Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

Dadas las siguientes transformaciones lineales:

1. $T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $T(x, y) = (-2x - 7y, x + 2y)$
2. $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, $T(x, y, z) = (x, z, y)$
3. $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, $T(x, y, z) = (x, z, -y)$

(a) Hallar valores propios y bases de los subespacios propios de T, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) Hallar valores propios y bases de los subespacios propios de T, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Resolución (parte 1)

Para hallar los vectores y valores propios de T, necesitaremos hallar una matriz asociada a dicha transformación, para la cual usaremos las bases canónicas.

Sea $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, hallemos ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$:

- $coord_{\mathcal{E}}(1, 0) = (-2, 1)$
- $coord_{\mathcal{E}}(0, 1) = (-7, 2)$

Entonces:

$$
{}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

Observación: "Deshago" la función *coord* porque la base es la canónica.

Con esto puedo hallar el polínomio característico:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}_T(\lambda) &= det({}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} - \lambda \mathbb{I}) \\
&= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -7 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Entonces el polínomio característico es:

$$
\mathrm{X}_T(\lambda) = (-2 - \lambda)(2 - \lambda) + 7 = \lambda^2 - 4 + 7 = \lambda^2 + 3
$$

Si quisiera hallar las raíces:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{X}_T(\lambda) = 0 \\
&\lambda^2 + 3 = 0 \\
&\lambda^2 = -3 \\
&\lambda = \pm\sqrt{-3} \\
&\lambda = \pm\sqrt{3} \cdot i
\end{aligned}
$$

Por lo que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces no hay valores propios, así que trabajaremos con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donde tenemos:

- $\lambda_1 = \sqrt{3} \cdot i$
- $\lambda_2 = -\sqrt{3} \cdot i$

Ahora tenemos que encontrar soluciones al sistema:

$$({}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} - \lambda \mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto equivale a resolver el siguiente sistema, para λ_1 y λ_2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2-\lambda & -7 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \end{array} \right)$$

Subespacio $\lambda_1 = \sqrt{3} \cdot i$

El sistema que queremos resolver en este caso es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2-\sqrt{3} \cdot i & -7 & 0 \\ 1 & 2-\sqrt{3} \cdot i & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2-\sqrt{3} \cdot i & -7 & 0 \\ 2+\sqrt{3} \cdot i & 7 & 0 \end{array} \right)$$

Observación: Multiplicamos la fila dos por $(2 + \sqrt{3} \cdot i)$, es muy importante tener en cuenta el conjugado para cuando usamos el cuerpo de los complejos.

Veamos las cuentas auxiliares que hicimos:

$$(2 + \sqrt{3} \cdot i)((2 - \sqrt{3} \cdot i)) = 4 - \sqrt{3}^2 \cdot i^2 = 4 + 3 = 7$$

Ahora, siguiendo con el sistema, operemos sobre la primer fila (ya que la segunda es CL de la primera):

$$
\begin{aligned}
&(2 - \sqrt{3} \cdot i)x - 7y = 0 \\
&y = \frac{(2 - \sqrt{3} \cdot i)x}{-7}
\end{aligned}
$$

Entonces, si llamamos v al vector propio que buscamos, podemos decir que: $coord_{\mathcal{E}}(v) = (x, \frac{(2-\sqrt{3} \cdot i)x}{-7})$

Pero como estamos trabajando con la base canónica, podemos decir que:

$v = (x, \frac{(2-\sqrt{3}\cdot i)x}{-7})$ para algún $x \in \mathbb{C}$

Finalizando, podemos decir que:

$$S_{\sqrt{3}\cdot i} := \{(\alpha, \frac{(2-\sqrt{3}\cdot i)\alpha}{-7}) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

Y la base de dicho subespacio es:

$$\{\left(1, \frac{(2-\sqrt{3}\cdot i)}{-7}\right)\}$$

Subespacio $\lambda_1 = -\sqrt{3}\cdot i$

El sistema que queremos resolver en este caso es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2+\sqrt{3}\cdot i & -7 & 0 \\ 1 & 2+\sqrt{3}\cdot i & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2+\sqrt{3}\cdot i & -7 & 0 \\ 2-\sqrt{3}\cdot i & 7 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso la operación es la misma que la de arriba, despejando podemos decir que:

$$y = \frac{(-2+\sqrt{3}\cdot i)x}{-7}$$

Trabajando con el mismo razonamiento que en el caso anterior, concluimos que:

$$S_{-\sqrt{3}\cdot i} := \{(\alpha, \frac{(2+\sqrt{3}\cdot i)\alpha}{-7}) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

Y la base de dicho subespacio es:

$$\{\left(1, \frac{(2+\sqrt{3}\cdot i)}{-7}\right)\}$$

Resolución (parte 2)

Sea $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, $T(x, y, z) = (x, z, y)$, considerando la base canónica $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, hallemos ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$:

- $coord_{\mathcal{E}}(T(1, 0, 0)) = (1, 0, 0)$
- $coord_{\mathcal{E}}(T(0, 1, 0)) = (0, 0, 1)$
- $coord_{\mathcal{E}}(T(0, 0, 1)) = (0, 1, 0)$

Como estamos usando la base canónica, podemos decir que:

$$
_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Ahora hallemos el polinomio característico:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{X}_T(\lambda) = det(_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} - \lambda \mathbb{I}) \\
\mathrm{X}_T(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
\mathrm{X}_T(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)
\end{gathered}
$$

Podemos concluir que las raíces características son:

- $\lambda_1 = 1$
- $\lambda_2 = -1$

Observemos que $\lambda_1 = 1$ aparece dos veces, una vez en $(1-\lambda)$ y la otra en $(\lambda^2 - 1)$.

Cómo todas las raíces del polinomio característico son reales, podemos trabajar en dicho cuerpo.

Ahora tenemos que encontrar soluciones al sistema:

$$
(_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} - \lambda \mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Esto equivale a resolver el siguiente sistema, para λ_1 y λ_2:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \end{array}\right)
$$

Subespacio $\lambda_1 = 1$

El sistema para este valor propio es:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

Se observa que las 3 filas son combinaciones lineales la una de la otra, podemos concluir que:

- $x \in \mathbb{R}$
- $z = y$

Entonces, si llamamos v al vector propio que buscamos, podemos decir que: $coord_{\mathcal{E}}(v) = (x, y, y)$

Pero como estamos trabajando con la base canónica, podemos decir que:

$v = (x, y, y)$ para algunos $x, y \in \mathbb{R}$

Finalizando, podemos decir que:

$$S_1 := \{(\alpha, \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Y la base de dicho subespacio es:

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$$

Subespacio $\lambda_1 = -1$

El sistema para este valor propio es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Obtenemos que:

- $x = 0$
- $z = -y$

Por el mismo razonamiento del caso anterior:

$$S_{-1} := \{(0, \alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Y la base de dicho subespacio es:

$$\{(0, 1, -1)\}$$

Resolución (parte 3)

Se toma como análoga a las 2 anteriores