

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 2

### Consigna

Hallar los valores propios y bases de los subespacios propios de la transformación lineal  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  tal que:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a + b + d & 2a + 3b + d \\ -2a + b + 2c - 3d & 2a - b + 5d \end{pmatrix}$$

### Resolución

Consideremos la base canónica:

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallemos los transformados de los vectores de la base  $\mathcal{E}$ :

- $T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
- $T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- $T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
- $T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

Ahora las coordenadas de dichos vectores transformados sería casi equivalente (porque la base es canónica):

- $\text{coord}_{\mathcal{E}}(T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = (4, 2 - 2, 2)$
- $\text{coord}_{\mathcal{E}}(T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = (1, 3, 1, -1)$
- $\text{coord}_{\mathcal{E}}(T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = (0, 0, 2, 0)$

- $coord_{\mathcal{E}}(T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = (1, 1, -3, 5)$

**Observación:** lo que cambia es la representación, los números son los mismos, porque la base es canónica.

Entonces:

$${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Quiero hallar el polinomio característico, para esto, veamos el siguiente recordatorio:

### Recordatorio (desarrollo de un determinante por una fila)

Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  una matriz  $(a_{i,j})$ . Podemos desarrollar el determinante de  $A$  por la fila  $i$  de la siguiente manera:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det(D_{i,j})$$

Donde  $D_{i,j}$  es la matriz obtenida de  $A$  eliminando la fila  $i$  y la columna  $j$ .

### Continuación

Utilizando el recordatorio, hallemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned}
X_T(\lambda) &= \det(\mathcal{E}(T)_{\mathcal{E}} - \lambda \mathbb{I}) \\
X_T(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
X_T(\lambda) &= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
X_T(\lambda) &= (2-\lambda) \cdot \left[ \begin{aligned} &\left( (-1)^{1+1} (4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \right) + \\ &\left( (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \right) + \\ &\left( (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) \end{aligned} \right] \\
X_T(\lambda) &= (2-\lambda) \cdot \left[ \begin{aligned} &((4-\lambda) \cdot ((3-\lambda)(5-\lambda) + 1)) + \\ &(-1 \cdot (10 - 2\lambda - 2)) + \\ &(-2 - 6 - 2\lambda) \end{aligned} \right] \\
X_T(\lambda) &= (2-\lambda) \cdot \left[ \begin{aligned} &((4-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 8\lambda + 16)) + \\ &(2\lambda - 8) + \\ &(2\lambda - 8) \end{aligned} \right] \\
X_T(\lambda) &= (2-\lambda) \cdot [((4-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 8\lambda + 16)) + 4\lambda - 16] \\
X_T(\lambda) &= (2-\lambda) \cdot [(4\lambda^2 - 32\lambda + 64 - \lambda^3 + 8\lambda^2 - 16\lambda) + 4\lambda - 16] \\
X_T(\lambda) &= (2-\lambda) \cdot [-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 44\lambda + 48]
\end{aligned}$$

Ahora, debemos factorizar el polinomio de grado 3 para encontrar sus raíces, para esto usamos el siguiente recordatorio:

## Recordatorio (teorema de raíces racionales)

Si un polinomio tiene raíces racionales, estas son de la forma  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  es un divisor del término independiente y  $q$  es un divisor del coeficiente del término de mayor grado.

## Continuación

Ahora que conocemos la forma de las raíces, podemos concluir que las raíces del polinomio de tercer grado anterior están incluidas en la lista:  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 24, \pm 48\}$

Probemos con 2:

$$-2^3 + 12 \cdot 2^2 - 44 \cdot 2 + 48 = -8 + 48 - 88 + 48 = 0$$

Entonces 2 es raíz de dicho polinomio, por lo que lo puedo factorizar usando Ruffini:

	$\lambda^3$	$\lambda^2$	$\lambda^1$	$1$
	$-1$	$12$	$-44$	$48$
$2$	$\downarrow$	$-2$	$20$	$-48$
	$-1$	$10$	$-24$	$0$

Por lo tanto, puedo expresar el polinomio de tercer grado como:

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 44\lambda + 48 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 10\lambda - 24)$$

Entonces ahora hallemos las raíces del polinomio de segundo grado usando Bhaskara:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-24)}}{2} \\ \lambda &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 96}}{-2} \\ \lambda &= \frac{-10 \pm \sqrt{4}}{-2} \\ \lambda &= \frac{-10 \pm 2}{-2} \\ \lambda_1 &= \frac{-8}{-2}; \quad \lambda_2 = \frac{-12}{-2} \\ \lambda_2 &= 4; \quad \lambda_3 = 6\end{aligned}$$

Por lo tanto, las raíces del polinomio característico son  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 4$ ,  $\lambda_3 = 6$ .

**Observación:** En este caso hallamos el 2 de dos formas diferentes, 2 es raíz doble del polinomio característico.

Ahora hallemos los subespacios propios asociados a cada valor propio, para lo que debemos resolver el siguiente sistema:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 4-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 \end{array} \right)$$

**Subespacio  $\lambda_1 = 2$**

El sistema que queremos resolver en este caso es:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Observemos que la primera es CL de la segunda, y la tercera es CL de la cuarta, por lo que podemos decir que:

- $z = -y - 2x$
- $y = 2x + 3z \Rightarrow y = 2x - 3y - 6x \Rightarrow 4y = -4x \Rightarrow y = -x$

Y con esto puedo decir que:

- $z = -y - 2x = x - 2x = -x$
- $y = -x$

Por lo tanto:

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

### Subespacio $\lambda_2 = 4$

El sistema que queremos resolver en este caso es:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Observemos que la segunda es CL de la cuarta, por lo que podemos decir que:

- $y = -z$
- $z = -2x + y \Rightarrow z = -2x - z \Rightarrow 2z = -2x \Rightarrow z = -x$
- $-2x + y - 2w - 3z = 0 \Rightarrow -2x + (-z) - 2w - 3(-x) = 0 \Rightarrow -2x + x - 2w + 3x = 0 \Rightarrow 2x - 2w = 0 \Rightarrow x = w$

Y con esto puedo decir que:

- $y = -z \Rightarrow y = x \Rightarrow y = w$
- $z = -x \Rightarrow z = -w$
- $x = w$

Por lo tanto:

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

### Subespacio $\lambda_3 = 6$

El sistema que queremos resolver en este caso es:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Observemos que la primera es CL de la cuarta, por lo que podemos decir que:

- $z = -y + 2x$
- $x = \frac{3y-z}{2} \Rightarrow x = \frac{4y-2x}{2} \Rightarrow x = 2y - x \Rightarrow x = y$
- $y = 2x + 4w + 3z$

Y con esto puedo decir que: -  $z = -y + 2x \Rightarrow z = -y + 2y \Rightarrow z = y - x = y - y = 2x + 4w + 3z \Rightarrow y = 2y + 4w + 3y \Rightarrow -4y = 4w \Rightarrow y = -w$

Poniendo todo en función de  $w$ :

- $z = -w$
- $x = -w$
- $y = -w$

Por lo tanto:

$$S_6 = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$