Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 10

Consigna

En $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual, se define el operador autoadjunto $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

1. $T(x,\ y,\ z) = 4(x,\ y,\ z)$ para todo $(x,\ y,\ z) \in U = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2z = 0\}$
2. $\det(T) = -48$

Calcular: $T(3,\ 0,\ 2)$

Resolución

La estrategia que vamos a usar para resolver este ejercicio, es ir viendo que nos dice cada una de los datos sobre el operador.

Dato #1:

Este dato nos dice varias cosas, primero nos dice que $\lambda = 4$ es valor propio de T. Por otro lado, también tenemos que entonces $U \subseteq S_4$. Mirando la definición de U, podemos obtener condiciones para definirlo mediante una base:

- $U = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2z = 0\}$
  - $x = -\frac{2}{3}z$
  - $y \in \mathbb{R}$
- $U = \{(\alpha, \beta, -\frac{2}{3}\alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- $U = [(3, 0, -2), (0, 1, 0)]$

Con esto podemos concluir que $dim(U) = 2$, y por la observación hecha anteriormente concluimos también que:

- $dim(S_4) \geq 2$ (pues U está incluido en S_4)

Observación: Veamos también que la base dada de U es ortogonal para el producto interno estándar.

Dato #2:

Por lo obtenido con el dato anterior, tenemos que la matriz asociada a T en forma diagonal (se que es diagonalizable pues T autoadjunto) es:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Y como sé que $16\lambda = -48$, entonces:

- $\lambda = -3$

Junto al dato #1, esto también nos dice que $S_4 = U$.

Con lo obtenido hasta ahora, tenemos de dos de tres vectores de la base para la matriz diagonal.

Hallemos S_{-3}, basándonos en lo siguiente:

- $S_{-3} = S_4^{\perp}$

Entonces consideramos $(x, y, z) \in S_{-3}$ que tiene que cumplir lo siguiente:

- $\langle (x, y, z), (3, 0, -2) \rangle = 0$
- $\langle (x, y, z), (0, 1, 0) \rangle = 0$

De donde se obtiene que:

- $3x - 2z = 0 \to x = \frac{2}{3}z$
- $y = 0$

Por lo que definimos el subespacio propio S_{-3} por:

- $S_{-3} = \{(\alpha, 0, \frac{2}{3}\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ o
- $S_{-3} = [(3, 0, 2)]$

Por lo que fácilmente podemos decir que:

- $T(3, 0, 2) = -3 \cdot (3, 0, 2) = (-9, 0, -6)$