Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 10 - 14/04/2025

Producto interno y Norma

Definición (producto interno)

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una función $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ es un producto interno si V si cumple:

1. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \forall u, v, w \in V$
2. $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$
3. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} \quad \forall u, v \in V$
4. $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$ y $\langle v, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$ y además $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = \vec{0}$

Observación:

Se cumple que:

1. $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \quad \forall u, v, w \in V$
2. $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha} \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$
3. $\left\langle \vec{0}, v\right\rangle = \left\langle v, \vec{0}\right\rangle = 0 \quad v \in V$

Demostración:

1. $\langle u, v+w\rangle = \overline{\langle v+w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$
2. $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\langle \alpha v, u\rangle} = \overline{\alpha \langle v, u\rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle v, u\rangle} = \overline{\alpha} \langle u, v\rangle$

Ejemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ y:

   - $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
   - $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

   $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$

2. $V = \mathbb{C}^n$ y:

   - $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
   - $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

   $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$

Definición (norma)

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Decimos que una función $\|.\| : V \to \mathbb{K}$ es una norma en V si cumple que:

1. $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0 \iff v = \vec{0}$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \quad \forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$ (desigualdad triangular)

Ejemplos

1. $V = \mathbb{R}^n, v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$
    1. $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$
    2. $\|v\| = \sum_{i=1}^n |v_i|$
    3. $\|v\| = (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ con $p \in \mathbb{N}$

Norma inducida

Sea V un espacio vectorial con producto interno, se define la norma inducida por el producto interno como:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad v \in V$$

Veamos que $\|.\|$ es efectivamente una norma:

1. $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$ y $\|v\| = 0 \iff \sqrt{\langle v, v \rangle} = 0 \iff \langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$
2. $\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha} \langle v, v \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} = \alpha \sqrt{\langle v, v \rangle} = \alpha \|v\|$
3. La desigualdad triangular se probará en la siguiente clase, porque requiere de otros resultados que veremos posteriormente.

Lema

Si $\|.\|$ es una norma inducida por un producto interno, entonces se cumple:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \quad \forall v, w \in V$$

Esta regla se llama la regla del paralelogramo.

Demostración:

- $\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle$
- $\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w \rangle = \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle$

Al sumar, obtenemos:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sea V un espacio vectorial con producto interno, y la norma $\|.\|$ inducida por dicho producto interno. Se cumple que:

$$| \langle v, w \rangle | \leq \|v\|\|w\| \quad \forall v, w \in V$$

Con igualdad si y sólo si $\{v, w\}$ es LD

Demostración:

- Si $w = \vec{0}$ la desigualdad se cumple trivialmente como igualdad.
- Supongamos que $w \neq \vec{0}$. Para cualquier $\alpha \in \mathbb{K}$, se cumple que:

$$0 \leq \|v - \alpha w\|^2 = \langle v - \alpha w, v - \alpha w \rangle = \langle v, v \rangle - \overline{\alpha} \langle v, w \rangle - \alpha \langle w, v \rangle + |\alpha|^2 \langle w, w \rangle$$

Eligiendo un α particular: $\alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}$ la desigualdad queda:

$$\begin{aligned}
&0 \leq \|v\|^2 - \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} \cdot \langle v, w \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \cdot \langle w, v \rangle + \frac{| \langle v, w \rangle |^2}{\|w\|^4} \cdot \|w\|^2 \iff \\
&0 \leq \|v\|^2 - \frac{| \langle v, w \rangle |^2}{\|w\|^2} \iff \\
&\frac{| \langle v, w \rangle |^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2 \iff \\
&| \langle v, w \rangle |^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \iff \\
&| \langle v, w \rangle | \leq \|v\|\|w\|
\end{aligned}$$

Observemos que hay igualdad si y sólo si:

$$0 = \|v - \alpha w\|^2$$

Y esto solo se cumple si $\{v, \alpha w\}$ son LD