

# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 05 - Análisis dimensional

**Fecha:** 10-02-2026 **Estado:** Con ayuda

### Consigna

Considera un péndulo constituido por una masa  $m$  colgando de un hilo inextensible y sin masa de largo  $l$ .

Mediante un análisis dimensional, determina la relación funcional entre el período  $p$  de las oscilaciones del péndulo y los parámetros del problema ( $m$ ,  $l$  y la aceleración de la gravedad  $g$ ).

- ¿Cómo podría determinarse empíricamente la validez del resultado?
- ¿Cómo podríamos, a partir de los experimentos, determinar el valor de una constante de proporcionalidad adimensionada en la ecuación?

### Resolución

Queremos determinar la relación funcional entre el periodo  $p$  de las oscilaciones del péndulo y los parámetros del problema. Primero tengamos en cuenta que:

- $[p] = T$

Por otra parte, sabemos que la aceleración es la velocidad que tiene un objeto por unidad de tiempo. A su vez, la velocidad es la longitud que recorre un objeto por unidad de tiempo. Eso nos deja con:

$$\begin{aligned} &[g] \\ &= (\text{definición de aceleración}) \\ &[v] \cdot T^{-1} \\ &= (\text{definición de velocidad: } [v] = LT^{-1}) \\ &LT^{-2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, de forma general, los parámetros del problema tienen una dimensión:

- $[p] = [g^a][m^b][l^c] = L^a T^{-2a} M^b L^c = L^{a+c} T^{-2a} M^b$

Sabiendo que  $[p] = T$ , podemos obtener un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ -2a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos que:

- $b = 0$
- $a = -0.5$
- $c = 0.5$

Por lo tanto, tenemos que  $p \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$ . Vayamos ahora con las preguntas:

**1. ¿Cómo podría determinarse empíricamente la validez del resultado?**

El resultado obtenido nos dice que el período **NO** depende de la masa y que crece como  $\sqrt{l}$ . Consideremos  $p_0$  como el período para una masa  $m_0$  y una longitud de hilo  $l_0$ , entonces:

- Si aumentamos la masa, mantenemos la longitud del hilo igual y el período se mantiene igual a  $p_0$ , entonces el resultado es válido
- Por otra parte, si aumentamos el largo del hilo a  $2l_0$ , entonces el período tiene que valer  $\sqrt{2}p_0$ . Si esto sucede entonces el resultado es válido.

Si las dos condiciones se cumplen, entonces el resultado que obtuvimos es correcto.

**2. ¿Cómo podríamos, a partir de los experimentos, determinar el valor de una constante de proporcionalidad adimensionada en la ecuación?**

La respuesta a esta pregunta es bastante simple, la proporcionalidad nos dice que:

- $p = C\sqrt{\frac{l}{g}}$

Por lo tanto, sabiendo la longitud del hilo, podemos despejar sin problema la constante  $C$  de proporcionalidad. La precisión del valor de la constante va a estar dada según la cantidad de veces que hagamos el experimento.