

## CLASE 3 - 20/2/2025

### Vectores y valores propios

#### Proposición

Sea  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal,  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ . Consideramos la matriz  $A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ .

Decimos que  $v$  es vector propio de  $T$  asociado al valor propio  $\lambda$  si:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Es solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda \mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

#### Demostración

( $\Rightarrow$ ) Consideramos  $v \in V, v \neq \vec{0}$ , tal que  $v$  es vector propio de  $T$ .

Por las hipótesis, se cumple que:

1.  $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) \neq (0, 0, \dots, 0)$
2.  $\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v)) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\lambda v) = \lambda \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$

A su vez:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v)) = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$$

Entonces, si sustituimos en el punto (2):

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) &= \lambda \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) \iff \\ {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) - \lambda \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) &= (0, 0, \dots, 0) \iff \\ ({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} - \lambda \mathbb{I}) \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) &= (0, 0, \dots, 0) \iff \\ (A - \lambda \mathbb{I}) \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) &= (0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos hallar. Esto prueba ( $\Rightarrow$ )

( $\Leftarrow$ ) Si  $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  es solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda \mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Esto equivale a:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = \lambda \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$$

Pero sabiendo que  ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v))$ , entonces:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v)) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\lambda v)$$

Por lo tanto:  $T(v) = \lambda v$ , lo que significa que  $v$  es vector propio asociado a  $\lambda$  de  $T$

### Corolario

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ , una transformación  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal,  $\mathcal{B}$  es base de  $V$ , y  $A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$

Se cumple que:

$\lambda$  es valor propio de  $T$  sii:

1.  $\lambda \in \mathbb{K}$
2.  $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

**Demostración** Por la proposición anterior, sabemos que:

$\lambda$  es valor propio sii existe  $v \in V$  tal que  $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$  es solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda \mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto pasa solo si el sistema es compatible indeterminado (más de una solución aparte de la trivial). Esto a su vez solo pasa si  $(A - \lambda \mathbb{I})$  es invertible, que es equivalente a decir que solo pasa si  $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

### Ejemplo (hallar valores y vectores propios de una transformación)

Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con cierta base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $T : V \rightarrow V$ . Supongamos que:

$$A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que calcular  $\det(A - \lambda \mathbb{I})$  para encontrar los valores propios de  $T$ :

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = (2 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

Obtenemos que:

- $\lambda_1 = 0$  es solución, por lo tanto valor propio de  $T$
- $\lambda_2 = 2$  es solución, por lo tanto valor propio de  $T$

Ahora que tenemos los valores propios de  $T$ , hallemos los subespacios propios asociados a los  $\lambda$  que hallamos. Para esto tenemos que resolver el sistema de ecuaciones utilizando  $\lambda_1, \lambda_2$ :

**Subespacio  $S_0$**   $\det(A - 0\mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esto es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que equivale al sistema

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

De donde obtengo que:

- $x = 0$
- $y = z$
- $z \in \mathbb{R}$

Entonces  $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (0, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}$ . Con esto podemos definir el subespacio propio:

$$S_0 = \{v \in V \mid v = \alpha(v_2 + v_3) \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Observemos que  $\dim(S_0) = 1$

**Subespacio  $S_2$**  Reducimos algunos pasos para este caso, ya que siempre es el mismo procedimiento.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

Podemos ver que nos queda:

- $y = -z$

Entonces  $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (\alpha, -\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Con esto podemos definir el subespacio propio:

$$S_2 = \{v \in V \mid v = \alpha v_1 + \beta(v_3 - v_2) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Observemos que  $\dim(S_2) = 2$

### Extensión de vaps y veps a Matrices

La definición de vectores y valores propios se puede extender a matrices en caso de que trabajemos con ellas:

Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Decimos que un vector propio de  $A$  asociado a un valor propio  $\lambda$  es un vector no nulo  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  tal que:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Entonces los valores propios son soluciones (en  $\mathbb{K}$ ) de  $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

### Notación

- Polinomio característico de  $T$ :  $X_T(\lambda) := \det(A - \lambda \mathbb{I})$
- Ecuación característica de  $T$ :  $X_T(\lambda) = 0$

Las soluciones de la ecuación característica, son llamadas **raíces características** de  $T$ . Entonces si dichas raíces pertenecen al cuerpo de  $T$ , son los valores propios de  $T$