# CLASE 4 - 10/03/2025

## Vectores y valores propios

### Lema

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son matrices semejantes, entonces $\mathrm{X}_A(\lambda) = \mathrm{X}_B(\lambda)$. En particular, $A, B$ tienen los mismos valores propios.

**Demostración** Como son semejantes, $\exists P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que: $B = P^{-1}AP$, además también podemos ver que: $\lambda\mathbb{I} = P^{-1}\lambda\mathbb{I}P$

Con esto podemos decir que:

$$\begin{aligned} & B - \lambda\mathbb{I} = P^{-1}AP - P^{-1}\lambda\mathbb{I}P \\ & \iff \quad \text{saco } P^{-1}, P \text{ de factor común} \\ & B - \lambda\mathbb{I} = P^{-1}(A - \lambda\mathbb{I})P \end{aligned}$$

Entonces $(B - \lambda\mathbb{I})$ y $(A - \lambda\mathbb{I})$ son matrices semejantes, y como los determinantes de matrices semejantes son iguales, podemos decir que:

$$det(A - \lambda\mathbb{I}) = det(B - \lambda\mathbb{I}) \iff \mathrm{X}_A(\lambda) = \mathrm{X}_B(\lambda)$$

**Observación** Sea $T : V \to V$ con $dim(V) = n$ y dos bases de $V$; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Entonces tenemos:

- $A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$
- $A' = {}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{B}'}$

Que son matrices semejantes, entonces por el lema anterior tenemos que:

$$\mathrm{X}_A(\lambda) = \mathrm{X}_{A'}(\lambda)$$

Por lo que entonces, no importa la base con la que trabajemos para determinar los valores propios de una TL.

**Observación** El recíproco del lema, no es cierto. Es decir que si dos matrices tienen el mismo polinomio característico, no necesariamente las matrices son semejantes.

Veamos un contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que no son semejantes, pero es fácil observar que el polinomio característico es el mismo.

**Diagonalización**

**Definición (transformación lineal diagonalizable)**

Sea $T : V \to V$, decimos que $T$ es diagonalizable si existe una base de $V : \mathcal{B}$ tal que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es una matriz diagonal.

**Definición (matriz diagonalizable)**

Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

**Teorema**

Sea $T : V \to V$ es diagonalizable $\iff$ existe una base de $V$ formada por vectores propios de $T$ (la matriz asociada en esa base es diagonal)

**Demostración**

$(\Rightarrow)$ $T$ es diagonalizable $\Rightarrow \exists \mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de $V$ tal que:

$$ {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} $$

Donde podemos observar que:

- $coord_{\mathcal{B}}(T(v_1)) = \lambda_1 \cdot v_1$
- $coord_{\mathcal{B}}(T(v_2)) = \lambda_1 \cdot v_2$
- …
- $coord_{\mathcal{B}}(T(v_n)) = \lambda_1 \cdot v_n$

Esto significa que:

- $v_1$ es vector propio asociado al valor propio $\lambda_1$
- $v_2$ es vector propio asociado al valor propio $\lambda_2$
- …
- $v_n$ es vector propio asociado al valor propio $\lambda_n$

Entonces $\mathcal{B}$ es una base de $V$ formada por vectores propios de $T$.

$(\Leftarrow)$ Si $\mathcal{B}$ es una base de valores propios, entonces tenemos que:

- $T(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$
- $T(v_2) = \lambda_1 \cdot v_2$
- …
- $T(v_n) = \lambda_1 \cdot v_n$

Con esto podemos hallar la matriz asociada:

$$
{}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

Con lo que se concluye que $T$ es diagonalizable. ■

**Observación** La forma diagonal es única, a menos del órden de los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

**Teorema**

Sea $T : V \to V$ un operador líneal. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ valores propios de $T$ dos a dos distintos y $v_1, v_2, \dots, v_k$ vectores propios asociados a cada uno de los valores propios.

Entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es un conjunto LI

**Demostración** Se hará la inducción sobre el número de valores propios $k \in \mathbb{N}$.

**Paso base** $(n = 1)$: $v_1$ vector propio asociado a $\lambda_1$

Se observa trivialmente que $\{v_1\}$ es un conjunto LI

**Paso inductivo**

(H) $(n = k)$: $v_1, v_2, \dots, v_k$ vectores propios asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

Asumimos que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es LI

(T) $(n = k + 1)$: $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$ vectores propios asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$

Consideremos la ecuación

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad (i) \\
&\iff \text{ aplicamos } T \text{ a ambos lados} \\
&\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_k T(v_k) + \alpha_{k+1} T(v_{k+1}) = 0 \\
&\iff \text{ utilizando los valores propios de } T \\
&\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad (ii)
\end{aligned}
$$

Ahora, múltiplicamos $(i)$ por $\lambda_{k+1}$ y lo restamos a $(ii)$. Obtenemos lo siguiente:

$$
\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})v_2 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k + 0 = 0 \quad (iii)
$$

Por hipótesis inductiva, $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es LI, lo cual implica que:

- $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0$
- $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = 0$
- ...
- $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$

Donde todos los paréntesis no pueden ser $0$, porque todos los valores propios son distintos entre si. Esto solo deja la posibilidad de que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k = 0$

Llevando todo esto a la ecuación $(i)$, nos queda que:

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$$

Como $v_{k+1}$ es vector propio, sabemos que necesariamente $v_{k+1} \neq \vec{0}$.

Esto implica que todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1} = 0$, es decir, el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ es LI. ■

**Corolario**

Sea $T : V \to V$ con $dim(V) = n$. Si $T$ tiene $n$ valores propios diferentes dos a dos, entonces $T$ es diagonalizable

**Demostración** Consideramos $v_1, v_2, \dots, v_n$ vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (todos distintos).

Por el teorema anterior sabemos que: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es LI. Como $dim(V) = n$, juntando con lo anterior podemos decir que:

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es base de V, en particular, es una base de vectores propios de $T$, por lo que $T$ es diagonalizable. ■