Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 9

Consigna

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar los valores reales de a y b para que la matriz sea diagonalizable.

Resolución

Matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Hallamos el polinomio característico:

$$\mathrm{X}_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & a-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando el determinante por el método de Sarrus:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_T(\lambda) &= ((a-\lambda)^3 - 2 + 2) - (-(a-\lambda) + 2(a-\lambda) + 2(a-\lambda)) \\ &= (a-\lambda)^3 - 3(a-\lambda) \\ &= (a-\lambda)((a-\lambda)^2 - 3) \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = a$ (primer polinomio)
- $\lambda_2 = a + \sqrt{3}$ (segundo polinomio)
- $\lambda_3 = a - \sqrt{3}$ (segundo polinomio)

Como estamos trabajando en un espacio de dimensión 3, y tenemos tres valores propios distintos, sabemos que T es diagonalizable $\forall a \in \mathbb{R}$, porque se cumplirá para todo λ valor propio de A que:

$$1 = mg(\lambda) = ma(\lambda)$$

Matriz B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos el polinomio característico:

$$\mathrm{X}_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -2-a \\ 0 & 1-\lambda & a \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollemos por la primer columna:

$$\mathrm{X}_A(\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 0) = (1-\lambda)^3$$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = 1$ que es raíz triple $\to ma(\lambda) = 3$

Subespacio S_1

Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(B - 1\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -2-a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observemos que estamos buscando que la matriz tenga todas las filas con ceros, que sería la única forma de que B sea diagonalizable ya que $ma(1) = 3$.

Pero esto es imposible, ya que la primera no podría ser una fila solo de ceros para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$

Esto nos da que como mucho, para $a = 0$, $mg(1) = 2$ que no es suficiente para volver a B diagonalizable.

Concluyendo, B no es diagonalizable $\forall a \in \mathbb{R}$

Matriz C

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos el polinomio característico:

$$\mathrm{X}_C(\lambda) = det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ a & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollemos por la segunda fila:

$$\mathrm{X}_C(\lambda) = (b-\lambda)(\lambda^2 - a)$$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = b$
- $\lambda_2 = \sqrt{a}$
- $\lambda_3 = -\sqrt{a}$

En este punto, tenemos varios factores que considerar. Primero:

- $0 \leq a$ porque estamos trabajando en un espacio de cuerpo $\mathbb{R}$
- ¿Qué pasa si $b = \sqrt{a}$ o $b = -\sqrt{a}$?
- ¿Qué pasa si $a = 0$?

Esto es muy importante, porque a priori no tenemos 3 valores propios diferentes en todos los casos.

Caso $b = \sqrt{a}$ o $b = -\sqrt{a}$

Estudiaremos este caso con $a \neq 0$, consideraremos ese problema en la siguiente sección.

Subcaso $b = \sqrt{a}$

En este caso tenemos que $ma(\sqrt{a}) = 2$, veamos que podemos decir sobre su subespacio propio $S_{\sqrt{a}}$

Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(C - \sqrt{a}\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{a} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b-\sqrt{a} & 0 & 0 \\ a & 0 & -\sqrt{a} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{a} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b-\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las operaciones realizadas en orden son:

- $F_3 = F_3 + \sqrt{a}F_1$

De esto podemos sacar que:

- $z = \sqrt{a}x$

Y nada más, usando que $b = \sqrt{a}$ entonces la entrada $2, 2$ de la matriz es 0

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda = \sqrt{a}$ es:

$$S_{\sqrt{a}} = \{(\alpha, \beta, \sqrt{a}\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(1, 0, \sqrt{a}), (0, 1, 0)\}$$

Entonces $mg(\sqrt{a}) = ma(\sqrt{a}) = 2$, por lo que en este caso C es diagonalizable

Observemos que el caso $b = -\sqrt{a}$ es completamente análogo. Por lo que estos casos no imponen ninguna limitación sobre a, b

Caso $a = 0$

Si $a = 0$, tenemos que como mínimo $ma(0) = 2$

Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(C)v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se observa fácilmente que a priori esto tiene $mg(0) = 1 (y = 0, z = 0)$, a menos que $b = 0$ pero si ocurre esto, entonces $ma(0) = 3$, pero la multiplicidad geométrica sería dos como máximo.

Entonces si $a = 0$, C NO es diagonalizable.

Conclusión

Concluimos que C es diagonalizable sii:

- $b \in \mathbb{R}$ y,
- $0 < a \mid a \in \mathbb{R}$