

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 5

### Consigna

Hallar la forma y una base de Jordan de los siguientes operadores:

1.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(x, y, z) = (-y - 2z, x + 3y + z, x + 3z)$
2.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(x, y, z) = (3x + 2y - 2z, 4y - z, y + 2z)$

### Resolución

#### Transformación 1

Considerando la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , calculemos la matriz asociada  ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$ :

- $T(1, 0, 0) = (0, 1, 1)$
- $T(0, 1, 0) = (-1, 3, 0)$
- $T(0, 0, 1) = (-2, 1, 3)$

Entonces:

$${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos el polinomio característico  $X_T(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} X_T(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)(3-\lambda)^2 + 0 - 1 - (-2(3-\lambda) + 0 - 1(3-\lambda)) \\ &= (-\lambda)(3-\lambda)^2 - 1 + 3(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)(-\lambda(3-\lambda) + 3) - 1 \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 3) - 1 \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \end{aligned}$$

## Recordatorio (teorema de raíces racionales)

Si un polinomio tiene raíces racionales, estas son de la forma  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  es un divisor del término independiente y  $q$  es un divisor del coeficiente del término de mayor grado.

## Continuación

Ahora que conocemos la forma de las raíces, podemos concluir que las raíces del polinomio de tercer grado anterior están incluidas en la lista:  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

Probemos con 2:

$$\begin{aligned} -(2)^3 + 6 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 &= -8 + 24 - 24 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como sabemos que 1 es raíz, podemos factorizar el polinomio con Ruffini:

|   |             |             |             |    |
|---|-------------|-------------|-------------|----|
|   | $\lambda^3$ | $\lambda^2$ | $\lambda^1$ | 1  |
|   | -1          | 6           | -12         | 8  |
| 2 | ↓           | -2          | 8           | -8 |
|   | -1          | 4           | -4          | 0  |

Por lo tanto, puedo expresar el polinomio de tercer grado como:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4)$$

Entonces tenemos  $\lambda_1 = 2$ , y ahora usando Bhaskara puedo obtener todas las demás raíces:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{-2} \\ &= \frac{-4 \pm 0}{-2} \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

- $\lambda = 2$ , con  $ma(2) = 3$

$S_2$

Tenemos que resolver el sistema  $(T - 2\mathbb{I})v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $y = 0$
- $x = -z$
- $z \in \mathbb{R}$

El subespacio asociado sería el definido por:

$$S_2 = \{(-\alpha, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Entonces una base de este subespacio podría ser:

$$\{(-1, 0, 1)\}$$

Por lo que  $mg(2) = 1$ , esto implica que  $T$  NO es diagonalizable, la forma de Jordan sería:

$$J_T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### BASE DE JORDAN

Por ahora entonces la base de Jordan que tenemos es  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, (-1, 0, 1)\}$ .

Para hallar  $v_2$ , tenemos que:

$$T(v_2) = 2v_2 + v_3(T - 2\mathbb{I})v_2 = v_3$$

Lo que nos deja con el siguiente sistema:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $y = -1$
- $x = \frac{-2+2z}{-2} = 1 - z$
- $z \in \mathbb{R}$

Con esto podemos elegir un vector, por ejemplo:

$$v_2 = (1, -1, 0)$$

Ahora tenemos que repetir el proceso para hallar  $v_1$ , tenemos que:

$$T(v_1) = 2v_1 + v_2(T - 2\mathbb{I})v_1 = v_2$$

Lo que nos deja con el siguiente sistema:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $y = -1$
- $x = -z$
- $z \in \mathbb{R}$

Con esto podemos elegir un vector, por ejemplo:

$$v_1 = (0, -1, 0)$$

Solo habría que verificar que los vectores son LI, por lo tanto, verifiquemos que el siguiente determinante sea diferente a 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(0 + 1) = 1$$

Con esto confirmamos que  $\mathcal{B} = \{(0, -1, 0), (1, -1, 0), (-1, 0, 1)\}$  es una base, y además es base de Jordan.

### VERIFICACIÓN:

Para estar seguros que esto es correcto, verifiquemos que se cumple lo siguiente:

- $T(0, -1, 0) = 2v_1 + v_2$
- $T(1, -1, 0) = 2v_2 + v_3$
- $T(-1, 0, 1) = 2v_3$

Con la definición de la transformación tenemos:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(x, y, z) = (-y - 2z, x + 3y + z, x + 3z)$$

- $T(0, -1, 0) = (1, -3, 0)$
- $T(1, -1, 0) = (1, -2, 1)$
- $T(-1, 0, 1) = (-2, 0, 2)$

Igualamos con los puntos de arriba:

- $T(0, -1, 0) = (1, -3, 0) = 2(0, -1, 0) + (1, -1, 0)$  ■
- $T(1, -1, 0) = (1, -2, 1) = 2(1, -1, 0) + (-1, 0, 1)$  ■
- $T(-1, 0, 1) = (-2, 0, 2) = 2(-1, 0, 1)$  ■

Por lo tanto,  $\mathcal{B}$  es efectivamente una base de Jordan

## Transformación 2

Considerando la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , calculemos la matriz asociada  $_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$ :

- $T(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$
- $T(0, 1, 0) = (2, 4, 1)$
- $T(0, 0, 1) = (-2, -1, 2)$

Entonces:

$${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos el polinomio característico  $X_T(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} X_T(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)((4-\lambda)(2-\lambda) + 1) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 \end{aligned}$$

### Recordatorio (teorema de raíces racionales)

Si un polinomio tiene raíces racionales, estas son de la forma  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  es un divisor del término independiente y  $q$  es un divisor del coeficiente del término de mayor grado.

### Continuación

Ahora que conocemos la forma de las raíces, podemos concluir que las raíces del polinomio de tercer grado anterior están incluidas en la lista:  $\{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27\}$

Probemos con 3:

$$\begin{aligned} -(3)^3 + 9 \cdot (3)^2 - 27 \cdot 3 + 27 &= -27 + 81 - 81 + 27 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como sabemos que 3 es raíz, podemos factorizar el polinomio con Ruffini:

|     |              |             |             |       |
|-----|--------------|-------------|-------------|-------|
|     | $\lambda^3$  | $\lambda^2$ | $\lambda^1$ | $1$   |
|     | $-1$         | $9$         | $-27$       | $27$  |
| $3$ | $\downarrow$ | $-3$        | $18$        | $-27$ |
|     | $-1$         | $6$         | $-9$        | $0$   |

Por lo tanto, puedo expresar el polinomio de tercer grado como:

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 = (\lambda - 3)(-\lambda^2 + 6\lambda - 9)$$

Entonces tenemos  $\lambda_1 = 3$ , y ahora usando Bhaskara puedo obtener todas las demás raíces:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2} \\ &= \frac{-6 \pm 0}{-2} \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

- $\lambda = 3$ , con  $ma(3) = 3$

$S_3$

Tenemos que resolver el sistema  $(T - 3\mathbb{I})v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $z = y$
- $x \in \mathbb{R}$
- $z \in \mathbb{R}$

El subespacio asociado sería el definido por:

$$S_3 = \{(\alpha, \beta, \beta) \in \mathbb{R}^3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Entonces una base de este subespacio podría ser:

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$$

Por lo que  $mg(2) = 2$ , esto implica que  $T$  NO es diagonalizable, la forma de Jordan sería:

$$J_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

## BASE DE JORDAN

Por ahora entonces la base de Jordan que tenemos es  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), v_2, (0, 1, 1)\}$ .

Para hallar  $v_2$ , tenemos que:

$$T(v_2) = 3v_2 + v_3(T - 3\mathbb{I})v_2 = v_3$$

Lo que nos deja con el siguiente sistema:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Ojo, tenemos que el sistema es incompatible, por lo que tenemos que elegir un vector  $v_3 \in S_3$  que permita que este sistema sea compatible para encontrar la base, por ejemplo:  $v_3 = (2, 1, 1) \in S_3$ . Entonces el sistema nos queda:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

De donde sacamos:

- $y = 1 + z$
- $z \in \mathbb{R}$
- $x \in \mathbb{R}$

Con esto podemos elegir un vector, por ejemplo:

$$v_2 = (0, 1, 0)$$

Solo habría que verificar que los vectores de la base  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$  son LI, por lo tanto, verifiquemos que el siguiente determinante sea diferente a 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - 0) = 1$$

Con esto confirmamos que  $\mathcal{B}$  es una base, y además es base de Jordan.

### VERIFICACIÓN:

Para estar seguros que esto es correcto, verifiquemos que se cumple lo siguiente:

- $T(1, 0, 0) = 3v_1$
- $T(0, 1, 0) = 3v_2 + v_3$
- $T(2, 1, 1) = 3v_3$

Con la definición de la transformación tenemos:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(x, y, z) = (3x + 2y - 2z, 4y - z, y + 2z)$$

- $T(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$
- $T(0, 1, 0) = (2, 4, 1)$
- $T(2, 1, 1) = (6, 3, 3)$

Igualamos con los puntos de arriba:

- $T(1, 0, 0) = (3, 0, 0) = 3(1, 0, 0) \quad \blacksquare$
- $T(0, 1, 0) = (2, 4, 1) = 3(0, 1, 0) + (2, 1, 1) \quad \blacksquare$
- $T(2, 1, 1) = (6, 3, 3) = 3(2, 1, 1) \quad \blacksquare$

Por lo tanto,  $\mathcal{B}$  es efectivamente una base de Jordan