Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

1. Probar que $Im(A)^{\perp} = Ker(A^t)$; es decir, que si S es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A, entonces:

$$S^{\perp} = \{X \in \mathbb{R}^m : A^t X = \vec{0}\}$$

2. Dado $Y \in \mathbb{R}^m$ y $S = Im(A)$, probar que $s = P_S(Y)$ si y sólo si $s = AX_0$ con $X_0 \in \mathbb{R}^n$ y

$$(A^t A)X_0 = A^t Y$$

3. Dado $Y \in \mathbb{R}^m$, concluir que el vector que minimiza $\|Y - AX\|$ es la solución del sistema:

$$(A^t A)X = A^t Y$$

Resolución

Parte 1

La prueba de esta parte está hecha en la clase de teórico #15.

Parte 2

Sean $Y \in \mathbb{R}^m$ y $S = Im(A)$, queremos probar que:

$$s = P_S(Y) \iff s = AX_0 \quad \text{con } X_0 \in \mathbb{R}^n \text{ y además} (A^t A)X_0 = A^t Y$$

$(\Rightarrow)$

Para que $s = P_S(Y)$ se tienen que cumplir las siguientes afirmaciones. - Como $s \in S$, $s \in Im(A)$ pues $S = Im(A)$. Entonces $s = AX_0$ para algún $X_0 \in \mathbb{R}^n$ - Por propiedades del complemento ortogonal, tenemos que dados $Y \in \mathbb{R}^n, AX_0 \in Im(A)$, se cumple que

$Y - AX_0 \in Im(A)^{\perp} = Ker(A^t)$ (usando la propiedad 1). - Como $Y - AX_0 \in Ker(A^t)$, tenemos que $A^t(Y - AX_0) = \vec{0}$, lo que equivale a decir que:

```
$$
\begin{aligned}
&A^tY-A^tAX_0=\vec{0}\\
&\iff\scriptstyle{(\text{despejando})}\\
&A^tY=A^tAX_0
\end{aligned}
$$
```

Esto prueba el implica a partir de asumir que $s = P_S(Y)$

($\Leftarrow$)

En esta parte asumimos que: - $s = AX_0$ con $X_0 \in \mathbb{R}^n$ - $(A^tA)X_0 = A^tY$

De la segunda igualdad derivamos fácilmente que $Y - AX_0 \in Ker(A^t) = Im(A)^{\perp}$, entonces $s = P_S(Y)$

Parte 3

También visto en el teórico, el concepto importante detrás de esto es que la proyección ortogonal en un conjunto S dado de un vector, es lo más cercano en distancia al mismo, dentro del conjunto S.