Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 14

Consigna

En $V = \mathbb{R}_2[t]$ con $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$, aplicar **Gram-Schmidt** a la base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ para obtener una base ortonormal.

Resolución

Consideramos los vectores de la base dados de la siguiente forma:

- $v_1 = 1$
- $v_2 = t$
- $v_3 = t^2$

Queremos encontrar vectores $\{w_1, w_2, w_3\}$ tal que:

- $[w_1, w_2, w_3] = [v_1, v_2, v_3]$

Empezamos tomando $w_1 = v_1 = 1$, a partir de esto definimos w_2 de la siguiente forma:

$$w_2 = t - \frac{\langle t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1$$

Cálculemos los productos internos que necesitamos:

- $\langle t, 1\rangle = \int_{-1}^{1} tdt = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$
- $\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1dt = 1 - (-1) = 2$

Entonces $w_2 = t$.

Ahora para hallar w_3 hacemos lo mismo:

$$w_3 = t^2 - \frac{\langle t^2, t\rangle}{\langle t, t\rangle}t - \frac{\langle t^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1$$

Cálculemos los productos internos que necesitamos:

- $\langle t^2, t\rangle = \int_{-1}^{1} t^3dt = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$
- $\langle t, t\rangle = \int_{-1}^{1} t^2dt = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$

- $\langle t^2, 1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$

Entonces:

$$\begin{aligned} w_3 &= t^2 - \frac{1}{3} \cdot 1 \\ &= t^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ahora restaría normalizar los vectores, para lo que nos faltaría solo calcular la siguiente norma al cuadrado:

$$\begin{aligned} \left\langle t^2 - \frac{1}{3}, t^2 - \frac{1}{3} \right\rangle &= \int_{-1}^{1} t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9} = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{9} + \frac{1}{9}t \right) \Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{4}{45} + \frac{4}{45} \\ &= \frac{8}{45} \end{aligned}$$

Considerando $[u_1, u_2, u_3]$ como el resultado al que queremos llegar, tenemos que:

- $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$
- $u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$
- $u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$

Usando lo obtenido hasta ahora entonces:

- $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $u_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}t = \frac{\sqrt{6}}{2}t$
- $u_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}(t^2 - \frac{1}{3}) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(t^2 - \frac{1}{3}) = \frac{3\sqrt{10}}{4}(t^2 - \frac{1}{3})$

Por lo que la base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$ que obtuvimos es:

- $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2}t, \frac{3\sqrt{10}}{4}(t^2 - \frac{1}{3})\}$