

## Ejercicio 4

### Consigna

Sea  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Probar que:

1.  $T$  es invertible  $\iff 0$  no es valor propio de  $T$ .
2. Si  $T$  es invertible y  $\lambda$  es valor propio de  $T$ , entonces  $\lambda^{-1}$  es valor propio de  $T^{-1}$ .
3. Si  $\lambda$  es valor propio de  $T$ , entonces  $\lambda^n$  es valor propio de  $T^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Si  $T$  es invertible y  $\lambda$  es valor propio de  $T$ , entonces  $\lambda^{-n}$  es valor propio de  $T^{-n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Nota:** Existen resultados análogos para matrices cuadradas.

### Resolución

Veamos cada afirmación de forma separada

#### Afirmación #1

$T$  es invertible  $\iff 0$  no es valor propio de  $T$ .

( $\Rightarrow$ )  $T$  es invertible, esto nos dice que  $T$  es biyectiva, y además nos dice que  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ , es decir, el único vector que mapea a 0 es el 0 (todo esto es teórico).

Sabiendo esto, supongamos que 0 es valor propio de  $T$ , entonces existe un vector propio  $v \neq 0$  tal que  $T(v) = 0 \cdot v = 0$ , pero esto contradice que  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ , ya que dicho vector pertenecería al núcleo de  $T$ , por lo que 0 no puede ser valor propio de  $T$ .

( $\Leftarrow$ ) 0 NO es valor propio de  $T$ , esto implica que  $\nexists v \in V$  tal que  $T(v) = 0 \cdot v = 0$ , es decir, que el único vector que mapea a 0 es el 0. Esto implica que  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ , por lo que  $T$  es inyectiva (teórico). Además como estamos trabajando en un espacio finito, si  $T$  es inyectiva, entonces también es sobreyectiva. Por lo que  $T$  es biyectiva, y por lo tanto invertible.

#### Afirmación #2

Si  $T$  es invertible y  $\lambda$  es valor propio de  $T$ , entonces  $\lambda^{-1}$  es valor propio de  $T^{-1}$ .

Sabemos que  $\lambda$  es valor propio de  $T$ , por lo que existe un vector  $v \neq 0$  tal que  $T(v) = \lambda v$ . Si aplicamos  $T^{-1}$  a ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(\lambda v) \Rightarrow v = \lambda T^{-1}(v)$$

Ahora aplicando  $\lambda^{-1}$  a ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\lambda^{-1}v = T^{-1}(v)$$

Por lo que  $\lambda^{-1}$  es valor propio de  $T^{-1}$ .

### Afirmación #3

Si  $\lambda$  es valor propio de  $T$ , entonces  $\lambda^n$  es valor propio de  $T^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Sabemos que  $\lambda$  es valor propio de  $T$ , por lo que existe un vector  $v \neq 0$  tal que  $T(v) = \lambda v$ . Probemos esto por inducción:

**Caso base:**  $n = 2$

$$T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda \cdot \lambda v = \lambda^2 v$$

**Paso inductivo:** Supongamos que  $\lambda^n$  es valor propio de  $T^n$ , probemos que  $\lambda^{n+1}$  es valor propio de  $T^{n+1}$

$$T^{n+1}(v) = T(T^n(v)) = T(\lambda^n v) = \lambda^n T(v) = \lambda^n \lambda v = \lambda^{n+1} v$$

Por lo que  $\lambda^{n+1}$  es valor propio de  $T^{n+1}$ , lo que prueba la afirmación.

### Afirmación #4

Si  $T$  es invertible y  $\lambda$  es valor propio de  $T$ , entonces  $\lambda^{-n}$  es valor propio de  $T^{-n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Sabemos que  $\lambda$  es valor propio de  $T$ , por lo que  $\lambda^{-1}$  es valor propio de  $T^{-1}$ , y por la afirmación 3,  $\lambda^n$  es valor propio de  $T^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Entonces, tomando  $T = T^{-1}$  y usando la afirmación 3:

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \lambda^{-1} v \\ (T^{-1})^n &= (\lambda^{-1})^n v \\ T^{-n} &= \lambda^{-n} v \end{aligned}$$