

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## CLASE 15 - 11/06/2025

### Mínimos cuadrados

#### Idea

La idea es resolver un problema de aproximación a partir de datos dados de por ejemplo un experimento. Los datos que tenemos son pares conformados por: - Una variable independiente. - Una variable de respuesta.

Los mismos se ven de la siguiente forma:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

La idea es modelar algo de la forma  $y = \alpha x + \beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , de manera que  $\alpha, \beta$  se adapten de la mejor forma posible a los datos que nos fueron dados para el problema.

Resumiendo, buscamos la recta que mejor se adapte (con un criterio que veremos posteriormente) a los datos que recibimos.

#### Definición (error)

Dada una recta  $y = \alpha x + \beta$  definimos el error  $\varepsilon$  de la siguiente forma:

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \text{ con } \varepsilon_i = y_i - (\alpha x_i + \beta)$$

Donde: -  $y_i$  es el valor observado. -  $x_i$  es el valor sobre la recta.

**Criterio de ajuste:** Calcular  $\alpha$  y  $\beta$  que minimizan el error cuadrático.

#### Enfoque geométrico

Dada la recta  $y = \alpha x + \beta$  y las  $m$  observaciones  $(x_i, y_i)$  para  $i = 1, \dots, m$ , construimos las siguientes matrices y vectores:

- $Y = (y_1, \dots, y_m)^t \in \mathbb{R}^m$
- $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times 2}$
- $Z = (\alpha, \beta)^t$

Con esto, podemos tener un vector que contiene todos los errores  $\varepsilon_i$ :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - (\alpha x_1 + \beta) \\ y_2 - (\alpha x_2 + \beta) \\ \vdots \\ y_m - (\alpha x_m + \beta) \end{pmatrix} = Y - AZ$$

Recordemos que lo que queremos es calcular  $Z$  que minimiza el error  $\varepsilon^2$  que definimos arriba, pero considerando la norma inducida por el producto interno estándar en  $\mathbb{R}^m$ , tenemos que:

$$\varepsilon^2 = \|(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)^t\|^2 = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2$$

O en resumen, calcular  $Z$  que minimiza la siguiente expresión:

$$\|Y - AZ\|^2$$

Observemos que:

$$AZ = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \text{col}_1(A) + \beta \text{col}_2(A)$$

Por lo que entonces,  $AZ \in S$  subespacio de  $\mathbb{R}^m$  generado por las columnas de  $A$ .

Por lo tanto, dado  $Y \in \mathbb{R}^m$  queremos encontrar  $Z'$  tal que  $\|Y - AZ'\|^2$  sea mínimo. Recordando el concepto de proyección ortogonal, queremos que  $AZ' = P_S(Y)$

## Lema

Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ . Consideremos  $S$  subespacio generado por las columnas de  $A$  (por lo tanto  $S \subset \mathbb{R}^m$ ). Consideramos  $\mathbb{R}^m$  con el producto interno usual. Entonces:

$$S^\perp = \{X \in \mathbb{R}^m : A^t X = \vec{0}\}$$

## Demostración

Veamos el siguiente razonamiento

$$\begin{aligned} X \in S^\perp &\iff \\ X \text{ es ortogonal a todas las columnas de } A &\iff \\ X \text{ es ortogonal a todas las filas de } A^t &\iff \\ A^t X = \vec{0} & \end{aligned}$$

El último paso se deriva de que considerando la fila  $i$ -ésima de  $A^t$ , tenemos que:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m = \langle \text{col}_i(A), X \rangle = 0$$

El resultado se obtiene de que el resultado es el mismo para todas las columnas.

## Continuación (enfoque geométrico)

Partimos de la base que  $AZ' = P_S(Y)$ , podemos reescribir esto como  $AZ' = Y - P_{S^\perp}(Y)$ . Veamos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} AZ' &= P_S(Y) \\ &\iff (\text{propiedades de la proyección ortogonal}) \\ AZ' &= Y - P_{S^\perp}(Y) \\ &\iff (\text{multiplicando por izquierda por } A^t) \\ A^t AZ' &= A^t Y - A^t P_{S^\perp}(Y) \\ &\iff (\text{por el lema anterior}) \\ A^t AZ' &= A^t Y \end{aligned}$$

Definimos estas ecuaciones como **ecuaciones normales**. Si  $A$  tiene rango máximo, se cumple que  $A^t A$  es una matriz invertible, y en ese caso podemos obtener directamente la solución como:

$$Z' = (A^t A)^{-1} A^t Y$$

**Observación:** Notemos que:

$$A^t A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & m \end{pmatrix}$$

Veamos también lo siguiente:

$$A^t Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix}$$

Entonces la solución es la siguiente:

$$Z' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & m \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix}$$

## Ejemplo

Sean los siguientes pares de datos:

- $(-6, -1), (-2, 2), (1, 1), (7, 6)$

Calculamos las sumatorias que necesitamos para  $A^t A$  y  $A^t Y$ :

- $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 90$
- $\sum_{i=1}^4 x_i = 0$
- $m = 4$
- $\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 6 - 4 + 1 + 42 = 45$
- $\sum_{i=1}^4 y_i = 8$

Entonces:

$$Z' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{90} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, la recta que mejor se ajusta a los datos es  $y = \frac{1}{2}x + 2$

**Observación:** Este método también funciona para polinomios de grado mayor o igual a 2.