

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 11 - 14/04/2025

Norma inducida y Ortogonalidad

Observación

Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial con producto interno, dos vectores $v, w \in V$ tal que $v, w \neq \vec{0}$. Se cumple que:

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1$$

Por otra parte, en \mathbb{R}^3 y con el producto interno usual: $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \theta$.

Definimos el ángulo entre v y w como el ángulo θ que cumple lo siguiente:

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

Corolario 1 (de la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $V = \mathbb{R}^n$ con $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, considerando: - $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

Se cumple:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

Corolario 2 (de la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $V = C[a, b]$ con $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Se cumple que:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt \right) \left(\int_a^b g^2(t)dt \right)$$

Corolario 3 (de la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Vamos a probar la desigualdad triangular para la norma inducida por un producto interno.

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$$

Demostración:

$$\begin{aligned} & \|v + w\|^2 \\ &= (\text{definición de norma inducida}) \\ & \langle v + w, v + w \rangle \\ &= (\text{desarrollo}) \\ & \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= (\text{por: } z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)) \\ &= \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2 \\ &\leq (\text{por: } \operatorname{Re}(z) \leq |z|) \\ & \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq (\text{desigualdad de Cauchy-Schwarz}) \\ & \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\text{operatoria}) \\ & (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

Entonces reagrupando:

$$\begin{aligned} & \|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2 \\ & \iff (\text{ambos lados siempre positivos}) \\ & \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \end{aligned}$$

Definición (ortogonalidad y ortonormalidad)

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} con producto interno. Decimos que v, w son ortogonales si $\langle v, w \rangle = 0$.

Notación: $v \perp w$

- Sea $A \subset V$, decimos que A es un conjunto ortogonal si $\forall v, w \in A$, con $v \neq w$ se cumple que $v \perp w$. Si además $\|v\| = 1 \quad \forall v \in A$ decimos que A es un conjunto ortonormal

Observaciones:

1. $\langle v, 0 \rangle = 0 \quad \forall v \in V$
2. $v \perp v \iff \langle v, v \rangle = 0 \iff v = \vec{0}$
3. Sea A un conjunto ortogonal tal que $\vec{0} \notin A$. Entonces el conjunto $B = \left\{ \frac{v}{\|v\|} : v \in A \right\}$ es un conjunto ortonormal

Teorema

Sea V un espacio vectorial con producto interno y $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset V$ conjunto ortogonal tal que $v_i \neq \vec{0} \quad \forall i \in 1, \dots, r$.

Entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es LI.

Demostración:

Consideremos:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0 \quad (i)$$

Para $i = 1, \dots, r$, para un j fijado, se cumple que:

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i, v_j \right\rangle \\ &= (\text{el primer vector es } 0) \\ & 0 \\ &= (\text{definición de producto interno}) \\ & \sum_{i=1}^r \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle \\ &= (\text{por ortogonalidad cuando } i \neq j) \\ & \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle \\ &= (\text{definición de norma inducida}) \\ & \alpha_j \|v_j\|^2 \\ &= (\text{porque } v_j \neq 0) \\ & \alpha_j \end{aligned}$$

Es decir, para este j fijado se cumple que $\alpha_j = 0$. Podemos aplicar este razonamiento para todos los valores de j y obtener que la única forma para que (i) sea 0 es que todos los escalares α_i sean. Con esto concluimos que: $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es LI.

Teorema de Pitagoras

Sea V un espacio vectorial con producto interno, y $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ un conjunto ortogonal. Entonces se cumple:

$$\left\| \sum_{i=1}^r v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^r \|v_i\|^2$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{i=1}^r v_i \right\|^2 \\
&= (\text{definición de norma inducida}) \\
& \left\langle \sum_{i=1}^r v_i, \sum_{j=1}^r v_j \right\rangle \\
&= (\text{definición de producto interno}) \\
& \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \langle v_i, v_j \rangle \\
&= (\text{por ortogonalidad cuando } i \neq j) \\
& \sum_{i=1}^r \langle v_i, v_i \rangle \\
&= (\text{definición de norma inducida}) \\
& \sum_{i=1}^r \|v_i\|^2
\end{aligned}$$