Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 17 - 16/06/2025

Cálculo de la adjunta

Ejemplo 1

Sea $V = W = \mathbb{R}^3$ con producto interno usual, considerando la siguiente transformación lineal:

- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:
- $T(x, y, z) = (y + z, x + y + 2z, 5x - y)$

Para calcular $T^*(x', y', z')$ usamos la base canónica de $\mathbb{R}^3$, veamos de calcular T^* para los vectores de la base canónica:

$$
\begin{aligned}
&\langle (x, y, z), T^*(1, 0, 0) \rangle \\
&=_{\text{(definición de la adjunta)}} \\
&\langle T(x, y, z), (1, 0, 0) \rangle \\
&=_{\text{(definición de la transformación lineal)}} \\
&\langle (y + z, x + y + 2z, 5x - y), (1, 0, 0) \rangle \\
&=_{\text{(desarrollo)}} \\
&y + z \\
&=_{\text{(producto interno usual)}} \\
&\langle (x, y, z), (0, 1, 1) \rangle
\end{aligned}
$$

Con esto concluimos que $T^*(1, 0, 0) = (0, 1, 1)$.

$$\begin{aligned}
&\langle (x,y,z), T^*(0,1,0)\rangle \\
&=_{\text{(definición de la adjunta)}} \\
&\langle T(x,y,z), (0,1,0)\rangle \\
&=_{\text{(definición de la transformación lineal)}} \\
&\langle (y+z, x+y+2z, 5x-y), (0,1,0)\rangle \\
&=_{\text{(desarrollo)}} \\
&x+y+2z \\
&=_{\text{(producto interno usual)}} \\
&\langle (x,y,z), (1,1,2)\rangle
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que $T^*(0,1,0) = (1,1,2)$

$$\begin{aligned}
&\langle (x,y,z), T^*(0,0,1)\rangle \\
&=_{\text{(definición de la adjunta)}} \\
&\langle T(x,y,z), (0,0,1)\rangle \\
&=_{\text{(definición de la transformación lineal)}} \\
&\langle (y+z, x+y+2z, 5x-y), (0,0,1)\rangle \\
&=_{\text{(desarrollo)}} \\
&5x-y \\
&=_{\text{(producto interno usual)}} \\
&\langle (x,y,z), (5,-1,0)\rangle
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que $T^*(0,0,1) = (5,-1,0)$.

Ahora, podemos decir que:

$$\begin{aligned}
T^*(x',y',z') &= x'T^*(1,0,0) + y'T^*(0,1,0) + z'T^*(0,0,1) \\
&= x'(0,1,1) + y'(1,1,2) + z'(5,-1,0) \\
&= (y'+5z', x'+y'-z', x'+2y')
\end{aligned}$$

Y con esto hallamos $T^*(x',y',z')$ para todo $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$

Ejemplo 2

Sea $V = W = \mathcal{M}_{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Dada $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$, tomamos la siguiente transformación lineal:

- $T : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathcal{M}_{n\times n}$
- $T(A) = MA \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

Veamos como hallar T^*, sabemos que por definición de adjunta, debe cumplirse que:

$$\langle T(A), B\rangle = \langle A, T^*(B)\rangle \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

Partamos de $\langle T(A), B\rangle$ y tratemos de llegar a $\langle A, T^*(B)\rangle$:

$\langle T(A), B\rangle$

$=$(definición de T)

$\langle MA, B\rangle$

$=$(definición del producto interno dado)

$tr(B^t MA)$

$=$(propiedades de la traspuesta)

$tr((M^t B)^t A)$

$=$(definición del producto interno dado)

$\langle A, M^t B\rangle$

$=$(considerando $T^*(B)$=$M^t B$)

$\langle A, T^*(B)\rangle$

Considerando que este razonamiento es válido para todo $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, podemos definir $T^*(B) = M^t B$

Propiedades de la adjunta

Sean V, W, U espacios vectoriales sobre el mismo $\mathbb{K}$ con producto interno.

1. Sean $T_1 : V \to W$ y $T_2 : V \to W$, entonces $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
2. Sean $T : V \to W, \alpha \in \mathbb{K}$, entonces $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
3. Sean $T : V \to W$ y $S : W \to U$, $(S \circ T : V \to U)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$
4. Sea $T : V \to W$, entonces $(T^*)^* = T$
5. Sea $T : V \to W$, T es invertible $\iff$ T^* es invertible y además $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
6. Sea $Id : V \to V$ la transformación identidad, entonces $Id = Id^*$
7. Sea $T : V \to V$ un operador lineal. λ es un valor propio de $T \iff \overline{\lambda}$ es un valor propio de T^*