

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 1

### Consigna

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno.

1. Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $V$ . Probar que:

1. Si  $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

2.  $A^\perp = [A]^\perp$

3.  $A \subset (A^\perp)^\perp$

2. Sean  $S$  y  $W$  subespacios de  $V$ . Probar que:

1.  $S = (S^\perp)^\perp$

2.  $(S + W)^\perp = S^\perp \cap W^\perp$

3.  $(S \cap W)^\perp = S^\perp + W^\perp$

## Resolución

### Parte 1

#### Subparte 1

Queremos probar que si  $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ .

Empezando por la hipótesis, esta nos dice que si  $a \in A$ , entonces  $a \in B$ . Ahora, consideremos  $v \in B^\perp$ , por definición de complemento ortogonal sabemos que:

$$\langle v, b \rangle = 0 \quad \forall b \in B$$

Y como  $A \subset B$ , tenemos que esta afirmación es cierta también para todos los vectores  $a \in A$ :

$$\langle v, a \rangle = 0 \quad \forall a \in A$$

Por lo tanto  $v \in A^\perp$ , y como consideramos un  $v$  genérico dentro de  $B^\perp$ , esto es válido para todos los  $v \in B^\perp$ . Con esto concluimos que si  $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ . ■

## Subparte 2

Queremos probar que  $A^\perp = [A]^\perp$ .

Para esta parte probaremos que: 1.  $[A]^\perp \subset A^\perp$  y 2.  $A^\perp \subset [A]^\perp$

Empecemos por la primer parte.

Consideremos  $v \in [A]^\perp$ , esto implica que  $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in [A]$ . Como  $A \subset [A]$  (pues  $a \in A$  es combinación lineal de vectores de  $[A]$ ), entonces podemos decir que en particular:

$$\bullet \quad \langle v, a \rangle = 0 \quad \forall a \in A$$

Por lo tanto  $v \in A^\perp$ .

Ahora vamos con la segunda parte:

Consideremos  $v \in A^\perp$ , esto implica que  $\langle v, a \rangle = 0 \quad \forall a \in A$ . Ahora, considerando que cualquier vector  $w \in [A]$  se puede escribir como una combinación lineal de vectores de  $A$ , tenemos que:

$$\langle v, w \rangle = \left\langle v, \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i \right\rangle = \sum_{i=1}^r \alpha_i \langle v, a_i \rangle = 0$$

Donde la última igualdad es verdadera pues  $\forall a \in A \quad \langle v, a \rangle = 0$ .

Esto prueba la segunda afirmación y por lo tanto concluimos que:  $A^\perp = [A]^\perp$ .

## Subparte 3

Queremos probar que  $A \subset (A^\perp)^\perp$ .

Consideremos  $a \in A$ , queremos probar que  $\forall v \in A^\perp \quad \langle a, v \rangle = 0$ , es decir que  $a \in (A^\perp)^\perp$ . Observemos que esto es cierto  $\forall a \in A$  pues, considerando un  $v \in A^\perp$ :

$$\langle a, v \rangle = \overline{\langle v, a \rangle} = \langle v, a \rangle = 0 \quad \forall a \in A$$

Donde en este último paso usamos la definición de  $A^\perp$ . ■

## Parte 2

### Subparte 1

Queremos probar que  $S = (S^\perp)^\perp$

Para esto vamos a probar: 1.  $S \subset (S^\perp)^\perp$  2.  $(S^\perp)^\perp \subset S$

Para la primera parte, la prueba es idéntica a la 1.3.

Para la segunda parte, usamos que  $V = S \oplus S^\perp$ . Por lo tanto, tomamos  $v \in (S^\perp)^\perp$  cualquiera tal que:

- $v = v_S + v_{S^\perp}$  con  $v_S \in S$  y  $v_{S^\perp} \in S^\perp$

Como  $v \in (S^\perp)^\perp$ , tenemos que  $\forall u \in S^\perp : \langle v, u \rangle = 0$ . En particular, considerando  $u = v_{S^\perp}$  tenemos que:

$$\langle v, v_{S^\perp} \rangle = \langle v_S + v_{S^\perp}, v_{S^\perp} \rangle = \langle v_S, v_{S^\perp} \rangle + \langle v_{S^\perp}, v_{S^\perp} \rangle = 0$$

Donde lo subrayado es igual a 0 pues tengo un elemento de  $S$  y uno de  $S^\perp$ . Con lo obtenido, tenemos que:

$$\langle v_{S^\perp}, v_{S^\perp} \rangle = \|v_{S^\perp}\|^2 = 0$$

Lo que implica que  $v_{S^\perp} = 0$ , entonces  $v = v_S \in S$ . Por lo que probamos lo que estabamos buscando. ■

## Subparte 2

Queremos probar que  $(S + W)^\perp = S^\perp \cap W^\perp$ .

Para esto vamos a probar: 1.  $(S + W)^\perp \subset S^\perp \cap W^\perp$  2.  $S^\perp \cap W^\perp \subset (S + W)^\perp$

**PRIMERO:**  $(S + W)^\perp \subset S^\perp \cap W^\perp$

Consideremos  $v \in (S + W)^\perp$ , entonces:

$$\langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in (S + W)$$

Desde donde se deriva que:

$$\langle v, s + w \rangle = 0 \quad \forall s \in S \text{ y } \forall w \in W$$

Si tomamos  $w = \vec{0}$  entonces tenemos que:

- $\langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$

Lo cual implica que  $v \in S^\perp$ .

De la misma manera, si tomamos  $s = \vec{0}$  entonces tenemos que:

- $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$

Lo cual implica que  $v \in W^\perp$ .

Entonces, juntando las dos afirmaciones obtenemos que  $v \in S^\perp \cap W^\perp$ . Y como razonamos arbitrariamente, esto es válido  $\forall v \in (S + W)^\perp$ .

**SEGUNDO:**  $S^\perp \cap W^\perp \subset (S + W)^\perp$

Consideremos  $v \in S^\perp \cap W^\perp$ , esto implica que:

1.  $\langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$
2.  $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$

De esto podemos derivar que:

$$\bullet \quad \langle v, s + w \rangle = \langle v, s \rangle + \langle v, w \rangle = 0$$

Lo que significa que  $v \in (S + W)^\perp$

Juntar las dos partes concluye la prueba. ■

### Subparte 3

Queremos probar que  $(S \cap W)^\perp = S^\perp + W^\perp$ .

Usemos las propiedades probadas hasta ahora para ver que podemos decir sobre la igualdad:

$$\begin{aligned} (S \cap W)^\perp &= S^\perp + W^\perp \\ &\iff (\text{complemento ortogonal a ambos lados}) \\ ((S \cap W)^\perp)^\perp &= (S^\perp + W^\perp)^\perp \\ &\iff (\text{propiedad 2.1 y propiedad 2.2}) \\ S \cap W &= (S^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp \\ &\iff (\text{propiedad 2.1}) \\ S \cap W &= S \cap W \end{aligned}$$

Lo que prueba que esta propiedad es cierta.