

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 4

### Consigna

Hallar la forma y una base de Jordan para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

### Resolución (parte a)

Hallemos los valores propios de  $A$ :

$$\begin{aligned} X_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -6 \\ 2 & -4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (4 - \lambda)(-4 - \lambda) + 12 \\ &= \lambda^2 - 16 + 12 \\ &= \lambda^2 - 4 \end{aligned}$$

De donde sacamos que:

- $\lambda_1 = 2$
- $\lambda_2 = -2$

Entonces la forma de Jordan es:

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Para hallar la base tenemos que hallar los subespacios propios:

$S_2$

Tenemos que resolver el sistema  $(A - 2I)v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -6 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $x = 3y$
- $y \in \mathbb{R}$

Entonces una base de este subespacio podría ser:

$$\{(3, 1)\}$$

$S_{-2}$

Tenemos que resolver el sistema  $(A + 2\mathbb{I})v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 6 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $x = y$
- $y \in \mathbb{R}$

Entonces una base de este subespacio podría ser:

$$\{(1, 1)\}$$

Juntando ambas cosas, obtenemos una base de Jordan:

$$\mathcal{B} = \{(3, 1), (1, 1)\}$$

## Resolución (parte b)

Hallemos los valores propios de  $B$ :

$$\begin{aligned} X_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (4 - \lambda)(-\lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 4 \end{aligned}$$

Usando Bhaskara:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

De donde sacamos que  $\lambda = 2$  es raíz doble, es decir que  $ma(2) = 2$ .

En este caso para hallar la forma de Jordan primero debemos hallar  $mg(2)$ , calculemos el subespacio propio:

$S_2$

Tenemos que resolver el sistema  $(B - 2\mathbb{I})v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $x = y$
- $y \in \mathbb{R}$

Entonces una base de este subespacio podría ser:

$$\{(1, 1)\}$$

Por lo que  $mg(2) = 1$ , esto implica que  $B$  NO es diagonalizable, la forma de Jordan sería:

$$J_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para hallar una base de Jordan, tenemos que elegir un vector  $v_1$  tal que sea LI a  $v_2 = (1, 1)$  que obtuvimos del subespacio propio asociado a 2. Para esto, veamos lo que nos dice la forma de Jordan:

$$\begin{aligned} B(v_1) &= 2v_1 + v_2 \\ (B - 2\mathbb{I})v_1 &= v_2 \end{aligned}$$

Podemos plantear ese sistema para obtener quién es  $v_1$ .

$$\left( \begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $x = \frac{1-2y}{-2}$
- $y \in \mathbb{R}$

De aquí podemos elegir un vector que cumpla con estas condiciones, por ejemplo:  $v_1 = (\frac{-1}{2}, 0)$ .

Juntando esto con lo hallado en el subespacio propio tenemos que la base de Jordan es la siguiente:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left( \frac{-1}{2}, 0 \right), (1, 1) \right\}$$

## Resolución (parte d)

Hallemos los valores propios de  $D$ :

$$\begin{aligned} X_D(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-1) \end{aligned}$$

De donde sacamos que:

- $\lambda_1 = 1$  con  $ma(1) = 2$
- $\lambda_2 = -1$  con  $ma(-1) = 1$

En este caso para hallar la forma de Jordan primero debemos hallar  $mg(2)$ , calculemos el subespacio propio:

$$S_1$$

Tenemos que resolver el sistema  $(D - 1\mathbb{I})v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $x = y + z$
- $y \in \mathbb{R}$
- $z \in \mathbb{R}$

El subespacio asociado sería el definido por:

$$S_1 = \{(\alpha + \beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Entonces una base de este subespacio podría ser:

$$\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

Por lo que  $mg(2) = 2$ , esto implica que  $D$  es diagonalizable, la forma de Jordan sería:

$$J_D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hallemos el subespacio asociado a  $-1$  para obtener otro vector y completar la base de Jordan.

$$S_{-1}$$

Tenemos que resolver el sistema  $(D + 1\mathbb{I})v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $x = 0$
- $z = y$
- $y \in \mathbb{R}$

El subespacio asociado sería el definido por:

$$S_{-1} = \{(0, \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Entonces una base de este subespacio podría ser:

$$\{(0, 1, 1)\}$$

Juntando lo hallado con los dos subespacios, podemos dar la siguiente base de Jordan:

$$\mathcal{B} = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

## Resolución (parte e)

Halleemos los valores propios de  $E$ :

$$\begin{aligned} X_E(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= ((2-\lambda)^2(3-\lambda) + 0 + 3 - (3(2-\lambda) + 2(2-\lambda) + 0)) \\ &= ((2-\lambda)^2(3-\lambda) + 3 - 5(2-\lambda)) \\ &= (2-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 5) + 3 \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 1) + 3 \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 \end{aligned}$$

## Recordatorio (teorema de raíces racionales)

Si un polinomio tiene raíces racionales, estas son de la forma  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  es un divisor del término independiente y  $q$  es un divisor del coeficiente del término de mayor grado.

## Continuación

Ahora que conocemos la forma de las raíces, podemos concluir que las raíces del polinomio de tercer grado anterior están incluidas en la lista:  $\{\pm 1, \pm 5\}$

Probemos con 1:

$$\begin{aligned}
-(1)^3 + 7 \cdot 1^2 - 11 \cdot 1 + 5 &= -1 + 7 - 11 + 5 \\
&= -12 + 12 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como sabemos que 1 es raíz, podemos factorizar el polinomio con ruffini:

	$\lambda^3$	$\lambda^2$	$\lambda^1$	$1$
	$-1$	$7$	$-11$	$5$
$1$	$\downarrow$	$-1$	$6$	$-5$
	$-1$	$6$	$-5$	$0$

Por lo tanto, puedo expresar el polinomio de tercer grado como:

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 6\lambda - 5)$$

Entonces tenemos  $\lambda_1 = 1$ , y ahora usando Bhaskara puedo obtener todas las demás raíces:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{-2} \\
&= \frac{-6 \pm 4}{-2}
\end{aligned}$$

De donde obtenemos:

- $\lambda_1 = 1$
- $\lambda_2 = 5$

Entonces, recapitulando, tenemos:

- $\lambda_1 = 1$  con  $ma(1) = 2$
- $\lambda_2 = 5$  con  $ma(5) = 1$

En este caso para hallar la forma de Jordan primero debemos hallar  $mg(1)$ , calculemos el subespacio propio:

$$S_1$$

Tenemos que resolver el sistema  $(D - 1\mathbb{I})v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $z = y$
- $x = 0$
- $y \in \mathbb{R}$

El subespacio asociado sería el definido por:

$$S_1 = \{(0, \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Entonces una base de este subespacio podría ser:

$$\{(0, 1, 1)\}$$

Por lo que  $mg(1) = 2$ , esto implica que  $E$  NO es diagonalizable, la forma de Jordan sería:

$$J_E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hallemos el subespacio asociado a 5 para obtener otro vector para la base de Jordan.

$S_5$

Tenemos que resolver el sistema  $(E - 5\mathbb{I})v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $z = -3y$
- $x = \frac{4}{3}y$
- $y \in \mathbb{R}$

El subespacio asociado sería el definido por:

$$S_5 = \{(\frac{4}{3}\alpha, \alpha, -3\alpha) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Entonces una base de este subespacio podría ser:

$$\{(4, 3, -12)\}$$

Con esto, nuestra base de Jordan se ve algo así:

$$\mathcal{B} = \{(4, 3, -12), v_2, (0, 1, 1)\}$$

Hallemos el vector  $v_2$  en base a lo que sabemos por la forma de Jordan:

$$E(v_2) = v_2 + v_3(E - \mathbb{I})v_2 = v_3$$

Esto nos plantea el siguiente sistema:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

De donde sacamos que:

- $z = y - 1$
- $x = -1$
- $y \in \mathbb{R}$

Con esto podemos elegir un vector, por ejemplo:

$$v_2 = (-1, 1, 0)$$

Entonces la base quedaría:

$$\mathcal{B} = \{(4, 3, -12), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

Solo habría que verificar que los vectores son LI, por lo tanto, verifiquemos que el siguiente determinante sea diferente a 0:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -12 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 12 - (0 + 0 - 3) = 13$$

Con esto confirmamos que  $\mathcal{B}$  es una base, y además es base de Jordan.