Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

1. Hallar el producto interno en $\mathbb{R}^2$ para el cual $\{(\frac{1}{4}, 0),\ (0,\ \frac{1}{2})\}$ es una base ortonormal
2. Hallar el producto interno en $\mathbb{R}^3$ para el cual $\{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$ es una base ortonormal
3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(x, y) = (x + 3y,\ 3x + y,\ x + y)$$

   Hallar T^* en los siguientes casos:

   - $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual
   - $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual, $\mathbb{R}^3$ con producto interno del punto 1.b
   - $\mathbb{R}^2$ con producto interno del punto 1.a, $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual
   - Ambos espacios con los productos internos hallados en 1.a y 1.b respectivamente

Resolución

Parte 1

Para la resolución de estas partes, vamos a suponer que el producto interno está definido por una matriz G (de tamaño igual a la dimensión del espacio en el que se trabaja) simétrica y positva, de forma que el producto interno queda de la siguiente manera:

$$\langle x, y \rangle = x^T G y$$

Ahora si, veamos que condiciones tiene que cumplir el producto interno para que la base dada sea ortonormal:

- $\langle (\frac{1}{4}, 0), (0, \frac{1}{2}) \rangle = 0$

- $\langle(\frac{1}{4},0),(\frac{1}{4},0)\rangle = 1$
- $\langle(0,\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{2})\rangle = 1$

Entonces, planteemos los sistemas usando $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$:

- $\langle(\frac{1}{4},0),(0,\frac{1}{2})\rangle = (\frac{1}{4},0)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a & \frac{1}{4}b \end{pmatrix}(0,\frac{1}{2}) = \frac{b}{8}$
- $\langle(\frac{1}{4},0),(\frac{1}{4},0)\rangle = (\frac{1}{4},0)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a & \frac{1}{4}b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{16}$
- $\langle(0,\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{2})\rangle = (0,\frac{1}{2})\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{c}{4}$

Lo que nos deja con:

- $\frac{b}{8} = 0 \iff b = 0$
- $\frac{a}{16} = 1 \iff a = 16$
- $\frac{c}{4} = 1 \iff c = 4$

Concluyendo, podemos expresar un producto interno entre dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= x^T G y \\
&= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 16x_1 & 4x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= 16x_1y_1 + 4x_2y_2
\end{aligned}$$

Parte 3

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(x,y) = (x+3y,\ 3x+y,\ x+y)$$

Subparte 1

- $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual

Consideremos las bases canónicas de ambos espacios.

Nos basaremos en lo siguiente para completar nuestro razonamiento:

$$T^*(x',y',z') = x'T^*(1,0,0) + y'T^*(0,1,0) + z'T^*(0,0,1)$$

Entonces calculemos:

- $\langle(x,y),T^*(1,0,0)\rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle T(x,y),(1,0,0)\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle(x+3y,3x+y,x+y),(1,0,0)\rangle_{\mathbb{R}^3} = x+3y = \langle(x,y),(1,3)\rangle_{\mathbb{R}^2}$
  - Entonces $T^*(1,0,0) = (1,3)$

- $\langle (x,y), T^*(0,1,0)\rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle T(x,y), (0,1,0)\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle (x+3y, 3x+y, x+y), (0,1,0)\rangle_{\mathbb{R}^3} = 3x+y = \langle (x,y), (3,1)\rangle_{\mathbb{R}^2}$
  - Entonces $T^*(0,1,0) = (3,1)$
- $\langle (x,y), T^*(0,0,1)\rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle T(x,y), (0,0,1)\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle (x+3y, 3x+y, x+y), (0,0,1)\rangle_{\mathbb{R}^3} = x+y = \langle (x,y), (1,1)\rangle_{\mathbb{R}^2}$
  - Entonces $T^*(0,1,0) = (1,1)$

Por lo que:

$$T^*(x', y', z') = x'(1,3) + y'(3,1) + z'(1,1) \quad = (x' + 3y' + z', 3x' + y' + z')$$

Resto de subpartes

No se realizan por tema de tiempo, pero son todos hechos con la misma idea.