Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 9

Consigna

1. En $\mathbb{R}^4$ con producto interno habitual, hallar una base ortonormal de: $S = [(1,1,0,0),(1,1,1,1),(-1,0,2,1)]$.
2. En $\mathbb{C}^3$ con producto interno habitual, hallar una base ortonormal de: $S = [(1,i,0),(1,1,1)]$.

Resolución

La resolución de este ejercicio es utilizar el método de Ortonormalización de Gram-Schmidt.

Parte 1

En esta parte, consideramos el producto interno habitual de $\mathbb{R}^4$, es decir, el defindo por:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{4} v_i w_i$$

Considerando los vectores que ya tenemos, los describimos como:

- $v_1 = (1,1,0,0)$
- $v_2 = (1,1,1,1)$
- $v_3 = (-1,0,2,1)$

Queremos encontrar vectores $\{w_1, w_2, w_3\}$ tal que:

- $[w_1, w_2, w_3] = [v_1, v_2, v_3]$

Empezamos tomando $w_1 = v_1 = (1,1,0,0)$, a partir de esto definimos w_2 de la siguiente forma:

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$$

Sustituyendo con los valores que conocemos:

$$w_2 = (1,1,1,1) - \frac{\langle (1,1,1,1),(1,1,0,0)\rangle}{\langle (1,1,0,0),(1,1,0,0)\rangle}(1,1,0,0)$$

Cálculemos los productos internos que necesitamos:

- $\langle (1,1,1,1),(1,1,0,0)\rangle = 1+1+0+0 = 2$
- $\langle (1,1,0,0),(1,1,0,0)\rangle = 1+1+0+0 = 2$

Entonces:

$$\begin{aligned} w_2 &= (1,1,1,1) - (1,1,0,0) \\ &= (0,0,1,1) \end{aligned}$$

Ahora deberíamos hacer lo mismo para hallar w_3:

$$w_3 = (-1,0,2,1) - \frac{\langle (-1,0,2,1),(0,0,1,1)\rangle}{\langle (0,0,1,1),(0,0,1,1)\rangle}(0,0,1,1) - \frac{\langle (-1,0,2,1),(1,1,0,0)\rangle}{\langle (1,1,0,0),(1,1,0,0)\rangle}(1,1,0,0)$$

Cálculemos los productos internos que necesitamos:

- $\langle (-1,0,2,1),(0,0,1,1)\rangle = 0+0+2+1 = 3$
- $\langle (0,0,1,1),(0,0,1,1)\rangle = 0+0+1+1 = 2$
- $\langle (-1,0,2,1),(1,1,0,0)\rangle = -1+0+0+0 = -1$

Entonces:

$$\begin{aligned} w_3 &= (-1,0,2,1) - \frac{3}{2}(0,0,1,1) - \frac{-1}{4}(1,1,0,0) \\ &= \left(-1,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(1,1,0,0) \\ &= \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ahora restaría normalizar los vectores, para lo que nos faltaría solo calcular la siguiente norma al cuadrado:

- $\langle \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\rangle = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1$

Considerando $[u_1, u_2, u_3]$ como el resultado al que queremos llegar, tenemos que:

- $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$
- $u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$
- $u_3 = w_3$ pues w_3 ya está normalizado (su norma es 1)

Usando lo obtenido hasta ahora entonces:

- $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$
- $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1) = \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- $u_3 = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Por lo que $\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right]$ es el resultado que estabamos buscando.

Parte 2

En esta parte, consideramos el producto interno habitual de $\mathbb{C}^3$, es decir, el defindo por:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{3} v_i \overline{w_i}$$

Considerando los vectores que ya tenemos, los describimos como:

- $v_1 = (1, i, 0)$
- $v_2 = (1, 1, 1)$

Queremos encontrar vectores $\{w_1, w_2\}$ tal que:

- $[w_1, w_2] = [v_1, v_2]$

Empezamos tomando $w_1 = v_1 = (1, i, 0)$, a partir de esto definimos w_2 de la siguiente forma:

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

Sustituyendo con los valores que conocemos:

$$w_2 = (1, 1, 1) - \frac{\langle (1, 1, 1), (1, i, 0) \rangle}{\langle (1, i, 0), (1, i, 0) \rangle} (1, i, 0)$$

Cálculemos los productos internos que necesitamos:

- $\langle (1, 1, 1), (1, i, 0) \rangle = 1 + (-i) + 0 = 1 - i$
- $\langle (1, i, 0), (1, i, 0) \rangle = 1 + -i^2 + 0 = 2$

Entonces:

$$\begin{aligned} w_2 &= (1, 1, 1) - \frac{1 - i}{2} (1, i, 0) \\ &= (1, 1, 1) - \left(\frac{1 - i}{2}, \frac{1 + i}{2}, 0 \right) \\ &= \left(\frac{1 + i}{2}, \frac{1 - i}{2}, 1 \right) \end{aligned}$$

Ahora restaría normalizar los vectores, para lo que nos faltaría solo calcular la siguiente norma al cuadrado:

- $\left\langle \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, 1\right), \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, 1\right) \right\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$

Considerando $[u_1, u_2]$ como el resultado al que queremos llegar, tenemos que:

- $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$

- $u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$

Usando lo obtenido hasta ahora entonces:

- $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right)$
- $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, 1) = (\frac{1+i}{2\sqrt{2}}, \frac{1-i}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Por lo que $\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1+i}{2\sqrt{2}}, \frac{1-i}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$ es el resultado que estabamos buscando.