

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal no nulo, y v_0 el representante de Riesz de T .

1. Probar que $v_0 \in (Ker(T))^\perp$
2. Probar que $\|v_0\| = \sqrt{T(v_0)}$
3. Probar que $\dim((Ker(T))^\perp) = 1$
4. Si $\{e\}$ es una base ortonormal de $(Ker(T))^\perp$, probar que $v_0 = T(e) \cdot e$
5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$T(1, 0, 0) = 2, \quad T(0, 1, 0) = 1, \quad T(0, 0, 1) = -1$$

Hallar una base de $(Ker(T))^\perp$ y utilizarla para determinar el representante de Riesz de T .

Resolución

Parte 1

Expandamos las definiciones de las cosas con las que estamos trabajando:

- v_0 es el representante de Riesz de T
 - Entonces $\forall v \in V : T(v) = \langle v, v_0 \rangle$
- $v_0 \in (Ker(T))^\perp$
 - Si y solo si: $\forall s \in Ker(T) : \langle s, v_0 \rangle = 0$

Veamos que esto último lo podemos expresar de otra forma:

$$\begin{aligned} v_0 &\in (Ker(T))^\perp \\ &\iff (\text{definición de complemento ortogonal}) \\ \forall s \in Ker(T) : \langle s, v_0 \rangle &= 0 \\ &\iff (\text{definición del representante de Riesz: } T(s) = \langle s, v_0 \rangle) \\ \forall s \in Ker(T) : T(s) &= 0 \end{aligned}$$

Donde esto último se cumple pues todos los vectores en $Ker(T)$ cumplen esa propiedad por pertenecer al núcleo de T

Parte 2

Queremos probar que $\|v_0\| = \sqrt{T(v_0)}$.

Expandamos a ver a que podemos llegar:

$$\begin{aligned} \|v_0\| &= (\text{norma inducida por el producto interno}) \\ &= \sqrt{\langle v_0, v_0 \rangle} \\ &= (\text{definición del representante de Riesz: } T(v_0) = \langle v_0, v_0 \rangle) \\ &= \sqrt{T(v_0)} \end{aligned}$$

Esto prueba la propiedad.

Parte 3

Queremos probar que $\dim((Ker(T))^\perp) = 1$.

Consideremos la siguiente propiedad del complemento ortogonal:

$$\bullet V = Ker(T) \oplus (Ker(T))^\perp$$

De esta podemos deducir que:

$$\bullet \dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim((Ker(T))^\perp) \quad (i)$$

Por otra parte, usando el teorema de las dimensiones, tenemos que:

- $\dim(V) = \dim(Im(T)) + \dim(Ker(T))$
- También tenemos que $\dim(Im(T)) = 1$ pues T es no nula y es una funcional lineal (por hipótesis)

Entonces podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(Im(T)) + \dim(Ker(T)) \\ &\iff \\ 3 &= 1 + \dim(Ker(T)) \\ &\iff \\ \dim(Ker(T)) &= 2 \end{aligned}$$

Volviendo a (i), tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\dim(V) &= \dim(\text{Ker}(T)) + \dim((\text{Ker}(T))^\perp) \\
&\iff \\
3 &= 2 + \dim((\text{Ker}(T))^\perp) \\
&\iff \\
\dim((\text{Ker}(T))^\perp) &= 1
\end{aligned}$$

Esto prueba la propiedad.

Parte 4

Queremos probar que si $\{e\}$ es una base ortonormal de $(\text{Ker}(T))^\perp$, probar que $v_0 = T(e) \cdot e$.

Por la propiedad 1, sabemos que $v_0 \in (\text{Ker}(T))^\perp$, por lo tanto si $\{e\}$ es base de $(\text{Ker}(T))^\perp$, tenemos que:

- $v_0 = \alpha e$ con $\alpha \in \mathbb{K}$

Ahora observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&T(e) \\
&= (\text{definición del representante de Riesz}) \\
&\langle e, v_0 \rangle \\
&= (\text{expandiendo } v_0) \\
&\langle e, \alpha e \rangle \\
&= (\text{propiedades del producto interno}) \\
&\alpha \langle e, e \rangle \\
&= (\|e\|=1) \\
&\alpha
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha = T(e)$, entonces $v_0 = T(e) \cdot e$. Esto prueba la propiedad.

Parte 5

Para esta parte primero hallemos $T(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Tenemos que:

- $T(1, 0, 0) = 2$
- $T(0, 1, 0) = 1$
- $T(0, 0, 1) = -1$

Considerando la base canónica de \mathbb{R}^3 , podemos decir que:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

$$\iff \text{(aplicando } T)$$

$$T(x, y, z) = xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1)$$

$$\iff \text{(sustituyendo por los valores conocidos de } T)$$

$$T(x, y, z) = 2x + y - z$$

Y esto vale para todo $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Se ve claramente que $v_0 = (2, 1, -1)$. Por lo que realizar el otro procedimiento no tiene sentido.