

## CLASE 4 - 10/03/2025

### Vectores y valores propios

#### Lema

Si  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$  son matrices semejantes, entonces  $X_A(\lambda) = X_B(\lambda)$ . En particular,  $A, B$  tienen los mismos valores propios.

**Demostración** Como son semejantes,  $\exists P \in \mathcal{M}_{n \times n}$  tal que:  $B = P^{-1}AP$ , además también podemos ver que:  $\lambda \mathbb{I} = P^{-1}\lambda \mathbb{I}P$

Con esto podemos decir que:

$$\begin{aligned} B - \lambda \mathbb{I} &= P^{-1}AP - P^{-1}\lambda \mathbb{I}P \\ &\iff \text{saco } P^{-1}, P \text{ de factor común} \\ B - \lambda \mathbb{I} &= P^{-1}(A - \lambda \mathbb{I})P \end{aligned}$$

Entonces  $(B - \lambda \mathbb{I})$  y  $(A - \lambda \mathbb{I})$  son matrices semejantes, y como los determinantes de matrices semejantes son iguales, podemos decir que:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det(B - \lambda \mathbb{I}) \iff X_A(\lambda) = X_B(\lambda)$$

**Observación** Sea  $T : V \rightarrow V$  con  $\dim(V) = n$  y dos bases de  $V$ ;  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ . Entonces tenemos:

- $A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$
- $A' = {}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{B}'}$

Que son matrices semejantes, entonces por el lema anterior tenemos que:

$$X_A(\lambda) = X_{A'}(\lambda)$$

Por lo que entonces, no importa la base con la que trabajemos para determinar los valores propios de una TL.

**Observación** El recíproco del lema, no es cierto. Es decir que si dos matrices tienen el mismo polinomio característico, no necesariamente las matrices son semejantes.

Veamos un contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que no son semejantes, pero es fácil observar que el polinomio característico es el mismo.

## Diagonalización

### Definición (transformación lineal diagonalizable)

Sea  $T : V \rightarrow V$ , decimos que  $T$  es diagonalizable si existe una base de  $V : \mathcal{B}$  tal que  ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$  es una matriz diagonal.

### Definición (matriz diagonalizable)

Decimos que una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

### Teorema

Sea  $T : V \rightarrow V$  es diagonalizable  $\iff$  existe una base de  $V$  formada por vectores propios de  $T$  (la matriz asociada en esa base es diagonal)

### Demostración

$(\Rightarrow)$   $T$  es diagonalizable  $\Rightarrow \exists \mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  base de  $V$  tal que:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Donde podemos observar que:

- $\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_1)) = \lambda_1 \cdot v_1$
- $\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_2)) = \lambda_1 \cdot v_2$
- ...
- $\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_n)) = \lambda_1 \cdot v_n$

Esto significa que:

- $v_1$  es vector propio asociado al valor propio  $\lambda_1$
- $v_2$  es vector propio asociado al valor propio  $\lambda_2$
- ...
- $v_n$  es vector propio asociado al valor propio  $\lambda_n$

Entonces  $\mathcal{B}$  es una base de  $V$  formada por vectores propios de  $T$ .

$(\Leftarrow)$  Si  $\mathcal{B}$  es una base de valores propios, entonces tenemos que:

- $T(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$
- $T(v_2) = \lambda_1 \cdot v_2$
- ...
- $T(v_n) = \lambda_1 \cdot v_n$

Con esto podemos hallar la matriz asociada:

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Con lo que se concluye que  $T$  es diagonalizable. ■

**Observación** La forma diagonal es única, a menos del orden de los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

### Teorema

Sea  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal. Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  valores propios de  $T$  dos a dos distintos y  $v_1, v_2, \dots, v_k$  vectores propios asociados a cada uno de los valores propios.

Entonces  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  es un conjunto LI

**Demostración** Se hará la inducción sobre el número de valores propios  $k \in \mathbb{N}$ .

**Paso base** ( $n = 1$ ):  $v_1$  vector propio asociado a  $\lambda_1$

Se observa trivialmente que  $\{v_1\}$  es un conjunto LI

### Paso inductivo

(H) ( $n = k$ ):  $v_1, v_2, \dots, v_k$  vectores propios asociados a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

Asumimos que  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  es LI

(T) ( $n = k + 1$ ):  $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$  vectores propios asociados a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$

Consideremos la ecuación

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad (i)$$

$\Leftrightarrow$  aplicamos  $T$  a ambos lados

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_k T(v_k) + \alpha_{k+1} T(v_{k+1}) = 0$$

$\Leftrightarrow$  utilizando los valores propios de  $T$

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad (ii)$$

Ahora, multiplicamos (i) por  $\lambda_{k+1}$  y lo restamos a (ii). Obtenemos lo siguiente:

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) v_2 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k + 0 = 0 \quad (iii)$$

Por hipótesis inductiva,  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  es LI, lo cual implica que:

- $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0$
- $\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = 0$
- ...
- $\alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$

Donde todos los paréntesis no pueden ser 0, porque todos los valores propios son distintos entre si. Esto solo deja la posibilidad de que  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k = 0$

Llevando todo esto a la ecuación (i), nos queda que:

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$$

Como  $v_{k+1}$  es vector propio, sabemos que necesariamente  $v_{k+1} \neq \vec{0}$ .

Esto implica que todos los escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1} = 0$ , es decir, el conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}\}$  es LI. ■

### **Corolario**

Sea  $T : V \rightarrow V$  con  $\dim(V) = n$ . Si  $T$  tiene  $n$  valores propios diferentes dos a dos, entonces  $T$  es diagonalizable

**Demostración** Consideramos  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vectores propios asociados a los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (todos distintos).

Por el teorema anterior sabemos que:  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es LI. Como  $\dim(V) = n$ , juntando con lo anterior podemos decir que:

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es base de  $V$ , en particular, es una base de vectores propios de  $T$ , por lo que  $T$  es diagonalizable. ■