Ejercicio 10

Consigna

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que su matriz asociada en la base canónica es simétrica. Probar que T es diagonalizable.

Resolución

Los datos nos dicen que:

$$A = {}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Hallamos el polínomio característico:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_T(\lambda) &= det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 \\ &= \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) \end{aligned}$$

Usando Bháskara para hallar las raíces:

$$\lambda = \frac{(a + c) \pm \sqrt{(-a - c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2}$$

Observemos lo siguiente, si el determinante $\Delta \neq 0$, entonces esto siempre será diagonalizable, pues tendremos dos valores propios diferentes en un espacio de dimensión 2.

Entonces lo que tenemos que analizar es cuando $\Delta = 0$

Podemos decir entonces que:

$$\begin{aligned} &(-a - c)^2 - 4(ac - b^2) = 0 \iff \\ &a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = 0 \iff \\ &a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 \iff \\ &(a - c)^2 + 4b^2 = 0 \end{aligned}$$

Esto solo ocurre si:

- $a - c = 0 \to a = c$
- $b = 0$

Pero si $b = 0$ la matriz asociada es la siguiente:

$$A = {}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Por lo que T sería diagonalizable en este caso también.

Entonces sin importar el valor de Δ, sabemos que T siempre será diagonalizable, sin importar los valores propios que tenga.