Ejercicio 11

Consigna

Se considera V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos bases de V. Sea $T : V \to V$, lineal, $T \neq Id$. Indicar, justificando, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = I_n$ (matriz identidad), entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
2. Si ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
3. Si ${}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}} = I_n$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Resolución

Afirmación #1

Busquemos un contraejemplo, es decir una TL $T : V \to V$ tal que ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = (Id)$, pero $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$

Sea $V = \mathbb{R}^2, \mathcal{A} = \{a_1, a_2\}, \mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$. Entonces sabemos que:

- $coord_{\mathcal{A}}(T(b_1)) = (Id) \cdot coord_{\mathcal{B}}(b_1) = (1, 0)$
- $coord_{\mathcal{A}}(T(b_2)) = (Id) \cdot coord_{\mathcal{B}}(b_2) = (0, 1)$

Esto implica:

- $T(b_1) = a_1$
- $T(b_2) = a_2$

Por lo que buscamos dos bases $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y una transformación T tal que el transformado de la base de partida nos de su correspondiente en la base de llegada.

Bajo estas restricciones, primero establecemos las bases:

- $\mathcal{A} = \mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$
- $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$

REPASO

Verifiquemos que $\mathcal{B}$ es LI con el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

Cómo la única solución a este sistema es la trivial (todas las incógnitas son 0), podemos decir que el conjunto $\mathcal{B}$ es LI, y por tanto es base de $\mathbb{R}^2$

Ahora que tenemos las bases diferentes, solo debemos encontrar una transformación lineal que cumpla con lo que precisamos, por ejemplo:

$$T(x, y) = (x, -x + y)$$

Esto verifica lo que buscabamos:

- $T(b_1) = T(1, 1) = (1, 0) = a_1$
- $T(b_2) = T(0, 1) = (0, 1) = a_2$

Para finalizar podemos ver que $coord_{\mathcal{A}}(b_i) = a_i$ porque la base $\mathcal{A}$ es la canónica. Entonces la matriz asociada es:

$$_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces esta afirmación es **FALSA**.

Afirmación #2

Busquemos un contraejemplo, es decir, dos bases de V tal que:

$_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ pero $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$

Consideremos $V = \mathbb{R}^2$; sean:

- $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$
- $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$

Veamos que implica la hipótesis:

- $coord_{\mathcal{A}}(T(a_1)) = coord_{\mathcal{B}}(T(b_1))$
- $coord_{\mathcal{A}}(T(a_2)) = coord_{\mathcal{B}}(T(b_2))$

Siguiendo el mismo razonamiento de la parte anterior, elegimos dos bases diferentes:

- $\mathcal{A} = \mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$
- $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$

Observemos que como $\mathcal{A}$ es la base canónica, las anteriores afirmaciones se transforman a:

- $T(a_1) = coord_{\mathcal{B}}(T(b_1))$
- $T(a_2) = coord_{\mathcal{B}}(T(b_2))$

Sea $T(x, y) = (x, y + x)$

- $T(1, 0) = coord_{\mathcal{B}}(T(1, 1)) \Rightarrow (1, 1) = coord_{\mathcal{B}}(1, 2) \Rightarrow (1, 1) = (1, 1)$
- $T(0, 1) = coord_{\mathcal{B}}(T(0, 1)) \Rightarrow (0, 1) = coord_{\mathcal{B}}(0, 1) \Rightarrow (0, 1) = (0, 1)$

Entonces, encontramos un contraejemplo. Veamos esto construyendo las matrices asociadas:

$$_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces esta afirmación, también es **FALSA**.

Afirmación #3

Esta afirmación es **VERDADERA**, encontré la prueba en internet, pero no pude entenderla muy bien.