Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 13 - 02/06/2025

Descomposición QR

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $rg(A) = n$. Entonces existen una matriz $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}$ que verifica $Q^t Q = \mathbb{I}$ y una matriz triangular superior $R \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que:

$$A = QR$$

Demostración

Sea $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}$

Como $rg(A) = n$ entonces $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es LI, por tanto base de $\mathbb{R}^n$.

Usando el método de ortonormalización de Gram-Schmidt obtenemos una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Llamamos $Q = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $R = {}_{\mathcal{B}'}(\mathbb{I})_{\mathcal{B}}$ que es triangular superior.

Ahora resta probar que $Q^t Q = \mathbb{I}$ y que $A = QR$, veamos ambas partes:

$$Q^t Q = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots \\ y_2 & \cdots \\ \vdots & \\ y_n & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Observemos que:

$$(Q^t Q)_{ij} = \langle y_i, y_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Donde: 1. El producto interno es el usual en $\mathbb{R}^n$ 2. La observación de los casos es porque la base $\mathcal{B}'$ es ortonormal.

Con esto concluimos que $Q^t Q = \mathbb{I}$.

Ahora resta probar que $A = QR$. Lo cual es bastante tedioso por lo que no lo voy a escribir, pero con las primeras columnas se ve que es verdadero.

Complemento ortogonal

Sea V espacio vectorial con producto interno, $S \subset V$. Definimos el complemento ortogonal de S como el conjunto de vectores $S^\perp$ tal que:

$$S^\perp = \{v \in V \mid \forall s \in S : v \perp s\} = \{v \in V \mid \forall s \in S : \langle v, s \rangle = 0\}$$

Es decir que $S^\perp$ es el conjunto de todos los vectores que son ortogonales a todos los vectores de S.

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^3$ con producto interno habitual. $S = [(1,0,1)] = \{(\alpha, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

Decimos que:

$$\begin{aligned} v = (x,y,z) \in S^\perp &\iff \langle (x,y,z), (\alpha,0,\alpha) \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\iff \alpha(x+z) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$S^\perp = \{(x, y, -x) : x, y \in \mathbb{R}\} = [(1,0,-1), (0,1,0)]$$

Proposición

$S^\perp$ es un subespacio de V, sin importar si S no lo es.

Demostración

1. $0 \in S^\perp$ pues $\langle 0, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$
2. $v, w \in S^\perp$, veamos que $\langle v + w, s \rangle = \langle v, s \rangle + \langle w, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$. Entonces $v + w \in S^\perp$
3. $a \in \mathbb{K}, v \in S^\perp$, entonces $\langle av, s \rangle = a \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$. Entonces $av \in S^\perp$

Proposición

Sea V espacio vectorial con producto interno. Sea S subsespacio vectorial de dimensión finita, con base $\mathcal{B} = \{s_1, \dots, s_r\}$. Entonces $v \in S^\perp \iff v \perp s_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, r$

Demostración

($\Rightarrow$) Evidente por definición de $S^\perp$

($\Leftarrow$) Supongamos que v cumple que: $\langle v, s_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, r$ Consideramos $s = a_1 s_1 + \ldots a_r s_r \in S$. Entonces:

$$\langle v, s \rangle = \overline{a_1} \langle v, s_1 \rangle + \ldots + \overline{a_r} \langle v, s_r \rangle = 0$$

Como no asumimos nada sobre $s \in S$, esto vale para cualquier vector s, lo que concluye la prueba.

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^3$ con producto interno habitual.

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - z = 0\} = \{(x, y, 2x) : x, y \in \mathbb{R}\}$

Consideremos la siguiente base $\mathcal{B}$ de S:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$$

Por lo tanto:

$S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), (1, 0, 2) \rangle = 0 \text{ y } \langle (x, y, z), (0, 1, 0) \rangle = 0\}$

De esto derivamos que:

1. $x + 2z = 0$
2. $y = 0$

Entonces:

$$S^\perp = \{(-2z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = [(-2, 0, 1)]$$