

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 2

### Consigna

Sea  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal.

1. Si  $W_1$  y  $W_2$  son subespacios de  $V$  invariantes bajo  $T$ , probar que  $W_1 \cap W_2$  y  $W_1 + W_2$  son invariantes bajo  $T$ .
2. Probar que si  $\lambda$  es valor propio de  $T$ , entonces el subespacio propio  $S_\lambda$  es invariante bajo  $T$ .
3. Probar que si  $\lambda$  es valor propio de  $T$  y  $W = [v_1, v_2]$ , con  $v_1 \in S_\lambda$  y  $T(v_2) = v_1$ , entonces  $W$  es invariante bajo  $T$ .
4. Si  $W$  es un subespacio de  $V$  invariante bajo  $T$  y  $\dim(W) = 1$ :
  - (a) Probar que los vectores no nulos de  $W$  son vectores propios de  $T$ .
  - (b) ¿Es  $W$  un subespacio propio de  $T$ ? Justificar.
5. Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que los siguientes subespacios son invariantes bajo  $T$ :
  - $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ ,
  - $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ ,
  - $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$
  - (a) Probar que  $T$  es diagonalizable.
  - (b) Sabiendo que  $2T - T^2 = Id$  en  $W_1$  y  $T = 2Id$  en  $W_2 \cap W_3$ , hallar los valores propios de  $T$ .

## Resolución

### Parte 1

$$W_1 \cap W_2$$

Tomemos  $v \in W_1 \cap W_2$ , como  $W_1$  y  $W_2$  son  $T$ -invariantes, tenemos que:

- $T(v) \in W_1$  y,
- $T(v) \in W_2$

se cumplen simultaneamente.

Por lo tanto uniendo estas dos tenemos que:

$$T(v) \in W_1 \cap W_2$$

Lo que significa que  $W_1 \cap W_2$  es  $T$ -invariante porque tomamos  $v$  arbitrario.

$W_1 + W_2$

Tomemos  $v = w_1 + w_2$  con  $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ . Por lo que  $v \in W_1 + W_2$

Aplicando  $T$  de ambos lados tenemos que:

$$T(v) = T(w_1) + T(w_2)$$

Como  $W_1$  y  $W_2$  son invariantes tenemos que  $T(w_1) \in W_1$  y  $T(w_2) \in W_2$

Entonces  $T(v) = T(w_1) + T(w_2) \in W_1 + W_2$

Lo que demuestra que  $W_1 + W_2$  es  $T$ -invariante

## Parte 2

Tomemos  $v \in S_\lambda$ , por definición de subespacio propio tenemos que  $T(v) = \lambda v$ .

Pero  $\lambda v \in S_\lambda$ , por lo que  $S_\lambda$  es  $T$ -invariante.

## Parte 3

Queremos probar que dado  $w \in W = [v_1, v_2]$ , tenemos que  $T(w) \in W$ . Donde  $v_1$  es valor propio de  $T$ , y  $T(v_2) = v_1$ .

Si  $w = av_1 + bv_2$  entonces  $T(w) = a\lambda v_1 + bv_1 = ab\lambda v_1$ .

Por lo que entonces  $W$  es  $T$ -invariante, ya que  $T(w) \in W$  por lo visto anteriormente.

## Parte 4

Sea  $W$  un subespacio de  $V$   $T$ -invariante de  $\dim(W) = 1$ .

Consideremos  $\mathcal{B} = \{v_1\}$  base de  $W$  y un vector no nulo  $w \in W$ .

- $w = av_1$  con  $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$

Como  $W$  es invariante, tenemos que  $T(w) \in W$ , por lo que lo podemos escribir como

- $T(w) = bv_1$

Juntando con lo anterior tenemos que:

- $T(av_1) = bav_1$

Por lo que  $av_1 = w$  es un vector propio de  $T$  asociado al valor propio  $b$ .

Con esto probamos ambas partes, porque  $W$  es un subespacio generado por  $v_1$ , que es un vector propio de  $T$ . Por lo tanto es un subespacio propio asociado a al valor propio  $b$ .

## Parte 5

Para enfrentar esta parte tenemos en cuenta las propiedades vistas en la parte 1. Veamos de hallar las intersecciones entre los subespacios invariantes.

$$W_1 \cap W_2$$

Queremos  $v = (x, y, z)$  tal que:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones, obtenemos que:

- $2x + 3y = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y$
- $x + y + z \Rightarrow z = \frac{1}{2}y$

Por lo que una base de este subespacio podría ser:

$$\left\{ \left( -\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

O, para simplificar:

$$\{(-3, 2, 1)\}$$

$$W_1 \cap W_3$$

Queremos  $v = (x, y, z)$  tal que:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones obtenemos que:

- $y + z = 0 \Rightarrow z = -y$
- $x + y + 2y = 0 \Rightarrow x = -3y$

Por lo que una base de este subespacio podría ser:

$$\{(-3, 1, -1)\}$$

$$W_2 \cap W_3$$

Queremos  $v = (x, y, z)$  tal que:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones obtenemos que:

- $3z = 0 \Rightarrow z = 0$
- $x = -y$

Por lo que una base de este subespacio podría ser:

$$\{(-1, 1, 0)\}$$

Por la parte 4 sabemos que todos estos vectores son propios, pues  $W_i \cap W_j$  son subespacios invariantes de dimensión 1.

Si estos fueran LI, entonces tendríamos una base de  $\mathbb{R}^3$  de vectores propios, lo cual implicaría que  $T$  es diagonalizable.

Investiguemos si los tres vectores son LI con el método del determinante:

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 3 - (-1 + 3 + 0) = -3$$

La propiedad nos dice que si este determinante (con los vectores colgados como columnas) da distinto a 0, entonces los vectores son LI.

Por el razonamiento anterior, concluimos que  $T$  es diagonalizable.

Evito la parte 5B porque no la termino de entender.