Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 6

Consigna

Se considera el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto interno definido por:
- $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, y el subespacio S generado por el vector $(1, 1, 1)$. Hallar una base ortogonal de $S^\perp$.

Opciones:

1. $\{(3, -4, 1), (1, 1, -2)\}$
2. $\{(1, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$
3. $\{(0, 1, -1), (-1, 1, 1)\}$
4. $\{(2, -1, -1), (0, 1, -1)\}$
5. $\{(-1, 0, 2), (2, -5, 1)\}$

Resolución

La mejor forma de resolver este ejercicio es comprobando que las bases cumplan las propiedades que tienen que cumplir:

Opción 1

Queremos verificar que:

- $\langle (3, -4, 1), (1, 1, 1) \rangle = 0$
- $\langle (1, 1, -2), (1, 1, 1) \rangle = 0$
- $\langle (3, -4, 1), (1, 1, -2) \rangle = 0$

Si alguno de estos no se cumple, entonces no será una base ortogonal válida para $S^\perp$:

- $\langle (3, -4, 1), (1, 1, 1) \rangle = 6 - 4 + 1 = 3 \neq 0$

Entonces, esta opción no es válida.

Opción 2

Queremos verificar que:

- $\langle (1,0,1),(1,1,1)\rangle = 0$
- $\langle (-1,0,1),(1,1,1)\rangle = 0$
- $\langle (1,0,1),(-1,0,1)\rangle = 0$

Si alguno de estos no se cumple, entonces no será una base ortogonal válida para $S^{\perp}$:

- $\langle (1,0,1),(1,1,1)\rangle = 2+0+1 = 3 \neq 0$

Entonces, esta opción no es válida.

Opción 3

Queremos verificar que:

- $\langle (0,1,-1),(1,1,1)\rangle = 0$
- $\langle (-1,1,1),(1,1,1)\rangle = 0$
- $\langle (0,1,-1),(-1,1,1)\rangle = 0$

Si alguno de estos no se cumple, entonces no será una base ortogonal válida para $S^{\perp}$:

- $\langle (0,1,-1),(1,1,1)\rangle = 0+1-1 = 0$
- $\langle (-1,1,1),(1,1,1)\rangle = -2+1+1 = 0$
- $\langle (0,1,-1),(-1,1,1)\rangle = 0+1-1 = 0$

Esta opción es la correcta, pues ambos sus vectores son ortogonales a todos los vectores de S, además la base es ortogonal pues los vectores que la componen son ortogonales entre si. A pesar de esto seguimos validando las demás opciones como práctica.

Opción 4

Queremos verificar que:

- $\langle (2,-1,-1),(1,1,1)\rangle = 0$
- $\langle (0,1,-1),(1,1,1)\rangle = 0$
- $\langle (2,-1,-1),(0,1,-1)\rangle = 0$

Si alguno de estos no se cumple, entonces no será una base ortogonal válida para $S^{\perp}$:

- $\langle (2,-1,-1),(1,1,1)\rangle = 4-1-1 = 2 \neq 0$

Entonces, esta opción no es válida.

Opción 5

Queremos verificar que:

- $\langle (-1,0,2),(1,1,1)\rangle = 0$
- $\langle (2,-5,1),(1,1,1)\rangle = 0$
- $\langle (-1,0,2),(2,-5,1)\rangle = 0$

Si alguno de estos no se cumple, entonces no será una base ortogonal válida para $S^{\perp}$:

- $\langle (-1,0,2),(1,1,1)\rangle = -2+0+2 = 0$
- $\langle (2,-5,1),(1,1,1)\rangle = 4-5+1 = 0$
- $\langle (-1,0,2),(2,-5,1)\rangle = -4+0+2 = -2 \neq 0$

Entonces, esta opción no es válida.