

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 11

Consigna

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, $S \subset V$ un subespacio vectorial y $P_S(v)$ la proyección ortogonal de v sobre S ; es decir, $P_S(v)$ es el único vector que verifica que $P_S(v) \in S$ y $v - P_S(v) \in S^\perp$.

Probar que:

1. $P_S(s) = s \quad \forall s \in S$
2. $P_S(v) = \vec{0} \quad \forall v \in S^\perp$
3. $P_S : V \rightarrow V$ es transformación lineal
4. Hallar la matriz asociada de P_S en una base unida de S con S^\perp
5. Hallar el núcleo e imagen de P_S
6. Hallar valores y subespacios propios de P_S . Es P_S diagonalizable?
7. $\|v\|^2 = \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \quad \forall v \in V$
8. $\|P_S(v)\| \leq \|v\| \quad \forall v \in V$
9. $\langle v, P_S(v) \rangle = \|P_S(v)\|^2 \quad \forall v \in V$

Resolución

Dada una base ortonormal $\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_r\}$ de S , definimos $P_S(v)$ con $v \in V$ como:

$$P_S(v) = \sum_{i=1}^r \langle v, s_i \rangle s_i$$

Parte 1

Queremos probar que $P_S(s) = s \quad \forall s \in S$.

Por definición de proyección, $P_S(s)$ es el único vector en S que cumple que: $s - P_S(s) \in S^\perp$. Ahora, considerando que $s - s = \vec{0} \in S^\perp$, podemos concluir que necesariamente $P_S(s) = s$, para todo $s \in S$ pues consideramos un s cualquiera.

Parte 2

Queremos probar que $P_S(v) = \vec{0} \quad \forall v \in S^\perp$.

Por definición de proyección, $P_S(v)$ es el único vector en S que cumple que: $v - P_S(v) \in S^\perp$. Ahora, considerando que $v - \vec{0} = v \in S^\perp$ (por hipótesis), podemos concluir que $P_S(v) = \vec{0}$, para todo $s \in S$ pues consideramos un s cualquiera.

Parte 3

Queremos probar que $P_S : V \rightarrow V$ es transformación lineal

Entonces, dados $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se tienen que cumplir las siguientes afirmaciones:

1. $P_S(v + w) = P_S(v) + P_S(w)$
2. $P_S(\alpha v) = \alpha P_S(v)$

Consideremos la definición de $P_S(v)$ para una base ortonormal $\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_r\}$ de S , dada por

$$P_S(v) = \sum_{i=1}^r \langle v, s_i \rangle s_i$$

Subparte 1

Desarrollemos:

$$\begin{aligned} & P_S(v + w) \\ &= (\text{definición de proyección ortogonal}) \\ & \sum_{i=1}^r \langle v + w, s_i \rangle s_i \\ &= (\text{propiedades de producto interno}) \\ & \sum_{i=1}^r (\langle v, s_i \rangle + \langle w, s_i \rangle) s_i \\ &= (\text{distribuyendo}) \\ & \sum_{i=1}^r \langle v, s_i \rangle s_i + \langle w, s_i \rangle s_i \\ &= (\text{separando la sumatoria}) \\ & \sum_{i=1}^r \langle v, s_i \rangle s_i + \sum_{i=1}^r \langle w, s_i \rangle s_i \\ &= (\text{definición de proyección ortogonal}) \\ & P_S(v) + P_S(w) \end{aligned}$$

Lo que concluye esta subparte.

Subparte 2

Desarrollemos:

$$\begin{aligned}
& P_S(\alpha v) \\
& \quad = (\text{definición de proyección ortogonal}) \\
& \quad \sum_{i=1}^r \langle \alpha v, s_i \rangle s_i \\
& \quad = (\text{propiedades del producto interno}) \\
& \quad \sum_{i=1}^r \alpha \langle v, s_i \rangle s_i \\
& \quad = (\text{propiedades la sumatoria}) \\
& \quad \alpha \sum_{i=1}^r \langle v, s_i \rangle s_i \\
& \quad = (\text{definición de proyección ortogonal}) \\
& \quad \alpha P_S(v)
\end{aligned}$$

Parte 4

Queremos hallar la matriz asociada de P_S en una base construida uniendo una base de S con una de S^\perp .

Consideremos bases de S y S^\perp :

- $\mathcal{B}^S = \{v_1, \dots, v_r\}$
- $\mathcal{B}^{S^\perp} = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ base de V . Calculemos las columnas de la matriz asociada: - $\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_1)) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(v_1) = (1, \dots, 0) - \dots - \text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_r)) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(v_r) = (0, \dots, 1, \dots, 0) - \text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_{r+1})) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(v_{r+1}) = (0, \dots, 0) - \dots - \text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_n)) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(v_n) = (0, \dots, 0)$

Esto es así por las propiedades 1 y 2, considerando que:

1. $v_1, \dots, v_r \in S$
2. $v_{r+1}, \dots, v_n \in S^\perp$

Entonces la matriz asociada $_{\mathcal{B}}(P_S)_{\mathcal{B}}$ se ve de la siguiente forma:

$$_{\mathcal{B}}(P_S)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0_{n-r \times n-r} \\ 0_{n-r \times n-r} & 0_{n-r \times n-r} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Parte 5

Queremos hallar el núcleo e imagen de P_S . Describamos los conjuntos para ver que podemos decir de ellos:

- $\text{Ker}(P_S) = \{P_S(v) = 0 \mid v \in V\}$
- $\text{Im}(P_S) = \{P_S(v) \mid v \in V\}$

Ahora, para el núcleo, por la propiedad 2, podemos concluir que ese conjunto es exactamente S^\perp .

En segundo lugar considerando la imagen, como P_S proyecta en S , $Im(P_S) = S$.

Parte 6

Queremos hallar valores y subespacios propios para P_S . Utilizaremos el razonamiento hecho en la parte 4.

Valores propios

Observamos que la matriz asociada que hallamos en la parte 4 es diagonal. Vemos que los valores propios son:

- $\lambda_1 = 1$, con $mg(\lambda) = r$
- $\lambda_2 = 0$, con $mg(\lambda) = n - r$

Subespacios asociados

- El subespacio asociado a $\lambda_1 = 1$ es S , pues está asociado a una base de vectores propios que corresponde exactamente a la base de S .
- El subespacio asociado a $\lambda_2 = 0$ es S^\perp , pues está asociado a una base de vectores propios que corresponde exactamente a la base de S^\perp .

Diagonalización

Claramente es diagonalizable pues hallamos una base para la cual la matriz asociada de P_S es diagonal.

Parte 7

Queremos probar que $\|v\|^2 = \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \quad \forall v \in V$.

Veamos que podemos escribir todo $v \in V$ como $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, entonces:

$$\begin{aligned}
 & \|v\|^2 \\
 &= (\text{norma inducida por el producto interno}) \\
 & \langle v, v \rangle \\
 &= (\text{descomposición de } v) \\
 & \langle P_S(v) + P_{S^\perp}(v), P_S(v) + P_{S^\perp}(v) \rangle \\
 &= (\text{propiedades del producto interno}) \\
 & \langle P_S(v), P_S(v) \rangle + \langle P_S(v), P_{S^\perp}(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\
 &= (P_S(v) \perp P_{S^\perp}(v)) \\
 & \langle P_S(v), P_S(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\
 &= (\text{norma inducida por el producto interno}) \\
 & \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2
 \end{aligned}$$

Parte 8

Queremos probar que $\|P_S(v)\| \leq \|v\| \quad \forall v \in V$.

Veamos que podemos escribir todo $v \in V$ como $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, entonces:

$$\begin{aligned}
& \|v\|^2 \\
& \quad = (\text{norma inducida por el producto interno}) \\
& \quad \langle v, v \rangle \\
& \quad = (\text{descomposición de } v) \\
& \quad \langle P_S(v) + P_{S^\perp}(v), P_S(v) + P_{S^\perp}(v) \rangle \\
& \quad = (\text{propiedades del producto interno}) \\
& \quad \langle P_S(v), P_S(v) \rangle + \langle P_S(v), P_{S^\perp}(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_S(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\
& \quad = (P_S(v) \perp P_{S^\perp}(v)) \\
& \quad \langle P_S(v), P_S(v) \rangle + \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v) \rangle \\
& \quad = (\text{norma inducida por el producto interno}) \\
& \quad \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \\
& \quad \geq (\text{considerando que } P_{S^\perp} \geq 0) \\
& \quad \|P_S(v)\|^2
\end{aligned}$$

Entonces concluimos que $\|P_S(v)\| \leq \|v\| \quad \forall v \in V$.

Parte 9

Queremos probar que $\langle v, P_S(v) \rangle = \|P_S(v)\|^2 \quad \forall v \in V$.

Consideremos $v = P_S(v) + (v - P_S(v))$, con $v - P_S(v) \in S^\perp$:

$$\begin{aligned}
& \langle v, P_S(v) \rangle \\
& \quad = (\text{desarrollo de } v) \\
& \quad \langle P_S(v), P_S(v) \rangle + \langle v - P_S(v), P_S(v) \rangle \\
& \quad = (v - P_S(v) \in S^\perp; P_S(v) \in S) \\
& \quad \langle P_S(v), P_S(v) \rangle + 0 \\
& \quad = (\text{norma inducida por el producto interno}) \\
& \quad \|P_S(v)\|^2
\end{aligned}$$