Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 18 - 14/07/2025

Representación matricial de la adjunta

Teorema

Sean V, W dos espacios vectoriales con producto interno.

Sea $T : V \to W$, $T^* : W \to V$ y dos bases ORTONORMALES: - $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\} \to V$ - $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\} \to W$

Entonces:

$$_{\mathcal{A}}(T^*)_{\mathcal{B}} = \overline{(_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})^t}$$

Lema (usado para la demostración)

Dados V, W espacios vectoriales con producto interno y $T : V \to W$ y dos bases ORTONORMALES:

- $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\} \to V$
- $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\} \to W$

Entonces:

- $(_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})_{ij} = \langle T(v_j), w_i \rangle$

Demostración (del lema)

Esto se demuestra fácilmente por cómo podemos escribir las coordenadas de un vector en una base ortonormal.

Demostración

Para probar el teorema, vamos a buscar demostrar que:

$$(_{\mathcal{A}}(T^*)_{\mathcal{B}})_{ij} = (\overline{(_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})^t})_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Utilizando el lema, tenemos que:

- $({}_{\mathcal{A}}(T^*)_{\mathcal{B}})_{ij} = \langle T^*(w_j), v_i \rangle = \langle w_j, T(v_i) \rangle = \overline{\langle T(v_i), w_j \rangle}$
- $(\overline{({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})^t})_{ij} = (\overline{({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})})_{ji} = \overline{\langle T(v_i), w_j \rangle}$

Como llegamos a que ambos resultados son iguales, queda demostrado el teorema.

Ejemplo (de uso del teorema)

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por: - $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$

Consideremos $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

Observemos que:

- $T(1, 0, 0) = (1, 4, 1)$
- $T(0, 1, 0) = (-1, 0, 5)$
- $T(0, 0, 1) = (2, -3, 1)$

Entonces:

$$ {}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} $$

Utilizando el teorema que enunciamos, tenemos que:

$$ {}_{\mathcal{E}}(T^*)_{\mathcal{E}} = \overline{({}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}})^t} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} $$

Definición (transformación lineal autoadjunta)

Sea V un espacio vectorial con cuerpo $\mathcal{K}$ de dimensión finita con producto interno.

Consideramos $T : V \to V$ y $T^* : V \to V$. Decimos que T es autoadjunta si $T = T^*$

Observación

T autoadjunta $\iff \langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$

Teorema

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, sea $T : V \to V$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es autoadjunta
2. $\forall \mathcal{B} \to V$ ortonormal, ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es simétrica
3. $\exists \mathcal{B}_0 \to V$ ortonormal, ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$