

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, y $T : V \rightarrow V$ el operador dado por:

$$T(v) = \langle v, u_0 \rangle \cdot u_1$$

donde u_0 y u_1 son vectores fijos y no nulos de V .

1. Hallar T^*
2. ¿Qué condiciones deben cumplir u_0 y u_1 para que T sea autoadjunto?

Resolución

Parte 1

Veamos el siguiente razonamiento

$$\begin{aligned} & \langle T(v), w \rangle \\ &= (\text{definición de } T) \\ & \langle \langle v, u_0 \rangle u_1, w \rangle \\ &= (\text{propiedades del producto interno}) \\ & \langle v, u_0 \rangle \langle u_1, w \rangle \\ &= (\text{propiedades del producto interno y } V \text{ es real}) \\ & \langle v, \langle u_1, w \rangle u_0 \rangle \\ &= (\text{definición de adjunta}) \\ & \langle v, T^*(w) \rangle \end{aligned}$$

Por lo que tenemos que $T^*(w) = \langle u_1, w \rangle u_0$

Parte 2

Para que T sea autoadjunto, tenemos que tener que:

- $T(v) = \langle v, u_0 \rangle u_1 = \langle u_1, w \rangle u_0 = T^*(w)$

Entonces, se tiene que cumplir lo siguiente:

- $\langle v, u_0 \rangle u_1 = \langle u_1, w \rangle u_0$

Lo que implica que u_1 y u_2 tienen que ser colineales. Veamos que pasa si $u_1 = ku_0$ con $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& T(w) \\
& = (\text{definición de } T^*) \\
& \langle u_1, w \rangle u_0 \\
& = (u_1 = ku_0) \\
& \langle ku_0, w \rangle u_0 \\
& = (\text{propiedades del producto interno}) \\
& \langle u_0, w \rangle ku_0 \\
& = (u_1 = ku_0) \\
& \langle u_0, w \rangle u_1 \\
& = (\text{como } V \text{ es real}) \\
& \langle w, u_0 \rangle u_1 \\
& = (\text{definición de } T) \\
& T(w)
\end{aligned}$$

Por lo que si u_1 y u_2 son colineales, entonces T es autoadjunta.