

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## CLASE 14 - 02/06/2025

### Complemento ortogonal

#### Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno y  $S$  un subespacio vectorial de dimensión finita.

Entonces:

$$V = S \oplus S^\perp$$

#### Demostración

Queremos probar que:

1.  $V = S + S^\perp$
2.  $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$

Consideramos  $\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_k\}$  una base ortonormal de  $S$ . Dado  $v \in V$  definimos:  $(v_s = \sum_{i=1}^k \langle v, s_i \rangle s_i) \in S$ .

Veamos que  $(v - v_s) \in S^\perp$ , para esto, verifiquemos que  $\langle v - v_s, s_j \rangle = 0$  para  $j = 1, \dots, k$ .

$$\begin{aligned}\langle v - v_s, s_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^k \langle v, s_i \rangle s_i, s_j \right\rangle \\ &= \langle v, s_j \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle \\ &= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle \cdot 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto probamos que  $(v - v_s) \in S^\perp$ . Entonces, podemos decir que:

$$v = v_s + (v - v_s)$$

Donde: 1.  $v_s \in S$  2.  $v - v_s \in S^\perp$

En conclusión  $V = S + S^\perp$ .

Ahora, queremos demostrar que  $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$ , para esto, consideremos  $v \in S \cap S^\perp$ : 1.  $v \in S$  2.  $v \in S^\perp$

Entonces  $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = \vec{0}$

Juntando ambas cosas, probamos que  $V = S \oplus S^\perp$

### Observación

Dado  $v \in V$  existen únicos  $v_s \in S$  y  $v_{s^\perp} \in S^\perp$  tales que  $v = v_s + v_{s^\perp}$ . Nosotros utilizamos una base ortonormal  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  de  $S$ . De donde obtuvimos  $v_s = \sum_{i=1}^k \langle v, s_i \rangle s_i$ . Si usamos otra base ortonormal diferente, el resultado que obtenemos será el mismo. Esto significa que el cálculo de  $v_s$  no depende de la base ortonormal elegida

## Proyección ortogonal

### Definición

Dado  $v \in V$ , definimos  $v_s$  como la proyección ortogonal de  $v$  sobre el subespacio  $S$  y se denota:

$$P_S(v) = v_s = \sum_{i=1}^k \langle v, s_i \rangle s_i$$

### Observación

1. La definición de proyección ortogonal no depende de la base ortonormal elegida para calcularla.
2. Si proyectamos sobre  $S^\perp$ :

$$v = v_{s^\perp} + v_{(s^\perp)^\perp} = v_{s^\perp} + v_s = P_{S^\perp}(v) + P_S(v)$$

3.  $P_S : V \rightarrow V$  es un operador lineal. Esto se deriva fácilmente de las propiedades de producto interno.

### Ejemplo 1

$V = P_2[x](\mathbb{R})$  con producto interno:  $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$  y  $S = [t^2]$ . Consideremos  $p(t) = 1 + t$ . Queremos calcular  $P_S(p)$  Usaremos la siguiente base ortonormal de  $S$ :  $\mathcal{B} = \{\sqrt{\frac{5}{2}}t^2\}$  (asumiremos que es ortonormal).

Con todo esto:

$$P_S(v) = \langle p, p_1 \rangle p_1(t)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \bullet \langle p, p_1 \rangle &= \int_{-1}^1 (1+t) \sqrt{\frac{5}{2}} t^2 dt = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{5}{2}} t^2 + \sqrt{\frac{5}{2}} t^3 dt = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^1 t^2 + t^3 dt = \sqrt{\frac{5}{2}} \left( \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{-1}{3} + \frac{1}{4} \right) \right) = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Entonces:

$$P_S(v) = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} t^2 = \frac{10}{6} t^2 = \frac{5}{3} t^2$$

## Ejemplo 2

$V = \mathbb{R}^3$  producto interno habitual.  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ . Consideremos  $v = (1, 0, 0)$ , queremos calcular  $P_S(v)$ . Consideramos la siguiente base ortonormal de  $S$  (no verificaremos nuevamente):  $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)\}$ .

Con esto, podemos calcular:

$$\begin{aligned} P_S(1, 0, 0) &= \left\langle (1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) + \left\langle (1, 0, 0), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \right\rangle \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \\ &= \frac{1}{2}(1, -1, 0) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right) \end{aligned}$$

## Teorema

Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno y  $S$  un subespacio vectorial. Entonces:

$$\|v - P_S(v)\| \leq \|v - s\| \quad \forall s \in S$$

Este resultado es muy geométrico, no es fácil entender lo que es mirando la expresión. La idea es que la proyección ortogonal del vector  $v$  es la que resulta teniendo la menor distancia al vector  $v$  en si, con respecto a todos los demás vectores de  $S$ .

## Demostración

Tomemos un vector cualquiera  $s \in S$ , entonces:

$$\begin{aligned} &\|v - s\|^2 \\ &= (\text{norma inducida}) \\ &\langle v - s, v - s \rangle \\ &= (\text{proposición anterior}) \\ &\langle P_S(v) + P_{S^\perp}(v) - s, P_S(v) + P_{S^\perp}(v) - s \rangle \\ &= (\text{propiedades del producto interno}) \\ &\langle P_S(v) - s, P_S(v) - s \rangle + \langle P_S(v) - s, P_{S^\perp}(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v) - s \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\ &= (\langle P_S(v) - s, P_{S^\perp}(v) \rangle = 0 \text{ y } \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v) - s \rangle = 0) \\ &\langle P_S(v) - s, P_S(v) - s \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\ &= (\text{norma inducida}) \\ &\|P_S(v) - s\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \end{aligned}$$

Por lo encontrado en el último paso, si consideramos  $\|v - s\|^2$  como una función, ésta alcanza su valor mínimo cuando  $\|P_S(v) - s\|^2 = 0$  que es cuando  $s = P_S(v)$ . Podemos decir que:

$$\|v - s\|^2 \geq \|v - P_S(v)\|^2$$

Como tomamos  $s \in S$  cualquiera, este razonamiento es válido para todo  $s$ . Lo que concluye la prueba