

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 20 - 14/07/2025

Teorema espectral para operadores autoadjuntos

Lema 1

Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y $T : V \rightarrow V$ operador autoadjunto. S un subespacio de V T -invariante.

Entonces S^\perp es T -invariante.

Demostración

Dado $w \in S^\perp$ queremos probar que $T(w) \in S^\perp$.

Entonces consideramos $s \in S$, veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \langle T(w), s \rangle \\ &= (T \text{ autoadjunto}) \\ & \langle w, T(s) \rangle \\ &= (S \text{ invariante y } w \in S^\perp) \\ & 0 \end{aligned}$$

Enunciado teorema espectral para operadores autoadjuntos

Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Sea $T : V \rightarrow V$ un operador autoadjunto.

Entonces existe \mathcal{B} una base ortonormal de vectores propios de T .

Demostración

Como V es de dimensión finita, los valores propios son raíces de X_T que tendrá al menos una raíz. Ésta será real por uno de los teoremas previos que probamos. Llamaremos λ_0 al valor propio, entonces existe $v_0 \in V, v_0 \neq \vec{0}$ tal que $T(v_0) = \lambda_0 v_0$. Consideramos $w_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$.

Continuaremos la prueba razonando por inducción sobre la dimensión del espacio vectorial V .

Paso base

Si $\dim(V) = 1$, entonces consideramos $\mathcal{B} = \{w_0\}$ que es una base ortonormal de V formada por vectores propios de T .

Paso inductivo

Supongamos que el teorema es cierto para espacios de dimensión $n - 1$ y lo probamos para espacios de dimensión n .

Sea $S = [w_0] \subseteq S_{\lambda_0}$, observemos que S es T -invariante, pues $T(w_0) = \lambda_0 w_0 \quad \forall w_0 \in S$. Entonces por el lema anterior S^\perp también es T -invariante. Consideremos $T|_{S^\perp}: S^\perp \rightarrow S^\perp$

Como tenemos que $V = S \oplus S^\perp$, en particular tenemos que $\dim(V) = \dim(S) + \dim(S^\perp)$. De donde concluimos que:

- $\dim(S^\perp) = n - 1$

Entonces veamos que:

S^\perp es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión $n - 1$, y tenemos $T|_{S^\perp}: S^\perp \rightarrow S^\perp$ que es autoadjunto.

Luego, por hipótesis inductiva, existe una base \mathcal{B}_1 ortonormal de S^\perp de vectores propios de $T|_{S^\perp}$

Concluyendo, consideramos la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \{w_0\}$ que está formada por vectores propios de T y además es ortonormal.