

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 14 - 02/06/2025

Complemento ortogonal

Proposición

Sea V un espacio vectorial con producto interno y S un subespacio vectorial de dimensión finita.

Entonces:

$$V = S \oplus S^\perp$$

Demostración

Queremos probar que:

1. $V = S + S^\perp$
2. $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$

Consideramos $\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_k\}$ una base ortonormal de S . Dado $v \in V$ definimos: $(v_s = \sum_{i=1}^k \langle v, s_i \rangle s_i) \in S$.

Veamos que $(v - v_s) \in S^\perp$, para esto, verifiquemos que $\langle v - v_s, s_j \rangle = 0$ para $j = 1, \dots, k$.

$$\begin{aligned} \langle v - v_s, s_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^k \langle v, s_i \rangle s_i, s_j \right\rangle \\ &= \langle v, s_j \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle \\ &= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto probamos que $(v - v_s) \in S^\perp$. Entonces, podemos decir que:

$$v = v_s + (v - v_s)$$

Donde: 1. $v_s \in S$ 2. $v - v_s \in S^\perp$

En conclusión $V = S + S^\perp$.

Ahora, queremos demostrar que $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$, para esto, consideremos $v \in S \cap S^\perp$: 1. $v \in S$ 2. $v \in S^\perp$

Entonces $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = \vec{0}$

Juntando ambas cosas, probamos que $V = S \oplus S^\perp$

Observación

Dado $v \in V$ existen únicos $v_s \in S$ y $v_{s^\perp} \in S^\perp$ tales que $v = v_s + v_{s^\perp}$. Nosotros utilizamos una base ortonormal $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ de S . De donde obtuvimos $v_s = \sum_{i=1}^k \langle v, s_i \rangle s_i$. Si usamos otra base ortonormal diferente, el resultado que obtenemos será el mismo. Esto significa que el cálculo de v_s no depende de la base ortonormal elegida

Proyección ortogonal

Definición

Dado $v \in V$, definimos v_s como la proyección ortogonal de v sobre el subespacio S y se denota:

$$P_S(v) = v_s = \sum_{i=1}^k \langle v, s_i \rangle s_i$$

Observación

1. La definición de proyección ortogonal no depende de la base ortonormal elegida para calcularla.
2. Si proyectamos sobre S^\perp :

$$v = v_{s^\perp} + v_{(s^\perp)^\perp} = v_{s^\perp} + v_s = P_{S^\perp}(v) + P_S(v)$$

3. $P_S : V \rightarrow V$ es un operador lineal. Esto se deriva fácilmente de las propiedades de producto interno.

Ejemplo 1

$V = P_2[x](\mathbb{R})$ con producto interno: $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$ y $S = [t^2]$. Consideremos $p(t) = 1 + t$. Queremos calcular $P_S(p)$ Usaremos la siguiente base ortonormal de S : $\mathcal{B} = \{\sqrt{\frac{5}{2}}t^2\}$ (asumiremos que es ortonormal).

Con todo esto:

$$P_S(v) = \langle p, p_1 \rangle p_1(t)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \bullet \langle p, p_1 \rangle &= \int_{-1}^1 (1+t) \sqrt{\frac{5}{2}} t^2 dt = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{5}{2}} t^2 + \sqrt{\frac{5}{2}} t^3 dt = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^1 t^2 + t^3 dt = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{4} \right) \right) = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Entonces:

$$P_S(v) = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} t^2 = \frac{10}{6} t^2 = \frac{5}{3} t^2$$

Ejemplo 2

$V = \mathbb{R}^3$ producto interno habitual. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Consideremos $v = (1, 0, 0)$, queremos calcular $P_S(v)$. Consideramos la siguiente base ortonormal de S (no verificaremos nuevamente): $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)\}$.

Con esto, podemos calcular:

$$\begin{aligned} P_S(1, 0, 0) &= \left\langle (1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) + \left\langle (1, 0, 0), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \right\rangle \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \\ &= \frac{1}{2}(1, -1, 0) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right) \end{aligned}$$

Teorema

Sea V un espacio vectorial con producto interno y S un subespacio vectorial. Entonces:

$$\|v - P_S(v)\| \leq \|v - s\| \quad \forall s \in S$$

Este resultado es muy geométrico, no es fácil entender lo que es mirando la expresión. La idea es que la proyección ortogonal del vector v es la que resulta teniendo la menor distancia al vector v en si, con respecto a todos los demás vectores de S .

Demostración

Tomemos un vector cualquiera $s \in S$, entonces:

$$\begin{aligned} &\|v - s\|^2 \\ &= (\text{norma inducida}) \\ &\langle v - s, v - s \rangle \\ &= (\text{proposición anterior}) \\ &\langle P_S(v) + P_{S^\perp}(v) - s, P_S(v) + P_{S^\perp}(v) - s \rangle \\ &= (\text{propiedades del producto interno}) \\ &\langle P_S(v) - s, P_S(v) - s \rangle + \langle P_S(v) - s, P_{S^\perp}(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v) - s \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\ &= (\langle P_S(v) - s, P_{S^\perp}(v) \rangle = 0 \text{ y } \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v) - s \rangle = 0) \\ &\langle P_S(v) - s, P_S(v) - s \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\ &= (\text{norma inducida}) \\ &\|P_S(v) - s\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \end{aligned}$$

Por lo encontrado en el último paso, si consideramos $\|v - s\|^2$ como una función, ésta alcanza su valor mínimo cuando $\|P_S(v) - s\|^2 = 0$ que es cuando $s = P_S(v)$. Podemos decir que:

$$\|v - s\|^2 \geq \|v - P_S(v)\|^2$$

Como tomamos $s \in S$ cualquiera, este razonamiento es válido para todo s . Lo que concluye la prueba