Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 16 - 16/06/2025

Transformaciones lineales en espacios con producto interno

Funcionales lineales

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con producto interno. Llamamos una funcional lineal a una transformación lineal de la siguiente forma:

$$T : V \to \mathbb{K}$$

Ejemplo

Sea $w \in V$, definimos la función:

$$f_w(v) = \langle v, w \rangle$$

Esta es una funcional lineal.

Lema

Sea V un espacio vectorial con producto interno.

Si $\langle v, w \rangle = \langle v, w' \rangle \quad \forall v \in V$, entonces $w = w'$

Demostración

Partamos de la hipótesis:

$$
\begin{aligned}
&\langle v, w\rangle = \langle v, w'\rangle \quad \forall v \in V \\
&\iff \text{(despejando)} \\
&\langle v, w\rangle - \langle v, w'\rangle = 0 \quad \forall v \in V \\
&\iff \text{(propiedades del producto interno)} \\
&\langle v, w - w'\rangle = 0 \quad \forall v \in V \\
&\iff \text{(en particular, tomando } v{=}w{-}w'\text{)} \\
&\langle w - w', w - w'\rangle = 0 \\
&\iff \text{(propiedades del producto interno)} \\
&w - w' = 0 \\
&\iff \text{(despejando)} \\
&w = w'
\end{aligned}
$$

Teorema de representación de Riesz

Sea V un espacio vectorial con producto interno, tal que $dim(V) = n$. Si $T : V \to \mathbb{K}$ es una funcional lineal entonces existe un único $w \in V$ tal que $T(v) = \langle v, w\rangle \quad \forall v \in V$. Llamamos a $w \in V$ el representante de Riesz de la funcional lineal T

Demostración

Primero probamos la unicidad del representante de Riesz:

Supongamos que existen dos vectores $w, w' \in V$ tales que $T(v) = \langle v, w\rangle = \langle v, w'\rangle \quad \forall v \in V$. Entonces, usando el lema que probamos anteriormente, $w = w'$

Ahora, tenemos que probar que efectivamente existe un vector $w \in V$ que cumple con las propiedades mencionadas.

Consideremos $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal del espacio V. Entonces, dado un vector $v \in V$, podemos descomponerlo de la siguiente forma:

$$
v = \langle v, e_1\rangle\, e_1 + \ldots + \langle v, e_n\rangle\, e_n = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle\, e_i
$$

Por lo tanto:

$$
T(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle\, T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle v, \overline{T(e_i)} e_i \right\rangle = \left\langle v, \sum_{i=1}^{n} \overline{T(e_i)} e_i \right\rangle
$$

Y observemos que $\sum_{i=1}^{n} \overline{T(e_i)} e_i \in V$, por lo que llamando $w = \sum_{i=1}^{n} \overline{T(e_i)} e_i$, escribimos a $T(v)$ como $\langle v, w\rangle \quad \forall v \in V$ (pues consideramos $v \in V$ cualquiera).

Adjunta de una transformación lineal

Sean V, W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, ambos con producto interno: $\langle \cdot, \cdot\rangle_V$ y $\langle \cdot, \cdot\rangle_W$. Consideramos una transformación $T : V \to W$ una transformación lineal.

Decimos que T tiene adjunta si existe una función $T^* : W \to V$ tal que:

$$\langle T(v), w\rangle_W = \langle v, T^*(w)\rangle_V \quad \forall v \in V \quad \forall w \in W$$

Teorema

Sean V, W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita, $\langle \cdot, \cdot\rangle_V, \langle \cdot, \cdot\rangle_W$ productos internos sobre V, W. Entonces toda transformación lineal $T : V \to W$ tiene una transformación lineal adjunta $T^* : W \to V$

Demostración

Para probar el teorema, tenemos que probar las siguientes tres partes:

1. Unicidad
2. Existencia
3. T^* es una transformación lineal

Unicidad

Supongamos que existen $T_1^* : W \to V$ y $T_2^* : W \to V$ tales que:

1. $\langle T(v), w\rangle_W = \langle v, T_1^*(w)\rangle_V \quad \forall v \in V \quad \forall w \in W$
2. $\langle T(v), w\rangle_W = \langle v, T_2^*(w)\rangle_V \quad \forall v \in V \quad \forall w \in W$

Por lo tanto deducimos que:

$$\langle v, T_1^*(w)\rangle_V = \langle v, T_2^*(w)\rangle_V \quad \forall v \in V \quad \forall w \in W$$

Y usando el lema anterior concluimos que:

$$T_1^*(w) = T_2^*(w) \quad \forall w \in W$$

Por lo tanto $T_1^* = T_2^*$

Existencia

Dado $w \in W$ construimos el funcional lineal $f_w : V \to \mathbb{K}$ definido por:

$$f_w(v) = \langle T(v), w\rangle_W \quad \forall v \in V$$

Por el teorema de Riesz, existe un único $T^*(w) \in V$ tal que:

$$f_w(v) = \langle v, T^*(w)\rangle_V$$

Entonces, para cada $w \in W$ tenemos $T^*(w) \in V$ tal que:

$$\langle T(v), w\rangle_W = f_w(v) = \langle v, T^*(w)\rangle_V \quad \forall v \in V$$

Por lo tanto $T^* : W \to V$ es una adjunta de $T : V \to W$

T^* es una transformación lineal

Consideremos $w_1, w_2 \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Se cumple $\forall v \in V$:

$$\begin{aligned}
\langle v, T^*(\alpha w_1 + \beta w_2) \rangle_V &= \langle T(v), \alpha w_1 + \beta w_2 \rangle_W \\
&= \overline{\alpha} \, \langle T(v), w_1 \rangle_W + \overline{\beta} \, \langle T(v), w_2 \rangle_W \\
&= \overline{\alpha} \, \langle v, T^*(w_1) \rangle_V + \overline{\beta} \, \langle v, T^*(w_2) \rangle_V \\
&= \langle v, \alpha T^*(w_1) + \beta T^*(w_2) \rangle_V
\end{aligned}$$

Entonces por el lema anterior:

$$T^*(\alpha w_1 + \beta w_2) = T^*(w_1) + \beta T^*(w_2)$$