Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 6

Consigna

1. En $\mathbb{C}^3$ con producto interno habitual, sean $v = (2, 1+i, i)$ y $w = (2-i, 2, 1+2i)$. Calcular:
   - $\langle v, w \rangle$, $\|v\|^2$, $\|w\|^2$, $\|v+w\|^2$.

   - Verificar **Cauchy-Schwarz** y **desigualdad triangular**.
2. En $C[0,1]$ con $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, sean $f(t) = t$ y $g(t) = e^t$. Calcular:
   - $\langle f, g \rangle$, $\|f\|^2$, $\|g\|^2$, $\|f+g\|^2$.

   - Verificar **Cauchy-Schwarz** y **desigualdad triangular**.

Resolución

Parte 1

Considerando el producto interno habitual en $\mathbb{C}^n$:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}$$

Calculemos lo indicado en la letra:

- $\langle v, w \rangle = \langle (2, 1+i, i), (2-i, 2, 1+2i) \rangle = 2\overline{(2-i)} + (1+i)\overline{2} + i\overline{(1+2i)} = 4 + 2i + 2 + 2i + i + 2 = 8 + 5i$
- $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle (2, 1+i, i), (2, 1+i, i) \rangle = 4 + (1+i)\overline{(1-i)} + 1 = 7$
- $\|w\|^2 = \langle w, w \rangle = \langle (2-i, 2, 1+2i), (2-i, 2, 1+2i) \rangle = (2-i)\overline{(2-i)} + 4 + (1+2i)\overline{(1+2i)} = 5 + +4 + 1 + 4 = 14$
- $\|v+w\|^2 = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} + \langle w, w \rangle = 7 + 8 + 5i + 8 - 5i + 14 = 37$

Verifiquemos las dos desigualdades que nos faltan:

Cauchy-Schwarz:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\|w\| \iff |\langle v, w \rangle|^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2 \iff |8+5i|^2 \leq 7 \cdot 14 \iff 8^2+5^2 \leq 98 \iff 89 \leq 98$$

Por lo tanto esto se cumple.

Desigualdad triangular:

$$\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\| \iff \sqrt{37} \leq \sqrt{7}+\sqrt{14} \iff \sqrt{37}^2 \leq (\sqrt{7}+\sqrt{14})^2 \iff 37 \leq 7+2\sqrt{7}\sqrt{14}+14 \iff 16 \leq$$

Cómo lo último se cumple, verificamos que la desigualdad triangular se cumple.