

## CLASE 2 - 17/02/2025

### Matrices semejantes

#### Aplicaciones

1. La definición de matriz semejante es muy útil a la hora de calcular potencias; sean  $A, B$  dos matrices semejantes, entonces:

- $B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$

En general:

- $B^n = P^{-1}A^nP \quad \forall n \geq 1$

Esto puede ser útil cuando tenemos que alguna de las dos matrices  $A, B$  tiene una forma más sencilla de elevar (por ejemplo que alguna sea diagonal)

#### Teorema

Sea  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ ; decimos que  $A, B$  son semejantes sii:

$\exists T : V \rightarrow V$ ; con  $\dim(V) = n$  y bases  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  tales que:

$$A = {}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} \quad B = {}_{\mathcal{C}'}(T)_{\mathcal{C}'}$$

**Demostración** En el libro rojo

#### Teorema

Si  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$  son matrices semejantes. Entonces:

1.  $rg(A) = rg(B)$
2.  $tr(A) = tr(B)$
3.  $det(A) = det(B)$

#### Demostración

**PARTE 1** Por el anterior teorema, como  $A, B$  son semejantes, entonces:  $\exists T : V \rightarrow V$  y bases  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  tal que:  $A = {}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}$  y  $B = {}_{\mathcal{C}'}(T)_{\mathcal{C}'}$

Entonces:

- $rg(A) = rg({}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}) = \dim(\text{Im}(T))$
- $rg(B) = rg({}_{\mathcal{C}'}(T)_{\mathcal{C}'}) = \dim(\text{Im}(T))$

Por lo tanto:

$$\Rightarrow rg(A) = rg(B)$$

**PARTE 2 Recordatorio:** 1. La traza es la suma de los elementos de la diagonal de la matriz  
2.  $tr(AB) = tr(BA)$

Veamos que:

$$tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(AP^{-1}P) = tr(A)$$

**PARTE 3: Recordatorio:**  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Entonces:

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) = \det(A)$$

**Observación** El recíproco NO es cierto, veamos un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que:

- $rg(A) = rg(B)$
- $tr(A) = tr(B)$
- $\det(A) = \det(B)$

Supongamos que SI son semejantes, es decir que:  $\exists P$  tal que:

$$B = P^{-1}AP = (I)$$

Pero  $B \neq (I)$ , entonces esto es absurdo.

## Valores y vectores propios

### Definición

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K} \mid (\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$  y una transformación lineal  $T : V \rightarrow V$ . Decimos que un vector  $v \in V, v \neq \vec{0}$  es **vector propio** de  $T$  si existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que:

$$T(v) = \lambda v$$

Decimos que  $v$  es un vector propio asociado al valor propio  $\lambda$

**Ejemplo** Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = (-2x + y, 6x - y)$ . Veamos que se cumple que:

- $T(1, 3) = (1, 3)$
- $T(1, -2) = (-4, 8) = (-4)(1, -2)$

Entonces:

- $(1, 3)$  es **vep** de  $T$  asociado a  $\lambda = 1$
- $(1, -2)$  es **vep** de  $T$  asociado a  $\lambda = -4$

### Definición (subespacio propio)

Sea  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal, con  $\lambda$  un valor propio de  $T$ . Se define el subespacio propio asociado a  $\lambda$  de la siguiente forma:

$$S_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

**Proposición**  $S_\lambda$  es un subespacio vectorial de  $V$

**Demostración**

- $\vec{0} \in S_\lambda$  ( $S_\lambda \neq \emptyset$ )
- Si  $v \in S_\lambda, \alpha \in \mathbb{K}$  entonces  $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$ . Entonces  $\alpha v \in S_\lambda$
- Si  $v, w \in S_\lambda$  entonces:  $T(v + w) = T(v) + T(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w)$ . Entonces  $(v + w) \in S_\lambda$

Entonces  $S_\lambda$  es un subespacio vectorial de  $V$

**Observación**  $S_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda \mathbb{I})$

**Demostración** Tenemos que:

$$\begin{aligned} v \in S_\lambda &\iff \\ T(v) &= \lambda v \iff \\ T(v) - \lambda v &= 0 \iff \\ (T - \lambda \mathbb{I})(v) &= 0 \iff \\ v &\in \text{Ker}(T - \lambda \mathbb{I}) \end{aligned}$$