Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

Hallar el representante de Riesz de los siguientes funcionales lineales:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + 2y - 3z$
2. $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ dada por $T(x, y, z) = ix + (2 + 3i)y + (1 - 2i)z$
3. $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ definida por $T(p) = p(\alpha)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo
4. $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida por $T(p) = p(0) + p'(1)$

Resolución

Recordatorio (definición de representante de Riesz)

Sea V un espacio vectorial con producto interno, tal que $dim(V) = n$. Si $T : V \to \mathbb{K}$ es una funcional lineal entonces existe un único $w \in V$ tal que $T(v) = \langle v, w \rangle \quad \forall v \in V$. Llamamos a $w \in V$ el representante de Riesz de la funcional lineal T

Parte 1

Consideramos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + 2y - 3z$.

Queremos encontrar $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que para todo $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se cumpla que $T(v) = \langle v, w \rangle$. Considerando el producto interno usual, tenemos que:

- $\langle (x, y, z), (w_1, w_2, w_3) \rangle = xw_1 + yw_2 + zw_3$

Para cumplir la igualdad necesitamos que:

$$x + 2y - 3z = xw_1 + yw_2 + zw_3$$

De donde sacamos que: $w = (1, 2, -3)$

Parte 2

Consideramos $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ dada por $T(x, y, z) = ix + (2 + 3i)y + (1 - 2i)z$.

Queremos encontrar $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$ tal que para todo $v = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ se cumpla que $T(v) = \langle v, w \rangle$. Considerando el producto interno usual, tenemos que:

- $\langle (x,y,z),(w_1,w_2,w_3)\rangle = x\overline{w_1} + y\overline{w_2} + z\overline{w_3}$

Para cumplir la igualdad necesitamos que:

$$ix + (2+3i)y + (1-2i)z = x\overline{w_1} + y\overline{w_2} + z\overline{w_3}$$

De donde sacamos que: $w = (-i, 2-3i, 1+2i)$

Parte 3

Consideramos $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ definida por $T(p) = p(\alpha)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo.

Queremos encontrar $w = ax + b \in \mathbb{R}_1[x]$ tal que para todo $p \in \mathbb{R}_1[x]$ se cumpla que $T(p) = \langle p, w\rangle$. Considerando el producto interno usual, tenemos que:

- $\langle p, w\rangle = \int_0^1 (ax+b)p(x)dx$ para todo $p \in \mathbb{R}_1[x]$

Enfrentaremos este caso de forma diferente a los casos de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{C}^3$, vamos a trabajar con la base canónica de $\mathbb{R}_1[x]$ para obtener un sistema que nos permita encontrar a y b para construir $w \in \mathbb{R}_1[x]$:

- Considerando $p = 1$:
  - $T(1) = 1(\alpha) = 1 = \int_0^1 ax + b \cdot 1dx = \frac{a}{2} + b$
- Considerando $p = x$:
  - $T(x) = x(\alpha) = \alpha = \int_0^1 (ax+b)xdx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$

Esto nos deja con el siguiente sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \alpha \end{array}\right) \sim_{(2F_1 \text{ y } 6F_2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6\alpha \end{array}\right) \sim_{(F_2 - 2F_1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 6\alpha - 4 \end{array}\right)$$

Sustituyendo obtenemos que:

- $b = -6\alpha + 4$
- $a = 2 - 2(-6\alpha + 4) = 12\alpha - 6$

Entonces el representante de Riesz es $w = (12\alpha - 6)x + (-6\alpha + 4)$

Parte 4

Consideramos $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida por $T(p) = p(0) + p'(1)$

Queremos encontrar $w = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$ se cumpla que $T(p) = \langle p, w\rangle$. Considerando el producto interno usual, tenemos que:

- $\langle p, w\rangle = \int_0^1 p(x)(ax^2 + bx + c)dx$

Enfrentaremos este caso de forma diferente a los casos de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{C}^3$, vamos a trabajar con la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ para obtener un sistema que nos permita encontrar a y b para construir $w \in \mathbb{R}_2[x]$:

- Considerando $p = 1$:
  - $T(1) = 1(0) + 1'(1) = 1 = \int_0^1 1 \cdot (ax^2 + bx + c)dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$

- Considerando $p = x$:
  - $T(x) = x(0) + x'(1) = 1 = \int_0^1 x(ax^2 + bx + c)dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2}$
- Considerando $p = x^2$:
  - $T(x) = x^2(0) + (x^2)'(1) = 2 = \int_0^1 x^2(ax^2 + bx + c)dx = \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3}$

Esto nos deja con el siguiente sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right) \sim_{(6F_1, 24F_2 \text{ y } 60F_3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 6 & 6 \\ 6 & 8 & 12 & 24 \\ 12 & 15 & 20 & 120 \end{array}\right) \sim_{(F_2 - 3F_1 \text{ y } F_3 - 6F_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & 6 \\ 0 & -3 & -16 & 84 \end{array}\right) \sim_{(F_3 - 3F_2}$$

Sustituyendo obtenemos que:

- $c = 33$
- $b = -6 - 6(33) = -204$
- $a = \frac{6 - 6(33) - 3(-204)}{2} = 210$

Por lo tanto, tenemos que $w = 210x^2 - 204x + 33$