# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

# Ejercicio 20

## Consigna

Probar que la relación de matrices semejantes es una relación de equivalencia.

Recordar que una relación es una relación de equivalencia si verifica las propiedades:

- **Reflexiva**: Toda matriz es semejante a sí misma.
- **Simétrica**: Si $A$ es semejante a $B$, entonces $B$ es semejante a $A$.
- **Transitiva**: Si $A$ es semejante a $B$ y $B$ es semejante a $C$, entonces $A$ es semejante a $C$.

## Resolución

### Reflexividad

Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. $A$ es semejante a si misma, ya que podemos considerar $P = (Id)_{n\times n}$ de forma que:

$$A = P^{-1}AP$$

Esto prueba que la semejanza de matrices es reflexiva

### Simetría

Sean dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, tal que $A$ es semejante a $B$. Entonces $\exists P$ tal que:

$$B = P^{-1}AP$$

Multiplico ambos lados por $P$ a la izquierda y $P^{-1}$ a la derecha, obtengo que:

$$PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1}$$

$$PBP^{-1} = A$$

Entonces $B$ es semejante a $A$

## Transitividad

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}$, tal que:

- $A$ es semejante a $B$
- $B$ es semejante a $C$

Entonces:

- $\exists P$ tal que: $B = P^{-1}AP$
- $\exists T$ tal que: $C = T^{-1}BT$

Por lo tanto:

$$B = P^{-1}AP$$

$$C = T^{-1}P^{-1}APT$$

Entonces $C$ es semejante a $A$, con $S = PT$ y $S^{-1} = T^{-1}P^{-1}$