# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

# CLASE 14 - 02/06/2025

## Complemento ortogonal

### Proposición

Sea $V$ un espacio vectorial con producto interno y $S$ un subespacio vectorial de dimensión finita.

Entonces:

$$V = S \oplus S^{\perp}$$

#### Demostración

Queremos probar que:

1. $V = S + S^{\perp}$
2. $S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}$

Consideramos $\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_k\}$ una base ortonormal de $S$. Dado $v \in V$ definimos: $(v_s = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i) \in S$.

Veamos que $(v - v_s) \in S^{\perp}$, para esto, verifiquemos que $\langle v - v_s, s_j \rangle = 0$ para $j = 1, \dots, k$.

$$\begin{aligned} \langle v - v_s, s_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i, s_j \right\rangle \\ &= \langle v, s_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle \\ &= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto probamos que $(v - v_s) \in S^{\perp}$. Entonces, podemos decir que:

$$v = v_s + (v - v_s)$$

Donde: 1. $v_s \in S$ 2. $v - v_s \in S^{\perp}$

En conclusión $V = S + S^{\perp}$.

Ahora, queremos demostrar que $S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}$, para esto, consideremos $v \in S \cap S^{\perp}$: 1. $v \in S$ 2. $v \in S^{\perp}$

Entonces $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = \vec{0}$

Juntando ambas cosas, probamos que $V = S \oplus S^{\perp}$

#### Observación

Dado $v \in V$ existen únicos $v_s \in S$ y $v_{s^{\perp}} \in S^{\perp}$ tales que $v = v_s + v_{s^{\perp}}$. Nosotros utilizamos una base ortonormal $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ de $S$. De donde obtuvimos $v_s = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i$. Si usamos otra base ortonormal diferente, el resultado que obtenemos será el mismo. Esto significa que el cálculo de $v_s$ no depende de la base ortonormal elegida

# Proyección ortogonal

## Definición

Dado $v \in V$, definimos $v_s$ como la proyección ortogonal de $v$ sobre el subespacio $S$ y se denota:

$P_S(v) = v_s = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i$

#### Observación

1. La definición de proyección ortogonal no depende de la base ortonormal elegida para calcularla.
2. Si proyectamos sobre $S^{\perp}$:

$$v = v_{s^{\perp}} + v_{(s^{\perp})^{\perp}} = v_{s^{\perp}} + v_s = P_{S^{\perp}}(v) + P_S(v)$$

3. $P_S : V \to V$ es un operador lineal. Esto se deriva fácilmente de las propiedades de producto interno.

#### Ejemplo 1

$V = P_2[x](\mathbb{R})$ con producto interno: $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ y $S = [t^2]$. Consideremos $p(t) = 1 + t$. Queremos calcular $P_S(p)$ Usaremos la siguiente base ortonormal de $S : \mathcal{B} = \{\sqrt{\frac{5}{2}}t^2\}$ (asumiremos que es ortonormal).

Con todo esto:

$P_S(v) = \langle p, p_1 \rangle p_1(t)$

Donde:

- $\langle p, p_1 \rangle = \int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{\frac{5}{2}}t^2dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{5}{2}}t^2 + \sqrt{\frac{5}{2}}t^3dt = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{1} t^2 + t^3dt = \sqrt{\frac{5}{2}}((\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) - (\frac{-1}{3} + \frac{1}{4})) = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$

Entonces:

$P_S(v) = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} t^2 = \frac{10}{6} t^2 = \frac{5}{3} t^2$

**Ejemplo 2**

$V = \mathbb{R}^3$ producto interno habitual. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Consideremos $v = (1, 0, 0)$, queremos calcular $P_S(v)$. Consideramos la siguiente base ortonormal de $S$ (no verificaremos nuevamente): $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)\}$.

Con esto, podemos calcular:

$$
\begin{aligned}
P_S(1,0,0) &= \left\langle (1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) + \left\langle (1,0,0), \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right) \right\rangle \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right) \\
&= \frac{1}{2}(1,-1,0) + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right) \\
&= \frac{1}{6} \left( \frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, -1 \right)
\end{aligned}
$$

## Teorema

Sea $V$ un espacio vectorial con producto interno y $S$ un subespacio vectorial. Entonces:

$$\|v - P_s(v)\| \leq \|v - s\| \quad \forall s \in S$$

Este resultado es muy geométrico, no es fácil entender lo que es mirando la expresión. La idea es que la proyección ortogonal del vector $v$ es la que resulta teniendo la menor distancia al vector $v$ en si, con respecto a todos los demás vectores de $S$.

**Demostración**

Tomemos un vector cualquiera $s \in S$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&\|v - s\|^2 \\
&=_{\text{(norma inducida)}} \\
&\langle v - s, v - s \rangle \\
&=_{\text{(proposición anterior)}} \\
&\langle P_S(v) + P_{S^\perp}(v) - s, P_S(v) + P_{S^\perp}(v) - s \rangle \\
&=_{\text{(propiedades del producto interno)}} \\
&\langle P_S(v) - s, P_S(v) - s \rangle + \langle P_S(v) - s, P_{S^\perp}(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v) - s \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\
&=_{(\langle P_S(v) - s, P_{S^\perp}(v) \rangle = 0 \text{ y } \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v) - s \rangle = 0)} \\
&\langle P_S(v) - s, P_S(v) - s \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\
&=_{\text{(norma inducida)}} \\
&\|P_S(v) - s\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2
\end{aligned}
$$

Por lo encontrado en el último paso, si consideramos $\|v - s\|^2$ como una función, ésta alcanza su valor mínimo cuando $\|P_S(v) - s\|^2 = 0$ que es cuando $s = P_S(v)$. Podemos decir que:

$$\|v - s\|^2 \geq \|v - P_S(v)\|^2$$

Como tomamos $s \in S$ cualquiera, este razonamiento es válido para todo $s$. Lo que concluye la prueba