Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 11 - 14/04/2025

Norma inducida y Ortogonalidad

Observación

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno, dos vectores $v, w \in V$ tal que $v, w \neq \vec{0}$. Se cumple que:

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|} \leq 1$$

Por otra parte, en $\mathbb{R}^3$ y con el producto interno usual: $\langle v, w \rangle = \|v\|\|w\| \cos \theta$.

Definimos el ángulo entre v y w como el ángulo θ que cumple lo siguiente:

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|}$$

Corolario 1 (de la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $V = \mathbb{R}^n$ con $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, considerando: - $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

Se cumple:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)$$

Corolario 2 (de la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $V = C[a, b]$ con $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Se cumple que:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt \right) \left(\int_a^b g^2(t)dt \right)$$

Corolario 3 (de la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Vamos a probar la desigualdad triangular para la norma inducida por un producto interno.

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
&\|v+w\|^2 \\
&=_{\text{(definición de norma inducida)}} \\
&\langle v+w, v+w\rangle \\
&=_{\text{(desarrollo)}} \\
&\langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\
&=_{\text{(por: } z+\overline{z}=2Re(z))} \\
&= \|v\|^2 + 2Re(\langle v, w\rangle) + \|w\|^2 \\
&\leq_{\text{(por: } Re(z)\leq|z|)} \\
&\|v\|^2 + 2|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2 \\
&\leq_{\text{(desigualdad de Cauchy-Schwarz)}} \\
&\|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\
&=_{\text{(operatoria)}} \\
&(\|v\| + \|w\|)^2
\end{aligned}$$

Entonces reagrupando:

$$\begin{aligned}
&\|v+w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2 \\
&\iff \text{(ambos lados siempre positivos)} \\
&\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|
\end{aligned}$$

Definición (ortogonalidad y ortonormalidad)

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con producto interno. Decimos que v, w son ortogonales si $\langle v, w\rangle = 0$.

Notación: $v \perp w$

- Sea $A \subset V$, decimos que A es un conjunto ortogonal si $\forall v, w \in A$, con $v \neq w$ se cumple que $v \perp w$. Si además $\|v\| = 1 \quad \forall v \in A$ decimos que A es un conjunto ortonormal

Observaciones:

1. $\langle v, 0\rangle = 0 \quad \forall v \in V$
2. $v \perp v \iff \langle v, v\rangle = 0 \iff v = \vec{0}$
3. Sea A un conjunto ortogonal tal que $\vec{0} \notin A$. Entonces el conjunto $B = \{\frac{v}{\|v\|} : v \in A\}$ es un conjunto ortonormal

Teorema

Sea V un espacio vectorial con producto interno y $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset V$ conjunto ortogonal tal que $v_i \neq \vec{0} \quad \forall i \in 1, \dots, r$.

Entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es LI.

Demostración:

Consideremos:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_r = 0 \quad (i)$$

Para $i = 1, \dots, r$, para un j fijado, se cumple que:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle \\
&\overset{\text{(el primer vector es 0)}}{=} \\
&0 \\
&\overset{\text{(definición de producto interno)}}{=} \\
&\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle \\
&\overset{\text{(por ortogonalidad cuando } i \neq j)}{=} \\
&\alpha_j \langle v_j, v_j \rangle \\
&\overset{\text{(definición de norma inducida)}}{=} \\
&\alpha_j \|v_j\|^2 \\
&\overset{\text{(porque } v_j \neq 0)}{=} \\
&\alpha_j
\end{aligned}$$

Es decir, para este j fijado se cumple que $\alpha_j = 0$. Podemos aplicar este razonamiento para todos los valores de j y obtener que la única forma para que (i) sea 0 es que todos los escalares α_i sean. Con esto concluimos que: $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es LI.

Teorema de Pitagoras

Sea V un espacio vectorial con producto interno, y $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ un conjunto ortogonal. Entonces se cumple:

$$\| \sum_{i=1}^{r} v_i \|^2 = \sum_{i=1}^{r} \|v_i\|^2$$

Demostración:

$$\|\sum_{i=1}^{r} v_i\|^2$$

$=$(definición de norma inducida)

$$\left\langle \sum_{i=1}^{r} v_i, \sum_{j=1}^{r} v_j \right\rangle$$

$=$(definición de producto interno)

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \langle v_i, v_j \rangle$$

$=$(por ortogonalidad cuando $i \neq j$)

$$\sum_{i=1}^{r} \langle v_i, v_i \rangle$$

$=$(definición de norma inducida)

$$\sum_{i=1}^{r} \|v_i\|^2$$