CLASE 3 - 20/2/2025

Vectores y valores propios

Proposición

Sea $T : V \to V$ un operador líneal, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V. Consideramos la matriz $A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$.

Decimos que v es vector propio de T asociado al valor propio λ sii:

$$coord_{\mathcal{B}}(v) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Es solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda \mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Demostración

$(\Rightarrow)$ Consideramos $v \in V, v \neq \vec{0}$, tal que v es vector propio de T.

Por las hipótesis, se cumple que:

1. $coord_{\mathcal{B}}(v) \neq (0, 0, \dots, 0)$
2. $coord_{\mathcal{B}}(T(v)) = coord_{\mathcal{B}}(\lambda v) = \lambda \cdot coord_{\mathcal{B}}(v)$

A su vez:

$$coord_{\mathcal{B}}(T(v)) = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot coord_{\mathcal{B}}(v)$$

Entonces, si sustituimos en el punto (2):

$$\begin{aligned} &{}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot coord_{\mathcal{B}}(v) = \lambda \cdot coord_{\mathcal{B}}(v) \iff \\ &{}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot coord_{\mathcal{B}}(v) - \lambda \cdot coord_{\mathcal{B}}(v) = (0, 0, \dots, 0) \iff \\ &({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} - \lambda \mathbb{I}) \cdot coord_{\mathcal{B}}(v) = (0, 0, \dots, 0) \iff \\ &(A - \lambda \mathbb{I}) \cdot coord_{\mathcal{B}}(v) = (0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos hallar. Esto prueba $(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$ Si $coord_{\mathcal{B}}(v) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda \mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Esto equivale a:

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot coord_{\mathcal{B}}(v) = \lambda \cdot coord_{\mathcal{B}}(v)$$

Pero sabiendo que $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot coord_{\mathcal{B}}(v) = coord_{\mathcal{B}}(T(v))$, entonces:

$$coord_{\mathcal{B}}(T(v)) = coord_{\mathcal{B}}(\lambda v)$$

Por lo tanto: $T(v) = \lambda v$, lo que significa que v es vector propio asociado a λ de T

Corolario

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, una transformación $T : V \to V$ un operador lineal, $\mathcal{B}$ es base de V, y $A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$

Se cumple que:

λ es valor propio de T sii:

1. $\lambda \in \mathbb{K}$
2. $det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

Demostración Por la proposición anterior, sabemos que:

λ es valor propio sii existe $v \in V$ tal que $coord_{\mathcal{B}}(v)$ es solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda \mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto pasa solo si el sistema es compatible indeterminado (más de una solución aparte de la trivial). Esto a su vez solo pasa si $(A - \lambda \mathbb{I})$ es invertible, que es equivalente a decir que solo pasa si $det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

Ejemplo (hallar valores y vectores propios de una transformación)

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con cierta base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $T : V \to V$. Supongamos que:

$$A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que calcular $det(A - \lambda\mathbb{I})$ para encontrar los valores propios de T:

$$det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Por lo tanto:

$$det(A - \lambda\mathbb{I}) = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

Obtenemos que:

- $\lambda_1 = 0$ es solución, por lo tanto valor propio de T
- $\lambda_2 = 2$ es solución, por lo tanto valor propio de T

Ahora que tenemos los valores propios de T, hallemos los subespacios propios asociados a los λ que hallamos. Para esto tenemos que resolver el sistema de ecuaciones utilizando λ_1, λ_2:

Subespacio S_0 $\quad det(A - 0\mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esto es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que equivale al sistema

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

De donde obtengo que:

- $x = 0$
- $y = z$
- $z \in \mathbb{R}$

Entonces $coord_{\mathcal{B}}(v) = (0, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}$. Con esto podemos definir el subespacio propio:

$$S_0 = \{v \in V \mid v = \alpha(v_2 + v_3) \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Observemos que $dim(S_0) = 1$

Subespacio S_2 Reducimos algunos pasos para este caso, ya que siempre es el mismo procedimiento.

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right.$$

Podemos ver que nos queda:

- $y = -z$

Entonces $coord_{\mathcal{B}}(v) = (\alpha, -\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Con esto podemos definir el subespacio propio:

$$S_2 = \{v \in V \mid v = \alpha v_1 + \beta(v_3 - v_2) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Observemos que $dim(S_2) = 2$

Extensión de vaps y veps a Matrices

La definición de vectores y valores propios se puede extender a matrices en caso de que trabajemos con ellas:

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Decimos que un vector propio de A asociado a un valor propio λ es un vector no nulo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Entonces los valores propios son soluciones (en $\mathbb{K}$) de $det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$

Notación

- Polínomio característico de T: $\mathrm{X}_T(\lambda) := det(A - \lambda\mathbb{I})$
- Ecuación característica de T: $\mathrm{X}_T(\lambda) = 0$

Las soluciones de la ecuación característica, son llamadas **raíces características** de T. Entonces si dichas raíces pertenecen al cuerpo de T, son los valores propios de T