Ejercicio 2

Consigna

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$. Hallar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$ en los siguientes casos:

1. $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente
2. $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{A}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$
3. $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{A} = \{(1, 3), (2, 5)\}$

Resolución (parte 1)

- $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
- $\mathcal{A} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

Ahora hallemos los transformados de $\mathcal{B}$:

- $T(1, 0, 0) = (3, 1)$
- $T(0, 1, 0) = (2, 5)$
- $T(0, 0, 1) = (-4, 3)$

Observemos que $coord_{\mathcal{A}}(v) = v$ para todo v si $\mathcal{A}$ es canónica. Esto es observable trivialmente, por lo que en este ejemplo nos estaríamos salteando el paso de obtener las coordenadas de los transformados de $\mathcal{B}$.

En conclusión:

$${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolución (parte 2)

- $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
- $\mathcal{A} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

Ahora hallemos los transformados de $\mathcal{B}$:

- $T(1, 1, 1) = (1, -1)$
- $T(1, 1, 0) = (5, -4)$
- $T(1, 0, 0) = (3, 1)$

Tenemos la misma situación que el ejercicio anterior, ya que la base de llegada que tenemos es canónica, entonces:

$${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución (parte 3)

- $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
- $\mathcal{A} = \{(1, 3), (2, 5)\}$

La primer parte ya la hicimos en el anterior ejercicio:

- $T(1,1,1) = (1,-1)$
- $T(1,1,0) = (5,-4)$
- $T(1,0,0) = (3,1)$

En cambio ahora si tenemos que hallar las coordenadas, porque $\mathcal{A}$ ya no es canónica:

- $coord_{\mathcal{A}}(T(1,1,1)) = coord_{\mathcal{A}}(1,-1)$

Básicamente lo que tengo que hallar es los valores de x_1, x_2 que cumplan lo siguiente:

$$x_1(1,3) + x_2(2,5) = (1,-1)$$

Esto está dado por el siguiente sistema:

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix}$$

De esto obtengo que $x_2 = 4$, y sustituyendo en la primer ecuación obtengo que $x_1 = -7$.

Ahora tengo que hacer esto para los demás vectores transformados de $\mathcal{B}$:

- $coord_{\mathcal{A}}(T(1,1,0)) = coord_{\mathcal{A}}(5,-4) = (-33,19)$
- $coord_{\mathcal{A}}(T(1,0,0)) = coord_{\mathcal{A}}(3,1) = (-13,8)$

En conclusión:

$${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}$$

Observación

Siempre verificar las cuentas, preferentemente escribiendo el sistema para cada coordenada que se tiene que calcular, porque ahí nacen los errores