

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## CLASE 19 - 14/07/2025

### Operadores autoadjuntos

#### Teorema

Retomamos el teorema visto en la clase anterior, para demostrarlo en esta clase.

Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, sea  $T : V \rightarrow V$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $T$  es autoadjunto
2.  $\forall \mathcal{B} \rightarrow V$  ortonormal,  $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$  es simétrica
3.  $\exists \mathcal{B}_0 \rightarrow V$  ortonormal,  $_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$  es simétrica

#### Demostración

$1 \implies 2$

Queremos probar que si  $T$  es autoadjunta, entonces  $\forall \mathcal{B} \rightarrow V$  ortonormal,  $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$  es simétrica.

Entonces:

Como  $T$  es autoadjunto, entonces  $T = T^*$ , en particular tenemos que  $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = _{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}}$ .

Por la representación matricial de la transformación adjunta, tenemos que:  $_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = \overline{(_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}})^t}$

En particular, como estamos en un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, tenemos que:  $_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = (_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}})^t$

Además, como  $T$  es autoadjunta, tenemos que:

$$\bullet \quad _{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = _{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = (_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}})^t$$

Que es la definición de matriz simétrica, por lo tanto queda demostrada esta implicancia.

$2 \implies 3$

Esta demostración es trivial, pues si se cumple que  $\forall \mathcal{B} \rightarrow V$  ortonormal,  $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$  es simétrica, entonces en particular existe una base  $\mathcal{B}_0$  que cumple con dicha propiedad.

$3 \Rightarrow 1$

Queremos probar que si  $\exists \mathcal{B}_0 \rightarrow V$  ortonormal,  ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$  es simétrica, entonces  $T$  es autoadjunta.

Veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 & {}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0} \\
 & \quad = (\text{por ser simétrica}) \\
 & ({}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0})^t \\
 & \quad = (\text{como } \mathbb{K}=\mathbb{R}) \\
 & \overline{({}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0})}^t \\
 & \quad = (\text{representación matricial de la adjunta}) \\
 & {}_{\mathcal{B}_0}(T^*)_{\mathcal{B}_0}
 \end{aligned}$$

Entonces  $T$  es autoadjunta.

Por lo tanto, queda probada esta implicancia, y en consecuencia todas las equivalencias.

### Observación

El teorema vale también para los complejos, pero con una pequeña diferencia.

Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, sea  $T : V \rightarrow V$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $T$  es autoadjunta
2.  $\forall \mathcal{B} \rightarrow V$  ortonormal,  ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$  es hermítica
3.  $\exists \mathcal{B}_0 \rightarrow V$  ortonormal,  ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$  es hermítica

**Observación:** Una matriz  $A$  es hermítica sii  $A = \overline{(A)}^t$

## Teorema espectral de operadores autoadjuntos

Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Sea  $T : V \rightarrow V$  un operador autoadjunto.

Entonces existe  $\mathcal{B}$  una base ortonormal de vectores propios de  $T$ .

**Observación:** Para probar este resultado, necesitamos de algunos resultados anteriores que vamos a probar a continuación.

### Teorema 1

Sea  $T : V \rightarrow V$  un operador autoadjunto en un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial con producto interno. Entonces si  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un valor propio  $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

### **Demostración (Teorema 1)**

1. Como  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un valor propio, entonces existe  $v_0 \in V, v_0 \neq \vec{0}$  tal que  $T(v_0) = \lambda v_0$
2. Como  $T$  es autoadjunto, entonces tenemos que:
  - $T = T^*$
  - $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$  en particular,
  - $\langle T(v), v \rangle = \langle v, T(v) \rangle \quad \forall v \in V$
  - Ahora consideremos el vector propio  $v_0$  asociado a  $\lambda$ , entonces:

$$\begin{aligned}\langle T(v_0), v_0 \rangle &= \langle v_0, T(v_0) \rangle \\ &\iff (\text{definición de valor propio}) \\ \langle \lambda v_0, v_0 \rangle &= \langle v_0, \lambda v_0 \rangle \\ &\iff (\text{propiedades de producto interno}) \\ \lambda \langle v_0, v_0 \rangle &= \bar{\lambda} \langle v_0, v_0 \rangle \\ &\iff (\text{como } v_0 \neq \vec{0}) \\ \lambda &= \bar{\lambda}\end{aligned}$$

Donde esto último solo se cumple si  $\lambda \in \mathbb{R}$

Esto prueba el teorema.

### **Corolario (del teorema 1)**

Sea  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y  $T$  un operador autoadjunto. Entonces  $X_T(\lambda)$  tiene todas las raíces reales.

### **Teorema 2**

Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y  $T : V \rightarrow V$  un operador autoadjunto. Entonces  $X_T$  tiene raíces reales.

### **Demostración (Teorema 2)**

Definimos  $\mathcal{B}$  una base ortonormal de  $V$ .

Definimos  $T_1 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , con  $n = \dim(V)$ . Consideramos  $\mathcal{B}_1$  una base ortonormal de  $\mathbb{C}^n$  tal que:

$${}_{\mathcal{B}_1}(T_1)_{\mathcal{B}_1} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$$

Observemos que como  $T$  es autoadjunta y  $\mathcal{B}$  es una base ortonormal, tenemos que  ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$  es simétrica.

Ahora veamos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{B}_1(T_1)_{\mathcal{B}_1} \\
& = (\text{definición de } T_1) \\
& \mathcal{B}(T)_{\mathcal{B}} \\
& = (\text{por simetría}) \\
& (\mathcal{B}(T)_{\mathcal{B}})^t \\
& = (T \text{ es real}) \\
& \overline{(\mathcal{B}(T)_{\mathcal{B}})}^t \\
& = (T \text{ definición de } T_1) \\
& \overline{(\mathcal{B}_1(T_1)_{\mathcal{B}_1})}^t
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{B}_1(T_1)_{\mathcal{B}_1}$  es hermítica, y por el teorema de inicio de clase, tenemos que  $T_1$  es autoadjunta.

Con esto y el corolario anterior,  $X_{T_1}$  tiene raíces reales.

Como por construcción  $X_{T_1} = X_T$ , entonces  $X_T$  también tiene raíces reales.

Esto prueba el teorema.

### Proposición

Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con producto interno y  $T : V \rightarrow V$  un operador autoadjunto. Consideremos dos vectores y valores propios distintos entre si: -  $v_1$  asociado a  $\lambda_1$  -  $v_2$  asociado a  $\lambda_2$

Entonces  $v_1 \perp v_2$ .

### Demostración (proposición)

Consideremos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
& \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle \\
& \iff (\text{definición de valor propio}) \\
& \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \\
& \iff (\text{propiedades de producto interno y } \lambda_2 \in \mathbb{R}) \\
& \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \\
& \iff (\text{aritmética}) \\
& (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \\
& \iff (\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0) \\
& \langle v_1, v_2 \rangle = 0
\end{aligned}$$

Es decir que  $v_1 \perp v_2$