Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 12 - 15/04/2025

Método de Ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea V un espacio vectorial con producto interno, $dim(V) = n$. Dada una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V, existe una base **ortonormal** $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_n\}$ de V, que además cumple:

- $[v_1, \dots, v_k] = [y_1, \dots, y_k] \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$

Demostración

Primero debemos hallar una base ortogonal $\{w_1, \dots, w_n\}$ que cumpla:

- $[w_1, \dots, w_k] = [y_1, \dots, y_k] \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$

Luego bastará con normalizar dicha base.

Veamos como elegir vectores de forma apropiada para cumplir con lo que necesitamos.

1. Para seleccionar w_1 tenemos la forma trivial que sería seleccionar $w_1 = v_1$, de esta forma cumplimos con que $[w_1] = [v_1]$. Por ahora no necesitamos más que cumplir con esa condición.
2. Selecciono w_2 como combinación lineal de v_1, v_2 de la siguiente forma:

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

   1. En primer lugar, tenemos que $[w_1, w_2] = [v_1, v_2]$, esto porque estamos eligiendo w_2 específicamente para que esto se cumpla.
   2. $w_2 \neq 0$, pues es la combinación lineal de dos vectores que son LI.
   3. Nos restaría probar que $w_2 \perp w_1$. Verifiquemos:

$$
\begin{aligned}
&\langle w_2, w_1 \rangle \\
&\overset{\text{(definición de producto interno (linealidad))}}{=} \\
&\langle v_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \langle w_1, w_1 \rangle \\
&\overset{\text{(operatoria)}}{=} \\
&0
\end{aligned}
$$

Con esto seleccionamos w_2 que cumple con todo lo que buscabamos.

3. Selecciono w_3 como combinación lineal de v_1, v_2, v_3 de la siguiente forma:

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

   1. En primer lugar, tenemos que $[w_1, w_2, w_3] = [v_1, v_2, v_3]$, esto porque estamos eligiendo w_3 específicamente para que esto se cumpla.
   2. $w_3 \neq 0$, pues es la combinación lineal de tres vectores que son LI.
   3. Nos restaría probar que $w_3 \perp w_2$ y $w_3 \perp w_1$. Verifiquemos:

$$
\begin{aligned}
&\langle w_3, w_2 \rangle \\
&\overset{\text{(definición de producto interno (linealidad))}}{=} \\
&\langle v_3, w_2 \rangle - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \langle w_2, w_2 \rangle - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \langle w_1, w_2 \rangle \\
&\overset{\text{(operatoria: } \langle w_1, w_2 \rangle = 0)}{=} \\
&0
\end{aligned}
$$

   De la misma forma veamos $w_3 \perp w_1$:

$$
\begin{aligned}
&\langle w_3, w_1 \rangle \\
&\overset{\text{(definición de producto interno (linealidad))}}{=} \\
&\langle v_3, w_1 \rangle - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \langle w_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \langle w_1, w_1 \rangle \\
&\overset{\text{(operatoria: } \langle w_2, w_1 \rangle = 0)}{=} \\
&0
\end{aligned}
$$

Veamos como generalizar este procedimiento:

Dado $\{w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}\}$ un conjunto ortogonal, definimos:

$$w_k = v_k - \frac{\langle v_k, w_{k-1} \rangle}{\langle w_{k-1}, w_{k-1} \rangle} w_{k-1} - \frac{\langle v_k, w_{k-2} \rangle}{\langle w_{k-2}, w_{k-2} \rangle} w_{k-2} - \ldots - \frac{\langle v_k, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

Con esto, estudiemos los 3 requerimientos que tenemos que cumplir:

1. En primer lugar, tenemos que $[w_1, w_2, \dots, w_k] = [v_1, v_2, \dots, v_k]$, esto porque estamos eligiendo w_k específicamente para que esto se cumpla. La idea es que w_k es combinación lineal de $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
2. $w_k \neq 0$, pues es la combinación lineal de k vectores que son LI.
3. Nos restaría probar que es ortogonal a todos los vectores anteriores.

Probemos esto último:

Se cumple, para $j = 1, 2, \dots, k-1$

$$\begin{aligned}
&\langle w_k, w_j \rangle \\
&=_{\text{(desarrollo de } w_k)} \\
&\left\langle v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i, w_j \right\rangle \\
&=_{\text{(definición de producto interno)}} \\
&\langle v_k, w_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \cdot \langle w_i, w_j \rangle \\
&=_{\text{(ortogonalidad cuando } i \neq j)} \\
&\langle v_k, w_j \rangle - \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \cdot \langle w_j, w_j \rangle \\
&=_{\text{(operatoria)}} \\
&0
\end{aligned}$$

Entonces $w_k \perp w_j \quad \forall j \in \{1, \dots, k-1\}$, lo que prueba que $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ es un conjunto ortogonal.

Para obtener un conjunto ortonormal, basta con normalizar los vectores, es decir, tomamos:

$$y_j = \left\{ \frac{w_j}{\|w_j\|} : j \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

Dicho conjunto es base ortonormal de V.

Matriz de cambio de base con una base ortonormal

Veamos la matriz cambio de base que resulta del método de ortonormalización de Gram-Schmidt.

- $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$
- $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_n\}$

Notación:

$C_{ki} = \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle}$ con $i \in \{1, \dots, n\}$

Los elementos de $\{w_1, \dots, w_n\}$ los habíamos definido de la siguiente forma:

- $w_k = v_k - \sum_{i=0}^{k-1} c_{ki} w_i$ con $k \in \{1, \dots, n\}$

Y a partir de esto dijimos que:

- $y_j = \frac{w_j}{\|w_j\|}$ para $j \in \{1, \dots, n\}$

Con esto, podemos obtener v_k como combinación lineal de y_j de la siguiente forma:

- $v_1 = w_1 = \|w_1\| y_1$
- $v_2 = w_2 + C_{21} w_1 = \|w_2\| y_2 + C_{21} \|w_1\| y_1$
- $\vdots$
- $v_k = w_k + \sum_{i=1}^{k-1} C_{ki} w_i = \|w_k\| y_k + \sum_{i=1}^{k-1} C_{ki} \|w_i\| y_i$

Con esto tenemos que la matriz cambio de base queda de la siguiente forma:

$$
{}_{\mathcal{B}'}(\mathbb{I})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \|w_1\| & C_{21}\|w_1\| & \cdots & C_{k1}\|w_1\| & \cdots & C_{n1}\|w_1\| \\ 0 & \|w_2\| & \cdots & C_{k2}\|w_2\| & \cdots & C_{n2}\|w_2\| \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \|w_k\| & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \|w_n\| \end{pmatrix}
$$

Observemos que es una matriz triangular superior, esto tendrá sus aplicaciones en posteriores clases.

Propiedades de bases ortogonales

Sea V un espacio vectorial con producto interno y una base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

1. Si $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ entonces $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$
2. $\forall v \in V : v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n$
3. $\forall v \in V : \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2$

Demostración

1. Veamoslo con lo siguiente:

$$\langle v, w \rangle$$
$$=\text{(por hipótesis)}$$
$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle$$
$$=\text{(definición de producto interno)}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \left\langle v_i, v_j \right\rangle$$
$$=\text{(por ortogonalidad: } i{\neq}j \iff \langle v_i{,}v_j \rangle{=}0\text{)}$$
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_j} \|v_j\|^2$$
$$=\text{(por ortonormalidad: } \|v_i\|{=}1\text{)}$$
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_j}$$

2. Sea $v \in V$ con coordenadas $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, entonces para cualquier $j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que:

$$\left\langle v, v_j \right\rangle$$
$$=\text{(operatoria)}$$
$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, v_j \right\rangle$$
$$=\text{(definición de producto interno)}$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle v_i, v_j \right\rangle$$
$$=\text{(por ortogonalidad: } i{\neq}j \iff \langle v_i{,}v_j \rangle{=}0\text{)}$$
$$a_j \left\langle v_j, v_j \right\rangle$$
$$=\text{(por ortonormalidad: } \|v_i\|{=}1\text{)}$$
$$a_j$$

3. Sea $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, sabemos que estos vectores son ortogonales entre si. Entonces:

$$\|v\|^2 = \| \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \|^2$$

$=$(por Pitágoras)

$$\sum_{i=1}^{n} \|a_i v_i\|^2$$

$=$(definición de norma)

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \|v_i\|^2$$

$=$(por ortonormalidad: $\|v_i\|$=1)

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$$

$=$(por la propiedad anterior)

$$\sum_{i=1}^{n} | \langle v, v_i \rangle |^2$$