

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 3

### Consigna

Dada la matriz asociada a  $T$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar:

1. Los subespacios invariantes de  $T$ .
2. Sus valores propios.
3. Discutir según  $\theta$  cuándo  $T$  es diagonalizable.

### Resolución

Para empezar, primero hallemos los valores propios de esta matriz, para esto calculamos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} X_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)((\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1) \end{aligned}$$

Sabemos que a priori  $\lambda_1 = 1$  es raíz del polinomio, ahora apliquemos Bháskara para hallar las raíces del segundo polinomio:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2 \cos \theta \pm \sqrt{4 \cos^2 \theta - 4}}{2} \\
&= \frac{2 \cos \theta \pm \sqrt{4(\cos^2 \theta - 1)}}{2} \\
&= \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} \\
&= \cos \theta \pm \sqrt{-\sin^2 \theta} \\
&= \cos \theta \pm i \sin \theta
\end{aligned}$$

Entonces la única forma de que estos sean valores propios es que pertenezcan a  $\mathbb{R}^3$ , por lo tanto tenemos que  $\sin \theta = 0$ , lo que implica que  $\theta = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ .

En ese caso tendríamos raíz doble en  $\lambda_2 = \cos(k\pi)$ , a su vez para esto tenemos dos casos según  $k$ :

- Si  $k$  es par, entonces  $\lambda_2 = 1$ , habría raíz triple en 1, es decir:  $ma(1) = 3$
- Si  $k$  es impar, entonces  $\lambda_2 = -1$ , habría raíz doble en -1, es decir:  $ma(-1) = 2$

Analicemos los subespacios según el caso.

### **CASO 1: $k$ es par**

Si  $k$  es par, tenemos un solo valor propio  $\lambda = 1$  con  $ma(1) = 3$ , veamos de resolver el sistema  $(A - 1I)v = 0$  para hallar  $mg(1)$ . La representación del sistema es la siguiente:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

De esto sacamos que  $mg(1) = 3$ , por lo que en este caso,  $T$  es diagonalizable.

En cuanto a los subespacios invariantes para este caso, podemos observar que cualquier subespacio de  $\mathbb{R}^3$  sería  $T$ -invariante, porque tendríamos una representación matricial igual a la identidad, por lo que cualquier vector  $v \in \mathbb{R}^3$  cumpliría que  $T(v) = v$

### **CASO 2: $k$ es impar**

En este caso ya tenemos que  $ma(1) = mg(1) = 1$ , solo habría que verificar el subespacio asociado a  $\lambda_2 = -1$ , que podemos verlo con el sistema  $(A + 1I)v = 0$ . La representación del sistema es la siguiente:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

De esto sacamos que  $mg(1) = 2$ , por lo que en este caso también,  $T$  es diagonalizable.

En este caso tendríamos que los subespacios propios serían los únicos subespacios invariantes además de los subespacios triviales.