

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## CLASE 9 - 07/04/2025

### Teorema de Jordan

#### Subbloque de Jordan (definición)

Sea  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal con valor propio  $\lambda$ . Llamamos subbloque de Jordan del valor propio  $\lambda$  y tamaño  $k$ :

$$SJ_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Donde la matriz es de tamaño  $k \times k$

#### Bloque de Jordan (definición)

Sea  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal con valor propio  $\lambda$ . Un bloque de Jordan de un valor propio  $\lambda$  es una matriz cuadrada de la forma:

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} SJ_{k_1}(\lambda) & & 0 \\ & SJ_{k_2}(\lambda) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & SJ_{k_p}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Donde por convención tenemos que  $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_p$

### Teorema de la forma canónica de Jordan

Sea  $T : V \rightarrow V$  con  $\dim(V) = n$ , con polinomio característico  $X_T(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_q)^{m_q}$

Entonces existe  $\mathcal{B}$  base de  $V$  tal que:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & 0 \\ & J(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J(\lambda_q) \end{pmatrix}$$

Donde:

- Los tamaños de los bloques de Jordan están dados por la multiplicidad algebraica del valor propio asociado  $\lambda_i$
- La forma de  $\mathcal{B}$  es única salvo el reordenamiento de los bloques
- Llamamos base de Jordan a todas las bases  $\mathcal{B}$  que nos llevan a esta forma

## Análisis con matrices $2 \times 2$

Sea  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$  tales que las raíces de su polinomio característico están en el cuerpo  $\mathbb{K}$

### CASO 1: RAÍCES DISTINTAS

En este caso el polinomio característico se vería así al factorizarse:

$$X_A(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)$$

Con  $a \neq b$ , como tenemos dos valores propios distintos y estamos trabajando en espacio de dimensión 2, entonces  $A$  es diagonalizable, por lo que su forma de Jordan sería:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

### CASO 2: RAÍZ DOBLE

En este caso el polinomio característico se vería así al factorizarse:

$$X_A(\lambda) = (\lambda - a)^2$$

Acá a su vez tenemos dos casos:

- $mg(a) = ma(a) = 2$
- $mg(a) = 1$

En el primero  $A$  es diagonalizable, y su forma es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Mientras que en el segundo  $A$  NO es diagonalizable, y su forma es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

**OBSERVACIÓN:** Veamos que la multiplicidad geométrica de un valor propio nos determina la cantidad de subbloques de Jordan que tenemos.

### **Análisis con matrices $3 \times 3$**

Sea  $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$  tales que las raíces de su polinomio característico están en el cuerpo  $\mathbb{K}$

#### **CASO 1: RAÍCES DISTINTAS**

En este caso el polinomio característico se vería así al factorizarse:

$$X_A(\lambda) = (-1)(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)$$

Con  $a \neq b \neq c$ , como tenemos tres valores propios distintos y estamos trabajando en espacio de dimensión 3, entonces  $A$  es diagonalizable, por lo que su forma de Jordan sería:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

#### **CASO 2: UNA RAÍZ DOBLE Y OTRA SIMPLE**

$$X_A(\lambda) = (-1)(\lambda - a)^2(\lambda - b)$$

Acá a su vez tenemos dos casos:

- $mg(a) = ma(a) = 2$
- $mg(a) = 1$

En el primero  $A$  es diagonalizable, y su forma es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Mientras que en el segundo  $A$  NO es diagonalizable, y su forma es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

#### **CASO 3: UNA RAÍZ TRIPLE**

$$X_A(\lambda) = (-1)(\lambda - a)^3$$

Acá a su vez tenemos tres casos:

- $mg(a) = ma(a) = 3$

- $mg(a) = 2$
- $mg(a) = 1$

En el primero  $A$  es diagonalizable, y su forma es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

En el segundo  $A$  NO es diagonalizable, y su forma es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Mientras que en el tercero  $A$  NO es diagonalizable, y su forma es:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

### Ejemplo (cálculo de una base de Jordan)

Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T(x, y, z) = (2x + z, y - z, -y + z)$

Considerando la base canónica, tenemos que:

$${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y el polinomio característico es:

$$X_T(\lambda) = -(\lambda - 2)^2\lambda$$

**Nota:** No vemos el detalle de todo esto ya que fue calculado en una clase anterior de teórico

Tenemos que los valores propios son:

- $\lambda_1 = 2$ , con  $ma(2) = 2$
- $\lambda_2 = 0$ , con  $ma(0) = 1$

Los subespacios propios quedan definidos por las siguientes bases:

- $\{(1, 0, 0)\}$  es base de  $S_2$
- $\{(1, -2, -2)\}$  es base de  $S_0$

Por lo que sabemos que  $T$  NO es diagonalizable, pero sabemos cual es su forma de Jordan a partir del razonamiento que seguimos en la parte anterior:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para construir una base que nos lleve a esta representación matricial, tenemos que

1. Elegir la mayor cantidad de vectores propios que podemos.
2. Construir los vectores faltantes a partir de lo que ya tenemos.

Mirando la primer y tercer columna de la forma de Jordan:

- Consideramos un vector propio del subespacio asociado a 0 :  $v_1 = (1, -2, -2)$
- Consideramos un vector propio del subespacio asociado a 2 :  $v_3 = (1, 0, 0)$

Con esto, veamos que la forma de Jordan nos dice que:

$$T(v_2) = 2v_2 + v_3$$

O visto de otra forma:

$$(T - 2\mathbb{I})v_2 = v_3$$

Lo que nos deja con el siguiente sistema (usando la matriz asociada que obtuvimos al principio):

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2-2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-2 & 0 \end{array} \right)$$

De esto sacamos que:

- $z = 1$
- $-y = z$
- $x \in \mathbb{R}$

Por lo que consideramos el vector  $v_2 = (0, -1, 1)$  para completar la base de Jordan.