Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 20 - 14/07/2025

Teorema espectral para operadores autoadjuntos

Lema 1

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $T : V \to V$ operador autoadjunto. S un subespacio de V T-invariante.

Entonces $S^\perp$ es T-invariante.

Demostración

Dado $w \in S^\perp$ queremos probar que $T(w) \in S^\perp$.

Entonces consideramos $s \in S$, veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\langle T(w), s\rangle \\
&=_{(T \text{ autoadjunto})} \\
&\langle w, T(s)\rangle \\
&=_{(S \text{ invariante y } w \in S^\perp)} \\
&0
\end{aligned}$$

Enunciado teorema espectral para operadores autoadjuntos

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Sea $T : V \to V$ un operador autoadjunto.

Entonces existe $\mathcal{B}$ una base ortonormal de vectores propios de T.

Demostración

Como V es de dimensión finita, los valores propios son raíces de X_T que tendrá al menos una raíz. Ésta será real por uno de los teoremas previos que probamos. Llamaremos λ_0 al valor propio, entonces existe $v_0 \in V, v_0 \neq \vec{0}$ tal que $T(v_0) = \lambda_0 v_0$. Consideramos $w_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$.

Continuaremos la prueba razonando por inducción sobre la dimensión del espacio vectorial V.

Paso base

Si $dim(V) = 1$, entonces consideramos $\mathcal{B} = \{w_0\}$ que es una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.

Paso inductivo

Supongamos que el teorema es cierto para espacios de dimensión $n-1$ y lo probamos para espacios de dimensión n.

Sea $S = [w_0] \subseteq S_{\lambda_0}$, observemos que S es T-invariante, pues $T(w_0) = \lambda_0 w_0 \quad \forall w_0 \in S$. Entonces por el lema anterior $S^\perp$ también es T-invariante. Consideremos $T\mid_{S^\perp} \colon S^\perp \to S^\perp$

Como tenemos que $V = S \oplus S^\perp$, en particular tenemos que $dim(V) = dim(S) + dim(S^\perp)$. De donde concluimos que:

- $dim(S^\perp) = n-1$

Entonces veamos que:

$S^\perp$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n-1$, y tenemos $T\mid_{S^\perp} \colon S^\perp \to S^\perp$ que es autoadjunto.

Luego, por hipótesis inductiva, existe una base $\mathcal{B}_1$ ortonormal de $S^\perp$ de vectores propios de $T\mid_{S^\perp}$

Concluyendo, consideramos la base $\mathcal{B} = B_1 \cup \{w_0\}$ que está formada por vectores propios de T y además es ortonormal.