Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, $T : V \to \mathbb{K}$ un funcional lineal no nulo, y v_0 el representante de Riesz de T.

1. Probar que $v_0 \in (Ker(T))^{\perp}$
2. Probar que $\|v_0\| = \sqrt{T(v_0)}$
3. Probar que $\dim((Ker(T))^{\perp}) = 1$
4. Si $\{e\}$ es una base ortonormal de $(Ker(T))^{\perp}$, probar que $v_0 = T(e) \cdot e$
5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$T(1,0,0) = 2, \quad T(0,1,0) = 1, \quad T(0,0,1) = -1$$

   Hallar una base de $(Ker(T))^{\perp}$ y utilizarla para determinar el representante de Riesz de T.

Resolución

Parte 1

Expandamos las definiciones de las cosas con las que estamos trabajando:

- v_0 es el representante de Riesz de T
  - Entonces $\forall v \in V : T(v) = \langle v, v_0 \rangle$
- $v_0 \in (Ker(T))^{\perp}$
  - Si y solo si: $\forall s \in Ker(T) : \langle s, v_0 \rangle = 0$

Veamos que esto último lo podemos expresar de otra forma:

$$\begin{aligned}
&v_0 \in (Ker(T))^{\perp} \\
&\iff \text{(definición de complemento ortogonal)} \\
&\forall s \in Ker(T) : \langle s, v_0 \rangle = 0 \\
&\iff \text{(definición del representante de Riesz: } T(s) = \langle s, v_0 \rangle \text{)} \\
&\forall s \in Ker(T) : T(s) = 0
\end{aligned}$$

Donde esto último se cumple pues todos los vectores en $Ker(T)$ cumplen esa propiedad por pertenecer al núcleo de T

Parte 2

Queremos probar que $\|v_0\| = \sqrt{T(v_0)}$.

Expandamos a ver a que podemos llegar:

$$\begin{aligned}
&\|v_0\| \\
&=_{\text{(norma inducida por el producto interno)}} \\
&\sqrt{\langle v_0, v_0 \rangle} \\
&=_{\text{(definición del representante de Riesz: } T(v_0)=\langle v_0,v_0\rangle)} \\
&\sqrt{T(v_0)}
\end{aligned}$$

Esto prueba la propiedad.

Parte 3

Queremos probar que $\dim((Ker(T))^{\perp}) = 1$.

Consideremos la siguiente propiedad del complemento ortogonal:

- $V = Ker(T) \oplus (Ker(T))^{\perp}$

De esta podemos deducir que:

- $dim(V) = dim(Ker(T)) + dim((Ker(T))^{\perp}) \quad (i)$

Por otra parte, usando el teorema de las dimensiones, tenemos que:

- $dim(V) = dim(Im(T)) + dim(Ker(T))$
- También tenemos que $dim(Im(T)) = 1$ pues T es no nula y es una funcional lineal (por hipótesis)

Entonces podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
&dim(V) = dim(Im(T)) + dim(Ker(T)) \\
&\iff \\
&3 = 1 + dim(Ker(T)) \\
&\iff \\
&dim(Ker(T)) = 2
\end{aligned}$$

Volviendo a (i), tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
& dim(V) = dim(Ker(T)) + dim((Ker(T))^{\perp}) \\
& \iff \\
& 3 = 2 + dim((Ker(T))^{\perp}) \\
& \iff \\
& dim((Ker(T))^{\perp}) = 1
\end{aligned}
$$

Esto prueba la propiedad.

Parte 4

Queremos probar que si $\{e\}$ es una base ortonormal de $(Ker(T))^{\perp}$, probar que $v_0 = T(e) \cdot e$.

Por la propiedad 1, sabemos que $v_0 \in (Ker(T))^{\perp}$, por lo tanto si $\{e\}$ es base de $(Ker(T))^{\perp}$, tenemos que:

- $v_0 = \alpha e$ con $\alpha \in \mathbb{K}$

Ahora observemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
& T(e) \\
& =_{\text{(definición del representante de Riesz)}} \\
& \langle e, v_0 \rangle \\
& =_{\text{(expandiendo } v_0\text{)}} \\
& \langle e, \alpha e \rangle \\
& =_{\text{(propiedades del producto interno)}} \\
& \alpha \langle e, e \rangle \\
& =_{(\|e\|=1)} \\
& \alpha
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\alpha = T(e)$, entonces $v_0 = T(e) \cdot e$. Esto prueba la propiedad.

Parte 5

Para esta parte primero hallemos $T(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Tenemos que:

- $T(1, 0, 0) = 2$
- $T(0, 1, 0) = 1$
- $T(0, 0, 1) = -1$

Considerando la base canónica de $\mathbb{R}^3$, podemos decir que:

$$
\begin{aligned}
&(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\
&\quad \Longleftrightarrow \text{(aplicando } T\text{)} \\
&T(x, y, z) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \\
&\quad \Longleftrightarrow \text{(sustituyendo por los valores conocidos de } T\text{)} \\
&T(x, y, z) = 2x + y - z
\end{aligned}
$$

Y esto vale para todo $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Se ve claramente que $v_0 = (2, 1, -1)$. Por lo que realizar el otro procedimiento no tiene sentido.