

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 4

### Consigna

Probar que  $T$  es autoadjunto, hallar su forma diagonal y una base ortonormal de vectores propios:

1.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:

$$T(x, y, z) = \left( \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z, 2y, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z \right)$$

2.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:

$$T(x, y, z) = \left( \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, -y, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z \right)$$

## Resolución

### Parte 1

Hallemos la matriz asociada  ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$  considerando  $\mathcal{E}$  como la base canónica de  $\mathbb{R}^3$

- $T(1, 0, 0) = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$
- $T(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$
- $T(0, 0, 1) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$

Por lo tanto la matriz asociada es la siguiente:

$${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Como la matriz asociada en una base ortonormal es simétrica, entonces  $T$  es autoadjunto.

Ahora hallemos los valores propios (para un tema de cuentas, tengamos presente que si  $T$  autoadjunto entonces las raíces son reales).

$$\begin{aligned}
X_T(\lambda) &= \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (2 - \lambda) \left( \left( \frac{3}{2} - \lambda \right)^2 - \frac{1}{4} \right) \\
&= (2 - \lambda) \left( \lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} \right) \\
&= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que:

- $\lambda_1 = 2$

Mediante Bháskara obtenemos las raíces que faltan:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \\
&= \frac{3 \pm 1}{2}
\end{aligned}$$

De donde obtenemos:

- $\lambda_1 = 2$
- $\lambda_2 = 1$

Por lo que tenemos las siguientes multiplicidades algebraicas:

- $ma(2) = 2$
- $ma(1) = 1$

Ahora hallemos los subespacios propios:

### Subespacio $S_2$

Para hallar el subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema:

- $(T - 2Id)v = 0$

Que corresponde a lo siguiente:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

De donde obtenemos que:

- $x = z$
- $y \in \mathbb{R}$

Podemos definir el subespacio como:

- $S_2 = \{(\alpha, \beta, \alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$  o
- $[(1, 0, 1), (0, 1, 0)]$

Observemos que  $(1, 0, 1) \perp (0, 1, 0)$ , por lo que podemos simplemente normalizar para obtener una base ortonormal del espacio:

- $[\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), (0, 1, 0)]$

Ahora hagamos el mismo razonamiento para  $S_1$ .

### Subespacio $S_2$

Para hallar el subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema:

- $(T - Id)v = 0$

Que corresponde a lo siguiente:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

De donde obtenemos que:

- $x = -z$
- $y = 0$

Podemos definir el subespacio como:

- $S_1 = \{(\alpha, 0, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$  o
- $[(1, 0, -1)]$

Normalizamos para obtener una base ortonormal:

- $[\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)]$

Entonces ahora podemos unir todo para obtener una base ortonormal de vectores propios de  $T$ :

- $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$

**Observación:** En este punto siempre conviene revisar que efectivamente los vectores sean ortogonales.

## Parte 2

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:

$$T(x, y, z) = \left( \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, -y, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z \right)$$

Halleemos la matriz asociada  $_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$  considerando  $\mathcal{E}$  como la base canónica de  $\mathbb{R}^3$

- $T(1, 0, 0) = (\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2})$
- $T(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$
- $T(0, 0, 1) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$

Por lo tanto la matriz asociada es la siguiente:

$$\mathcal{E}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Como la matriz asociada en una base ortonormal es simétrica, entonces  $T$  es autoadjunto.

Ahora hallemos los valores propios (para un tema de cuentas, tengamos presente que si  $T$  autoadjunto entonces las raíces son reales).

$$\begin{aligned} X_T(\lambda) &= \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1 - \lambda) \left( \left( \frac{3}{2} - \lambda \right)^2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= (-1 - \lambda) \left( \lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= (-1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \end{aligned}$$

De donde obtenemos que:

- $\lambda_1 = -1$

Mediante Bháskara obtenemos las raíces que faltan:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \\ &= \frac{3 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

- $\lambda_1 = 2$
- $\lambda_2 = 1$

Por lo que tenemos las siguientes multiplicidades algebraicas:

- $ma(2) = 1$
- $ma(1) = 1$
- $ma(-1) = 1$

Ahora hallemos los subespacios propios:

### Subespacio $S_2$

Para hallar el subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema:

- $(T - 2Id)v = 0$

Que corresponde a lo siguiente:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

De donde obtenemos que:

- $x = -z$
- $y = 0$

Podemos definir el subespacio como:

- $S_2 = \{(\alpha, 0, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$  o
- $[(1, 0, -1)]$

Normalizamos para obtener una base ortonormal:

- $[\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)]$

**Subespacio  $S_1$**

Para hallar el subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema:

- $(T - Id)v = 0$

Que corresponde a lo siguiente:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

De donde obtenemos que:

- $x = z$
- $y = 0$

Podemos definir el subespacio como:

- $S_1 = \{(\alpha, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$  o
- $[(1, 0, 1)]$

Normalizamos para obtener una base ortonormal.

- $[\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)]$

**Subespacio  $S_{-1}$**

Para hallar el subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema:

- $(T + Id)v = 0$

Que corresponde a lo siguiente:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{array} \right)$$

De donde obtenemos que:

- $x = z = 0$
- $y \in \mathbb{R}$

Podemos definir el subespacio como:

- $S_{-1} = \{(0, \alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$  o
- $[(0, 1, 0)]$

Normalizamos para obtener una base ortonormal.

- $[(0, 1, 0)]$

Concluyendo, la base ortonormal de vectores propios de  $T$  es  $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)\}$