Ejercicio 20

Consigna

Probar que la relación de matrices semejantes es una relación de equivalencia.

Recordar que una relación es una relación de equivalencia si verifica las propiedades:

- **Reflexiva**: Toda matriz es semejante a sí misma.
- **Simétrica**: Si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.
- **Transitiva**: Si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

Resolución

Reflexividad

Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. A es semejante a si misma, ya que podemos considerar $P = (Id)_{n\times n}$ de forma que:

$$A = P^{-1}AP$$

Esto prueba que la semejanza de matrices es reflexiva

Simetría

Sean dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, tal que A es semejante a B. Entonces $\exists P$ tal que:

$$B = P^{-1}AP$$

Multiplico ambos lados por P a la izquierda y P^{-1} a la derecha, obtengo que:

$$PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1}$$

$$PBP^{-1} = A$$

Entonces B es semejante a A

Transitividad

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}$, tal que:

- A es semejante a B
- B es semejante a C

Entonces:

- $\exists P$ tal que: $B = P^{-1}AP$
- $\exists T$ tal que: $C = T^{-1}BT$

Por lo tanto:

$$B = P^{-1}AP$$

$$C = T^{-1}P^{-1}APT$$

Entonces C es semejante a A, con $S = PT$ y $S^{-1} = T^{-1}P^{-1}$