

Ejercicio 5

Consigna

Sean $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y las bases: - $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ y - $\mathcal{A} = \{(1, 2, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

1. ¿Queda T únicamente determinada por $A = {}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$? Justifique su respuesta.
2. En caso afirmativo, hallar $T(x, y, z)$.

Resolución

T queda únicamente determinada por una justificación teórica que no logré encontrar.

Podemos usar una propiedad de la matriz asociada que es la siguiente:

$$\text{coord}_{\mathcal{A}}(T(v)) = {}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$$

Con esto, tenemos como hallar las coordenadas del transformado de un vector en la base de llegada; en base a la matriz asociada (que tenemos) y las coordenadas en la base de partida de ese mismo vector.

Halleemos $\text{coord}_{\mathcal{B}}(x, y, z)$, para poder usar la propiedad:

$$(x, y, z) = c_1(1, -1, 1) + c_2(1, 1, 1) + c_3(1, 0, 0)$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & -1 & z-x \end{array}$$

Usando $F3 - F1$ y $F2 + F1$. Obtengo que:

- $c_3 = x - z$
- $c_2 = \frac{z-x+y+x}{2} = \frac{z+y}{2}$
- $c_1 = x + z - x + \frac{z-y}{2} = \frac{z-y}{2}$

Ahora puedo plantear la propiedad:

$$\text{coord}_{\mathcal{A}}(T(x, y, z)) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{z-y}{2} \\ \frac{z+y}{2} \\ x-z \end{pmatrix}$$

Para separar las cuentas, llamemos $(a, b, c) = \text{coord}_{\mathcal{A}}(T(x, y, z))$

- $a = \frac{z-y}{2} + 2z + 2y + x - z = \frac{3z+3y+2x}{2}$
- $b = z - y + \frac{z+y}{2} + x - z = \frac{z-y+2x}{2}$
- $c = z - y + \frac{z+y}{2} + x - z = \frac{z-y+2x}{2}$

Entonces:

$$coord_{\mathcal{A}}(T(x, y, z)) = \begin{pmatrix} \frac{3z+3y+2x}{2} \\ \frac{z-y+2x}{2} \\ \frac{z-y+2x}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora, me queda “eliminar” las coordenadas, es decir:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= \frac{3z + 3y + 2x}{2} \cdot (1, 2, 0) + \frac{z - y + 2x}{2} \cdot ((2, 1, 0) + (1, 1, 1)) \\ &= \left(\frac{3z + 3y + 2x}{2}, 3z + 3y + 2x, 0 \right) + \frac{z - y + 2x}{2} \cdot (3, 2, 1) \\ &= \left(\frac{3z + 3y + 2x}{2}, 3z + 3y + 2x, 0 \right) + \left(\frac{3z - 3y + 6x}{2}, z - y + 2x, \frac{z - y + 2x}{2} \right) \\ &= \left(3z + 4x, 4z + 2y + 4x, \frac{z - y + 2x}{2} \right) \end{aligned}$$

Entonces $T(x, y, z)$ está dada por:

$$T(x, y, z) = \left(3z + 4x, 4z + 2y + 4x, \frac{z - y + 2x}{2} \right)$$