

Ejercicio 12

Consigna

- Se consideran las bases $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 .
 - Sea $Id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación identidad, hallar ${}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}}$.
 - Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$.
- Se consideran las bases $\mathcal{A} = \{(1, 2), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 y $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 .
 - Sean $Id_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $Id_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ las transformaciones identidad y \mathcal{E}_2 y \mathcal{E}_3 las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 respectivamente, hallar ${}_{\mathcal{A}}(Id_2)_{\mathcal{E}_2}$ y ${}_{\mathcal{E}_3}(Id_3)_{\mathcal{B}}$.
 - Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Hallar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$.

Resolución (parte 1)

Parte (i)

Hallemos ${}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}}$:

- $coord_{\mathcal{E}}(Id(1, 1)) = (1, 1)$
- $coord_{\mathcal{E}}(Id(-1, 1)) = (-1, 1)$

Entonces:

$${}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hallemos ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}}$, usando el siguiente sistema para las coordenadas:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-x \end{array} \rightarrow \alpha_2 = \frac{y-x}{2}; \quad \alpha_1 = \frac{y+x}{2}$$

- $coord_{\mathcal{B}}(Id(1, 0)) = coord_{\mathcal{B}}(1, 0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
- $coord_{\mathcal{B}}(0, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Entonces:

$${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Parte (ii)

Tenemos T tal que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hallemos T de los vectores de \mathcal{E} para encontrar ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$ y usar las matrices de cambio de base que hallamos en la parte anterior:

- $coord_{\mathcal{E}}(T(1, 0)) = T(1, 0) = (0, 1)$
- $coord_{\mathcal{E}}(T(0, 1)) = T(0, 1) = (2, 0)$

Entonces:

$${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con esto, basta con aplicar la definición de matrices de cambio de base:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}}$$

Entonces, realizamos la multiplicación:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Resolución (parte 2)

Parte (i)

Recordemos:

- $\mathcal{A} = \{(1, 2), (0, 1)\}$
- $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$

Hallemos ${}_{\mathcal{A}}(Id_2)_{\mathcal{E}_2}$:

- $coord_{\mathcal{A}}(1, 0) = (1, -2)$
- $coord_{\mathcal{A}}(0, 1) = (0, 1)$

Entonces:

$${}_{\mathcal{A}}(Id_2)_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hallemos ${}_{\mathcal{E}_3}(Id_3)_{\mathcal{B}}$:

- $coord_{\mathcal{E}_3}(1, 0, 1) = (1, 0, 1)$
- $coord_{\mathcal{E}_3}(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$
- $coord_{\mathcal{E}_3}(-1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$

Entonces:

$$\mathcal{E}_3(Id_3)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Parte (ii)

Tenemos $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Queremos usar lo que hallamos en la parte anterior, para obtener el resultado:

$$\mathcal{A}(T)_{\mathcal{B}} = \mathcal{A}(Id_2)_{\mathcal{E}_2} \cdot \mathcal{E}_2(T)_{\mathcal{E}_3} \cdot \mathcal{E}_3(Id_3)_{\mathcal{B}}$$

Entonces, nos faltaría hallar $\mathcal{E}_2(T)_{\mathcal{E}_3}$:

- $coord_{\mathcal{E}_2}(T(1, 0, 0)) = T(1, 0, 0) = (1, 0)$
- $coord_{\mathcal{E}_2}(T(0, 1, 0)) = T(0, 1, 0) = (0, 1)$
- $coord_{\mathcal{E}_2}(T(0, 0, 1)) = T(0, 0, 1) = (-2, 1)$

Entonces:

$$\mathcal{E}_2(T)_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora si, hacemos la multiplicación para obtener el resultado:

$$\mathcal{A}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$