Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, y $T : V \to V$ el operador dado por:

$$T(v) = \langle v,\ u_0 \rangle \cdot u_1$$

donde u_0 y u_1 son vectores fijos y no nulos de V.

1. Hallar T^*
2. ¿Qué condiciones deben cumplir u_0 y u_1 para que T sea autoadjunto?

Resolución

Parte 1

Veamos el siguiente razonamiento

$$\begin{aligned}
&\langle T(v), w \rangle \\
&=_{\text{(definición de } T)} \\
&\langle \langle v, u_0 \rangle\, u_1, w \rangle \\
&=_{\text{(propiedades del producto interno)}} \\
&\langle v, u_0 \rangle \langle u_1, w \rangle \\
&=_{\text{(propiedades del producto interno y } V \text{ es real)}} \\
&\langle v, \langle u_1, w \rangle\, u_0 \rangle \\
&=_{\text{(definición de adjunta)}} \\
&\langle v, T^*(w) \rangle
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos que $T^*(w) = \langle u_1, w \rangle\, u_0$

Parte 2

Para que T sea autoadjunto, tenemos que tener que:

- $T(v) = \langle v, u_0 \rangle u_1 = \langle u_1, w \rangle u_0 = T^*(w)$

Entonces, se tiene que cumplir lo siguiente:

- $\langle v, u_0 \rangle u_1 = \langle u_1, w \rangle u_0$

Lo que implica que u_1 y u_2 tienen que ser colineales. Veamos que pasa si $u_1 = ku_0$ con $k \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
&T(w) \\
&=_{(\text{definición de } T^*)} \\
&\langle u_1, w \rangle u_0 \\
&=_{(u_1 = ku_0)} \\
&\langle ku_0, w \rangle u_0 \\
&=_{(\text{propiedades del producto interno})} \\
&\langle u_0, w \rangle ku_0 \\
&=_{(u_1 = ku_0)} \\
&\langle u_0, w \rangle u_1 \\
&=_{(\text{como } V \text{ es real})} \\
&\langle w, u_0 \rangle u_1 \\
&=_{(\text{definición de } T)} \\
&T(w)
\end{aligned}
$$

Por lo que si u_1 y u_2 son colineales, entonces T es autoadjunta.