

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## CLASE 7 - 25/03/2025

### Gershgorin

#### Círculos de Gershgorin

Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  una matriz cuadrada. con la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Considerando la fila  $i$  de la matriz, se define el disco de Gershgorin  $C_i$  como el disco centrado en  $a_{ii}$  con radio  $R_i$  tal que:

- $R_i$  es la suma de los módulos de todos los elementos de la fila  $i$  a excepción de  $a_{ii}$

#### Teorema de Gershgorin

Dada una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ :

1. Si  $\lambda$  es valor propio de  $A$ , entonces  $\lambda \in \bigcup_{i=1}^n C_i$
2. Si el conjunto  $M = C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup \dots \cup C_{i_m}$  es disjunto con respecto a los demás discos, entonces  $M$  contiene exactamente  $m$  valores propios de  $A$

#### Demostración

1. Consideramos  $\lambda_0$  un valor propio de  $A$ , y  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  un vector propio asociado a  $\lambda_0$ . Esto significa que:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Consideramos el componente del vector propio que tiene mayor módulo, es decir el elemento que se encuentra en la posición  $i_0$  tal que  $|x_{i_0}| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$  Como

estamos trabajando con un vector propio, sabemos que por lo menos uno de los valores será distinto de 0, por lo que  $|x_{i_0}| > 0$ .

Consideremos la igualdad anterior ahora expandiendo la matriz  $A$ :

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_0 1} & a_{i_0 2} & \cdots & a_{i_0 i_0} & \cdots & a_{i_0 n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i_0 1}x_1 + a_{i_0 2}x_2 + \cdots + a_{i_0 i_0}x_{i_0} + \cdots + a_{i_0 n}x_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Y como  $\lambda_0$  es valor propio tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i_0 1}x_1 + a_{i_0 2}x_2 + \cdots + a_{i_0 i_0}x_{i_0} + \cdots + a_{i_0 n}x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda_0 x_{i_0} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Entonces podemos decir que:

$$\begin{aligned} a_{i_0 1}x_1 + a_{i_0 2}x_2 + \cdots + a_{i_0 i_0}x_{i_0} + \cdots + a_{i_0 n}x_n &= \lambda_0 x_{i_0} \\ a_{i_0 1}x_1 + a_{i_0 2}x_2 + \cdots + a_{i_0 n}x_n &= \lambda_0 x_{i_0} - a_{i_0 i_0}x_{i_0} \\ \sum_{j=1; j \neq i_0}^n a_{i_0 j}x_j &= x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0 i_0}) \\ \left| \sum_{j=1; j \neq i_0}^n a_{i_0 j}x_j \right| &= |x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0 i_0})| \\ |x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0 i_0})| &= \left| \sum_{j=1; j \neq i_0}^n a_{i_0 j}x_j \right| \leq \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0 j}x_j| = \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0 j}| |x_j| \\ |x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0 i_0})| &= \left| \sum_{j=1; j \neq i_0}^n a_{i_0 j}x_j \right| \leq \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0 j}x_j| = \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0 j}| |x_{i_0}| \\ |x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0 i_0})| &\leq \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0 j}| |x_{i_0}| \\ |\lambda_0 - a_{i_0 i_0}| &\leq \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0 j}| \end{aligned}$$

Donde se observa que el lado derecho de la desigualdad es el radio del disco de Gershgorin  $C_{i_0}$ , por lo que  $\lambda_0 \in C_{i_0}$ , por consecuencia  $\lambda_0 \in \bigcup_{i=1}^n C_i$

2. Se prueba en el libro rojo, pero no se da en la clase con detalle.