

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 6

### Consigna

Se considera el espacio  $\mathbb{R}^3$  con el producto interno definido por:

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

donde  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , y el subespacio  $S$  generado por el vector  $(1, 1, 1)$ . Hallar una base ortogonal de  $S^\perp$ .

**Opciones:**

1.  $\{(3, -4, 1), (1, 1, -2)\}$
2.  $\{(1, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$
3.  $\{(0, 1, -1), (-1, 1, 1)\}$
4.  $\{(2, -1, -1), (0, 1, -1)\}$
5.  $\{(-1, 0, 2), (2, -5, 1)\}$

### Resolución

La mejor forma de resolver este ejercicio es comprobando que las bases cumplan las propiedades que tienen que cumplir:

#### Opción 1

Queremos verificar que:

- $\langle (3, -4, 1), (1, 1, 1) \rangle = 0$
- $\langle (1, 1, -2), (1, 1, 1) \rangle = 0$
- $\langle (3, -4, 1), (1, 1, -2) \rangle = 0$

Si alguno de estos no se cumple, entonces no será una base ortogonal válida para  $S^\perp$ :

- $\langle (3, -4, 1), (1, 1, 1) \rangle = 6 - 4 + 1 = 3 \neq 0$

Entonces, esta opción no es válida.

#### Opción 2

Queremos verificar que:

- $\langle (1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle = 0$
- $\langle (-1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle = 0$
- $\langle (1, 0, 1), (-1, 0, 1) \rangle = 0$

Si alguno de estos no se cumple, entonces no será una base ortogonal válida para  $S^\perp$ :

- $\langle (1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle = 2 + 0 + 1 = 3 \neq 0$

Entonces, esta opción no es válida.

### Opción 3

Queremos verificar que:

- $\langle (0, 1, -1), (1, 1, 1) \rangle = 0$
- $\langle (-1, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle = 0$
- $\langle (0, 1, -1), (-1, 1, 1) \rangle = 0$

Si alguno de estos no se cumple, entonces no será una base ortogonal válida para  $S^\perp$ :

- $\langle (0, 1, -1), (1, 1, 1) \rangle = 0 + 1 - 1 = 0$
- $\langle (-1, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle = -2 + 1 + 1 = 0$
- $\langle (0, 1, -1), (-1, 1, 1) \rangle = 0 + 1 - 1 = 0$

Esta opción es la correcta, pues ambos sus vectores son ortogonales a todos los vectores de  $S$ , además la base es ortogonal pues los vectores que la componen son ortogonales entre si. A pesar de esto seguimos validando las demás opciones como práctica.

### Opción 4

Queremos verificar que:

- $\langle (2, -1, -1), (1, 1, 1) \rangle = 0$
- $\langle (0, 1, -1), (1, 1, 1) \rangle = 0$
- $\langle (2, -1, -1), (0, 1, -1) \rangle = 0$

Si alguno de estos no se cumple, entonces no será una base ortogonal válida para  $S^\perp$ :

- $\langle (2, -1, -1), (1, 1, 1) \rangle = 4 - 1 - 1 = 2 \neq 0$

Entonces, esta opción no es válida.

### Opción 5

Queremos verificar que:

- $\langle (-1, 0, 2), (1, 1, 1) \rangle = 0$
- $\langle (2, -5, 1), (1, 1, 1) \rangle = 0$
- $\langle (-1, 0, 2), (2, -5, 1) \rangle = 0$

Si alguno de estos no se cumple, entonces no será una base ortogonal válida para  $S^\perp$ :

- $\langle (-1, 0, 2), (1, 1, 1) \rangle = -2 + 0 + 2 = 0$
- $\langle (2, -5, 1), (1, 1, 1) \rangle = 4 - 5 + 1 = 0$
- $\langle (-1, 0, 2), (2, -5, 1) \rangle = -4 + 0 + 2 = -2 \neq 0$

Entonces, esta opción no es válida.