Ejercicio 6

Consigna

Sean $\mathcal{A} = \{1, t+1, (t+1)^2\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,2,3),(3,2,1)\}$ bases de $\mathbb{R}_2[t]$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Consideramos $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$ lineal tal que:

$$
{}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

Dado $q_0(t) = t^2 + t - 1, \forall t \in \mathbb{R}$, hallar $T(q_0)$.

Resolución

La idea es exactamente la misma que el ejercicio 5, primero quiero hallar las coordenadas en la base de partida de q_0:

$$
\begin{aligned}
coord_{\mathcal{A}}(t^2 + t - 1) &= c_1(1) + c_2(t+1) + c_3(t+1)^2 \\
&= c_1(1) + c_2(t+1) + c_3(t^2 + 2t + 1)
\end{aligned}
$$

Esto plantea el siguiente sistema:

$$
\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right.
$$

Entonces:

- $c_3 = 1$
- $c_2 = 1 - 2c_3 = -1$
- $c_1 = -1$

$$
coord_{\mathcal{A}}(t^2 + t - 1) = (-1, -1, 1)
$$

Utilicemos la propiedad:

$$
coord_{\mathcal{B}}(T(t^2 + t - 1)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Entonces:

$$
coord_{\mathcal{B}}(T(t^2 + t - 1)) = (-2, -3, 0)
$$

Entonces resta "eliminar" las coordenadas, es decir:

$$T(t^2 + t - 1) = -2 \cdot (1, 1, 0) - 3 \cdot (1, 2, 3) = (-5, -8, -9)$$

Entonces la respuesta es:

$$T(t^2 + t - 1) = (-5, -8, -9)$$