Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2 - Parcial Julio 2022

Consigna

Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ el operador lineal que satisface:

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3i & 0 \\ 3 & 4 & -i \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $B = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (1,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{C}^3$.
Entonces, la matriz $_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}}$ es igual a:

A.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2+3i & 6 & 2 \\ -4-3i & -10+i & -3 \end{pmatrix}$$

B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3i & 4 & 2 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

C.

$$\begin{pmatrix} 6+3i & 14-i & 24+2i \\ 6+6i & 16-i & 27+5i \\ -4-3i & -10+i & -17-2i \end{pmatrix}$$

D.

$$\begin{pmatrix} 6-3i & 14+i & 24-2i \\ 6-6i & 16+i & 27-5i \\ -4+3i & -10-i & -17+2i \end{pmatrix}$$

Resolución

Consideremos $\mathcal{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^3$ Observemos que la matriz dada ya nos da:

- $T(1,0,0) = 1(1,0,0) + 3(0,1,0) + 1(1,1,1) = (2,4,1)$

- $T(0,1,0) = -3i(1,0,0) + 4(0,1,0) + 2(1,1,1) = (2-3i, 6, 2)$

Solo nos faltaría obtener $T(0,0,1)$ para completar ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$.

Observemos que:

$$\begin{aligned}
&T(1,1,1) = T(1,0,0) + T(0,1,0) + T(0,0,1) \\
&\quad \Longleftrightarrow \text{(matriz asociada } {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}) \\
&0(1,0,0) - i(0,1,0) + 0(1,1,1) = T(1,0,0) + T(0,1,0) + T(0,0,1) \\
&\quad \Longleftrightarrow \text{(sustituyendo valores conocidos)} \\
&(0,-i,0) - (2,4,1) - (2-3i,6,2) = T(0,0,1) \\
&\quad \Longleftrightarrow \text{(operatoria)} \\
&(-4+3i, -10-i, -3) = T(0,0,1)
\end{aligned}$$

Por lo que entonces, la matriz asociada con la base canónica es:

$${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 2-3i & -4+3i \\ 4 & 6 & -10-i \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Entonces como $\mathcal{E}$ es canónica, podemos llegar a la adjunta de la siguiente forma:

$${}_{\mathcal{E}}(T^*)_{\mathcal{E}} = (\overline{{}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}})^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2+3i & 6 & 2 \\ -4-3i & -10+i & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo que la opción correcta es la opción **A**.