

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$. Hallar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$ en los siguientes casos:

1. \mathcal{B} y \mathcal{A} son las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 respectivamente
2. $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y \mathcal{A} es la base canónica de \mathbb{R}^2
3. $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{A} = \{(1, 3), (2, 5)\}$

Resolución (parte 1)

- $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
- $\mathcal{A} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

Ahora hallemos los transformados de \mathcal{B} :

- $T(1, 0, 0) = (3, 1)$
- $T(0, 1, 0) = (2, 5)$
- $T(0, 0, 1) = (-4, 3)$

Observemos que $\text{coord}_{\mathcal{A}}(v) = v$ para todo v si \mathcal{A} es canónica. Esto es observable trivialmente, por lo que en este ejemplo nos estaríamos saltando el paso de obtener las coordenadas de los transformados de \mathcal{B} .

En conclusión:

$${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolución (parte 2)

- $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
- $\mathcal{A} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

Ahora hallemos los transformados de \mathcal{B} :

- $T(1, 1, 1) = (1, -1)$
- $T(1, 1, 0) = (5, -4)$

- $T(1, 0, 0) = (3, 1)$

Tenemos la misma situación que el ejercicio anterior, ya que la base de llegada que tenemos es canónica, entonces:

$${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución (parte 3)

- $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
- $\mathcal{A} = \{(1, 3), (2, 5)\}$

La primer parte ya la hicimos en el anterior ejercicio:

- $T(1, 1, 1) = (1, -1)$
- $T(1, 1, 0) = (5, -4)$
- $T(1, 0, 0) = (3, 1)$

En cambio ahora si tenemos que hallar las coordenadas, porque \mathcal{A} ya no es canónica:

- $coord_{\mathcal{A}}(T(1, 1, 1)) = coord_{\mathcal{A}}(1, -1)$

Básicamente lo que tengo que hallar es los valores de x_1, x_2 que cumplan lo siguiente:

$$x_1(1, 3) + x_2(2, 5) = (1, -1)$$

Esto está dado por el siguiente sistema:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}$$

De esto obtengo que $x_2 = 4$, y sustituyendo en la primer ecuación obtengo que $x_1 = -7$.

Ahora tengo que hacer esto para los demás vectores transformados de \mathcal{B} :

- $coord_{\mathcal{A}}(T(1, 1, 0)) = coord_{\mathcal{A}}(5, -4) = (-33, 19)$
- $coord_{\mathcal{A}}(T(1, 0, 0)) = coord_{\mathcal{A}}(3, 1) = (-13, 8)$

En conclusión:

$${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}$$

Observación

Siempre verificar las cuentas, preferentemente escribiendo el sistema para cada coordenada que se tiene que calcular, porque ahí nacen los errores