Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 2 - 17/02/2025

Matrices semejantes

Aplicaciones

1. La definición de matriz semejante es muy útil a la hora de calcular potencias; sean A, B dos matrices semejantes, entonces:
   - $B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$

   En general:
   - $B^n = P^{-1}A^nP \quad \forall n \geq 1$

   Esto puede ser útil cuando tenemos que alguna de las dos matrices A, B tiene una forma más sencilla de elevar (por ejemplo que alguna sea diagonal)

Teorema

Sea $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$; decimos que A, B son semejantes sii:

$\exists T : V \to V$; con $dim(V) = n$ y bases $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tales que:

$$A = {}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} \quad B = {}_{\mathcal{C}'}(T)_{\mathcal{C}'}$$

Demostración

En el libro rojo

Teorema

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son matrices semejantes. Entonces:

1. $rg(A) = rg(B)$
2. $tr(A) = tr(B)$
3. $det(A) = det(B)$

Demostración

PARTE 1

Por el anterior teorema, como A, B son semejantes, entonces: $\exists T : V \to V$ y bases C, C' tal que: $A = {}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}$ y $B = {}_{\mathcal{C}'}(T)_{\mathcal{C}'}$

Entonces:

- $rg(A) = rg\left({}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}\right) = dim(Im(T))$
- $rg(B) = rg\left({}_{\mathcal{C}'}(T)_{\mathcal{C}'}\right) = dim(Im(T))$

Por lo tanto:

$\Rightarrow rg(A) = rg(B)$

PARTE 2

Recordatorio: 1. La traza es la suma de los elementos de la diagonal de la matriz 2. $tr(AB) = tr(BA)$

Veamos que:

$$tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(AP^{-1}P) = tr(A)$$

PARTE 3:

Recordatorio: $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$

Entonces:

$$det(B) = det(P^{-1}AP) = det(P^{-1}) \cdot det(A) \cdot det(P) = det(A)$$

Observación

El reciproco NO es cierto, veamos un ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Veamos que:

- $rg(A) = rg(B)$
- $tr(A) = tr(B)$
- $det(A) = det(B)$

Supongamos que SI son semejantes, es decir que: $\exists P$ tal que:

$$B = P^{-1}AP = (I)$$

Pero $B \neq (I)$, entonces esto es absurdo.

Valores y vectores propios

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} \mid (\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$ y una transformación lineal $T : V \to V$. Decimos que un vector $v \in V, v \neq \vec{0}$ es **vector propio** de T si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que:

$$T(v) = \lambda v$$

Decimos que v es un vector propio asociado al valor propio λ

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-2x + y, 6x - y)$. Veamos que se cumple que:

- $T(1, 3) = (1, 3)$
- $T(1, -2) = (-4, 8) = (-4)(1, -2)$

Entonces:

- $(1, 3)$ es **vep** de T asociado a $\lambda = 1$
- $(1, -2)$ es **vep** de T asociado a $\lambda = -4$

Definición (subespacio propio)

Sea $T : V \to V$ un operador líneal, con λ un valor propio de T. Se define el subespacio propio asociado a λ de la siguiente forma:

$$S_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

Proposición

S_λ es un subespacio vectorial de V

Demostración

- $\vec{0} \in S_\lambda \quad (S_\lambda \neq \emptyset)$
- Si $v \in S_\lambda, \alpha \in \mathbb{K}$ entonces $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha\lambda v = \lambda(\alpha v)$. Entonces $\alpha v \in S_\lambda$
- Si $v, w \in S_\lambda$ entonces: $T(v + w) = T(v) + T(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w)$. Entonces $(v + w) \in S_\lambda$

Entonces S_λ es un subespacio vectorial de V

Observación

$S_\lambda = Ker(T - \lambda\mathbb{I})$

Demostración

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& v \in S_\lambda \iff \\
& T(v) = \lambda v \iff \\
& T(v) - \lambda v = 0 \iff \\
& (T - \lambda \mathbb{I})(v) = 0 \iff \\
& v \in Ker(T - \lambda \mathbb{I})
\end{aligned}
$$