Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

1. Se considera en $\mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual el subespacio $S = [(i, 0, 1)]$.
   Hallar una base del subespacio $S^{\perp}$.
2. En $\mathbb{R}^3$, se considera el subespacio $S = [(1, 2, 1)]$.
   Calcular $S^{\perp}$ con:
   1. el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$
   2. el producto interno definido por:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1$$

Resolución

Parte 1

Definimos los conjuntos S y $S^{\perp}$ como los siguientes:

- $S = \{(\alpha i, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}$
- $S^{\perp} = \{v \in \mathbb{C}^3 : \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$

Por lo tanto, veamos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
&\langle v, s \rangle = 0 \\
&\iff \text{(ampliando los vectores)} \\
&\langle (x, y, z), (\alpha i, 0, \alpha) \rangle = 0 \\
&\iff \text{(cálculo del producto interno)} \\
&x\overline{\alpha i} + 0 + z\overline{\alpha} = 0 \\
&\iff \text{(simplificando)} \\
&\alpha(-xi + z) = 0
\end{aligned}$$

Esto último es cierto para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ solo si:

- $z = xi$

- $y \in \mathbb{C}$
- $x \in \mathbb{C}$

Entonces, tenemos que:

$$S^{\perp} = \{(\alpha, \beta, \alpha i) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\} \mathcal{B}^{S^{\perp}} = \{(1, 0, i), (0, 1, 0)\}$$

Parte 2

Definimos los conjuntos S y $S^{\perp}$ como los siguientes:

- $S = \{(\alpha, 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$
- $S^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$

Subparte 1

Por lo tanto, veamos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
&\langle v, s \rangle = 0 \\
&\iff \text{(ampliando los vectores)} \\
&\langle (x, y, z), (\alpha, 2\alpha, \alpha) \rangle \\
&\iff \text{(cálculo del producto interno)} \\
&\alpha(x + 2y + z) = 0
\end{aligned}$$

Esto último es cierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ solo si:

- $z = -x - 2y$
- $y \in \mathbb{R}$
- $x \in \mathbb{R}$

Entonces tenemos que:

$$S^{\perp} = \{(\alpha, \beta, -\alpha - 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \mathcal{B}^{S^{\perp}} = \{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$$

Subparte 2

Para esta parte consideramos el siguiente producto interno:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Por lo tanto, veamos el siguiente razonamiento:

$$
\begin{aligned}
&\langle v, s\rangle = 0\\
&\iff \text{(ampliando los vectores)}\\
&\langle (x, y, z), (\alpha, 2\alpha, \alpha)\rangle\\
&\iff \text{(cálculo del producto interno)}\\
&x\alpha + 2y2\alpha + z\alpha - x2\alpha - y\alpha = 0\\
&\iff \text{(simplificando)}\\
&\alpha(x + 4y + z - 2x - y) = 0\\
&\iff \text{(simplificando)}\\
&\alpha(-x + 3y + z) = 0
\end{aligned}
$$

Esto último es cierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ solo si:

- $x = 3y + z$
- $y \in \mathbb{R}$
- $z \in \mathbb{R}$

Entonces tenemos que:

$$S^{\perp} = \{(3\alpha + \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\mathcal{B}^{S^{\perp}} = \{(3, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$