Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Probar que T es autoadjunto, hallar su forma diagonal y una base ortonormal de vectores propios:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z, 2y, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z\right)$$

2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, -y, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z\right)$$

Resolución

Parte 1

Hallemos la matriz asociada ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$ considerando $\mathcal{E}$ como la base canónica de $\mathbb{R}^3$

- $T(1, 0, 0) = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$
- $T(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$
- $T(0, 0, 1) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$

Por lo tanto la matriz asociada es la siguiente:

$${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como la matriz es simétrica (estamos considerando una base ortonormal), entonces ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}(T^*)_{\mathcal{E}}$, lo que implica que $T = T^*$ y por lo tanto T es autoadjunta.

Ahora tengo que hallar los valores propios, por lo que calculo el polinomio característico:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}_T(\lambda) &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)((3-\lambda)^2+1) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+10)
\end{aligned}
$$

Esto nos deja con las siguientes raíces características:

- $\lambda_1 = 1$
- $\lambda_2 = 3+i$
- $\lambda_3 = 3-i$

Ahora calculemos los subespacios:

S_1

Tenemos que resolver el siguiente sistema:

$(T - Id)v = 0$:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

De donde obtenemos que:

- $z = 0$
- $x = 0$
- $y \in \mathbb{R}$