

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 1

### Consigna

Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, y  $T : V \rightarrow V$  el operador dado por:

$$T(v) = \langle v, u_0 \rangle \cdot u_1$$

donde  $u_0$  y  $u_1$  son vectores fijos y no nulos de  $V$ .

1. Hallar  $T^*$
2. ¿Qué condiciones deben cumplir  $u_0$  y  $u_1$  para que  $T$  sea autoadjunto?

### Resolución

#### Parte 1

Veamos el siguiente razonamiento

$$\begin{aligned} & \langle T(v), w \rangle \\ &= (\text{definición de } T) \\ & \langle \langle v, u_0 \rangle u_1, w \rangle \\ &= (\text{propiedades del producto interno}) \\ & \langle v, u_0 \rangle \langle u_1, w \rangle \\ &= (\text{propiedades del producto interno y } V \text{ es real}) \\ & \langle v, \langle u_1, w \rangle u_0 \rangle \\ &= (\text{definición de adjunta}) \\ & \langle v, T^*(w) \rangle \end{aligned}$$

Por lo que tenemos que  $T^*(w) = \langle u_1, w \rangle u_0$

#### Parte 2

Para que  $T$  sea autoadjunto, tenemos que tener que:

- $T(v) = \langle v, u_0 \rangle u_1 = \langle u_1, w \rangle u_0 = T^*(w)$

Entonces, se tiene que cumplir lo siguiente:

- $\langle v, u_0 \rangle u_1 = \langle u_1, w \rangle u_0$

Lo que implica que  $u_1$  y  $u_2$  tienen que ser colineales. Veamos que pasa si  $u_1 = ku_0$  con  $k \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
 & T(w) \\
 & = (\text{definición de } T^*) \\
 & \langle u_1, w \rangle u_0 \\
 & = (u_1 = ku_0) \\
 & \langle ku_0, w \rangle u_0 \\
 & = (\text{propiedades del producto interno}) \\
 & \langle u_0, w \rangle ku_0 \\
 & = (u_1 = ku_0) \\
 & \langle u_0, w \rangle u_1 \\
 & = (\text{como } V \text{ es real}) \\
 & \langle w, u_0 \rangle u_1 \\
 & = (\text{definición de } T) \\
 & T(w)
 \end{aligned}$$

Por lo que si  $u_1$  y  $u_2$  son colineales, entonces  $T$  es autoadjunta.