

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## CLASE 11 - 14/04/2025

### Norma inducida y Ortogonalidad

#### Observación

Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con producto interno, dos vectores  $v, w \in V$  tal que  $v, w \neq \vec{0}$ . Se cumple que:

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1$$

Por otra parte, en  $\mathbb{R}^3$  y con el producto interno usual:  $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \theta$ .

Definimos el ángulo entre  $v$  y  $w$  como el ángulo  $\theta$  que cumple lo siguiente:

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

#### Corolario 1 (de la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea  $V = \mathbb{R}^n$  con  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , considerando: -  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  -  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

Se cumple:

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

#### Corolario 2 (de la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea  $V = C[a, b]$  con  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ . Se cumple que:

$$\left( \int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2(t)dt \right) \left( \int_a^b g^2(t)dt \right)$$

### Corolario 3 (de la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Vamos a probar la desigualdad triangular para la norma inducida por un producto interno.

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} & \|v + w\|^2 \\ &= (\text{definición de norma inducida}) \\ & \langle v + w, v + w \rangle \\ &= (\text{desarrollo}) \\ & \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= (\text{por: } z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)) \\ &= \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2 \\ &\leq (\text{por: } \operatorname{Re}(z) \leq |z|) \\ & \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq (\text{desigualdad de Cauchy-Schwarz}) \\ & \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\text{operatoria}) \\ & (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

Entonces reagrupando:

$$\begin{aligned} & \|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2 \\ & \iff (\text{ambos lados siempre positivos}) \\ & \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \end{aligned}$$

### Definición (ortogonalidad y ortonormalidad)

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  con producto interno. Decimos que  $v, w$  son ortogonales si  $\langle v, w \rangle = 0$ .

**Notación:**  $v \perp w$

- Sea  $A \subset V$ , decimos que  $A$  es un conjunto ortogonal si  $\forall v, w \in A$ , con  $v \neq w$  se cumple que  $v \perp w$ . Si además  $\|v\| = 1 \quad \forall v \in A$  decimos que  $A$  es un conjunto ortonormal

**Observaciones:**

1.  $\langle v, 0 \rangle = 0 \quad \forall v \in V$
2.  $v \perp v \iff \langle v, v \rangle = 0 \iff v = \vec{0}$
3. Sea  $A$  un conjunto ortogonal tal que  $\vec{0} \notin A$ . Entonces el conjunto  $B = \left\{ \frac{v}{\|v\|} : v \in A \right\}$  es un conjunto ortonormal

## Teorema

Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno y  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset V$  conjunto ortogonal tal que  $v_i \neq \vec{0} \quad \forall i \in 1, \dots, r$ .

Entonces  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es LI.

### Demostración:

Consideremos:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0 \quad (i)$$

Para  $i = 1, \dots, r$ , para un  $j$  fijado, se cumple que:

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i, v_j \right\rangle \\ &= (\text{el primer vector es } 0) \\ & 0 \\ &= (\text{definición de producto interno}) \\ & \sum_{i=1}^r \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle \\ &= (\text{por ortogonalidad cuando } i \neq j) \\ & \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle \\ &= (\text{definición de norma inducida}) \\ & \alpha_j \|v_j\|^2 \\ &= (\text{porque } v_j \neq 0) \\ & \alpha_j \end{aligned}$$

Es decir, para este  $j$  fijado se cumple que  $\alpha_j = 0$ . Podemos aplicar este razonamiento para todos los valores de  $j$  y obtener que la única forma para que (i) sea 0 es que todos los escalares  $\alpha_i$  sean. Con esto concluimos que:  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es LI.

## Teorema de Pitagoras

Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno, y  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  un conjunto ortogonal. Entonces se cumple:

$$\left\| \sum_{i=1}^r v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^r \|v_i\|^2$$

### Demostración:

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{i=1}^r v_i \right\|^2 \\
&= (\text{definición de norma inducida}) \\
& \left\langle \sum_{i=1}^r v_i, \sum_{j=1}^r v_j \right\rangle \\
&= (\text{definición de producto interno}) \\
& \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \langle v_i, v_j \rangle \\
&= (\text{por ortogonalidad cuando } i \neq j) \\
& \sum_{i=1}^r \langle v_i, v_i \rangle \\
&= (\text{definición de norma inducida}) \\
& \sum_{i=1}^r \|v_i\|^2
\end{aligned}$$