

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 7

Consigna

Sea $M_2(\mathbb{R})$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$.

1. Hallar una base ortonormal de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Sea D el subespacio de las matrices diagonales. Hallar D^\perp .
3. Sea S el subespacio de las matrices simétricas. Hallar S^\perp .

Resolución

Parte 1

Consideremos la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Veamos si la misma es una base ortonormal, para esto tenemos que calcular los siguientes productos internos:

$$\begin{aligned} \bullet \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \bullet \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \bullet \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \bullet \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \bullet \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \bullet \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \end{aligned}$$

Con esto comprobamos que la base es ortogonal, sumando que todas las normas de los vectores son 1, concluimos que la base es ortonormal.

Parte 2

Consideremos \mathcal{D} , el subespacio de las matrices diagonales, lo definimos de la siguiente forma, junto a \mathcal{D}^\perp :

- $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$
- $\mathcal{D}^\perp = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \langle A, D \rangle = 0 \quad \forall D \in \mathcal{D}\}$

Por lo tanto, veamos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} \langle A, D \rangle &= 0 \\ &\iff (\text{cálculo de producto interno}) \\ tr \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ &\iff (\text{desarrollo}) \\ tr \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \beta a_{12} \\ \alpha a_{21} & \beta a_{22} \end{pmatrix} &= 0 \\ &\iff (\text{cálculo de la traza}) \\ \alpha a_{11} + \beta a_{22} &= 0 \\ &\iff (\text{desarrollo}) \\ \alpha a_{11} &= -\beta a_{22} \end{aligned}$$

Necesitamos que esto último se cumpla para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, por lo tanto de esto derivamos que:

- $a_{11} = 0$
- $a_{22} = 0$

Como no tenemos requisitos para los demás elementos de la matriz, podemos definir el conjunto \mathcal{D}^\perp :

$$\mathcal{D}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \quad \mathcal{D}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Parte 3

Consideremos \mathcal{S} , el subespacio de las matrices diagonales, lo definimos de la siguiente forma, junto a \mathcal{S}^\perp :

- $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$
- $\mathcal{S}^\perp = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \langle A, S \rangle = 0 \quad \forall S \in \mathcal{S}\}$

Por lo tanto, veamos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
\langle A, S \rangle &= 0 \\
&\iff (\text{cálculo de producto interno}) \\
\text{tr} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \right) &= 0 \\
&\iff (\text{desarrollo}) \\
\text{tr} \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \gamma a_{12} & \gamma a_{11} + \beta a_{12} \\ \alpha a_{21} + \gamma a_{22} & \gamma a_{21} + \beta a_{22} \end{pmatrix} &= 0 \\
&\iff (\text{cálculo de la traza}) \\
\alpha a_{11} + \gamma a_{12} + \gamma a_{21} + \beta a_{22} &= 0 \\
&\iff (\text{desarrollo}) \\
\alpha a_{11} + \beta a_{22} + \gamma(a_{12} + a_{21}) &= 0
\end{aligned}$$

Necesitamos que esto último se cumpla para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, por lo tanto de esto derivamos que:

- $a_{11} = 0$
- $a_{22} = 0$
- $a_{12} = -a_{21}$

Como no tenemos requisitos para los demás elementos de la matriz, podemos definir el conjunto \mathcal{S}^\perp :

$$\mathcal{S}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \mathcal{S}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$