Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 12

Consigna

1. Se consideran las bases $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
    1. Sea $Id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación identidad, hallar ${}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}}$.
    2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$.
2. Se consideran las bases $\mathcal{A} = \{(1,2),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
    1. Sean $Id_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $Id_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ las transformaciones identidad y $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, hallar ${}_{\mathcal{A}}(Id_2)_{\mathcal{E}_2}$ y ${}_{\mathcal{E}_3}(Id_3)_{\mathcal{B}}$.
    2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Hallar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$.

Resolución (parte 1)

Parte (i)

Hallemos ${}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}}$:

- $coord_{\mathcal{E}}(Id(1,1)) = (1,1)$
- $coord_{\mathcal{E}}(Id(-1,1)) = (-1,1)$

Entonces:

$$ {}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} $$

Ahora hallemos ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}}$, usando el siguiente sistema para las coordenadas:

$$ \left.\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \to \left.\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} x \\ y-x \end{matrix} \to \alpha_2 = \frac{y-x}{2}; \quad \alpha_1 = \frac{y+x}{2} $$

- $coord_{\mathcal{B}}(Id(1,0)) = coord_{\mathcal{B}}(1,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

- $coord_{\mathcal{B}}(0,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Entonces:

$$_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Parte (ii)

Tenemos T tal que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hallemos T de los vectores de $\mathcal{E}$ para encontrar $_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$ y usar las matrices de cambio de base que hallamos en la parte anterior:

- $coord_{\mathcal{E}}(T(1,0)) = T(1,0) = (0,1)$
- $coord_{\mathcal{E}}(T(0,1)) = T(0,1) = (2,0)$

Entonces:

$$_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con esto, basta con aplicar la definición de matrices de cambio de base:

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = {_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}}} \cdot {_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}} \cdot {_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}}}$$

Entonces, realizamos la multiplicación:

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Resolución (parte 2)

Parte (i)

Recordemos:

- $\mathcal{A} = \{(1,2),(0,1)\}$
- $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,0)\}$

Hallemos $_{\mathcal{A}}(Id_2)_{\mathcal{E}_2}$:

- $coord_{\mathcal{A}}(1,0) = (1,-2)$

- $coord_{\mathcal{A}}(0,1) = (0,1)$

Entonces:

$$_{\mathcal{A}}(Id_2)_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hallemos $_{\mathcal{E}_3}(Id_3)_{\mathcal{B}}$:

- $coord_{\mathcal{E}_3}(1,0,1) = (1,0,1)$
- $coord_{\mathcal{E}_3}(0,1,0) = (0,1,0)$
- $coord_{\mathcal{E}_3}(-1,0,0) = (-1,0,0)$

Entonces:

$$_{\mathcal{E}_3}(Id_3)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Parte (ii)

Tenemos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Queremos usar lo que hallamos en la parte anterior, para obtener el resultado:

$$_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{A}}(Id_2)_{\mathcal{E}_2} \cdot {}_{\mathcal{E}_2}(T)_{\mathcal{E}_3} \cdot {}_{\mathcal{E}_3}(Id_3)_{\mathcal{B}}$$

Entonces, nos faltaría hallar $_{\mathcal{E}_2}(T)_{\mathcal{E}_3}$:

- $coord_{\mathcal{E}_2}(T(1,0,0)) = T(1,0,0) = (1,0)$
- $coord_{\mathcal{E}_2}(T(0,1,0)) = T(0,1,0) = (0,1)$
- $coord_{\mathcal{E}_2}(T(0,0,1)) = T(0,0,1) = (-2,1)$

Entonces:

$$_{\mathcal{E}_2}(T)_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora si, hacemos la multiplicación para obtener el resultado:

$$_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ {}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} $$