

## Ejercicio 21

### Consigna

Dadas  $A$  y  $B$  matrices  $n \times n$  semejantes, probar que:

1.  $A^p$  y  $B^p$  son semejantes,  $\forall p \in \mathbb{N}$ .
2.  $A^t$  y  $B^t$  son semejantes.
3.  $A$  es invertible  $\iff B$  es invertible. Además,  $A^{-1}$  y  $B^{-1}$  son semejantes.

### Resolución

#### Parte 1

Como  $A, B$  son semejantes, podemos decir que:  $B = P^{-1}AP$ . Entonces para  $p \geq 2$ :

$$B^p = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \dots (P^{-1}AP)$$

Si agrupamos los  $P$  y  $P^{-1}$  terminamos con:

$$B^p = P^{-1}A^pP$$

Por lo que  $A^p$  y  $B^p$  son semejantes.

#### Parte 2

**RECORDATORIO** Para el producto de matrices:  $(AB)^t = B^tA^t$

**LEMA** Sea una matriz  $A$  invertible. Entonces la matriz  $A^t$  es invertible, y su inversa es  $(A^{-1})^t$

**DEMOSTRACIÓN** Sabemos que  $A$  es invertible, es decir que:  $A \cdot A^{-1} = (Id)$ . Apliquemos la transpuesta de ambos lados:

$$(A \cdot A^{-1})^t = (Id)^t$$

Por la propiedad del recordatorio, tenemos que:

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = (Id)$$

Esto prueba que el lema.

**EJERCICIO** Como  $A, B$  son semejantes, podemos decir que:  $B = P^{-1}AP$ .

Usando la propiedad del recordatorio:

$$\begin{aligned} B^t &= (AP)^t(P^{-1})^t \\ &= P^tA^t(P^{-1})^t \end{aligned}$$

Entonces, como  $P^t$  es la inversa de  $(P^{-1})^t$  por el lema anterior, tenemos que  $B^t$  y  $A^t$  son semejantes.

### Parte 3

**RECORDATORIO** Sean  $A, B$  dos matrices invertibles, entonces  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

**EJERCICIO** Como  $A, B$  son semejantes, podemos decir que:  $B = P^{-1}AP$ .

Además, si  $A$  es invertible, tenemos que:

$$A \cdot A^{-1} = (Id)$$

Queremos probar que:

$$B \cdot B^{-1} = (Id)$$

$$P^{-1}AP \cdot (P^{-1}AP)^{-1} = (Id)$$

$$P^{-1}AP \cdot (AP)^{-1}(P^{-1})^{-1} = (Id)$$

$$P^{-1}P = (Id)$$

Entonces,  $B$  es invertible. El recíproco se demuestra con el mismo argumento.