

## Ejercicio 20

### Consigna

Probar que la relación de matrices semejantes es una relación de equivalencia.

Recordar que una relación es una relación de equivalencia si verifica las propiedades:

- **Reflexiva:** Toda matriz es semejante a sí misma.
- **Simétrica:** Si  $A$  es semejante a  $B$ , entonces  $B$  es semejante a  $A$ .
- **Transitiva:** Si  $A$  es semejante a  $B$  y  $B$  es semejante a  $C$ , entonces  $A$  es semejante a  $C$ .

### Resolución

#### Reflexividad

Sea una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ .  $A$  es semejante a sí misma, ya que podemos considerar  $P = (Id)_{n \times n}$  de forma que:

$$A = P^{-1}AP$$

Esto prueba que la semejanza de matrices es reflexiva

#### Simetría

Sean dos matrices  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , tal que  $A$  es semejante a  $B$ . Entonces  $\exists P$  tal que:

$$B = P^{-1}AP$$

Multiplico ambos lados por  $P$  a la izquierda y  $P^{-1}$  a la derecha, obtengo que:

$$PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1}$$

$$PBP^{-1} = A$$

Entonces  $B$  es semejante a  $A$

#### Transitividad

Sean  $A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , tal que:

- $A$  es semejante a  $B$
- $B$  es semejante a  $C$

Entonces:

- $\exists P$  tal que:  $B = P^{-1}AP$
- $\exists T$  tal que:  $C = T^{-1}BT$

Por lo tanto:

$$B = P^{-1}AP$$

$$C = T^{-1}P^{-1}APT$$

Entonces  $C$  es semejante a  $A$ , con  $S = PT$  y  $S^{-1} = T^{-1}P^{-1}$