

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 4

### Consigna

Probar que  $T$  es autoadjunto, hallar su forma diagonal y una base ortonormal de vectores propios:

1.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:

$$T(x, y, z) = \left( \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z, 2y, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z \right)$$

2.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:

$$T(x, y, z) = \left( \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, -y, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z \right)$$

## Resolución

### Parte 1

Hallemos la matriz asociada  $_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$  considerando  $\mathcal{E}$  como la base canónica de  $\mathbb{R}^3$

- $T(1, 0, 0) = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$
- $T(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$
- $T(0, 0, 1) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$

Por lo tanto la matriz asociada es la siguiente:

$$_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como la matriz es simétrica (estamos considerando una base ortonormal), entonces  $_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = _{\mathcal{E}}(T^*)_{\mathcal{E}}$ , lo que implica que  $T = T^*$  y por lo tanto  $T$  es autoadjunta.

Ahora tengo que hallar los valores propios, por lo que calculo el polinomio característico:

$$\begin{aligned}
X_T(\lambda) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)((3-\lambda)^2 + 1) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 10)
\end{aligned}$$

Esto nos deja con las siguientes raíces características:

- $\lambda_1 = 1$
- $\lambda_2 = 3 + i$
- $\lambda_3 = 3 - i$

Ahora calculemos los subespacios:

$S_1$

Tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$(T - Id)v = 0:$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

De donde obtenemos que:

- $z = 0$
- $x = 0$
- $y \in \mathbb{R}$