Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Dada la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar:
1. Los subespacios invariantes de T.
2. Sus valores propios.
3. Discutir según θ cuándo T es diagonalizable.

Resolución

Para empezar, primero hallemos los valores propios de esta matriz, para esto calculamos el polínomio característico:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + \cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1) \end{aligned}$$

Sabemos que a priori $\lambda_1 = 1$ es raíz del polinomio, ahora apliquemos Bháskara para hallar las raíces del segundo polinomio:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} \\
&= \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4(\cos^2\theta - 1)}}{2} \\
&= \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} \\
&= \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} \\
&= \cos\theta \pm i\sin\theta
\end{aligned}
$$

Entonces la única forma de que estos sean valores propios es que pertenezcan a $\mathbb{R}^3$, por lo tanto tenemos que $\sin\theta = 0$, lo que implica que $\theta = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

En ese caso tendríamos raíz doble en $\lambda_2 = \cos(k\pi)$, a su vez para esto tenemos dos casos según k:

- Si k es par, entonces $\lambda_2 = 1$, habría raíz triple en 1, es decir: $ma(1) = 3$
- Si k es impar, entonces $\lambda_2 = -1$, habría raíz doble en -1, es decir: $ma(-1) = 2$

Analicemos los subespacios según el caso.

CASO 1: k es par

Si k es par, tenemos un solo valor propio $\lambda = 1$ con $ma(1) = 3$, veamos de resolver el sistema $(A - 1\mathbb{I})v = 0$ para hallar $mg(1)$. La representación del sistema es la siguiente:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

De esto sacamos que $mg(1) = 3$, por lo que en este caso, T es diagonalizable.

En cuanto a los subespacios invariantes para este caso, podemos observar que cualquier subespacio de $\mathbb{R}^3$ sería T-invariante, porque tendríamos una representación matricial igual a la identidad, por lo que cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$ cumpliría que $T(v) = v$

CASO 2: k es impar

En este caso ya tenemos que $ma(1) = mg(1) = 1$, solo habría que verificar el subespacio asociado a $\lambda_2 = -1$, que podemos verlo con el sistema $(A + 1\mathbb{I})v = 0$. La representación del sistema es la siguiente:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

De esto sacamos que $mg(1) = 2$, por lo que en este caso también, T es diagonalizable.

En este caso tendríamos que los subespacios propios serían los únicos subespacios invariantes además de los subespacios triviales.