

CLASE 3 - 20/2/2025

Vectores y valores propios

Proposición

Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V . Consideramos la matriz $A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$.

Decimos que v es vector propio de T asociado al valor propio λ si:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Es solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda \mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Demostración

(\Rightarrow) Consideramos $v \in V, v \neq \vec{0}$, tal que v es vector propio de T .

Por las hipótesis, se cumple que:

1. $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) \neq (0, 0, \dots, 0)$
2. $\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v)) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\lambda v) = \lambda \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$

A su vez:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v)) = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$$

Entonces, si sustituimos en el punto (2):

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) &= \lambda \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) \iff \\ {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) - \lambda \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) &= (0, 0, \dots, 0) \iff \\ ({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} - \lambda \mathbb{I}) \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) &= (0, 0, \dots, 0) \iff \\ (A - \lambda \mathbb{I}) \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) &= (0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos hallar. Esto prueba (\Rightarrow)

(\Leftarrow) Si $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda \mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Esto equivale a:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = \lambda \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$$

Pero sabiendo que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v))$, entonces:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}}(T(v)) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\lambda v)$$

Por lo tanto: $T(v) = \lambda v$, lo que significa que v es vector propio asociado a λ de T

Corolario

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , una transformación $T : V \rightarrow V$ un operador lineal, \mathcal{B} es base de V , y $A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$

Se cumple que:

λ es valor propio de T sii:

1. $\lambda \in \mathbb{K}$
2. $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

Demostración Por la proposición anterior, sabemos que:

λ es valor propio sii existe $v \in V$ tal que $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v)$ es solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda \mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto pasa solo si el sistema es compatible indeterminado (más de una solución aparte de la trivial). Esto a su vez solo pasa si $(A - \lambda \mathbb{I})$ es invertible, que es equivalente a decir que solo pasa si $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

Ejemplo (hallar valores y vectores propios de una transformación)

Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial con cierta base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $T : V \rightarrow V$. Supongamos que:

$$A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que calcular $\det(A - \lambda \mathbb{I})$ para encontrar los valores propios de T :

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = (2 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

Obtenemos que:

- $\lambda_1 = 0$ es solución, por lo tanto valor propio de T
- $\lambda_2 = 2$ es solución, por lo tanto valor propio de T

Ahora que tenemos los valores propios de T , hallemos los subespacios propios asociados a los λ que hallamos. Para esto tenemos que resolver el sistema de ecuaciones utilizando λ_1, λ_2 :

Subespacio S_0 $\det(A - 0\mathbb{I}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esto es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que equivale al sistema

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

De donde obtengo que:

- $x = 0$
- $y = z$
- $z \in \mathbb{R}$

Entonces $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (0, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}$. Con esto podemos definir el subespacio propio:

$$S_0 = \{v \in V \mid v = \alpha(v_2 + v_3) \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Observemos que $\dim(S_0) = 1$

Subespacio S_2 Reducimos algunos pasos para este caso, ya que siempre es el mismo procedimiento.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

Podemos ver que nos queda:

- $y = -z$

Entonces $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (\alpha, -\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Con esto podemos definir el subespacio propio:

$$S_2 = \{v \in V \mid v = \alpha v_1 + \beta(v_3 - v_2) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Observemos que $\dim(S_2) = 2$

Extensión de vaps y veps a Matrices

La definición de vectores y valores propios se puede extender a matrices en caso de que trabajemos con ellas:

Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Decimos que un vector propio de A asociado a un valor propio λ es un vector no nulo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Entonces los valores propios son soluciones (en \mathbb{K}) de $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

Notación

- Polinomio característico de T : $X_T(\lambda) := \det(A - \lambda \mathbb{I})$
- Ecuación característica de T : $X_T(\lambda) = 0$

Las soluciones de la ecuación característica, son llamadas **raíces características** de T . Entonces si dichas raíces pertenecen al cuerpo de T , son los valores propios de T