Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Sea $S = [(3, 5, 1)] \cup \{(0, 1, 1)\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^3$.
Se considera el producto interno:

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$$

Calcular $S^\perp$.

Resolución

Definimos los conjuntos S y $S^\perp$ como los siguientes:

- $S = \{(3\alpha, 5\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 1, 1)\}$
- $S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$

Primero, necesitamos que el siguiente razonamiento sea válido para $v \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\langle v, s \rangle = 0 \\
&\iff \text{(ampliando los vectores)} \\
&\langle (x, y, z), (3\alpha, 5\alpha, \alpha) \rangle = 0 \\
&\iff \text{(cálculo del producto interno)} \\
&x3\alpha + 2y5\alpha + z3\alpha = 0 \\
&\iff \text{(simplificando)} \\
&\alpha(3x + 10y + 3z) = 0
\end{aligned}$$

Esto último es cierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ solo si:

- $z = -\frac{10}{3}y - x$
- $y \in \mathbb{R}$
- $x \in \mathbb{R}$

En segundo lugar, necesitamos que el siguiente razonamiento también sea válido para $v \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\langle v, (0,1,1)\rangle = 0\\
&\iff \text{(ampliando los vectores)}\\
&\langle (x,y,z), (0,1,1)\rangle = 0\\
&\iff \text{(cálculo del producto interno)}\\
&2y + 3z = 0\\
&\iff \text{(simplificando)}\\
&2y + 3z = 0
\end{aligned}$$

Esto último es cierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ solo si:

- $z = -\frac{2}{3}y$
- $x \in \mathbb{R}$
- $z \in \mathbb{R}$

Juntando ambas partes, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&z = z\\
&\iff \text{(resultados obtenidos)}\\
&-\frac{10}{3}y - x = -\frac{2}{3}y\\
&\iff \text{(simplificando)}\\
&x = -\frac{8}{3}y
\end{aligned}$$

Recapitulando, necesitamos que se cumplan las siguientes igualdades:

- $x = -\frac{8}{3}y$
- $y \in \mathbb{R}$
- $z = -\frac{2}{3}y$

Entonces, tenemos que:

$$S^{\perp} = \{(-8\alpha, 3\alpha, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}\mathcal{B}^{S^{\perp}} = \{(-8,3,-2)\}$$