

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## CLASE 20 - 14/07/2025

### Teorema espectral para operadores autoadjuntos

#### Lema 1

Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y  $T : V \rightarrow V$  operador autoadjunto.  $S$  un subespacio de  $V$   $T$ -invariante.

Entonces  $S^\perp$  es  $T$ -invariante.

#### Demostración

Dado  $w \in S^\perp$  queremos probar que  $T(w) \in S^\perp$ .

Entonces consideramos  $s \in S$ , veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \langle T(w), s \rangle \\ &= (T \text{ autoadjunto}) \\ & \langle w, T(s) \rangle \\ &= (S \text{ invariante y } w \in S^\perp) \\ & 0 \end{aligned}$$

### Enunciado teorema espectral para operadores autoadjuntos

Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Sea  $T : V \rightarrow V$  un operador autoadjunto.

Entonces existe  $\mathcal{B}$  una base ortonormal de vectores propios de  $T$ .

#### Demostración

Como  $V$  es de dimensión finita, los valores propios son raíces de  $X_T$  que tendrá al menos una raíz. Ésta será real por uno de los teoremas previos que probamos. Llamaremos  $\lambda_0$  al valor propio, entonces existe  $v_0 \in V, v_0 \neq \vec{0}$  tal que  $T(v_0) = \lambda_0 v_0$ . Consideramos  $w_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$ .

Continuaremos la prueba razonando por inducción sobre la dimensión del espacio vectorial  $V$ .

### Paso base

Si  $\dim(V) = 1$ , entonces consideramos  $\mathcal{B} = \{w_0\}$  que es una base ortonormal de  $V$  formada por vectores propios de  $T$ .

### Paso inductivo

Supongamos que el teorema es cierto para espacios de dimensión  $n - 1$  y lo probamos para espacios de dimensión  $n$ .

Sea  $S = [w_0] \subseteq S_{\lambda_0}$ , observemos que  $S$  es  $T$ -invariante, pues  $T(w_0) = \lambda_0 w_0 \quad \forall w_0 \in S$ . Entonces por el lema anterior  $S^\perp$  también es  $T$ -invariante. Consideremos  $T|_{S^\perp}: S^\perp \rightarrow S^\perp$

Como tenemos que  $V = S \oplus S^\perp$ , en particular tenemos que  $\dim(V) = \dim(S) + \dim(S^\perp)$ . De donde concluimos que:

- $\dim(S^\perp) = n - 1$

Entonces veamos que:

$S^\perp$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n - 1$ , y tenemos  $T|_{S^\perp}: S^\perp \rightarrow S^\perp$  que es autoadjunto.

Luego, por hipótesis inductiva, existe una base  $\mathcal{B}_1$  ortonormal de  $S^\perp$  de vectores propios de  $T|_{S^\perp}$

Concluyendo, consideramos la base  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \{w_0\}$  que está formada por vectores propios de  $T$  y además es ortonormal.