Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Probar que T es autoadjunto, hallar su forma diagonal y una base ortonormal de vectores propios:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z, 2y, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z\right)$$

2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, -y, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z\right)$$

Resolución

Parte 1

Hallemos la matriz asociada $_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$ considerando $\mathcal{E}$ como la base canónica de $\mathbb{R}^3$

- $T(1, 0, 0) = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$
- $T(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$
- $T(0, 0, 1) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$

Por lo tanto la matriz asociada es la siguiente:

$$_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Como la matriz asociada en una base ortonormal es simétrica, entonces T es autoadjunto.

Ahora hallemos los valores propios (para un tema de cuentas, tengamos presente que si T autoadjunto entonces las raíces son reales).

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}_T(\lambda) &= \begin{vmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\left(\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \\
&= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)
\end{aligned}
$$

De donde obtenemos que:

- $\lambda_1 = 2$

Mediante Bháskara obtenemos las raíces que faltan:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \\
&= \frac{3 \pm 1}{2}
\end{aligned}
$$

De donde obtenemos:

- $\lambda_1 = 2$
- $\lambda_2 = 1$

Por lo que tenemos las siguientes multiplicidades algebraicas:

- $ma(2) = 2$
- $ma(1) = 1$

Ahora hallemos los subespacios propios:

Subespacio S_2

Para hallar el subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema:

- $(T - 2Id)v = 0$

Que corresponde a lo siguiente:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)
$$

De donde obtenemos que:

- $x = z$
- $y \in \mathbb{R}$

Podemos definir el subespacio como:

- $S_2 = \{(\alpha, \beta, \alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ o
- $[(1,0,1),(0,1,0)]$

Observemos que $(1,0,1) \perp (0,1,0)$, por lo que podemos simplemente normalizar para obtener una base ortonormal del espacio:

- $[\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),(0,1,0)]$

Ahora hagamos el mismo razonamiento para S_1.

Subespacio S_2

Para hallar el subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema:

- $(T - Id)v = 0$

Que corresponde a lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

De donde obtenemos que:

- $x = -z$
- $y = 0$

Podemos definir el subespacio como:

- $S_1 = \{(\alpha, 0, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ o
- $[(1,0,-1)]$

Normalizamos para obtener una base ortonormal:

- $[\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)]$

Entonces ahora podemos unir todo para obtener una base ortonormal de vectores propios de T:

- $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), (0,1,0)\}$

Observación: En este punto siempre conviene revisar que efectivamente los vectores sean ortogonales.

Parte 2

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, -y, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z\right)$$

Hallemos la matriz asociada ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$ considerando $\mathcal{E}$ como la base canónica de $\mathbb{R}^3$

- $T(1,0,0) = (\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2})$
- $T(0,1,0) = (0,-1,0)$
- $T(0,0,1) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$

Por lo tanto la matriz asociada es la siguiente:

$$_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Como la matriz asociada en una base ortonormal es simétrica, entonces T es autoadjunto.

Ahora hallemos los valores propios (para un tema de cuentas, tengamos presente que si T autoadjunto entonces las raíces son reales).

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_T(\lambda) &= \begin{vmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\left(\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= (-1-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \end{aligned}$$

De donde obtenemos que:

- $\lambda_1 = -1$

Mediante Bháskara obtenemos las raíces que faltan:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \\ &= \frac{3 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

- $\lambda_1 = 2$
- $\lambda_2 = 1$

Por lo que tenemos las siguientes multiplicidades algebraicas:

- $ma(2) = 1$
- $ma(1) = 1$
- $ma(-1) = 1$

Ahora hallemos los subespacios propios:

Subespacio S_2

Para hallar el subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema:

- $(T - 2Id)v = 0$

Que corresponde a lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

De donde obtenemos que:

- $x = -z$
- $y = 0$

Podemos definir el subespacio como:

- $S_2 = \{(\alpha, 0, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ o
- $[(1, 0, -1)]$

Normalizamos para obtener una base ortonormal:

- $[\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)]$

Subespacio S_1

Para hallar el subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema:

- $(T - Id)v = 0$

Que corresponde a lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

De donde obtenemos que:

- $x = z$
- $y = 0$

Podemos definir el subespacio como:

- $S_1 = \{(\alpha, 0, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ o
- $[(1, 0, 1)]$

Normalizamos para obtener una base ortonormal.

- $[\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)]$

Subespacio S_{-1}

Para hallar el subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema:

- $(T + Id)v = 0$

Que corresponde a lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{array}\right)$$

De donde obtenemos que:

- $x = z = 0$
- $y \in \mathbb{R}$

Podemos definir el subespacio como:

- $S_{-1} = \{(0, \alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ o
- $[(0, 1, 0)]$

Normalizamos para obtener una base ortonormal.

- $[(0, 1, 0)]$

Concluyendo, la base ortonormal de vectores propios de T es $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)\}$