

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

1. En \mathbb{R}^3 con producto interno habitual:

1. Sea T un operador lineal cuya matriz respecto de la base $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ es:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Probar que T es autoadjunto.

2. Sea S un operador lineal con:

$${}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Es S autoadjunto?

2. En \mathbb{C}^2 con producto interno usual, sea T tal que respecto de la base $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}$$

Probar que T es autoadjunto.

3. En \mathbb{R}^3 , con producto interno habitual, se define:

- $T(1, 1, 0) = (5, 8, -1)$
- $T(1, -1, 1) = (10, -14, 10)$
- $T(2, 1, 1) = (13, a, b)$

Hallar a y b para que T sea autoadjunto.

Resolución

Parte 1

Subparte 1

Sea T un operador lineal cuya matriz respecto de la base $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ es:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Observemos que la base dada no es ortonormal. Consideremos $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 que sabemos que si es ortonormal.

Planteemos entonces un cambio de base:

$${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \bullet \quad {}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \bullet \quad {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces me queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como la matriz es simétrica para una base ortonormal, entonces T es autoadjunta.

Subparte 2

Sea S un operador lineal con:

$$_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observemos que la base dada no es ortonormal. Consideremos $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 que sabemos que si es ortonormal.

Planteemos entonces un cambio de base:

$$_{\mathcal{E}}(S)_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \bullet \quad {}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \bullet \quad {}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces me queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como la matriz es simétrica NO para una base ortonormal, entonces T NO es autoadjunta.

Parte 2

Análoga a la parte 1

Parte 3

En \mathbb{R}^3 , con producto interno habitual, se define:

- $T(1, 1, 0) = (5, 8, -1)$
- $T(1, -1, 1) = (10, -14, 10)$
- $T(2, 1, 1) = (13, a, b)$

Hallar a y b para que T sea autoadjunto.

Para que T sea autoadjunto, se tiene que verificar en general que $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$.

En particular:

- $\langle T(1, 1, 0), (2, 1, 1) \rangle = \langle (1, 1, 0), T(2, 1, 1) \rangle$
- $\langle T(1, -1, 1), (2, 1, 1) \rangle = \langle (1, -1, 1), T(2, 1, 1) \rangle$

Expandamos ambos dos:

$$\begin{aligned}
 \langle T(1, 1, 0), (2, 1, 1) \rangle &= \langle (1, 1, 0), T(2, 1, 1) \rangle \\
 &\iff (\text{definición dada de } T) \\
 \langle (5, 8, -1), (2, 1, 1) \rangle &= \langle (1, 1, 0), (13, a, b) \rangle \\
 &\iff (\text{definición de producto interno dado}) \\
 10 + 8 - 1 &= 13 + a \\
 &\iff (\text{aritmética}) \\
 a &= 4
 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
 \langle T(1, -1, 1), (2, 1, 1) \rangle &= \langle (1, -1, 1), T(2, 1, 1) \rangle \\
 &\iff (\text{definición dada de } T) \\
 \langle (10, -14, 10), (2, 1, 1) \rangle &= \langle (1, -1, 1), (13, a, b) \rangle \\
 &\iff (\text{definición de producto interno dado}) \\
 20 - 14 + 10 &= 13 - a + b \\
 &\iff (a=4) \\
 20 - 14 + 10 &= 13 - 4 + b \\
 &\iff (\text{aritmética}) \\
 b &= 7
 \end{aligned}$$

Por lo tanto T es autoadjunto sii $a = 4$ y $b = 7$