

## Ejercicio 9

### Consigna

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar los valores reales de  $a$  y  $b$  para que la matriz sea diagonalizable.

### Resolución

**Matriz  $A$**

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Hallamos el polinomio característico:

$$X_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & a-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando el determinante por el método de Sarrus:

$$\begin{aligned} X_T(\lambda) &= ((a-\lambda)^3 - 2 + 2) - (-(a-\lambda) + 2(a-\lambda) + 2(a-\lambda)) \\ &= (a-\lambda)^3 - 3(a-\lambda) \\ &= (a-\lambda)((a-\lambda)^2 - 3) \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = a$  (primer polinomio)
- $\lambda_2 = a + \sqrt{3}$  (segundo polinomio)
- $\lambda_3 = a - \sqrt{3}$  (segundo polinomio)

Como estamos trabajando en un espacio de dimensión 3, y tenemos tres valores propios distintos, sabemos que  $T$  es diagonalizable  $\forall a \in \mathbb{R}$ , porque se cumplirá para todo  $\lambda$  valor propio de  $A$  que:

$$1 = mg(\lambda) = ma(\lambda)$$

**Matriz  $B$**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos el polinomio característico:

$$X_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -2-a \\ 0 & 1-\lambda & a \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollemos por la primer columna:

$$X_A(\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 0) = (1-\lambda)^3$$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = 1$  que es raíz triple  $\rightarrow ma(\lambda) = 3$

**Subespacio  $S_1$**  Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones  $(B - 1\mathbb{I})v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -2-a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Observemos que estamos buscando que la matriz tenga todas las filas con ceros, que sería la única forma de que  $B$  sea diagonalizable ya que  $ma(1) = 3$ .

Pero esto es imposible, ya que la primera no podría ser una fila solo de ceros para cualquier valor de  $a \in \mathbb{R}$

Esto nos da que como mucho, para  $a = 0$ ,  $mg(1) = 2$  que no es suficiente para volver a  $B$  diagonalizable.

Concluyendo,  $B$  no es diagonalizable  $\forall a \in \mathbb{R}$

**Matriz  $C$**

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos el polinomio característico:

$$X_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ a & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollemos por la segunda fila:

$$X_C(\lambda) = (b-\lambda)(\lambda^2 - a)$$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = b$
- $\lambda_2 = \sqrt{a}$
- $\lambda_3 = -\sqrt{a}$

En este punto, tenemos varios factores que considerar. Primero:

- $0 \leq a$  porque estamos trabajando en un espacio de cuerpo  $\mathbb{R}$
- ¿Qué pasa si  $b = \sqrt{a}$  o  $b = -\sqrt{a}$ ?
- ¿Qué pasa si  $a = 0$ ?

Esto es muy importante, porque a priori no tenemos 3 valores propios diferentes en todos los casos.

**Caso**  $b = \sqrt{a}$  o  $b = -\sqrt{a}$  Estudiaremos este caso con  $a \neq 0$ , consideraremos ese problema en la siguiente sección.

**Subcaso**  $b = \sqrt{a}$  En este caso tenemos que  $ma(\sqrt{a}) = 2$ , veamos que podemos decir sobre su subespacio propio  $S_{\sqrt{a}}$

Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones  $(C - \sqrt{a}I)v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -\sqrt{a} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b - \sqrt{a} & 0 & 0 \\ a & 0 & -\sqrt{a} & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -\sqrt{a} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b - \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Las operaciones realizadas en orden son:

- $F_3 = F_3 + \sqrt{a}F_1$

De esto podemos sacar que:

- $z = \sqrt{a}x$

Y nada más, usando que  $b = \sqrt{a}$  entonces la entrada 2, 2 de la matriz es 0

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a  $\lambda = \sqrt{a}$  es:

$$S_{\sqrt{a}} = \{(\alpha, \beta, \sqrt{a}\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(1, 0, \sqrt{a}), (0, 1, 0)\}$$

Entonces  $mg(\sqrt{a}) = ma(\sqrt{a}) = 2$ , por lo que en este caso  $C$  es diagonalizable

Observemos que el caso  $b = -\sqrt{a}$  es completamente análogo. Por lo que estos casos no imponen ninguna limitación sobre  $a, b$

**Caso  $a = 0$**  Si  $a = 0$ , tenemos que como mínimo  $ma(0) = 2$

Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones  $(C)v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se observa fácilmente que a priori esto tiene  $mg(0) = 1 (y = 0, z = 0)$ , a menos que  $b = 0$  pero si ocurre esto, entonces  $ma(0) = 3$ , pero la multiplicidad geométrica sería dos como máximo.

Entonces si  $a = 0$ ,  $C$  NO es diagonalizable.

**Conclusión** Concluimos que  $C$  es diagonalizable sii:

- $b \in \mathbb{R}$  y,
- $0 < a \mid a \in \mathbb{R}$