Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 6

Consigna

Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}}$ en una base $\mathcal{B}$ ortonormal conveniente, para las siguientes transformaciones:

1. $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definida por: $T(x, y, z) = (2x + iy,\ y - 5iz,\ x + (1 - i)y + 3z)$
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por: $T(x, y, z) = (2x + y - z,\ x + y + z)$
3. $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por: $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot A$

Resolución

Recordatorio

Para este ejercicio usaremos el siguiente teorema enunciado en la clase 18 del teórico:

Sean V, W dos espacios vectoriales con producto interno.

Sea $T : V \to W$, $T^* : W \to V$ y dos bases ORTONORMALES: - $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\} \to V$ - $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\} \to W$

Entonces:

$$_{\mathcal{A}}(T^*)_{\mathcal{B}} = \overline{({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}})^t}$$

Parte 1

Consideremos la base canónica de $\mathbb{C}^3$: - $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Observemos que la misma es ortonormal considerando el producto interno estándar.

Entonces podemos representar T de la siguiente forma:

- $T(1, 0, 0) = (2, 0, 1)$
- $T(0, 1, 0) = (i, 1, 1 - i)$
- $T(0, 0, 1) = (0, -5i, 3)$

$$
{}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 0 & 1 & -5i \\ 1 & 1-i & 3 \end{pmatrix}
$$

Como estamos trabajando en una base ortonormal, entonces se cumple la propiedad enunciada en el recordatorio, entonces:

$$
{}_{\mathcal{E}}(T^*)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 1+i \\ 0 & 5i & 3 \end{pmatrix}
$$

Parte 2

Recordemos la transformación lineal con la que estamos trabajando:

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por: $T(x, y, z) = (2x + y - z,\ x + y + z)$

Consideremos las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ (ambas ortonormales para el PI estándar): - $\mathcal{E}_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ - $\mathcal{E}_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Entonces:

- $T(1, 0, 0) = (2, 1)$
- $T(0, 1, 0) = (1, 1)$
- $T(0, 0, 1) = (-1, 1)$

Con esto, podemos construir la matriz de la siguiente forma:

$$
{}_{\mathcal{E}_2}(T)_{\mathcal{E}_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Como estamos trabajando en bases ortonormales, entonces se cumple la propiedad enunciada en el recordatorio, entonces:

$$
{}_{\mathcal{E}_1}(T^*)_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Parte 3

Análoga a las anteriores.