Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 19 - 14/07/2025

Operadores autoadjuntos

Teorema

Retomamos el teorema visto en la clase anterior, para demostrarlo en esta clase.

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, sea $T : V \to V$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es autoadjunto
2. $\forall \mathcal{B} \to V$ ortonormal, ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es simétrica
3. $\exists \mathcal{B}_0 \to V$ ortonormal, ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ es simétrica

Demostración

$1 \implies 2$

Queremos probar que si T es autoadjunta, entonces $\forall \mathcal{B} \to V$ ortonormal, ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es simétrica.

Entonces:

Como T es autoadjunto, entonces $T = T^*$, en particular tenemos que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}}$.

Por la representación matricial de la transformación adjunta, tenemos que: - ${}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = \overline{({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}})^t}$

En particular, como estamos en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, tenemos que: - ${}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = ({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}})^t$

Además, como T es autoadjunta, tenemos que:

- ${}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = ({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}})^t$

Que es la definición de matriz simétrica, por lo tanto queda demostrada esta implicancia.

$2 \implies 3$

Esta demostración es trivial, pues si se cumple que $\forall \mathcal{B} \to V$ ortonormal, ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es simétrica, entonces en particular existe una base $\mathcal{B}_0$ que cumple con dicha propiedad.

$3 \implies 1$

Queremos probar que si $\exists \mathcal{B}_0 \to V$ ortonormal, ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ es simétrica, entonces T es autoadjunta.

Veamos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0} \\
&\stackrel{\text{(por ser simétrica)}}{=} \\
&({}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0})^t \\
&\stackrel{\text{(como } \mathbb{K}=\mathbb{R})}{=} \\
&\overline{({}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0})}^t \\
&\stackrel{\text{(representación matricial de la adjunta)}}{=} \\
&{}_{\mathcal{B}_0}(T^*)_{\mathcal{B}_0}
\end{aligned}
$$

Entonces T es autoadjunta.

Por lo tanto, queda probada esta implicancia, y en consecuencia todas las equivalencias.

Observación

El teorema vale también para los complejos, pero con una pequeña diferencia.

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, sea $T : V \to V$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es autoadjunta
2. $\forall \mathcal{B} \to V$ ortonormal, ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es hermítica
3. $\exists \mathcal{B}_0 \to V$ ortonormal, ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ es hermítica

Observación: Una matriz A es hermítica sii $A = \overline{(A)}^t$

Teorema espectral de operadores autoadjuntos

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Sea $T : V \to V$ un operador autoadjunto.

Entonces existe $\mathcal{B}$ una base ortonormal de vectores propios de T.

Observación: Para probar este resultado, necesitamos de algunos resultados anteriores que vamos a probar a continuación.

Teorema 1

Sea $T : V \to V$ un operador autoadjunto en un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno. Entonces si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio $\implies \lambda \in \mathbb{R}$

Demostración (Teorema 1)

1. Como $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio, entonces existe $v_0 \in V, v_0 \neq \vec{0}$ tal que $T(v_0) = \lambda v_0$
2. Como T es autoadjunto, entonces tenemos que:
   - $T = T^*$
   - $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$ en particular,
   - $\langle T(v), v \rangle = \langle v, T(v) \rangle \quad \forall v \in V$
   - Ahora consideremos el vector propio v_0 asociado a λ, entonces:

$$\begin{aligned}
&\langle T(v_0), v_0 \rangle = \langle v_0, T(v_0) \rangle \\
&\iff \text{(definición de valor propio)} \\
&\langle \lambda v_0, v_0 \rangle = \langle v_0, \lambda v_0 \rangle \\
&\iff \text{(propiedades de producto interno)} \\
&\lambda \langle v_0, v_0 \rangle = \overline{\lambda} \langle v_0, v_0 \rangle \\
&\iff \text{(como } v_0 \neq \vec{0}\text{)} \\
&\lambda = \overline{\lambda}
\end{aligned}$$

   Donde esto último solo se cumple si $\lambda \in \mathbb{R}$

Esto prueba el teorema.

Corolario (del teorema 1)

Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y T un operador autoadjunto. Entonces $\mathrm{X}_T(\lambda)$ tiene todas las raíces reales.

Teorema 2

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $T : V \to V$ un operador autoadjunto. Entonces X_T tiene raíces reales.

Demostración (Teorema 2)

Definimos $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V.

Definimos $T_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, con $n = dim(V)$. Consideramos $\mathcal{B}_1$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ tal que:

$$_{\mathcal{B}_1}(T_1)_{\mathcal{B}_1} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$$

Observemos que como T es autoadjunta y $\mathcal{B}$ es una base ortonormal, tenemos que $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es simétrica.

Ahora veamos el siguiente razonamiento:

$$
\begin{aligned}
&{}_{\mathcal{B}_1}(T_1)_{\mathcal{B}_1} \\
&=_{(\text{definición de } T_1)} \\
&{}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \\
&=_{(\text{por simetría})} \\
&({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}})^t \\
&=_{(T \text{ es real})} \\
&\overline{({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}})}^t \\
&=_{(T\text{definición de } T_1)} \\
&\overline{({}_{\mathcal{B}_1}(T_1)_{\mathcal{B}_1})}^t
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, ${}_{\mathcal{B}_1}(T_1)_{\mathcal{B}_1}$ es hermítica, y por el teorema de inicio de clase, tenemos que T_1 es autoadjunta.

Con esto y el corolario anterior, X_{T_1} tiene raíces reales.

Como por construcción $\mathrm{X}_{T_1} = \mathrm{X}_T$, entonces X_T también tiene raíces reales.

Esto prueba el teorema.

Proposición

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y $T : V \to V$ un operador autoadjunto. Consideremos dos vectores y valores propios distintos entre si: - v_1 asociado a λ_1 - v_2 asociado a λ_2

Entonces $v_1 \perp v_2$.

Demostración (proposición)

Consideremos el siguiente razonamiento:

$$
\begin{aligned}
&\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle \\
&\iff_{(\text{definición de valor propio})} \\
&\langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \\
&\iff_{(\text{propiedades de producto interno y } \lambda_2 \in \mathbb{R})} \\
&\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \\
&\iff_{(\text{aritmética})} \\
&(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \\
&\iff_{(\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0)} \\
&\langle v_1, v_2 \rangle = 0
\end{aligned}
$$

Es decir que $v_1 \perp v_2$