Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno cualquiera en $\mathbb{R}^n$. Probar que:

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \vec{X}^t A \vec{Y},$$

donde $A = (a_{ij})_n, \vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Qué producto interno se define si $A = I_n$?

Resolución

Para probar esto, consideremos la base canónica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Con esto podemos escribir los vectores $\vec{X}, \vec{Y}$ de la siguiente forma:

- $\vec{X} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$
- $\vec{Y} = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

Con esto podemos expresar el producto interno de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \left\langle e_i, e_j \right\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto, considerando $a_{ij} = \left\langle e_i, e_j \right\rangle \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, probamos la primer parte de la igualdad.

Para la segunda parte de la igualdad, consideremos la matriz $A = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = \left\langle e_i, e_j \right\rangle$. Entonces tenemos que:

$$X^t A Y = (x_1, x_2, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Observemos que:

- $X^t A$ es una matriz fila, y
- $(X^t A)Y$ es el producto entre una matriz fila y una matriz columna, por lo que es una suma de números reales.

Consideremos el elemento en la posición j en el producto $X^t A$:

- $(X^t A)_j = \sum_{i=0}^{n} x_i a_{ij}$

Con esto podemos describir la matriz fila de esta forma:

$$X^t A = \left(\sum_{i=0}^{n} x_i a_{i1}, \sum_{i=0}^{n} x_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=0}^{n} x_i a_{in} \right)$$

Con esto podemos definir el resultado de multiplicar esta matriz fila por la matriz columna que nos queda:

$$X^t A Y = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x_i a_{ij} y_i$$

Que es lo que queríamos probar.

Qué producto interno se define si $A = I_n$?

Se observa que el producto interno definido cuando A es la matriz identidad es el producto interno estándar, es decir:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Observemos que "iteramos" una sola vez ahora, porque todos los elementos que no estén multiplicados por la diagonal se van. También aquellos que se mantienen están multiplicados por 1, porque A es la matriz identidad.