

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 2 - Parcial Julio 2022

### Consigna

Sea  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  el operador lineal que satisface:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3i & 0 \\ 3 & 4 & -i \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  es una base de  $\mathbb{C}^3$ .  
Entonces, la matriz  ${}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}}$  es igual a:

A.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 + 3i & 6 & 2 \\ -4 - 3i & -10 + i & -3 \end{pmatrix}$$

B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3i & 4 & 2 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

C.

$$\begin{pmatrix} 6 + 3i & 14 - i & 24 + 2i \\ 6 + 6i & 16 - i & 27 + 5i \\ -4 - 3i & -10 + i & -17 - 2i \end{pmatrix}$$

D.

$$\begin{pmatrix} 6 - 3i & 14 + i & 24 - 2i \\ 6 - 6i & 16 + i & 27 - 5i \\ -4 + 3i & -10 - i & -17 + 2i \end{pmatrix}$$

### Resolución

Consideremos  $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  la base canónica de  $\mathbb{C}^3$ . Observemos que la matriz dada ya nos da:

- $T(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 1(1, 1, 1) = (2, 4, 1)$

- $T(0, 1, 0) = -3i(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) + 2(1, 1, 1) = (2 - 3i, 6, 2)$

Solo nos faltaría obtener  $T(0, 0, 1)$  para completar  $_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$ .

Observemos que:

$$\begin{aligned}
T(1, 1, 1) &= T(1, 0, 0) + T(0, 1, 0) + T(0, 0, 1) \\
&\iff (\text{matriz asociada } _{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}) \\
0(1, 0, 0) - i(0, 1, 0) + 0(1, 1, 1) &= T(1, 0, 0) + T(0, 1, 0) + T(0, 0, 1) \\
&\iff (\text{sustituyendo valores conocidos}) \\
(0, -i, 0) - (2, 4, 1) - (2 - 3i, 6, 2) &= T(0, 0, 1) \\
&\iff (\text{operatoria}) \\
(-4 + 3i, -10 - i, -3) &= T(0, 0, 1)
\end{aligned}$$

Por lo que entonces, la matriz asociada con la base canónica es:

$$_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 - 3i & -4 + 3i \\ 4 & 6 & -10 - i \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Entonces como  $\mathcal{E}$  es canónica, podemos llegar a la adjunta de la siguiente forma:

$$_{\mathcal{E}}(T^*)_{\mathcal{E}} = \overline{(_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}})}^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 + 3i & 6 & 2 \\ -4 - 3i & -10 + i & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo que la opción correcta es la opción **A**.