Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Sea $AX = b$ un sistema de ecuaciones donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Resolver $AX = b$

2. Encontrar la "mejor solución" X aplicando el método de mínimos cuadrados, es decir, hallar X que minimice $\|AX - b\|$

Resolución

Parte 1

Para resolver $AX = b$ planteamos el siguiente sistema:

$$AX = b \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos deja con las siguientes ecuaciones:

- $x = 1$
- $y = 1$
- $x + y = 0 \iff 1 + 1 = 2 \neq 0$

Por lo tanto el sistema no tiene solución exacta.

Parte 2

Ya que vimos que el sistema no tiene una solución exacta, podemos hallar la "mejor solución" X en el sentido de mínimos cuadrados, tal que X minimice $\|AX - b\|$.

Para esto, planteamos el sistema normal para este caso, es decir:

$$A^tAX = A^tb$$

Cálculemos A^tA y A^tb

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} A^tb = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces planteamos el sistema normal con las matrices obtenidas:

$$A^tAX = A^tb \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veamos las soluciones para este sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- $x = 1 - 2y$
- $2(1-2y) + y = 1 \iff 2 - 4y + y = 1 \iff 1 = 3y \iff y = \frac{1}{3}$

Entonces $x = \frac{1}{3}$.

Por lo tanto, el vector X_0 que minimiza el error es $X_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^t$