Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 9 - 07/04/2025

Teorema de Jordan

Subbloque de Jordan (definición)

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal con valor propio λ. Llamamos subbloque de Jordan del valor propio λ y tamaño k:

$$SJ_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Donde la matriz es de tamaño $k \times k$

Bloque de Jordan (definición)

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal con valor propio λ. Un bloque de Jordan de un valor propio λ es una matriz cuadrada de la forma:

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} SJ_{k_1}(\lambda) & & & 0 \\ & SJ_{k_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & SJ_{k_p}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Donde por convención tenemos que $k_1 \leq k_2 \leq ... \leq k_p$

Teorema de la forma canónica de Jordan

Sea $T : V \to V$ con $dim(V) = n$, con polinomio característico $\mathrm{X}_T(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_q)^{m_q}$

Entonces existe $\mathcal{B}$ base de V tal que:

$$
{}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & 0 \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\lambda_q) \end{pmatrix}
$$

Donde:

- Los tamaños de los bloques de Jordan están dados por la multiplicidad algebraica del valor propio asociado λ_i
- La forma de $\mathcal{B}$ es única salvo el reordenamiento de los bloques
- Llamamos base de Jordan a todas las bases $\mathcal{B}$ que nos llevan a esta forma

Análisis con matrices 2×2

Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ tales que las raíces de su polinomio característico están en el cuerpo $\mathbb{K}$

CASO 1: RAÍCES DISTINTAS

En este caso el polinomio característico se vería así al factorizarse:

$$
\mathrm{X}_A(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)
$$

Con $a \neq b$, como tenemos dos valores propios distintos y estamos trabajando en espacio de dimensión 2, entonces A es diagonalizable, por lo que su forma de Jordan sería:

$$
J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}
$$

CASO 2: RAÍZ DOBLE

En este caso el polinomio característico se vería así al factorizarse:

$$
\mathrm{X}_A(\lambda) = (\lambda - a)^2
$$

Acá a su vez tenemos dos casos:

- $mg(a) = ma(a) = 2$
- $mg(a) = 1$

En el primero A es diagonalizable, y su forma es:

$$
J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}
$$

Mientras que en el segundo A NO es diagonalizable, y su forma es:

$$
J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}
$$

OBSERVACIÓN: Veamos que la multiplicidad geométrica de un valor propio nos determina la cantidad de subbloques de Jordan que tenemos.

Análisis con matrices 3×3

Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$ tales que las raíces de su polinomio característico están en el cuerpo $\mathbb{K}$

CASO 1: RAÍCES DISTINTAS

En este caso el polinomio característico se vería así al factorizarse:

$$\mathrm{X}_A(\lambda) = (-1)(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)$$

Con $a \neq b \neq c$, como tenemos tres valores propios distintos y estamos trabajando en espacio de dimensión 3, entonces A es diagonalizable, por lo que su forma de Jordan sería:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

CASO 2: UNA RAÍZ DOBLE Y OTRA SIMPLE

$$\mathrm{X}_A(\lambda) = (-1)(\lambda - a)^2(\lambda - b)$$

Acá a su vez tenemos dos casos:

- $mg(a) = ma(a) = 2$
- $mg(a) = 1$

En el primero A es diagonalizable, y su forma es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Mientras que en el segundo A NO es diagonalizable, y su forma es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

CASO 3: UNA RAÍZ TRIPLE

$$\mathrm{X}_A(\lambda) = (-1)(\lambda - a)^3$$

Acá a su vez tenemos tres casos:

- $mg(a) = ma(a) = 3$

- $mg(a) = 2$
- $mg(a) = 1$

En el primero A es diagonalizable, y su forma es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

En el segundo A NO es diagonalizable, y su forma es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Mientras que en el tercero A NO es diagonalizable, y su forma es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo (cálculo de una base de Jordan)

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (2x + z, y - z, -y + z)$

Considerando la base canónica, tenemos que:

$$_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y el polinomio característico es:

$$\mathrm{X}_T(\lambda) = -(\lambda - 2)^2 \lambda$$

Nota: No vemos el detalle de todo esto ya que fue calculado en una clase anterior de teórico

Tenemos que los valores propios son:

- $\lambda_1 = 2$, con $ma(2) = 2$
- $\lambda_2 = 0$, con $ma(0) = 1$

Los subespacios propios quedan definidos por las siguientes bases:

- $\{(1, 0, 0)\}$ es base de S_2
- $\{(1, -2, -2)\}$ es base de S_0

Por lo que sabemos que T NO es diagonalizable, pero sabemos cual es su forma de Jordan a partir del razonamiento que seguimos en la parte anterior:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para construir una base que nos lleve a esta representación matricial, tenemos que

1. Elegir la mayor cantidad de vectores propios que podemos.
2. Construir los vectores faltantes a partir de lo que ya tenemos.

Mirando la primer y tercer columna de la forma de Jordan:

- Consideramos un vector propio del subespacio asociado a $0 : v_1 = (1, -2, -2)$
- Consideramos un vector propio del subespacio asociado a $2 : v_3 = (1, 0, 0)$

Con esto, veamos que la forma de Jordan nos dice que:

$$T(v_2) = 2v_2 + v_3$$

O visto de otra forma:

$$(T - 2\mathbb{I})v_2 = v_3$$

Lo que nos deja con el siguiente sistema (usando la matriz asociada que obtuvimos al principio):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-2 & 0 \end{array}\right)$$

De esto sacamos que:

- $z = 1$
- $-y = z$
- $x \in \mathbb{R}$

Por lo que consideramos el vector $v_2 = (0, -1, 1)$ para completar la base de Jordan.