CLASE 4 - 10/03/2025

Vectores y valores propios

Lema

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son matrices semejantes, entonces $\mathrm{X}_A(\lambda) = \mathrm{X}_B(\lambda)$. En particular, A, B tienen los mismos valores propios.

Demostración Como son semejantes, $\exists P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que: $B = P^{-1}AP$, además también podemos ver que: $\lambda\mathbb{I} = P^{-1}\lambda\mathbb{I}P$

Con esto podemos decir que:

$$\begin{aligned} &B - \lambda\mathbb{I} = P^{-1}AP - P^{-1}\lambda\mathbb{I}P \\ &\iff \qquad \text{saco } P^{-1}, P \text{ de factor común} \\ &B - \lambda\mathbb{I} = P^{-1}(A - \lambda\mathbb{I})P \end{aligned}$$

Entonces $(B - \lambda\mathbb{I})$ y $(A - \lambda\mathbb{I})$ son matrices semejantes, y como los determinantes de matrices semejantes son iguales, podemos decir que:

$$det(A - \lambda\mathbb{I}) = det(B - \lambda\mathbb{I}) \iff \mathrm{X}_A(\lambda) = \mathrm{X}_B(\lambda)$$

Observación Sea $T : V \to V$ con $dim(V) = n$ y dos bases de V; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Entonces tenemos:

- $A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$
- $A' = {}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{B}'}$

Que son matrices semejantes, entonces por el lema anterior tenemos que:

$$\mathrm{X}_A(\lambda) = \mathrm{X}_{A'}(\lambda)$$

Por lo que entonces, no importa la base con la que trabajemos para determinar los valores propios de una TL.

Observación El recíproco del lema, no es cierto. Es decir que si dos matrices tienen el mismo polinomio característico, no necesariamente las matrices son semejantes.

Veamos un contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que no son semejantes, pero es fácil observar que el polinomio característico es el mismo.

Diagonalización

Definición (transformación lineal diagonalizable)

Sea $T : V \to V$, decimos que T es diagonalizable si existe una base de $V : \mathcal{B}$ tal que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es una matriz diagonal.

Definición (matriz diagonalizable)

Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

Teorema

Sea $T : V \to V$ es diagonalizable $\iff$ existe una base de V formada por vectores propios de T (la matriz asociada en esa base es diagonal)

Demostración

($\Rightarrow$) T es diagonalizable $\Rightarrow \exists \mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V tal que:

$$
{}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

Donde podemos observar que:

- $coord_{\mathcal{B}}(T(v_1)) = \lambda_1 \cdot v_1$
- $coord_{\mathcal{B}}(T(v_2)) = \lambda_1 \cdot v_2$
- $\dots$
- $coord_{\mathcal{B}}(T(v_n)) = \lambda_1 \cdot v_n$

Esto significa que:

- v_1 es vector propio asociado al valor propio λ_1
- v_2 es vector propio asociado al valor propio λ_2
- $\dots$
- v_n es vector propio asociado al valor propio λ_n

Entonces $\mathcal{B}$ es una base de V formada por vectores propios de T.

($\Leftarrow$) Si $\mathcal{B}$ es una base de valores propios, entonces tenemos que:

- $T(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$
- $T(v_2) = \lambda_1 \cdot v_2$
- $\dots$
- $T(v_n) = \lambda_1 \cdot v_n$

Con esto podemos hallar la matriz asociada:

$$
{}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

Con lo que se concluye que T es diagonalizable. ■

Observación La forma diagonal es única, a menos del órden de los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Teorema

Sea $T : V \to V$ un operador líneal. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ valores propios de T dos a dos distintos y $v_1, v_2, \dots, v_k$ vectores propios asociados a cada uno de los valores propios.

Entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es un conjunto LI

Demostración Se hará la inducción sobre el número de valores propios $k \in \mathbb{N}$.

Paso base $(n = 1)$: v_1 vector propio asociado a λ_1

Se observa trivialmente que $\{v_1\}$ es un conjunto LI

Paso inductivo

(H) $(n = k)$: $v_1, v_2, \dots, v_k$ vectores propios asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

Asumimos que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es LI

(T) $(n = k + 1)$: $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$ vectores propios asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$

Consideremos la ecuación

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad (i) \\
&\iff \text{ aplicamos } T \text{ a ambos lados} \\
&\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_k T(v_k) + \alpha_{k+1} T(v_{k+1}) = 0 \\
&\iff \text{ utilizando los valores propios de } T \\
&\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad (ii)
\end{aligned}
$$

Ahora, múltiplicamos (i) por λ_{k+1} y lo restamos a (ii). Obtenemos lo siguiente:

$$
\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})v_2 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k + 0 = 0 \quad (iii)
$$

Por hipótesis inductiva, $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es LI, lo cual implica que:

- $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0$
- $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = 0$
- ...
- $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$

Donde todos los paréntesis no pueden ser 0, porque todos los valores propios son distintos entre si. Esto solo deja la posibilidad de que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k = 0$

Llevando todo esto a la ecuación (i), nos queda que:

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$$

Como v_{k+1} es vector propio, sabemos que necesariamente $v_{k+1} \neq \vec{0}$.

Esto implica que todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1} = 0$, es decir, el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ es LI. ■

Corolario

Sea $T : V \to V$ con $dim(V) = n$. Si T tiene n valores propios diferentes dos a dos, entonces T es diagonalizable

Demostración Consideramos $v_1, v_2, \dots, v_n$ vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (todos distintos).

Por el teorema anterior sabemos que: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es LI. Como $dim(V) = n$, juntando con lo anterior podemos decir que:

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es base de V, en particular, es una base de vectores propios de T, por lo que T es diagonalizable. ■