

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## CLASE 1 - 12/02/2025

### Matriz asociada a una transformación lineal

Sean  $V, W$  dos espacios vectoriales con bases  $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rightarrow V$  y  $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \dots, w_m\} \rightarrow W$ . Sea una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$ ; construimos la matriz asociada a la transformación lineal con las bases  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  de la siguiente forma:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = (\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_1)) \quad \text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_2)) \quad \cdots \quad \text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_n)))$$

**Observación:** (1) Veamos que en la notación, va primero la base de llegada, luego la base de partida (2) Recordar que  $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$  significa reescribir el vector  $v$  en función de la base  $\mathcal{B}$  (3) Las coordenadas van “colgadas” verticalmente (4) La matriz  ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_{m \times n}$

**Aplicaciones** (1) Una vez dada la matriz asociada a una TL, podemos hallar la misma. Esto se puede ver en algún ejercicio del práctico

### Propiedades

Sean  $V, W$  dos espacios vectoriales con bases  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Sean dos transformaciones lineales  $T, S : V \rightarrow W$

1.  $\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v)) = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{A}}(v)$
2.  ${}_{\mathcal{B}}(T + S)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} + {}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{A}}$
3. Dado  $\alpha \in \mathbb{K}$ :  ${}_{\mathcal{B}}(\alpha T)_{\mathcal{A}} = \alpha \cdot {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$

Sean  $U, V, W$  tres espacios vectoriales con bases  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ . Sean dos transformaciones lineales  $S : U \rightarrow V$  y  $T : V \rightarrow W$ . Dada la transformación lineal  $T \circ S$ :

4.  ${}_{\mathcal{C}}(T \circ S)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{B}} \times {}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{A}}$

### Cambio de base

Sean dos espacios vectoriales  $V, W$ , cada una con dos respectivas bases:  $A, A' \rightarrow V$  y  $B, B' \rightarrow W$ . También tenemos una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$ .

Nos preguntamos que relación existe entre  ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$  y  ${}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{A}'}$ .

Consideramos las transformaciones identidad en  $V$  y  $W$ , es decir: -  $\mathbb{I}_v : V \rightarrow V$  tal que  $\mathbb{I}_v(v) = v \quad \forall v \in V$  -  $\mathbb{I}_w : W \rightarrow W$  tal que  $\mathbb{I}_w(v) = v \quad \forall v \in W$

Podemos observar que se cumple lo siguiente de forma bastante trivial:

$$\mathbb{I}_w \circ T \circ \mathbb{I}_v = T$$

De esto podemos concluir (usando la propiedad 4):

$${}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{B}'}(\mathbb{I}_w)_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}(\mathbb{I}_v)_{\mathcal{A}'}$$

Llamamos a  ${}_{\mathcal{A}}(\mathbb{I}_v)_{\mathcal{A}'}$  y  ${}_{\mathcal{B}'}(\mathbb{I}_w)_{\mathcal{B}}$  matrices de cambio de base

## Observación

Dado un espacio vectorial  $V$  con bases  $A, A'$  y la transformación identidad  $\mathbb{I}_v : V \rightarrow V$ :

$$\begin{aligned} \text{coord}_{\mathcal{A}'}(\mathbb{I}(v)) &= \text{coord}_{\mathcal{A}'}(v) \\ &= {}_{\mathcal{A}'}(\mathbb{I})_{\mathcal{A}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{A}}(v) \end{aligned}$$

Esto por la propiedad 1 definida anteriormente. Con esto podemos concluir que:

$$\text{coord}_{\mathcal{A}'}(v) = {}_{\mathcal{A}'}(\mathbb{I})_{\mathcal{A}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{A}}(v)$$

Esto explica porque llamamos a las matrices, como matrices de cambio de base.

## Observación

Partamos viendo que  $(\mathbb{I} \circ \mathbb{I}) = \mathbb{I}$ . Apliquemos la propiedad 4 a este hecho:

$${}_{\mathcal{A}}(\mathbb{I})_{\mathcal{A}'} \cdot {}_{\mathcal{A}'}(\mathbb{I})_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{A}}(\mathbb{I})_{\mathcal{A}} = (\mathbb{I})$$

Donde  $(\mathbb{I})$  es la matriz identidad. Por la definición de matriz inversa, podemos concluir que:

$${}_{\mathcal{A}}(\mathbb{I})_{\mathcal{A}'} = [{}_{\mathcal{A}'}(\mathbb{I})_{\mathcal{A}}]^{-1}$$

## Matrices semejantes

### Definición

Dadas dos matrices  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$  decimos que son semejantes sii:

$$\exists P \in \mathcal{M}_{n \times n} \text{ invertible tal que } A = P \cdot B \cdot P^{-1}$$

## Observación

En conjunto a lo visto con el cambio de base, si nos paramos en las hipótesis del tema (es decir, nos damos un espacio vectorial, dos bases, una transformación lineal); ahora podemos decir que  ${}_{\mathcal{A}'}(T)_{\mathcal{A}'}$  y  ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}}$  son semejantes, donde  $P$  son es una matriz de cambio de base

## Definición (operador lineal)

Una transformación lineal  $T : V \rightarrow V$  se llama operador lineal cuando el espacio de llegada es igual al espacio de partida