Consideremos p_0 como el período para una masa m_0 y una longitud de hilo l_0 , entonces:

- Si aumentamos la masa, mantenemos la longitud del hilo igual y el período se mantiene igual a p_0 , entonces el resultado es válido
- Por otra parte, si aumentamos el largo del hilo a $2l_0$, entonces el período tiene que valer $\sqrt{2}p_0$. Si esto sucede entonces el resultado es válido.

Si las dos condiciones se cumplen, entonces el resultado que obtuvimos es correcto.

2. ¿Cómo podríamos, a partir de los experimentos, determinar el valor de una constante de proporcionalidad adimensionada en la ecuación?

La respuesta a esta pregunta es bastante simple, la proporcionalidad nos dice que:

- $p = C \sqrt{\frac{l}{g}}$

Por lo tanto, sabiendo la longitud del hilo, podemos despejar sin problema la constante C de proporcionalidad. La precisión del valor de la constante va a estar dada según la cantidad de veces que hagamos el experimento.