

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## CLASE 12 - 15/04/2025

### Método de Ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno,  $\dim(V) = n$ . Dada una base  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$ , existe una base **ortonormal**  $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_n\}$  de  $V$ , que además cumple:

$$\bullet [v_1, \dots, v_k] = [y_1, \dots, y_k] \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

### Demostración

Primero debemos hallar una base ortogonal  $\{w_1, \dots, w_n\}$  que cumpla:

$$\bullet [w_1, \dots, w_k] = [y_1, \dots, y_k] \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

Luego bastará con normalizar dicha base.

Veamos como elegir vectores de forma apropiada para cumplir con lo que necesitamos.

1. Para seleccionar  $w_1$  tenemos la forma trivial que sería seleccionar  $w_1 = v_1$ , de esta forma cumplimos con que  $[w_1] = [v_1]$ . Por ahora no necesitamos más que cumplir con esa condición.
2. Selecciono  $w_2$  como combinación lineal de  $v_1, v_2$  de la siguiente forma:

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

1. En primer lugar, tenemos que  $[w_1, w_2] = [v_1, v_2]$ , esto porque estamos eligiendo  $w_2$  específicamente para que esto se cumpla.
2.  $w_2 \neq 0$ , pues es la combinación lineal de dos vectores que son LI.
3. Nos restaría probar que  $w_2 \perp w_1$ . Verifiquemos:

$$\begin{aligned}
& \langle w_2, w_1 \rangle \\
& = (\text{definición de producto interno (linealidad)}) \\
& \langle v_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \langle w_1, w_1 \rangle \\
& = (\text{operatoria}) \\
& 0
\end{aligned}$$

Con esto seleccionamos  $w_2$  que cumple con todo lo que buscábamos.

3. Selecciono  $w_3$  como combinación lineal de  $v_1, v_2, v_3$  de la siguiente forma:

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

1. En primer lugar, tenemos que  $[w_1, w_2, w_3] = [v_1, v_2, v_3]$ , esto porque estamos eligiendo  $w_3$  específicamente para que esto se cumpla.
2.  $w_3 \neq 0$ , pues es la combinación lineal de tres vectores que son LI.
3. Nos restaría probar que  $w_3 \perp w_2$  y  $w_3 \perp w_1$ . Verifiquemos:

$$\begin{aligned}
& \langle w_3, w_2 \rangle \\
& = (\text{definición de producto interno (linealidad)}) \\
& \langle v_3, w_2 \rangle - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \langle w_2, w_2 \rangle - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \langle w_1, w_2 \rangle \\
& = (\text{operatoria: } \langle w_1, w_2 \rangle = 0) \\
& 0
\end{aligned}$$

De la misma forma veamos  $w_3 \perp w_1$ :

$$\begin{aligned}
& \langle w_3, w_1 \rangle \\
& = (\text{definición de producto interno (linealidad)}) \\
& \langle v_3, w_1 \rangle - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \langle w_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \langle w_1, w_1 \rangle \\
& = (\text{operatoria: } \langle w_2, w_1 \rangle = 0) \\
& 0
\end{aligned}$$

Veamos como generalizar este procedimiento:

Dado  $\{w_1, w_2, \dots, w_{k-1}\}$  un conjunto ortogonal, definimos:

$$w_k = v_k - \frac{\langle v_k, w_{k-1} \rangle}{\langle w_{k-1}, w_{k-1} \rangle} w_{k-1} - \frac{\langle v_k, w_{k-2} \rangle}{\langle w_{k-2}, w_{k-2} \rangle} w_{k-2} - \dots - \frac{\langle v_k, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

Con esto, estudiemos los 3 requerimientos que tenemos que cumplir:

1. En primer lugar, tenemos que  $[w_1, w_2, \dots, w_k] = [v_1, v_2, \dots, v_k]$ , esto porque estamos eligiendo  $w_k$  específicamente para que esto se cumpla. La idea es que  $w_k$  es combinación lineal de  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
2.  $w_k \neq 0$ , pues es la combinación lineal de  $k$  vectores que son LI.
3. Nos restaría probar que es ortogonal a todos los vectores anteriores.

Probemos esto último:

Se cumple, para  $j = 1, 2, \dots, k-1$

$$\begin{aligned}
& \langle w_k, w_j \rangle \\
& = (\text{desarrollo de } w_k) \\
& \left\langle v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i, w_j \right\rangle \\
& = (\text{definición de producto interno}) \\
& \langle v_k, w_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \cdot \langle w_i, w_j \rangle \\
& = (\text{ortogonalidad cuando } i \neq j) \\
& \langle v_k, w_j \rangle - \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \cdot \langle w_j, w_j \rangle \\
& = (\text{operatoria}) \\
& 0
\end{aligned}$$

Entonces  $w_k \perp w_j \quad \forall j \in \{1, \dots, k-1\}$ , lo que prueba que  $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  es un conjunto ortogonal.

Para obtener un conjunto ortonormal, basta con normalizar los vectores, es decir, tomamos:

$$y_j = \left\{ \frac{w_j}{\|w_j\|} : j \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

Dicho conjunto es base ortonormal de  $V$ .

## Matriz de cambio de base con una base ortonormal

Veamos la matriz cambio de base que resulta del método de ortonormalización de Gram-Schmidt.

- $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$
- $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_n\}$

**Notación:**

$$C_{ki} = \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \text{ con } i \in \{1, \dots, n\}$$

Los elementos de  $\{w_1, \dots, w_n\}$  los habíamos definido de la siguiente forma:

- $w_k = v_k - \sum_{i=0}^{k-1} c_{ki} w_i$  con  $k \in \{1, \dots, n\}$

Y a partir de esto dijimos que:

- $y_j = \frac{w_j}{\|w_j\|}$  para  $j \in \{1, \dots, n\}$

Con esto, podemos obtener  $v_k$  como combinación lineal de  $y_j$  de la siguiente forma:

- $v_1 = w_1 = \|w_1\| y_1$
- $v_2 = w_2 + C_{21} w_1 = \|w_2\| y_2 + C_{21} \|w_1\| y_1$
- $\vdots$
- $v_k = w_k + \sum_{i=1}^{k-1} C_{ki} w_i = \|w_k\| y_k + \sum_{i=1}^{k-1} C_{ki} \|w_i\| y_i$

Con esto tenemos que la matriz cambio de base queda de la siguiente forma:

$${}_{\mathcal{B}'}(\mathbb{I})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \|w_1\| & C_{21}\|w_1\| & \cdots & C_{k1}\|w_1\| & \cdots & C_{n1}\|w_1\| \\ 0 & \|w_2\| & \cdots & C_{k2}\|w_2\| & \cdots & C_{n2}\|w_2\| \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \|w_k\| & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \|w_n\| \end{pmatrix}$$

Observemos que es una matriz triangular superior, esto tendrá sus aplicaciones en posteriores clases.

## Propiedades de bases ortogonales

Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno y una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

1. Si  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$  y  $w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$  entonces  $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i}$
2.  $\forall v \in V : v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n$
3.  $\forall v \in V : \|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2$

## Demostración

1. Veamoslo con lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \langle v, w \rangle \\
& = (\text{por hipótesis}) \\
& \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right\rangle \\
& = (\text{definición de producto interno}) \\
& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle v_i, v_j \rangle \\
& = (\text{por ortogonalidad: } i \neq j \Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0) \\
& \sum_{j=1}^n \alpha_j \overline{\beta_j} \|v_j\|^2 \\
& = (\text{por ortonormalidad: } \|v_i\| = 1) \\
& \sum_{j=1}^n \alpha_j \overline{\beta_j}
\end{aligned}$$

2. Sea  $v \in V$  con coordenadas  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ , entonces para cualquier  $j \in \{1, \dots, n\}$  tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \langle v, v_j \rangle \\
& = (\text{operatoria}) \\
& \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, v_j \right\rangle \\
& = (\text{definición de producto interno}) \\
& \sum_{i=1}^n a_i \langle v_i, v_j \rangle \\
& = (\text{por ortogonalidad: } i \neq j \Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0) \\
& a_j \langle v_j, v_j \rangle \\
& = (\text{por ortonormalidad: } \|v_i\| = 1) \\
& a_j
\end{aligned}$$

3. Sea  $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ , sabemos que estos vectores son ortogonales entre si. Entonces:

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n a_i v_i \right\|^2 \\
&= (\text{por Pitágoras}) \\
&\sum_{i=1}^n \|a_i v_i\|^2 \\
&= (\text{definición de norma}) \\
&\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \|v_i\|^2 \\
&= (\text{por ortonormalidad: } \|v_i\|=1) \\
&\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \\
&= (\text{por la propiedad anterior}) \\
&\sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2
\end{aligned}$$