Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

En un experimento se midió según el tiempo una cierta magnitud y, obteniéndose los siguientes valores:

t	y
0	0
1	1
3	2
4	5

1. Aplicando el método de mínimos cuadrados, hallar la mejor recta que ajuste los datos anteriores ($y = \alpha t + \beta$)
2. Aplicando el método de mínimos cuadrados, hallar la mejor parábola que ajuste los datos anteriores ($y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$).

Resolución

Parte 1

Construyamos las matrices que precisamos:

- $Y = (0, 1, 2, 5)^t$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
- $X = (\alpha, \beta)^t$

Con esto, planteamos el sistema normal para este caso:

$$A^t A X = A^t Y$$

Cálculemos $A^t A$ y $A^t Y$:

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \quad A^tY = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ahora, hallemos $(A^tA)^{-1}$ para calcular directamente el valor de X:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 26 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim_{(\frac{1}{2}F_1 \text{ y } \frac{1}{2}F_2)}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 13 & 4 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\sim_{(\frac{1}{13}F_1)}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{13} & \frac{1}{26} & 0 \\ 4 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\sim_{(F_2-4F_1)}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{13} & \frac{1}{26} & 0 \\ 0 & \frac{10}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\sim_{(\frac{13}{10}F_2)}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{13} & \frac{1}{26} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{13}{20} \end{array}\right)$$
$$\sim_{(F_1-\frac{4}{13}F_2)}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{13}{20} \end{array}\right)$$

Con esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} X &= (A^tA)^{-1}A^tY \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{13}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta que mejor ajusta a estos datos es:

$$y = \frac{11}{10}t - \frac{1}{5}$$

Parte 2

Análoga pero con muchas cuentas.