Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Sean $T, S : V \to W$ y $R : U \to V$ transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno sobre $\mathbb{K}$, y $\alpha \in \mathbb{K}$. Probar las siguientes propiedades de la adjunta:

1. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es base ortonormal de V, entonces:

$$T^*(w) = \langle w,\ T(e_1)\rangle_W \cdot e_1 + \dots + \langle w,\ T(e_n)\rangle_W \cdot e_n, \quad \forall w \in W$$

2. $(T + S)^* = T^* + S^*$

3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$

4. $(T \circ R)^* = R^* \circ T^*$

5. $(T^*)^* = T$

6. T es invertible $\Leftrightarrow$ T^* es invertible. Además: $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

7. λ es valor propio de T $\Leftrightarrow$ $\overline{\lambda}$ es valor propio de T^*

8. $\ker(T^*) = (\mathrm{Im}(T))^\perp$

9. $\mathrm{Im}(T^*) = (\ker(T))^\perp$

10. $\ker(T^*T) = \ker(T)$

11. $\dim(\mathrm{Im}(T^*T)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$

Resolución

Parte 1

Queremos probar que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es base ortonormal de V, entonces:

$$T^*(w) = \langle w,\ T(e_1)\rangle_W \cdot e_1 + \cdots + \langle w,\ T(e_n)\rangle_W \cdot e_n, \quad \forall w \in W$$

Para esto, consideremos las siguientes dos propiedades:

1. Dada una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V, $\forall v \in V : v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n\rangle e_n$.
2. $\forall v \in V, \forall w \in V : \langle w, T(v)\rangle_W = \langle T^*(w), v\rangle_V$

Calculemos $T(v)$:

$$\begin{aligned} & v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n\rangle e_n \\ & \iff \text{(aplicando } T\text{)} \\ & T(v) = \langle v, e_1\rangle T(e_1) + \dots + \langle v, e_n\rangle T(e_n) \end{aligned}$$

Por lo que podemos sustituir $T(v)$ en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \langle w, T(v)\rangle_W = \langle T^*(w), v\rangle_V \\ & \iff \text{(desarrollo de } T(v)\text{)} \\ & \left\langle w, \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle_V T(e_i) \right\rangle_W = \langle T^*(w), v\rangle_V \\ & \iff \text{(propiedades de producto interno)} \\ & \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle_V \langle w, T(e_i)\rangle_W = \langle T^*(w), v\rangle_V \\ & \iff \text{(desarrollo de } v\text{)} \\ & \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle_V \langle w, T(e_i)\rangle_W = \left\langle T^*(w), \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i \right\rangle_V \\ & \iff \text{(propiedades del producto interno)} \\ & \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle_V \langle w, T(e_i)\rangle_W = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle_V \langle T^*(w), e_i\rangle_V \\ & \iff \text{(simplificando)} \\ & \langle w, T(e_i)\rangle_W = \langle T^*(w), e_i\rangle_V \end{aligned}$$

Como consideramos $v \in V$ y $w \in W$ cualquiera, esta propiedad vale $\forall v \in V, \forall w \in W, \forall i = 1, \dots, n$.

Ahora, como $T^*(w) \in V$, y tenemos una base ortonormal de V, podemos expresar $T^*(w)$ de la siguiente forma:

$$T^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle T^*(w), e_i\rangle_V e_i$$

Pero por la igualdad que demostramos anteriormente podemos concluir que:

$$T^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle w, T(e_i) \rangle_W \, e_i$$

Lo que concluye la prueba.

Parte 2

Queremos probar que $(T + S)^* = T^* + S^*$.

Consideremos la siguiente propiedad básica de la adjunta:

- $\forall v \in V, \forall w \in V : \langle w, T(v) \rangle_W = \langle T^*(w), v \rangle_V$

Veamos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
&\langle w, (T + S)(v) \rangle_W \\
&=_{\text{(propiedades de transf. lineales)}} \\
&\langle w, T(v) + S(v) \rangle_W \\
&=_{\text{(propiedades de producto interno)}} \\
&\langle w, T(v) \rangle_W + \langle w, S(v) \rangle_W \\
&=_{\text{(propiedades de la adjunta)}} \\
&\langle T^*(w), v \rangle_V + \langle S^*(w), v \rangle_V \\
&=_{\text{(propiedades de producto interno)}} \\
&\langle T^*(w) + S^*(w), v \rangle_V \\
&=_{\text{(propiedades de transf. lineales)}} \\
&\langle (T^* + S^*)(w), v \rangle_V
\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba.

Parte 3

Queremos probar que $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.

Consideremos la siguiente propiedad básica de la adjunta:

- $\forall v \in V, \forall w \in V : \langle w, T(v) \rangle_W = \langle T^*(w), v \rangle_V$

Veamos la siguiente cadena de igualdades:

$$
\begin{aligned}
&\langle w, (\alpha T)(v) \rangle_W \\
&= \text{(propiedades de transf. lineales)} \\
&\langle w, \alpha(T(v)) \rangle_W \\
&= \text{(propiedades de producto interno)} \\
&\overline{\alpha} \langle w, T(v) \rangle_W \\
&= \text{(propiedades de la adjunta)} \\
&\overline{\alpha} \langle T^*(w), v \rangle_V \\
&= \text{(propiedades de producto interno)} \\
&\langle \overline{\alpha}(T^*(w)), v \rangle_V \\
&= \text{(propiedades de transf. lineales)} \\
&\langle (\overline{\alpha} T^*)(w), v \rangle_V
\end{aligned}
$$

Lo que concluye la prueba.

Parte 4

Queremos probar que $(T \circ R)^* = R^* \circ T^*$.

Consideremos la siguiente propiedad básica de la adjunta:

- $\forall v \in V, \forall w \in V : \langle w, T(v) \rangle_W = \langle T^*(w), v \rangle_V$

Veamos la siguiente cadena de igualdades:

$$
\begin{aligned}
&\langle w, (T \circ R)(v) \rangle_W \\
&= \text{(propiedades de transf. lineales)} \\
&\langle w, T(R(v)) \rangle_W \\
&= \text{(propiedades de la adjunta)} \\
&\langle T^*(w), R(v) \rangle_V \\
&= \text{(propiedades de la adjunta)} \\
&\langle R^*(T^*(w)), v \rangle_W \\
&= \text{(propiedades de transf. lineales)} \\
&\langle (R^* \circ T^*)(w), v \rangle_W
\end{aligned}
$$

Lo que concluye la prueba.

Parte 5

Queremos probar que $(T^*)^* = T$.

Consideremos la siguiente propiedad básica de la adjunta:

- $\forall v \in V, \forall w \in V : \langle w, T(v) \rangle_W = \langle T^*(w), v \rangle_V$

Veamos la siguiente cadena de igualdades:

$$\langle T^*(w), v\rangle_V$$
$$=\text{(propiedades de la adjunta)}$$
$$\langle w, T(v)\rangle_W$$

Lo que concluye la prueba.

Parte 6

Queremos probar que si T es invertible $\Leftrightarrow$ T^* es invertible. Además: $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

Consideremos las siguientes propiedades:

1. $\forall v \in V, \forall w \in V : \langle w, T(v)\rangle_W = \langle T^*(w), v\rangle_V$
2. Sea I la transformación identidad, entonces: $I^* = I$

$$T \circ T^{-1} = I_V$$
$$\text{(aplicando adjunta a ambos lados)}$$
$$(T \circ T^{-1})^* = I_V^*$$
$$\text{(propiedades de la adjunta)}$$
$$(T^{-1})^* \circ T^* = I_V$$

Esto demuestra que $(T^{-1})^*$ es la inversa de T^*, lo que concluye la prueba.