Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 8 - 07/04/2025

Forma canónica de Jordan

Vectores propios generalizados

Sea $T : V \to V$ con $dim(V) = n$ y un valor propio λ_0.

Podemos decir que:

$$S_{\lambda_0}^{(1)} = \{v \in V \mid (T - \lambda_0 \mathbb{I})v = \vec{0}\}$$

Es el subespacio propio de λ_0, donde sus vectores son los que conocemos como vectores propios.

Consideremos los siguientes subespacios:

$$S_{\lambda_0}^{(2)} = \{v \in V \mid (T - \lambda_0 \mathbb{I})^2 v = \vec{0}\}$$

$$S_{\lambda_0}^{(3)} = \{v \in V \mid (T - \lambda_0 \mathbb{I})^3 v = \vec{0}\}$$

Y así sucesivamente. Observemos que el cada uno de ellos está contenido en el siguiente. Todos los vectores que pertenezcan a alguno de los que tiene grado mayor a 1 se llaman vectores propios generalizados.

Se puede probar que eventualmente llegaremos a un subespacio $S_{\lambda_0}^{(m_0)}$ tal que dejaremos de aumentar "el tamaño" y todos los subespacios siguientes serán iguales a este último. Para este valor se cumple lo siguiente:

- $m_0 \leq ma(\lambda_0)$
- $dim(S_{\lambda_0}^{(m_0)}) = ma(\lambda_0)$
- Si $v \in S_{\lambda_0}^{(k)}$ entonces $(T - \lambda_0 \mathbb{I}) \in S_{\lambda_0}^{(k-1)}$
- Si $v \in S_{\lambda_0}^{(k)} - S_{\lambda_0}^{(k-1)}$ entonces $(T - \lambda_0 \mathbb{I}) \in S_{\lambda_0}^{(k-1)} - S_{\lambda_0}^{(k-2)}$

Veamos un ejemplo para entender la intuición de lo que vamos a hacer con las formas de Jordan.

Ejemplo

Supongamos que tenemos los siguientes subespacios que cumplen las siguientes propiedades para λ_0.

- $dim(S_{\lambda_0}^{(1)}) = 3$
- $dim(S_{\lambda_0}^{(2)}) = 5$
- $dim(S_{\lambda_0}^{(3)}) = 6 = ma(\lambda_0)$

Como $dim(S_{\lambda_0}^{(3)}) = dim(S_{\lambda_0}^{(2)}) + 1$ elijo $v_1 \in S_{\lambda_0}^{(3)} - S_{\lambda_0}^{(2)}$

A partir de v_1, podemos elegir v_2 de la siguiente forma:

- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_1 = v_2$

Observemos que $v_2 \in S_{\lambda_0}^{(2)} - S_{\lambda_0}^{(1)}$, con el mismo razonamiento elegimos v_3.

- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_2 = v_3 \in S_{\lambda_0}^{(1)}$

Es decir que v_3 es valor propio asociado a λ_0.

Ahora, como $dim(S_{\lambda_0}^{(2)}) = dim(S_{\lambda_0}^{(1)}) + 2$ elijo $v_4 \in S_{\lambda_0}^{(1)} - S_{\lambda_0}^{(1)}$. Con esto puedo elegir v_5 usando el mismo razonamiento anterior:

- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_4 = v_5 \in S_{\lambda_0}^{(1)}$

Es decir que v_5 es valor propio asociado a λ_0.

Y nos restaría elegir un vector, el cual podemos elegir en $S_{\lambda_0}^{(1)}$, lo llamamos v_6.

IDEA: Queremos elegir la máxima cantidad de vectores por cada subespacio, y lo hacemos partiendo el más grande, y usando las propiedades descritas anteriormente para construirnos vectores en los subespacios más pequeños.

Esta construcción proporciona $m = ma(\lambda_0)$ vectores linealmente independientes que conforman una base de $S_{\lambda_0}^{(3)}$.

Considerando la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, tenemos que:

- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_1 = v_2 \Rightarrow T(v_1) = \lambda_0 v_1 + v_2$
- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_2 = v_3 \Rightarrow T(v_2) = \lambda_0 v_2 + v_3$
- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_3 = 0 \Rightarrow T(v_3) = \lambda_0 v_3$
- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_4 = v_5 \Rightarrow T(v_4) = \lambda_0 v_4 + v_5$
- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_5 = 0 \Rightarrow T(v_5) = \lambda_0 v_5$
- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_6 = 0 \Rightarrow T(v_6) = \lambda_0 v_6$

Con esto podemos restringir T a este subespacio, quedandonos la siguiente matriz asociada:

$$
{}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}
$$

Llamamos a esta matriz el bloque de Jordan asociado a λ_0

Esto se construye con los subbloques de Jordan, que en esta matriz son los siguientes:

$$
A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}
$$

$$
B = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}
$$

$$
C = (\lambda_0)
$$

Entonces estos subbloques son aquellos con el valor propio en la diagonal, y 1s por debajo de la diagonal.

Subespacios invariantes (definición)

Sea $T : V \to V$. Decimos que un subespacio $W \subset V$ es invariante con respecto a T si $T(W) \subset W$, es decir que calculamos T de cualquier vector de W, nos mantenemos en W.

Proposición

Sea $T : V \to V$, $dim(V) = n$, $W \subset V$ subespacio invariante. Existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que:

$$
{}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)
$$

Donde A y C son dos matrices cuadradas, y 0 una matriz con todos sus elementos iguales a 0.

Demostración

Supongamos que $dim(W) = m$, consideramos una base de W y la completamos hasta obtener una base de V.

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ base de V

Como W es invariante, para todo vector $v_i \in \mathcal{B}$ tenemos que $T(v_i)$ es combinación lineal de los vectores de la base de W, entonces nos podemos construir la matriz deseada:

$$
{}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)
$$

Donde:

- $A \in \mathcal{M}_{m\times m}$
- $B \in \mathcal{M}_{n-m\times m}$
- $0 \in \mathcal{M}_{m\times n-m}$
- $C \in \mathcal{M}_{n-m\times n-m}$