# Geometría y Álgebra Lineal 2

#### Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 6

## Consigna

- 1. En  $\mathbb{C}^3$  con producto interno habitual, sean v=(2,1+i,i) y w=(2-i,2,1+2i). Calcular:
  - $\langle v, w \rangle$ ,  $||v||^2$ ,  $||w||^2$ ,  $||v + w||^2$ .
  - Verificar Cauchy-Schwarz y desigualdad triangular.
- 2. En C[0,1] con  $\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ , sean f(t)=t y  $g(t)=e^t$ . Calcular:  $\langle f,g \rangle$ ,  $||f||^2$ ,  $||g||^2$ ,  $||f+g||^2$ .

  - Verificar Cauchy-Schwarz y desigualdad triangular.

### Resolución

#### Parte 1

Considerando el producto interno habitual en  $\mathbb{C}^n$ :

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}$$

Calculemos lo indicado en la letra:

- $\bullet \ \ \langle v,w\rangle = \langle (2,1+i,i), (2-i,2,1+2i)\rangle = 2\overline{(2-i)} + (1+i)\overline{2} + i\overline{(1+2i)} = 4+2i+2i+2i$ 2 + 2i + i + 2 = 8 + 5i
- $2i)\overline{(1+2i)} = 5 + +4 + 1 + 4 = 14$ •  $\|v+w\|^2 = \langle v,v \rangle + \langle v,w \rangle + \overline{\langle v,w \rangle} + \langle w,w \rangle = 7 + 8 + 5i + 8 - 5i + 14 = 37$

Verifiquemos las dos desigualdades que nos faltan:

#### Cauchy-Schwarz:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \iff |\langle v, w \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \iff |8 + 5i|^2 \leq 7 \cdot 14 \iff 8^2 + 5^2 \leq 98 \iff 89 \leq 98$$

Por lo tanto esto se cumple.

## Desigualdad triangular:

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \iff \sqrt{37} \leq \sqrt{7} + \sqrt{14} \iff \sqrt{37}^2 \leq (\sqrt{7} + \sqrt{14})^2 \iff 37 \leq 7 + 2\sqrt{7}\sqrt{14} + 14 \iff 16 \leq 37 \leq 7 + 2\sqrt{7}\sqrt{14} + 2\sqrt{7}\sqrt{14}$$

Cómo lo último se cumple, verificamos que la desigualdad triangular se cumple.