# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

# Ejercicio 7

## Consigna

Sea $M_2(\mathbb{R})$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$.

1. Hallar una base ortonormal de $M_2(\mathbb{R})$.

2. Sea $D$ el subespacio de las matrices diagonales. Hallar $D^{\perp}$
3. Sea $S$ el subespacio de las matrices simétricas. Hallar $S^{\perp}$

## Resolución

### Parte 1

Consideremos la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Veamos si la misma es una base ortonormal, para esto tenemos que calcular los siguientes productos internos:

- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = tr\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$
- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = tr\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$
- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = tr\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$
- $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = tr\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$
- $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = tr\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$
- $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = tr\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = tr\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

Con esto comprobamos que la base es ortogonal, sumando que todas las normas de los vectores son 1, concluimos que la base es ortonormal.

## Parte 2

Consideremos $\mathcal{D}$, el subespacio de las matrices diagonales, lo definimos de la siguiente forma, junto a $\mathcal{D}^{\perp}$:

- $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$
- $\mathcal{D}^{\perp} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \langle A, D \rangle = 0 \quad \forall D \in \mathcal{D}\}$

Por lo tanto, veamos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
&\langle A, D \rangle = 0 \\
&\quad \iff \text{(cálculo de producto interno)} \\
&tr\left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right) = 0 \\
&\quad \iff \text{(desarrollo)} \\
&tr \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \beta a_{12} \\ \alpha a_{21} & \beta a_{22} \end{pmatrix} = 0 \\
&\quad \iff \text{(cálculo de la traza)} \\
&\alpha a_{11} + \beta a_{22} = 0 \\
&\quad \iff \text{(desarrollo)} \\
&\alpha a_{11} = -\beta a_{22}
\end{aligned}$$

Necesitamos que esto último se cumpla para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, por lo tanto de esto derivamos que:

- $a_{11} = 0$
- $a_{22} = 0$

Como no tenemos requisitos para los demás elementos de la matriz, podemos definir el conjunto $\mathcal{D}^{\perp}$:

$$\mathcal{D}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} D^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

## Parte 3

Consideremos $\mathcal{S}$, el subespacio de las matrices diagonales, lo definimos de la siguiente forma, junto a $\mathcal{S}^{\perp}$:

- $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$
- $\mathcal{S}^{\perp} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \langle A, S \rangle = 0 \quad \forall S \in \mathcal{S}\}$

Por lo tanto, veamos el siguiente razonamiento:

$$
\begin{aligned}
&\langle A, S\rangle = 0 \\
&\iff \text{(cálculo de producto interno)} \\
&tr\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}\right) = 0 \\
&\iff \text{(desarrollo)} \\
&tr\begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \gamma a_{12} & \gamma a_{11} + \beta a_{12} \\ \alpha a_{21} + \gamma a_{22} & \gamma a_{21} + \beta a_{22} \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \text{(cálculo de la traza)} \\
&\alpha a_{11} + \gamma a_{12} + \gamma a_{21} + \beta a_{22} = 0 \\
&\iff \text{(desarrollo)} \\
&\alpha a_{11} + \beta a_{22} + \gamma(a_{12} + a_{21}) = 0
\end{aligned}
$$

Necesitamos que esto último se cumpla para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, por lo tanto de esto derivamos que:

- $a_{11} = 0$
- $a_{22} = 0$
- $a_{12} = -a_{21}$

Como no tenemos requisitos para los demás elementos de la matriz, podemos definir el conjunto $\mathcal{S}^{\perp}$:

$$
\mathcal{S}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \mathcal{S}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}
$$