# Geometría y Álgebra Lineal 2

#### Mauro Polenta Mora

## CLASE 17 - 16/06/2025

## Cálculo de la adjunta

### Ejemplo 1

Sea  $V=W=\mathbb{R}^3$  con producto interno usual, considerando la siguiente transformación lineal:

- $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  definida por:
- T(x, y, z) = (y + z, x + y + 2z, 5x y)

Para calcular  $T^*(x',y',z')$  usamos la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , veamos de calcular  $T^*$  para los vectores de la base canónica:

$$\begin{split} &\langle (x,y,z), T^*(1,0,0)\rangle \\ =& (\text{definición de la adjunta}) \\ &\langle T(x,y,z), (1,0,0)\rangle \\ =& (\text{definición de la transformación lineal}) \\ &\langle (y+z,x+y+2z,5x-y), (1,0,0)\rangle \\ =& (\text{desarrollo}) \\ &y+z \\ =& (\text{producto interno usual}) \\ &\langle (x,y,z), (0,1,1)\rangle \end{split}$$

Con esto concluimos que  $T^*(1,0,0) = (0,1,1)$ .

$$\begin{split} &\langle (x,y,z), T^*(0,1,0)\rangle \\ =& (\text{definición de la adjunta}) \\ &\langle T(x,y,z), (0,1,0)\rangle \\ =& (\text{definición de la transformación lineal}) \\ &\langle (y+z,x+y+2z,5x-y), (0,1,0)\rangle \\ =& (\text{desarrollo}) \\ &x+y+2z \\ =& (\text{producto interno usual}) \\ &\langle (x,y,z), (1,1,2)\rangle \end{split}$$

Con esto concluimos que  $T^*(0,1,0)=(1,1,2)$ 

$$\begin{split} &\langle (x,y,z), T^*(0,0,1)\rangle \\ =& (\text{definición de la adjunta}) \\ &\langle T(x,y,z), (0,0,1)\rangle \\ =& (\text{definición de la transformación lineal}) \\ &\langle (y+z,x+y+2z,5x-y), (0,0,1)\rangle \\ =& (\text{desarrollo}) \\ &5x-y \\ =& (\text{producto interno usual}) \\ &\langle (x,y,z), (5,-1,0)\rangle \end{split}$$

Con esto concluimos que  $T^*(0,0,1) = (5,-1,0)$ .

Ahora, podemos decir que:

$$\begin{split} T^*(x',y',z') &= x'T^*(1,0,0) + y'T^*(0,1,0) + z'T^*(0,0,1) \\ &= x'(0,1,1) + y'(1,1,2) + z'(5,-1,0) \\ &= (y'+5z',x'+y'-z',x'+2y') \end{split}$$

Y con esto hallamos  $T^*(x', y', z')$  para todo  $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ 

### Ejemplo 2

Sea  $V=W=\mathcal{M}_{n\times n}$  con el producto interno  $\langle A,B\rangle=tr(B^tA),\,\forall A,B\in\mathcal{M}_{n\times n}.$  Dada  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , tomamos la siguiente transformación lineal:

- $\begin{array}{ll} \bullet & T: \mathcal{M}_{n \times n} \to \mathcal{M}_{n \times n} \\ \bullet & T(A) = MA & \forall A \in \mathcal{M}_{n \times n} \end{array}$

Veamos como hallar  $T^*$ , sabemos que por definición de adjunta, debe cumplirse que:

$$\langle T(A),B\rangle = \langle A,T^*(B)\rangle \quad \, \forall A,B \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

Partamos de  $\langle T(A), B \rangle$  y tratemos de llegar a  $\langle A, T^*(B) \rangle$ :

```
\begin{split} &\langle T(A),B\rangle\\ =&(\text{definición de T})\\ &\langle MA,B\rangle\\ =&(\text{definición del producto interno dado})\\ &tr(B^tMA)\\ =&(\text{propiedades de la traspuesta})\\ &tr((M^tB)^tA)\\ =&(\text{definición del producto interno dado})\\ &\langle A,M^tB\rangle\\ =&(\text{considerando }T^*(B)=M^tB)\\ &\langle A,T^*(B)\rangle \end{split}
```

Considerando que este razonamiento es válido para todo  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , podemos definir  $T^*(B) = M^t B$ 

### Propiedades de la adjunta

Sean V, W, U espacios vectoriales sobre el mismo  $\mathbb{K}$  con producto interno.

- 1. Sean  $T_1: V \to W$  y  $T_2: V \to W$ , entonces  $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
- 2. Sean  $T: V \to W, \alpha \in \mathbb{K}$ , entonces  $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
- 3. Sean  $T:V\to W$  y  $S:W\to U,$   $(S\circ T:V\to U),$  entonces  $(S\circ T)^*=T^*\circ S^*$
- 4. Sea  $T: V \to W$ , entonces  $(T^*)^* = T$
- 5. Sea  $T: V \to W$ , T es invertible  $\iff T^*$  es invertible y además  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- 6. Sea  $Id: V \to V$  la transformación identidad, entonces  $Id = Id^*$
- 7. Sea  $T:V\to V$  un operador lineal.  $\lambda$  es un valor propio de  $T\iff \overline{\lambda}$  es un valor propio de  $T^*$