Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 5

Consigna

Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y las bases: - $\mathcal{B} = \{(1,-1,1),(1,1,1),(1,0,0)\}$ y - $\mathcal{A} = \{(1,2,0),(2,1,0),(1,1,1)\}$.

1. ¿Queda T únicamente determinada por $A = {}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$? Justifique su respuesta.
2. En caso afirmativo, hallar $T(x,y,z)$.

Resolución

T queda únicamente determinada por una justificación teórica que no logré encontrar.

Podemos usar una propiedad de la matriz asociada que es la siguiente:

$$coord_{\mathcal{A}}(T(v)) = {}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot coord_{\mathcal{B}}(v)$$

Con esto, tenemos como hallar las coordenadas del transformado de un vector en la base de llegada; en base a la matriz asociada (que tenemos) y las coordenadas en la base de partida de ese mismo vector.

Hallemos $coord_{\mathcal{B}}(x,y,z)$, para poder usar la propiedad:

$$(x,y,z) = c_1(1,-1,1) + c_2(1,1,1) + c_3(1,0,0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & -1 & z-x \end{array}\right)$$

Usando $F3 - F1$ y $F2 + F1$. Obtengo que:

- $c_3 = x - z$
- $c_2 = \frac{z-x+y+x}{2} = \frac{z+y}{2}$
- $c_1 = x + z - x + \frac{-z-y}{2} = \frac{z-y}{2}$

Ahora puedo plantear la propiedad:

$$coord_{\mathcal{A}}(T(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{z-y}{2} \\ \frac{z+y}{2} \\ x-z \end{pmatrix}$$

Para separar las cuentas, llamemos $(a,b,c) = coord_{\mathcal{A}}(T(x,y,z))$

- $a = \frac{z-y}{2} + 2z + 2y + x - z = \frac{3z+3y+2x}{2}$
- $b = z - y + \frac{z+y}{2} + x - z = \frac{z-y+2x}{2}$
- $c = z - y + \frac{z+y}{2} + x - z = \frac{z-y+2x}{2}$

Entonces:

$$coord_{\mathcal{A}}(T(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{3z+3y+2x}{2} \\ \frac{z-y+2x}{2} \\ \frac{z-y+2x}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora, me queda “eliminar” las coordenadas, es decir:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \frac{3z+3y+2x}{2} \cdot (1,2,0) + \frac{z-y+2x}{2} \cdot ((2,1,0) + (1,1,1)) \\ &= \left(\frac{3z+3y+2x}{2}, 3z+3y+2x, 0\right) + \frac{z-y+2x}{2} \cdot (3,2,1) \\ &= \left(\frac{3z+3y+2x}{2}, 3z+3y+2x, 0\right) + \left(\frac{3z-3y+6x}{2}, z-y+2x, \frac{z-y+2x}{2}\right) \\ &= \left(3z+4x, 4z+2y+4x, \frac{z-y+2x}{2}\right) \end{aligned}$$

Entonces $T(x,y,z)$ está dada por:

$$T(x,y,z) = \left(3z+4x, 4z+2y+4x, \frac{z-y+2x}{2}\right)$$