

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 1

### Consigna

Sea  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

1. Probar que  $Im(A)^\perp = Ker(A^t)$ ; es decir, que si  $S$  es el subespacio de  $\mathbb{R}^m$  generado por las columnas de  $A$ , entonces:

$$S^\perp = \{X \in \mathbb{R}^m : A^t X = \vec{0}\}$$

2. Dado  $Y \in \mathbb{R}^m$  y  $S = Im(A)$ , probar que  $s = P_S(Y)$  si y sólo si  $s = AX_0$  con  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  y

$$(A^t A)X_0 = A^t Y$$

3. Dado  $Y \in \mathbb{R}^m$ , concluir que el vector que minimiza  $\|Y - AX\|$  es la solución del sistema:

$$(A^t A)X = A^t Y$$

## Resolución

### Parte 1

La prueba de esta parte está hecha en la clase de teórico #15.

### Parte 2

Sean  $Y \in \mathbb{R}^m$  y  $S = Im(A)$ , queremos probar que:

$$s = P_S(Y) \iff s = AX_0 \quad \text{con } X_0 \in \mathbb{R}^n \text{ y además } (A^t A)X_0 = A^t Y$$

( $\Rightarrow$ )

Para que  $s = P_S(Y)$  se tienen que cumplir las siguientes afirmaciones. - Como  $s \in S$ ,  $s \in Im(A)$  pues  $S = Im(A)$ . Entonces  $s = AX_0$  para algún  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  - Por propiedades del complemento ortogonal, tenemos que dados  $Y \in \mathbb{R}^m$ ,  $AX_0 \in Im(A)$ , se cumple que

$Y - AX_0 \in Im(A)^\perp = Ker(A^t)$  (usando la propiedad 1). - Como  $Y - AX_0 \in Ker(A^t)$ , tenemos que  $A^t(Y - AX_0) = \vec{0}$ , lo que equivale a decir que:

$$\begin{aligned} & \\ & \backslash \text{begin}{aligned} & \&A^tY - A^tAX_0 = \vec{0} \\ & \&\iff \text{\scriptstyle{(\text{despejando})}} \\ & \&A^tY = A^tAX_0 \\ & \backslash \text{end}{aligned} & \\ & \end{aligned}$$

Esto prueba el implica a partir de asumir que  $s = P_S(Y)$

( $\Leftarrow$ )

En esta parte asumimos que: -  $s = AX_0$  con  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  -  $(A^tA)X_0 = A^tY$

De la segunda igualdad derivamos fácilmente que  $Y - AX_0 \in Ker(A^t) = Im(A)^\perp$ , entonces  $s = P_S(Y)$

### Parte 3

También visto en el teórico, el concepto importante detrás de esto es que la proyección ortogonal en un conjunto  $S$  dado de un vector, es lo más cercano en distancia al mismo, dentro del conjunto  $S$ .