Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

1. En $\mathbb{R}^3$ con producto interno habitual:
    1. Sea T un operador lineal cuya matriz respecto de la base $B = \{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (1,0,1)\}$ es:

    $$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

    Probar que T es autoadjunto.

    2. Sea S un operador lineal con:

    $$_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

    ¿Es S autoadjunto?

2. En $\mathbb{C}^2$ con producto interno usual, sea T tal que respecto de la base $B = \{(1,1),\ (0,1)\}$:

    $$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}$$

    Probar que T es autoadjunto.

3. En $\mathbb{R}^3$, con producto interno habitual, se define:
    - $T(1,1,0) = (5,\ 8,\ -1)$
    - $T(1,-1,1) = (10,\ -14,\ 10)$
    - $T(2,1,1) = (13,\ a,\ b)$

    Hallar a y b para que T sea autoadjunto.

Resolución

Parte 1

Subparte 1

Sea T un operador lineal cuya matriz respecto de la base $B = \{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (1,0,1)\}$ es:

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Observemos que la base dada no es ortonormal. Consideremos $\mathcal{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ que sabemos que si es ortonormal.

Planteemos entonces un cambio de base:

$$_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}}$$

Donde:

- $_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces me queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} _{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como la matriz es simétrica para una base ortonormal, entonces T es autoadjunta.

Subparte 2

Sea S un operador lineal con:

$$
{}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

Observemos que la base dada no es ortonormal. Consideremos $\mathcal{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ que sabemos que si es ortonormal.

Planteemos entonces un cambio de base:

$$
{}_{\mathcal{E}}(S)_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}}
$$

Donde:

- ${}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ${}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces me queda lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Como la matriz es simétrica NO para una base ortonormal, entonces T NO es autoadjunta.

Parte 2

Análoga a la parte 1

Parte 3

En $\mathbb{R}^3$, con producto interno habitual, se define:

- $T(1,1,0) = (5,\ 8,\ -1)$
- $T(1,-1,1) = (10,\ -14,\ 10)$
- $T(2,1,1) = (13,\ a,\ b)$

Hallar a y b para que T sea autoadjunto.

Para que T sea autoadjunto, se tiene que verificar en general que $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$.

En particular:

- $\langle T(1,1,0), (2,1,1)\rangle = \langle (1,1,0), T(2,1,1)\rangle$
- $\langle T(1,-1,1), (2,1,1)\rangle = \langle (1,-1,1), T(2,1,1)\rangle$

Expandamos ambos dos:

$$\begin{aligned}
&\langle T(1,1,0), (2,1,1)\rangle = \langle (1,1,0), T(2,1,1)\rangle \\
&\iff \text{(definición dada de } T\text{)} \\
&\langle (5,8,-1), (2,1,1)\rangle = \langle (1,1,0), (13,a,b)\rangle \\
&\iff \text{(definición de producto interno dado)} \\
&10+8-1 = 13+a \\
&\iff \text{(aritmética)} \\
&a = 4
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
&\langle T(1,-1,1), (2,1,1)\rangle = \langle (1,-1,1), T(2,1,1)\rangle \\
&\iff \text{(definición dada de } T\text{)} \\
&\langle (10,-14,10), (2,1,1)\rangle = \langle (1,-1,1), (13,a,b)\rangle \\
&\iff \text{(definición de producto interno dado)} \\
&20-14+10 = 13-a+b \\
&\iff (a{=}4) \\
&20-14+10 = 13-4+b \\
&\iff \text{(aritmética)} \\
&b = 7
\end{aligned}$$

Por lo tanto T es autoadjunto sii $a = 4$ y $b = 7$