CLASE 6 - 11/03/2025

Diagonalización

Definición (multiplicidad algebraica y geométrica)

Sea $T : V \to V$ con $dim(V) = n$ y λ valor propio de T. Denotamos:

- la **multiplicidad algebraica de** λ: $ma(\lambda)$ como la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico (la cantidad de veces que aparece la raíz)
- la **multiplicidad geométrica de** λ: $mg(\lambda)$ como la dimensión del subespacio asociado a λ

Proposición

Si λ_0 es valor propio de T, entonces:

$$1 \leq mg(\lambda_0) \leq ma(\lambda_0) \leq n$$

Demostración

- $1 \leq mg(\lambda_0)$: Es obvio, la dimensión de S_{λ_0} tiene que ser al menos 1.
- $ma(\lambda_0) \leq n$: Es obvio, el polinomio característico no puede ser de mayor grado que la dimensión del espacio.

Ahora, veamos que $mg(\lambda_0) \leq ma(\lambda_0)$.

Denotamos $m = mg(\lambda_0) = dim(S_{\lambda_0})$. Consideremos $\{v_1, \dots, v_m\}$ base de S_{λ_0}. Sabemos que $T(v_i) = \lambda_0 v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$

Ahora completemos la base de S_{λ_0} hasta obtener una base de V.

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$$

Ahora, veamos la forma de la matriz asociada a esta base $\mathcal{B}$:

$$A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & x & \cdots & x \\ 0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & x & \cdots & x \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \cdots & x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & y & \cdots & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & \cdots & y \end{pmatrix}$$

Donde podemos observar 3 regiones:

- La parte diagonal donde están los valores propios, que tiene tamaño $m \times m$. La llamaremos la matriz L
- La parte X que tiene tamaño $(m - n) \times m$
- La parte Y que tiene tamaño $(m - n) \times (m - n)$

Y todo lo que está por debajo de la submatriz diagonal, son ceros.

Ahora si quisieramos hallar el polinomio característico de esta matriz, lo haríamos de la siguiente forma:

$$det(A - \lambda \mathbb{I}) = det \left(\begin{array}{c|c} L - \lambda \mathbb{I} & X \\ \hline 0 & Y - \lambda \mathbb{I}_{(n-m)} \end{array} \right)$$

Usando un resultado de GAL 1, podemos decir que ese determinante es igual a:

$$\mathrm{X}_T(\lambda) = det(A - \lambda \mathbb{I}) = det(L - \lambda \mathbb{I}) \cdot det(Y - \lambda \mathbb{I}_{(n-m)}) = (\lambda_0 - \lambda)^m \cdot p(\lambda)$$

Donde $p(\lambda)$ es el polinomio característico de una matriz de tamaño $(n - m) \times (n - m)$

Observemos que λ_0 tiene como mínimo una multiplicidad algebraica $ma(\lambda_0) = m$. Pero si λ_0 es raíz del polinomio $p(\lambda)$ la multiplicidad será mayor a m

Con esto, podemos asegurar que:

$$m \leq ma(\lambda_0)$$

Pero $m = mg(\lambda_0)$, por lo que probamos la última desigualdad que nos da esta proposición. ■

Corolario

Sea $T : V \to V$ con $dim(V) = n$ es diagonalizable si y sólo si:

1. toda raíz λ de $\mathrm{X}_T(\lambda)$ está en $\mathbb{K}$ y,
2. cumple que $ma(\lambda) = mg(\lambda)$

Demostración Denotamos:

1. $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ como los valores propios de T
2. $S_{\lambda_1}, \dots, S_{\lambda_r}$ como los subespacios propios asociados a dichos valores propios

Se cumple que:

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subseteq \{\lambda : \lambda \text{ es raíz de } \mathrm{X}_T(\lambda)\}$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{r} dim(S_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{r} mg(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{r} ma(\lambda_i) \leq \sum_{\lambda : \lambda \text{ raíz de } \mathrm{X}_T(\lambda)} ma(\lambda) = n$$

Por lo tanto, para que esto suceda, todas las desigualdades necesariamente tienen que ser igualdades.

Además, como sabemos que:

T es diagonalizable $\iff \sum_{i=1}^{r} dim(S_{\lambda_i}) = n$

Esto solo se cumple si las todas las desigualdades anteriores son igualdades, y esto a su vez solo se cumple si:

1. toda raíz λ de $\mathrm{X}_T(\lambda)$ está en $\mathbb{K}$ porque necesitamos que:

$$ma(\lambda_i) \leq \sum_{\lambda:\lambda \text{ raíz de } \mathrm{X}_T(\lambda)} ma(\lambda)$$

2. toda raíz λ de $\mathrm{X}_T(\lambda)$ cumple que $ma(\lambda) = mg(\lambda)$, porque necesitamos que:

$$\sum_{i=1}^{r} mg(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{r} ma(\lambda_i)$$

Esto prueba el resultado. ■