Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 7

Consigna

Para las siguientes transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, hallar los valores propios, bases de los subespacios propios e investigar si son diagonalizables.

1. $T(x, y, z) = (2y + z, 2x + z, x + y + z)$
2. $T(x, y, z) = (4x - 5y + 2z, 5x - 7y + 3z, 6x - 9y + 4z)$
3. $T(x, y, z) = (y, -4x + 4y, 2x + y + 2z)$
4. $T(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$

Resolución

Transformación #1

$T(x, y, z) = (2y + z, 2x + z, x + y + z)$

Consideremos la base canónica $\mathcal{E}$ y hallemos ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$:

- $coord_{\mathcal{E}}(T(1, 0, 0)) = (0, 2, 1)$
- $coord_{\mathcal{E}}(T(0, 1, 0)) = (2, 0, 1)$
- $coord_{\mathcal{E}}(T(0, 0, 1)) = (1, 1, 1)$

Entonces:

$${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hallemos el polinomio característico:

$$\mathrm{X}_T(\lambda) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando por el método de Sarrus tenemos:

$$
\begin{aligned}
X_T(\lambda) &= (\lambda^2(1-\lambda) + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1) - (1\cdot(-\lambda)\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-\lambda) + (1-\lambda)\cdot 2\cdot 2) \\
&= (\lambda^2(1-\lambda) + 4) - ((-\lambda) + (-\lambda) + 4(1-\lambda)) \\
&= (\lambda^2(1-\lambda) + 4) - (-6\lambda + 4) \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda \\
&= \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 6)
\end{aligned}
$$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = 0$ de forma evidente
- $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{-2} = \frac{-1+5}{-2} = -2$
- $\lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{25}}{-2} = \frac{-1-5}{-2} = 3$

Con esto, ya podemos decir que la matriz es diagonalizable, porque tenemos 3 raíces con $ma(\lambda) = 1$, y sabemos que $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$ para todo λ

Por lo que $ma(\lambda) = mg(\lambda) = 1$ para todo λ, y todas las raíces están en el cuerpo en el que estamos trabajando.

Ahora para terminar, tenemos que hallar bases de los subespacios propios.

Subespacio S_0

Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(A - 0\mathbb{I})v = 0$:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

De esto podemos sacar que:

- $y \in \mathbb{R}$
- $z = -2y$
- $x = -y + 2y = y$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 0$ es:

$$
S_0 = \{(\alpha, \alpha, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}
$$

La base de este subespacio podría ser:

$$
\{(1, 1, -2)\}
$$

Subespacio $S_{(-2)}$

Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(A + 2\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

De esto podemos sacar que:

- $y \in \mathbb{R}$
- $z = 0$
- $x = -y + 0 = -y$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = -2$ es:

$$S_{(-2)} = \{(-\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(-1, 1, 0)\}$$

Subespacio S_3

Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(A - 3\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

De esto podemos sacar que:

- $y \in \mathbb{R}$
- $z = y$
- $x = -y + 2y = y$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 3$ es:

$$S_3 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(1, 1, 1)\}$$

Transformación #2

$T(x, y, z) = (4x - 5y + 2z, 5x - 7y + 3z, 6x - 9y + 4z)$

Consideremos la base canónica $\mathcal{E}$ y hallemos ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$:

- $coord_{\mathcal{E}}(T(1, 0, 0)) = (4, 5, 6)$
- $coord_{\mathcal{E}}(T(0, 1, 0)) = (-5, -7, -9)$

- $coord_{\mathcal{E}}(T(0,0,1)) = (2,3,4)$

Entonces:

$$_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora hallemos el polinomio característico:

$$\mathrm{X}_T(\lambda) = det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando por el método de Sarrus tenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_T(\lambda) &= ((4-\lambda)^2(-7-\lambda) + 5\cdot(-9)\cdot 2 + 6\cdot(-5)\cdot 3) - (2\cdot(-7-\lambda)\cdot 6 + 3\cdot(-9)\cdot(4-\lambda) + (4-\lambda \\ &= ((4-\lambda)^2(-7-\lambda) - 90 - 90) - (12(-7-\lambda) - 27(4-\lambda) - 25(4-\lambda)) \\ &= ((\lambda^2 - 8\lambda + 16)(-7-\lambda) - 180) - ((-84 - 12\lambda) - 52(4-\lambda)) \\ &= ((-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 16\lambda - 7\lambda^2 + 56\lambda - 112) - 180) - (-84 - 12\lambda - 208 + 52\lambda) \\ &= (-\lambda^3 + \lambda^2 + 40\lambda - 292) - (40\lambda - 292) \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(-\lambda + 1) \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = 0 \rightarrow ma(\lambda_1) = 2$ que es raíz doble
- $\lambda_2 = 1 \rightarrow ma(\lambda_2) = 1$

Ahora tenemos que hallar bases de los subespacios propios para poder determinar si T es diagonalizable.

Subespacio S_0

Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(A - 0\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 20 & -28 & 12 & 0 \\ 24 & -36 & 16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

De esto podemos sacar que:

- $y \in \mathbb{R}$
- $z = \frac{3}{2}y$
- $x = \frac{5y-3y}{4} = \frac{1}{2}y$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 0$ es:

$$S_0 = \{(\frac{\alpha}{2}, \alpha, \frac{3\alpha}{2}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(1, 2, 3)\}$$

Subespacio S_1

Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(A - 1\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 15 & -24 & 9 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

De esto podemos sacar que:

- $y \in \mathbb{R}$
- $z = y$
- $x = \frac{5y-2y}{3} = y$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 1$ es:

$$S_1 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(1, 1, 1)\}$$

Ahora podemos concluir que T no es diagonalizable, porque:

$$1 = mg(0) \neq ma(0) = 2$$

Transformación #3

$T(x, y, z) = (y, -4x + 4y, 2x + y + 2z)$

Consideremos la base canónica $\mathcal{E}$ y hallemos ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$:

- $coord_{\mathcal{E}}(T(1, 0, 0)) = (0, -4, 2)$
- $coord_{\mathcal{E}}(T(0, 1, 0)) = (1, 4, 1)$
- $coord_{\mathcal{E}}(T(0, 0, 1)) = (0, 0, 2)$

Entonces:

$$_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora hallemos el polinomio característico:

$$\mathrm{X}_T(\lambda) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la columna 3 obtenemos:

$$\mathrm{X}_T(\lambda) = (2-\lambda) \cdot (-\lambda(4-\lambda)+4) \quad = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = 2 \rightarrow ma(\lambda_1) = 3$ 1 de forma trivial y las otras dos multiplicidades son porque es raíz doble del polinomio de grado dos.

Ahora tenemos que hallar bases de los subespacios propios para poder determinar si T es diagonalizable.

Subespacio S_2

Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(A - 2\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De esto podemos sacar que:

- $y = 2x$
- $z \in \mathbb{R}$
- $x \in \mathbb{R}$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 2$ es:

$$S_2 = \{(\alpha, 2\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(1,2,0),(0,0,1)\}$$

Ahora podemos concluir que T no es diagonalizable, porque:

$$2 = mg(2) \neq ma(2) = 3$$

Transformación #4

$T(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$

Consideremos la base canónica $\mathcal{E}$ y hallemos ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$:

- $coord_{\mathcal{E}}(T(1, 0, 0)) = (2, 0, 0)$
- $coord_{\mathcal{E}}(T(0, 1, 0)) = (0, 2, 0)$
- $coord_{\mathcal{E}}(T(0, 0, 1)) = (0, 0, 2)$

Entonces:

$${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora hallemos el polinomio característico:

$$\mathrm{X}_T(\lambda) = det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

El determinante es:

$$\mathrm{X}_T(\lambda) = (2-\lambda)^3$$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = 2 \to ma(\lambda_1) = 3$

Obviamente sabemos que T es diagonalizable porque la matriz asociada a la base canónica es literalmente diagonal. Cálculemos el subespacio solo por completitud.

Subespacio S_2

Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(A - 2\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De esto podemos sacar que:

- $y \in \mathbb{R}$
- $z \in \mathbb{R}$
- $x \in \mathbb{R}$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 2$ es:

$$S_2 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Concluyendo, en este caso, todos los vectores del espacio son vectores propios asociados a $\lambda_1 = 2$