Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 11

Consigna

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, $S \subset V$ un subespacio vectorial y $P_S(v)$ la proyección ortogonal de v sobre S; es decir, $P_S(v)$ es el único vector que verifica que $P_S(v) \in S$ y $v - P_S(v) \in S^\perp$.

Probar que:

1. $P_S(s) = s \quad \forall s \in S$
2. $P_S(v) = \vec{0} \quad \forall v \in S^\perp$
3. $P_S : V \to V$ es transformación lineal
4. Hallar la matriz asociada de P_S en una base unida de S con $S^\perp$
5. Hallar el núcleo e imagen de P_S
6. Hallar valores y subespacios propios de P_S. Es P_S diagonalizable?
7. $\|v\|^2 = \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \quad \forall v \in V$
8. $\|P_S(v)\| \leq \|v\| \quad \forall v \in V$
9. $\langle v,\ P_S(v)\rangle = \|P_S(v)\|^2 \quad \forall v \in V$

Resolución

Dada una base ortonormal $\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_r\}$ de S, definimos $P_S(v)$ con $v \in V$ como:

$P_S(v) = \sum_{i=1}^{r} \langle v, s_i\rangle\, s_i$

Parte 1

Queremos probar que $P_S(s) = s \quad \forall s \in S$.

Por definición de proyección, $P_S(s)$ es el único vector en S que cumple que: $s - P_S(s) \in S^\perp$. Ahora, considerando que $s - s = \vec{0} \in S^\perp$, podemos concluir que necesariamente $P_S(s) = s$, para todo $s \in S$ pues consideramos un s cualquiera.

Parte 2

Queremos probar que $P_S(v) = \vec{0} \quad \forall v \in S^{\perp}$.

Por definición de proyección, $P_S(v)$ es el único vector en S que cumple que: $v - P_S(v) \in S^{\perp}$. Ahora, considerando que $v - \vec{0} = v \in S^{\perp}$ (por hipótesis), podemos concluir que $P_S(v) = \vec{0}$, para todo $s \in S$ pues consideramos un s cualquiera.

Parte 3

Queremos probar que $P_S : V \to V$ es transformación lineal

Entonces, dados $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se tienen que cumplir las siguientes afirmaciones:

1. $P_S(v + w) = P_S(v) + P_S(w)$
2. $P_S(\alpha v) = \alpha P_S(v)$

Consideremos la definición de $P_S(v)$ para una base ortonormal $\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_r\}$ de S, dada por

$P_S(v) = \sum_{i=1}^{r} \langle v, s_i \rangle s_i$

Subparte 1

Desarrollemos:

$$
\begin{aligned}
& P_S(v + w) \\
& =_{\text{(definición de proyección ortogonal)}} \\
& \sum_{i=1}^{r} \langle v + w, s_i \rangle s_i \\
& =_{\text{(propiedades de producto interno)}} \\
& \sum_{i=1}^{r} (\langle v, s_i \rangle + \langle w, s_i \rangle) s_i \\
& =_{\text{(distribuyendo)}} \\
& \sum_{i=1}^{r} \langle v, s_i \rangle s_i + \langle w, s_i \rangle s_i \\
& =_{\text{(separando la sumatoria)}} \\
& \sum_{i=1}^{r} \langle v, s_i \rangle s_i + \sum_{i=1}^{r} \langle w, s_i \rangle s_i \\
& =_{\text{(definición de proyección ortogonal)}} \\
& P_S(v) + P_S(w)
\end{aligned}
$$

Lo que concluye esta subparte.

Subparte 2

Desarrollemos:

$P_S(\alpha v)$

$=$(definición de proyección ortogonal)

$$\sum_{i=1}^{r} \langle \alpha v, s_i \rangle s_i$$

$=$(propiedades del producto interno)

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha \langle v, s_i \rangle s_i$$

$=$(propiedades la sumatoria)

$$\alpha \sum_{i=1}^{r} \langle v, s_i \rangle s_i$$

$=$(definición de proyección ortogonal)

$\alpha P_S(v)$

Parte 4

Queremos hallar la matriz asociada de P_S en una base construida uniendo una base de S con una de $S^{\perp}$.

Consideremos bases de S y $S^{\perp}$:

- $\mathcal{B}^S = \{v_1, \dots, v_r\}$
- $\mathcal{B}^{S^{\perp}} = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ base de V. Calculemos las columnas de la matriz asociada: - $coord_{\mathcal{B}}(T(v_1)) = coord_{\mathcal{B}}(v_1) = (1, \dots, 0)$ - $\cdots$ - $coord_{\mathcal{B}}(T(v_r)) = coord_{\mathcal{B}}(v_r) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ - $coord_{\mathcal{B}}(T(v_{r+1})) = coord_{\mathcal{B}}(v_{r+1}) = (0, \dots, 0)$ - $\cdots$ - $coord_{\mathcal{B}}(T(v_n)) = coord_{\mathcal{B}}(v_n) = (0, \dots, 0)$

Esto es así por las propiedades 1 y 2, considerando que:

1. $v_1, \dots, v_r \in S$
2. $v_{r+1}, \dots, v_n \in S^{\perp}$

Entonces la matriz asociada ${}_{\mathcal{B}}(P_S)_{\mathcal{B}}$ se ve de la siguiente forma:

$$ {}_{\mathcal{B}}(P_S)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0_{n-r\times n-r} \\ 0_{n-r\times n-r} & 0_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}_{n\times n} $$

Parte 5

Queremos hallar el núcleo e imagen de P_S. Describamos los conjuntos para ver que podemos decir de ellos:

- $Ker(P_S) = \{P_S(v) = 0 \mid v \in V\}$
- $Im(P_S) = \{P_S(v) \mid v \in V\}$

Ahora, para el nucleo, por la propiedad 2, podemos concluir que ese conjunto es exactamente $S^{\perp}$.

En segundo lugar considerando la imagen, como P_S proyecta en S, $Im(P_S) = S$.

Parte 6

Queremos hallar valores y subespacios propios para P_S. Utilizaremos el razonamiento hecho en la parte 4.

Valores propios

Observamos que la matriz asociada que hallamos en la parte 4 es diagonal. Vemos que los valores propios son:

- $\lambda_1 = 1$, con $mg(\lambda) = r$
- $\lambda_2 = 0$, con $mg(\lambda) = n - r$

Subespacios asociados

- El subespacio asociado a $\lambda_1 = 1$ es S, pues está asociado a una base de vectores propios que corresponde exactamente a la base de S.
- El subespacio asociado a $\lambda_2 = 0$ es $S^\perp$, pues está asociado a una base de vectores propios que corresponde exactamente a la base de $S^\perp$.

Diagonalización

Claramente es diagonalizable pues hallamos una base para la cual la matriz asociada de P_S es diagonal.

Parte 7

Queremos probar que $\|v\|^2 = \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \quad \forall v \in V$.

Veamos que podemos escribir todo $v \in V$ como $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&\|v\|^2 \\
&=_{\text{(norma inducida por el producto interno)}} \\
&\langle v, v\rangle \\
&=_{\text{(descomposición de } v)} \\
&\langle P_S(v) + P_{S^\perp}(v), P_S(v) + P_{S^\perp}(v)\rangle \\
&=_{\text{(propiedades del producto interno)}} \\
&\langle P_S(v), P_S(v)\rangle + \langle P_S(v), P_{S^\perp}(v)\rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v)\rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v)\rangle \\
&=_{(P_S(v) \perp P_{S^\perp}(v))} \\
&\langle P_S(v), P_S(v)\rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v)\rangle \\
&=_{\text{(norma inducida por el producto interno)}} \\
&\|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2
\end{aligned}
$$

Parte 8

Queremos probar que $\|P_S(v)\| \leq \|v\| \quad \forall v \in V$.

Veamos que podemos escribir todo $v \in V$ como $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&\|v\|^2 \\
&=_{\text{(norma inducida por el producto interno)}} \\
&\langle v, v\rangle \\
&=_{\text{(descomposición de } v)} \\
&\langle P_S(v) + P_{S^\perp}(v), P_S(v) + P_{S^\perp}(v)\rangle \\
&=_{\text{(propiedades del producto interno)}} \\
&\langle P_S(v), P_S(v)\rangle + \langle P_S(v), P_{S^\perp}(v)\rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v)\rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v)\rangle \\
&=_{(P_S(v) \perp P_{S^\perp}(v))} \\
&\langle P_S(v), P_S(v)\rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v)\rangle \\
&=_{\text{(norma inducida por el producto interno)}} \\
&\|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \\
&\geq_{\text{(considerando que } P_{S^\perp} \geq 0)} \\
&\|P_S(v)\|^2
\end{aligned}
$$

Entonces concluimos que $\|P_S(v)\| \leq \|v\| \quad \forall v \in V$.

Parte 9

Queremos probar que $\langle v,\ P_S(v)\rangle = \|P_S(v)\|^2 \quad \forall v \in V$.

Consideremos $v = P_S + (v - P_S)$, con $v - P_S \in S^\perp$:

$$
\begin{aligned}
&\langle v, P_S(v)\rangle \\
&=_{\text{(desarrollo de } v)} \\
&\langle P_S(v), P_S(v)\rangle + \langle v - P_S(v), P_S(v)\rangle \\
&=_{(v - P_S(v) \in S^\perp;\, P_S(v) \in S)} \\
&\langle P_S(v), P_S(v)\rangle + 0 \\
&=_{\text{(norma inducida por el producto interno)}} \\
&\|P_S(v)\|^2
\end{aligned}
$$