Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2 - Examen Julio 2024

Consigna

Ejercicio 2

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 3 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Indicar la opción correcta:

A. Existe un único valor de α y un único valor de β para los cuales la matriz A **NO** es diagonalizable.
B. Existe un único valor de α pero infinitos valores de β para los cuales la matriz A **NO** es diagonalizable.
C. Existen exactamente dos valores de α para los cuales la matriz A **NO** es diagonalizable $\forall \beta \in \mathbb{R}$.
D. Existe un único valor α para el cual la matriz A **NO** es diagonalizable $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Resolución

Calculemos el polinomio característico $\mathrm{X}_A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & \beta \\ 3 & 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & \beta \\ 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(1-\lambda)(\alpha-\lambda) \end{aligned}$$

De donde obtenemos que los valores propios son:

- $\lambda_1 = 5$

- $\lambda_2 = -1$
- $\lambda_3 = \alpha$

Si $\alpha \neq 5$ y $\alpha \neq -1$ entonces A es diagonalizable porque tenemos 3 valores propios distintos dos a dos.

Analicemos los dos casos que quedan.

CASO 1: $\alpha = -1$

Deberíamos verificar que $ma(-1) = mg(-1) = 2$, por lo que investiguemos sobre el subespacio propio.

Tenemos que resolver el siguiente sistema:

- $(A + Id)v = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De esto, la única forma de que $mg(-1) = 2$ es que $\beta = 0$.

Por lo tanto T es diagonalizable en este caso sii $\beta = 0$

CASO 2: $\alpha = 5$

Deberíamos verificar que $ma(5) = mg(5) = 2$, por lo que investiguemos sobre el subespacio propio.

Tenemos que resolver el siguiente sistema:

- $(A - 5Id)v = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & \beta & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De donde obtenemos que:

- $x = 0$
- $y = \frac{\beta z}{6}$
- $z \in \mathbb{R}$

Observemos que sin importar el valor de β, $mg(5) = 1$, por lo que T no es diagonalizable para ningún valor de β en este caso.

Por lo que la opción correcta es la opción **D**