

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 11

### Consigna

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno,  $S \subset V$  un subespacio vectorial y  $P_S(v)$  la proyección ortogonal de  $v$  sobre  $S$ ; es decir,  $P_S(v)$  es el único vector que verifica que  $P_S(v) \in S$  y  $v - P_S(v) \in S^\perp$ .

Probar que:

1.  $P_S(s) = s \quad \forall s \in S$
2.  $P_S(v) = \vec{0} \quad \forall v \in S^\perp$
3.  $P_S : V \rightarrow V$  es transformación lineal
4. Hallar la matriz asociada de  $P_S$  en una base unida de  $S$  con  $S^\perp$
5. Hallar el núcleo e imagen de  $P_S$
6. Hallar valores y subespacios propios de  $P_S$ . Es  $P_S$  diagonalizable?
7.  $\|v\|^2 = \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \quad \forall v \in V$
8.  $\|P_S(v)\| \leq \|v\| \quad \forall v \in V$
9.  $\langle v, P_S(v) \rangle = \|P_S(v)\|^2 \quad \forall v \in V$

### Resolución

Dada una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_r\}$  de  $S$ , definimos  $P_S(v)$  con  $v \in V$  como:

$$P_S(v) = \sum_{i=1}^r \langle v, s_i \rangle s_i$$

#### Parte 1

Queremos probar que  $P_S(s) = s \quad \forall s \in S$ .

Por definición de proyección,  $P_S(s)$  es el único vector en  $S$  que cumple que:  $s - P_S(s) \in S^\perp$ . Ahora, considerando que  $s - s = \vec{0} \in S^\perp$ , podemos concluir que necesariamente  $P_S(s) = s$ , para todo  $s \in S$  pues consideramos un  $s$  cualquiera.

## Parte 2

Queremos probar que  $P_S(v) = \vec{0} \quad \forall v \in S^\perp$ .

Por definición de proyección,  $P_S(v)$  es el único vector en  $S$  que cumple que:  $v - P_S(v) \in S^\perp$ . Ahora, considerando que  $v - \vec{0} = v \in S^\perp$  (por hipótesis), podemos concluir que  $P_S(v) = \vec{0}$ , para todo  $s \in S$  pues consideramos un  $s$  cualquiera.

## Parte 3

Queremos probar que  $P_S : V \rightarrow V$  es transformación lineal

Entonces, dados  $v, w \in V$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$  se tienen que cumplir las siguientes afirmaciones:

1.  $P_S(v + w) = P_S(v) + P_S(w)$
2.  $P_S(\alpha v) = \alpha P_S(v)$

Consideremos la definición de  $P_S(v)$  para una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_r\}$  de  $S$ , dada por

$$P_S(v) = \sum_{i=1}^r \langle v, s_i \rangle s_i$$

### Subparte 1

Desarrollemos:

$$\begin{aligned} P_S(v + w) &= (\text{definición de proyección ortogonal}) \\ &= \sum_{i=1}^r \langle v + w, s_i \rangle s_i \\ &= (\text{propiedades de producto interno}) \\ &= \sum_{i=1}^r (\langle v, s_i \rangle + \langle w, s_i \rangle) s_i \\ &= (\text{distribuyendo}) \\ &= \sum_{i=1}^r \langle v, s_i \rangle s_i + \sum_{i=1}^r \langle w, s_i \rangle s_i \\ &= (\text{separando la sumatoria}) \\ &= \sum_{i=1}^r \langle v, s_i \rangle s_i + \sum_{i=1}^r \langle w, s_i \rangle s_i \\ &= (\text{definición de proyección ortogonal}) \\ &= P_S(v) + P_S(w) \end{aligned}$$

Lo que concluye esta subparte.

### Subparte 2

Desarrollemos:

$$\begin{aligned}
& P_S(\alpha v) \\
& \quad = (\text{definición de proyección ortogonal}) \\
& \quad \sum_{i=1}^r \langle \alpha v, s_i \rangle s_i \\
& \quad = (\text{propiedades del producto interno}) \\
& \quad \sum_{i=1}^r \alpha \langle v, s_i \rangle s_i \\
& \quad = (\text{propiedades la sumatoria}) \\
& \quad \alpha \sum_{i=1}^r \langle v, s_i \rangle s_i \\
& \quad = (\text{definición de proyección ortogonal}) \\
& \quad \alpha P_S(v)
\end{aligned}$$

## Parte 4

Queremos hallar la matriz asociada de  $P_S$  en una base construida uniendo una base de  $S$  con una de  $S^\perp$ .

Consideremos bases de  $S$  y  $S^\perp$ :

- $\mathcal{B}^S = \{v_1, \dots, v_r\}$
- $\mathcal{B}^{S^\perp} = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$

Sea  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  base de  $V$ . Calculemos las columnas de la matriz asociada: -  $\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_1)) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(v_1) = (1, \dots, 0) - \dots - \text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_r)) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(v_r) = (0, \dots, 1, \dots, 0) - \text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_{r+1})) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(v_{r+1}) = (0, \dots, 0) - \dots - \text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_n)) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(v_n) = (0, \dots, 0)$

Esto es así por las propiedades 1 y 2, considerando que:

1.  $v_1, \dots, v_r \in S$
2.  $v_{r+1}, \dots, v_n \in S^\perp$

Entonces la matriz asociada  $_{\mathcal{B}}(P_S)_{\mathcal{B}}$  se ve de la siguiente forma:

$$_{\mathcal{B}}(P_S)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0_{n-r \times n-r} \\ 0_{n-r \times n-r} & 0_{n-r \times n-r} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

## Parte 5

Queremos hallar el núcleo e imagen de  $P_S$ . Describamos los conjuntos para ver que podemos decir de ellos:

- $\text{Ker}(P_S) = \{P_S(v) = 0 \mid v \in V\}$
- $\text{Im}(P_S) = \{P_S(v) \mid v \in V\}$

Ahora, para el núcleo, por la propiedad 2, podemos concluir que ese conjunto es exactamente  $S^\perp$ .

En segundo lugar considerando la imagen, como  $P_S$  proyecta en  $S$ ,  $Im(P_S) = S$ .

## Parte 6

Queremos hallar valores y subespacios propios para  $P_S$ . Utilizaremos el razonamiento hecho en la parte 4.

### Valores propios

Observamos que la matriz asociada que hallamos en la parte 4 es diagonal. Vemos que los valores propios son:

- $\lambda_1 = 1$ , con  $mg(\lambda) = r$
- $\lambda_2 = 0$ , con  $mg(\lambda) = n - r$

### Subespacios asociados

- El subespacio asociado a  $\lambda_1 = 1$  es  $S$ , pues está asociado a una base de vectores propios que corresponde exactamente a la base de  $S$ .
- El subespacio asociado a  $\lambda_2 = 0$  es  $S^\perp$ , pues está asociado a una base de vectores propios que corresponde exactamente a la base de  $S^\perp$ .

### Diagonalización

Claramente es diagonalizable pues hallamos una base para la cual la matriz asociada de  $P_S$  es diagonal.

## Parte 7

Queremos probar que  $\|v\|^2 = \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \quad \forall v \in V$ .

Veamos que podemos escribir todo  $v \in V$  como  $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 & \|v\|^2 \\
 &= (\text{norma inducida por el producto interno}) \\
 & \langle v, v \rangle \\
 &= (\text{descomposición de } v) \\
 & \langle P_S(v) + P_{S^\perp}(v), P_S(v) + P_{S^\perp}(v) \rangle \\
 &= (\text{propiedades del producto interno}) \\
 & \langle P_S(v), P_S(v) \rangle + \langle P_S(v), P_{S^\perp}(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\
 &= (P_S(v) \perp P_{S^\perp}(v)) \\
 & \langle P_S(v), P_S(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\
 &= (\text{norma inducida por el producto interno}) \\
 & \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2
 \end{aligned}$$

## Parte 8

Queremos probar que  $\|P_S(v)\| \leq \|v\| \quad \forall v \in V$ .

Veamos que podemos escribir todo  $v \in V$  como  $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$ , entonces:

$$\begin{aligned} & \|v\|^2 \\ & \quad = (\text{norma inducida por el producto interno}) \\ & \langle v, v \rangle \\ & \quad = (\text{descomposición de } v) \\ & \langle P_S(v) + P_{S^\perp}(v), P_S(v) + P_{S^\perp}(v) \rangle \\ & \quad = (\text{propiedades del producto interno}) \\ & \langle P_S(v), P_S(v) \rangle + \langle P_S(v), P_{S^\perp}(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\ & \quad = (P_S(v) \perp P_{S^\perp}(v)) \\ & \langle P_S(v), P_S(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\ & \quad = (\text{norma inducida por el producto interno}) \\ & \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \\ & \quad \geq (\text{considerando que } P_{S^\perp} \geq 0) \\ & \|P_S(v)\|^2 \end{aligned}$$

Entonces concluimos que  $\|P_S(v)\| \leq \|v\| \quad \forall v \in V$ .

## Parte 9

Queremos probar que  $\langle v, P_S(v) \rangle = \|P_S(v)\|^2 \quad \forall v \in V$ .

Consideremos  $v = P_S(v) + (v - P_S(v))$ , con  $v - P_S(v) \in S^\perp$ :

$$\begin{aligned} & \langle v, P_S(v) \rangle \\ & \quad = (\text{desarrollo de } v) \\ & \langle P_S(v), P_S(v) \rangle + \langle v - P_S(v), P_S(v) \rangle \\ & \quad = (v - P_S(v) \in S^\perp; P_S(v) \in S) \\ & \langle P_S(v), P_S(v) \rangle + 0 \\ & \quad = (\text{norma inducida por el producto interno}) \\ & \|P_S(v)\|^2 \end{aligned}$$