Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal.

1. Si W_1 y W_2 son subespacios de V invariantes bajo T, probar que $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ son invariantes bajo T.

2. Probar que si λ es valor propio de T, entonces el subespacio propio S_λ es invariante bajo T.

3. Probar que si λ es valor propio de T y $W = [v_1, v_2]$, con $v_1 \in S_\lambda$ y $T(v_2) = v_1$, entonces W es invariante bajo T.

4. Si W es un subespacio de V invariante bajo T y $\dim(W) = 1$:
   (a) Probar que los vectores no nulos de W son vectores propios de T.

   (b) ¿Es W un subespacio propio de T? Justificar.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que los siguientes subespacios son invariantes bajo T:
   - $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$,

   - $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$,

   - $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$

   (a) Probar que T es diagonalizable.

   (b) Sabiendo que $2T - T^2 = Id$ en W_1 y $T = 2Id$ en $W_2 \cap W_3$, hallar los valores propios de T.

Resolución

Parte 1

$W_1 \cap W_2$

Tomemos $v \in W_1 \cap W_2$, como W_1 y W_2 son T-invariantes, tenemos que:

- $T(v) \in W_1$ y,
- $T(v) \in W_2$

se cumplen simultaneamente.

Por lo tanto uniendo estas dos tenemos que:

$$T(v) \in W_1 \cap W_2$$

Lo que significa que $W_1 \cap W_2$ es T-invariante porque tomamos v arbitrario.

$W_1 + W_2$

Tomemos $v = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$. Por lo que $v \in W_1 + W_2$

Aplicando T de ambos lados tenemos que:

$$T(v) = T(w_1) + T(w_2)$$

Como W_1 y W_2 son invariantes tenemos que $T(w_1) \in W_1$ y $T(w_2) \in W_2$

Entonces $T(v) = T(w_1) + T(w_2) \in W_1 + W_2$

Lo que demuestra que $W_1 + W_2$ es T-invariante

Parte 2

Tomemos $v \in S_\lambda$, por definición de subespacio propio tenemos que $T(v) = \lambda v$.

Pero $\lambda v \in S_\lambda$, por lo que S_λ es T-invariante.

Parte 3

Queremos probar que dado $w \in W = [v_1, v_2]$, tenemos que $T(w) \in W$. Donde v_1 es valor propio de T, y $T(v_2) = v_1$.

Si $w = av_1 + bv_2$ entonces $T(w) = a\lambda v_1 + bv_1 = ab\lambda v_1$.

Por lo que entonces W es T-invariante, ya que $T(w) \in W$ por lo visto anteriormente.

Parte 4

Sea W un subespacio de V T-invariante de $dim(W) = 1$.

Consideremos $\mathcal{B} = \{v_1\}$ base de W y un vector no nulo $w \in W$.

- $w = av_1$ con $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$

Como W es invariante, tenemos que $T(w) \in W$, por lo que lo podemos escribir como

- $T(w) = bv_1$

Juntando con lo anterior tenemos que:

- $T(av_1) = bav_1$

Por lo que $av_1 = w$ es un vector propio de T asociado al valor propio b.

Con esto probamos ambas partes, porque W es un subespacio generado por v_1, que es un vector propio de T. Por lo tanto es un subespacio propio asociado a al valor propio b.

Parte 5

Para enfrentar esta parte tenemos en cuenta las propiedades vistas en la parte 1. Veamos de hallar las intersecciones entre los subespacios invariantes.

$W_1 \cap W_2$

Queremos $v = (x, y, z)$ tal que:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones, obtenemos que:

- $2x + 3y = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y$
- $x + y + z \Rightarrow z = \frac{1}{2}y$

Por lo que una base de este subespacio podría ser:

$$\{(-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})\}$$

O, para simplificar:

$$\{(-3, 2, 1)\}$$

$W_1 \cap W_3$

Queremos $v = (x, y, z)$ tal que:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones obtenemos que:

- $y + z = 0 \Rightarrow z = -y$
- $x + y + 2y = 0 \Rightarrow x = -3y$

Por lo que una base de este subespacio podría ser:

$$\{(-3, 1, -1)\}$$

$W_2 \cap W_3$

Queremos $v = (x, y, z)$ tal que:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones obtenemos que:

- $3z = 0 \Rightarrow z = 0$
- $x = -y$

Por lo que una base de este subespacio podría ser:

$$\{(-1, 1, 0)\}$$

Por la parte 4 sabemos que todos estos vectores son propios, pues $W_i \cap W_j$ son subespacios invariantes de dimensión 1.

Si estos fueran LI, entonces tendríamos una base de $\mathbb{R}^3$ de vectores propios, lo cual implicaría que T es diagonalizable.

Investiguemos si los tres vectores son LI con el método del determinante:

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 3 - (-1 + 3 + 0) = -3$$

La propiedad nos dice que si este determinante (con los vectores colgados como columnas) da distinto a 0, entonces los vectores son LI.

Por el razonamiento anterior, concluimos que T es diagonalizable.

Evito la parte 5B porque no la termino de entender.