Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 7 - 25/03/2025

Gershgorin

Círculos de Gershgorin

Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ una matriz cuadrada. con la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Considerando la fila i de la matriz, se define el disco de Gershgorin C_i como el disco centrado en a_{ii} con radio R_i tal que:

• R_i es la suma de los módulos de todos los elementos de la fila i a excepción de a_{ii}

Teorema de Gershgorin

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$:

- 1. Si λ es valor propio de A, entonces $\lambda \in \bigcup_{i=1}^n C_i$
- 2. Si el conjunto $M=C_{i1}\cup C_{i2}\cup ...\cup C_{im}$ es disjunto con respecto a los demás discos, entonces M contiene exactamente m valores propios de A

Demostración

1. Consideramos λ_0 un valor propio de A, y $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$ un vector propio asociado a λ_0 . Esto significa que:

$$A(x_1,x_2,\dots,x_n)=\lambda_0(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

Consideramos el componente del vector propio que tiene mayor módulo, es decir el elemento que se encuentra en la posición i_0 tal que $|x_{i_0}|=\max\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|\}$ Como

estamos trabajando con un vector propio, sabemos que por lo menos uno de los valores será distinto de 0, por lo que $|x_{i_0}|>0$.

Consideremos la igualdad anterior ahora expandiendo la matriz A:

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_01} & a_{i_02} & \dots & a_{i_0i_0} & \dots & a_{i_0n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_01}x_1 + a_{i_02}x_2 + \dots + a_{i_0i_0}x_{i_0} + \dots + a_{i_0n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Y como λ_0 es valor propio tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i_01}x_1 + a_{i_02}x_2 + \ldots + a_{i_0i_0}x_{i_0} + \ldots + a_{i_0n}x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda_0x_{i_0} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Entonces podemos decir que:

$$\begin{split} a_{i_01}x_1 + a_{i_02}x_2 + \ldots + a_{i_0i_0}x_{i_0} + \ldots + a_{i_0n}x_n &= \lambda_0 x_{i_0} \\ a_{i_01}x_1 + a_{i_02}x_2 + \ldots + a_{i_0n}x_n &= \lambda_0 x_{i_0} - a_{i_0i_0}x_{i_0} \\ \sum_{j=1; j \neq i_0}^n a_{i_0j}x_j &= x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0i_0}) \\ |\sum_{j=1; j \neq i_0}^n a_{i_0j}x_j| &= |x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0i_0})| \\ |x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0i_0})| &= |\sum_{j=1; j \neq i_0}^n a_{i_0j}x_j| \leq \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0j}x_j| = \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0j}||x_j| \\ |x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0i_0})| &= |\sum_{j=1; j \neq i_0}^n a_{i_0j}x_j| \leq \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0j}x_j| = \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0j}||x_{i_0}| \\ |x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0i_0})| &\leq \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0j}||x_{i_0}| \\ |\lambda_0 - a_{i_0i_0}| &\leq \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0j}| \\ |\lambda_0 - a_{i_0i_0}| &\leq \sum_{j=1; j \neq i_0}^n |a_{i_0j}| \end{aligned}$$

Donde se observa que el lado derecho de la desigualdad es el radio del disco de Gershgorin C_{i_0} , por lo que $\lambda_0 \in C_{i_0}$, por consecuencia $\lambda_0 \in \bigcup_{i=1}^n C_i$

2. Se prueba en el libro rojo, pero no se da en la clase con detalle.