

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Sea $S = [(3, 5, 1)] \cup \{(0, 1, 1)\}$ un subconjunto de \mathbb{R}^3 .
Se considera el producto interno:

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$$

Calcular S^\perp .

Resolución

Definimos los conjuntos S y S^\perp como los siguientes:

- $S = \{(3\alpha, 5\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 1, 1)\}$
- $S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$

Primero, necesitamos que el siguiente razonamiento sea válido para $v \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\langle v, s \rangle &= 0 \\ \iff (\text{ampliando los vectores}) \\ \langle (x, y, z), (3\alpha, 5\alpha, \alpha) \rangle &= 0 \\ \iff (\text{cálculo del producto interno}) \\ x3\alpha + 2y5\alpha + z3\alpha &= 0 \\ \iff (\text{simplificando}) \\ \alpha(3x + 10y + 3z) &= 0\end{aligned}$$

Esto último es cierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ solo si:

- $z = -\frac{10}{3}y - x$
- $y \in \mathbb{R}$
- $x \in \mathbb{R}$

En segundo lugar, necesitamos que el siguiente razonamiento también sea válido para $v \in \mathbb{R}$:

$$\langle v, (0, 1, 1) \rangle = 0$$

\iff (ampliando los vectores)

$$\langle (x, y, z), (0, 1, 1) \rangle = 0$$

\iff (cálculo del producto interno)

$$2y + 3z = 0$$

\iff (simplificando)

$$2y + 3z = 0$$

Esto último es cierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ solo si:

- $z = -\frac{2}{3}y$
- $x \in \mathbb{R}$
- $z \in \mathbb{R}$

Juntando ambas partes, tenemos que:

$$z = z$$

\iff (resultados obtenidos)

$$-\frac{10}{3}y - x = -\frac{2}{3}y$$

\iff (simplificando)

$$x = -\frac{8}{3}y$$

Recapitulando, necesitamos que se cumplan las siguientes igualdades:

- $x = -\frac{8}{3}y$
- $y \in \mathbb{R}$
- $z = -\frac{2}{3}y$

Entonces, tenemos que:

$$S^\perp = \{(-8\alpha, 3\alpha, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \mathcal{B}^{S^\perp} = \{(-8, 3, -2)\}$$