

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## CLASE 13 - 02/06/2025

### Descomposición QR

Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  tal que  $rg(A) = n$ . Entonces existen una matriz  $Q \in \mathcal{M}_{n \times n}$  que verifica  $Q^t Q = \mathbb{I}$  y una matriz triangular superior  $R \in \mathcal{M}_{n \times n}$  tal que:

$$A = QR$$

### Demostración

Sea  $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}$

Como  $rg(A) = n$  entonces  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  es LI, por tanto base de  $\mathbb{R}^n$ .

Usando el método de ortonormalización de Gram-Schmidt obtenemos una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_n\}$ .

Llamamos  $Q = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}$  y  $R = {}_{\mathcal{B}'}(\mathbb{I})_{\mathcal{B}}$  que es triangular superior.

Ahora resta probar que  $Q^t Q = \mathbb{I}$  y que  $A = QR$ , veamos ambas partes:

$$Q^t Q = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots \\ y_2 & \cdots \\ \vdots & \\ y_n & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Observemos que:

$$(Q^t Q)_{ij} = \langle y_i, y_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Donde: 1. El producto interno es el usual en  $\mathbb{R}^n$  2. La observación de los casos es porque la base  $\mathcal{B}'$  es ortonormal.

Con esto concluimos que  $Q^t Q = \mathbb{I}$ .

Ahora resta probar que  $A = QR$ . Lo cual es bastante tedioso por lo que no lo voy a escribir, pero con las primeras columnas se ve que es verdadero.

## Complemento ortogonal

Sea  $V$  espacio vectorial con producto interno,  $S \subset V$ . Definimos el complemento ortogonal de  $S$  como el conjunto de vectores  $S^\perp$  tal que:

$$S^\perp = \{v \in V \mid \forall s \in S : v \perp s\} = \{v \in V \mid \forall s \in S : \langle v, s \rangle = 0\}$$

Es decir que  $S^\perp$  es el conjunto de todos los vectores que son ortogonales a todos los vectores de  $S$ .

### Ejemplo

$V = \mathbb{R}^3$  con producto interno habitual.  $S = [(1, 0, 1)] = \{(\alpha, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

Decimos que:

$$\begin{aligned} v = (x, y, z) \in S^\perp &\iff \langle (x, y, z), (\alpha, 0, \alpha) \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\iff \alpha(x + z) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$S^\perp = \{(x, y, -x) : x, y \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, -1), (0, 1, 0)]$$

### Proposición

$S^\perp$  es un subespacio de  $V$ , sin importar si  $S$  no lo es.

#### Demostración

1.  $0 \in S^\perp$  pues  $\langle 0, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$
2.  $v, w \in S^\perp$ , veamos que  $\langle v + w, s \rangle = \langle v, s \rangle + \langle w, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$ . Entonces  $v + w \in S^\perp$
3.  $a \in \mathbb{K}, v \in S^\perp$ , entonces  $\langle av, s \rangle = a \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$ . Entonces  $av \in S^\perp$

### Proposición

Sea  $V$  espacio vectorial con producto interno. Sea  $S$  subespacio vectorial de dimensión finita, con base  $\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_r\}$ . Entonces  $v \in S^\perp \iff v \perp s_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, r$

## Demostración

( $\Rightarrow$ ) Evidente por definición de  $S^\perp$

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $v$  cumple que:  $\langle v, s_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r$  Consideramos  $s = a_1 s_1 + \dots + a_r s_r \in S$ . Entonces:

$$\langle v, s \rangle = \overline{a_1} \langle v, s_1 \rangle + \dots + \overline{a_r} \langle v, s_r \rangle = 0$$

Como no asumimos nada sobre  $s \in S$ , esto vale para cualquier vector  $s$ , lo que concluye la prueba.

## Ejemplo

$V = \mathbb{R}^3$  con producto interno habitual.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - z = 0\} = \{(x, y, 2x) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Consideremos la siguiente base  $\mathcal{B}$  de  $S$ :

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$$

Por lo tanto:

$$S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), (1, 0, 2) \rangle = 0 \text{ y } \langle (x, y, z), (0, 1, 0) \rangle = 0\}$$

De esto derivamos que:

1.  $x + 2z = 0$
2.  $y = 0$

Entonces:

$$S^\perp = \{(-2z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = [(-2, 0, 1)]$$