

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## CLASE 8 - 07/04/2025

### Forma canónica de Jordan

#### Vectores propios generalizados

Sea  $T : V \rightarrow V$  con  $\dim(V) = n$  y un valor propio  $\lambda_0$ .

Podemos decir que:

$$S_{\lambda_0}^{(1)} = \{v \in V \mid (T - \lambda_0 \mathbb{I})v = \vec{0}\}$$

Es el subespacio propio de  $\lambda_0$ , donde sus vectores son los que conocemos como vectores propios.

Consideremos los siguientes subespacios:

$$S_{\lambda_0}^{(2)} = \{v \in V \mid (T - \lambda_0 \mathbb{I})^2 v = \vec{0}\}$$

$$S_{\lambda_0}^{(3)} = \{v \in V \mid (T - \lambda_0 \mathbb{I})^3 v = \vec{0}\}$$

Y así sucesivamente. Observemos que el cada uno de ellos está contenido en el siguiente. Todos los vectores que pertenezcan a alguno de los que tiene grado mayor a 1 se llaman vectores propios generalizados.

Se puede probar que eventualmente llegaremos a un subespacio  $S_{\lambda_0}^{(m_0)}$  tal que dejaremos de aumentar “el tamaño” y todos los subespacios siguientes serán iguales a este último. Para este valor se cumple lo siguiente:

- $m_0 \leq ma(\lambda_0)$
- $\dim(S_{\lambda_0}^{(m_0)}) = ma(\lambda_0)$
- Si  $v \in S_{\lambda_0}^{(k)}$  entonces  $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v \in S_{\lambda_0}^{(k-1)}$
- Si  $v \in S_{\lambda_0}^{(k)} - S_{\lambda_0}^{(k-1)}$  entonces  $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v \in S_{\lambda_0}^{(k-1)} - S_{\lambda_0}^{(k-2)}$

Veamos un ejemplo para entender la intuición de lo que vamos a hacer con las formas de Jordan.

## Ejemplo

Supongamos que tenemos los siguientes subespacios que cumplen las siguientes propiedades para  $\lambda_0$ .

- $\dim(S_{\lambda_0}^{(1)}) = 3$
- $\dim(S_{\lambda_0}^{(2)}) = 5$
- $\dim(S_{\lambda_0}^{(3)}) = 6 = ma(\lambda_0)$

Como  $\dim(S_{\lambda_0}^{(3)}) = \dim(S_{\lambda_0}^{(2)}) + 1$  elijo  $v_1 \in S_{\lambda_0}^{(3)} - S_{\lambda_0}^{(2)}$

A partir de  $v_1$ , podemos elegir  $v_2$  de la siguiente forma:

- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_1 = v_2$

Observemos que  $v_2 \in S_{\lambda_0}^{(2)} - S_{\lambda_0}^{(1)}$ , con el mismo razonamiento elegimos  $v_3$ .

- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_2 = v_3 \in S_{\lambda_0}^{(1)}$

Es decir que  $v_3$  es valor propio asociado a  $\lambda_0$ .

Ahora, como  $\dim(S_{\lambda_0}^{(2)}) = \dim(S_{\lambda_0}^{(1)}) + 2$  elijo  $v_4 \in S_{\lambda_0}^{(2)} - S_{\lambda_0}^{(1)}$ . Con esto puedo elegir  $v_5$  usando el mismo razonamiento anterior:

- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_4 = v_5 \in S_{\lambda_0}^{(1)}$

Es decir que  $v_5$  es valor propio asociado a  $\lambda_0$ .

Y nos restaría elegir un vector, el cual podemos elegir en  $S_{\lambda_0}^{(1)}$ , lo llamamos  $v_6$ .

**IDEA:** Queremos elegir la máxima cantidad de vectores por cada subespacio, y lo hacemos partiendo el más grande, y usando las propiedades descritas anteriormente para construirnos vectores en los subespacios más pequeños.

Esta construcción proporciona  $m = ma(\lambda_0)$  vectores linealmente independientes que conforman una base de  $S_{\lambda_0}^{(3)}$ .

Considerando la base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ , tenemos que:

- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_1 = v_2 \Rightarrow T(v_1) = \lambda_0 v_1 + v_2$
- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_2 = v_3 \Rightarrow T(v_2) = \lambda_0 v_2 + v_3$
- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_3 = 0 \Rightarrow T(v_3) = \lambda_0 v_3$
- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_4 = v_5 \Rightarrow T(v_4) = \lambda_0 v_4 + v_5$
- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_5 = 0 \Rightarrow T(v_5) = \lambda_0 v_5$
- $(T - \lambda_0 \mathbb{I})v_6 = 0 \Rightarrow T(v_6) = \lambda_0 v_6$

Con esto podemos restringir  $T$  a este subespacio, quedandonos la siguiente matriz asociada:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Llamamos a esta matriz el bloque de Jordan asociado a  $\lambda_0$

Esto se construye con los subbloques de Jordan, que en esta matriz son los siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$C = (\lambda_0)$$

Entonces estos subbloques son aquellos con el valor propio en la diagonal, y 1s por debajo de la diagonal.

### Subespacios invariantes (definición)

Sea  $T : V \rightarrow V$ . Decimos que un subespacio  $W \subset V$  es invariante con respecto a  $T$  si  $T(W) \subset W$ , es decir que calculamos  $T$  de cualquier vector de  $W$ , nos mantenemos en  $W$ .

### Proposición

Sea  $T : V \rightarrow V$ ,  $\dim(V) = n$ ,  $W \subset V$  subespacio invariante. Existe una base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

Donde  $A$  y  $C$  son dos matrices cuadradas, y  $0$  una matriz con todos sus elementos iguales a 0.

### Demostración

Supongamos que  $\dim(W) = m$ , consideramos una base de  $W$  y la completamos hasta obtener una base de  $V$ .

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$  base de  $V$

Como  $W$  es invariante, para todo vector  $v_i \in \mathcal{B}$  tenemos que  $T(v_i)$  es combinación lineal de los vectores de la base de  $W$ , entonces nos podemos construir la matriz deseada:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

Donde:

- $A \in \mathcal{M}_{m \times m}$
- $B \in \mathcal{M}_{n-m \times m}$
- $0 \in \mathcal{M}_{m \times n-m}$
- $C \in \mathcal{M}_{n-m \times n-m}$