Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 9

Consigna

Dadas las bases $\mathcal{A} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Hallar $coord_{\mathcal{A}}(v)$ y $coord_{\mathcal{B}}(v)$ $\forall v \in \mathbb{R}^3$.
2. Dada $Id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación identidad, hallar ${}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}}$.
3. Verificar que: $coord_{\mathcal{A}}(v) = {}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}} \cdot coord_{\mathcal{B}}(v)$ y $coord_{\mathcal{B}}(v) = {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}} \cdot coord_{\mathcal{A}}(v)$

Resolución (parte 1)

Hallemos $coord_{\mathcal{A}}(v)$ y $coord_{\mathcal{B}}(v)$ $\forall v \in \mathbb{R}^3$. Para esto, llamemos $v = (x,y,z)$, entonces:

$$coord_{\mathcal{A}}(v) = (a_1, a_2, a_3)$$

Tal que a_1, a_2, a_3 cumplen lo siguiente:

$$(x,y,z) = a_1(1,1,0) + a_2(1,0,1) + a_3(0,1,1)$$

Esto nos deja con el siguiente sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 2 & z+y-x \end{array}\right)$$

Entonces:

- $a_3 = \frac{z+y-x}{2}$
- $a_2 = -(\frac{-z-y+x}{2} + y - x) = -(\frac{-z+y-x}{2}) = \frac{z-y+x}{2}$
- $a_1 = x + \frac{-z+y-x}{2} = \frac{-z+y+x}{2}$

Concluimos que:

$$coord_{\mathcal{A}}(v) = (\frac{-z+y+x}{2}, \frac{z-y+x}{2}, \frac{z+y-x}{2}) = \frac{1}{2}(-z+y+x, z-y+x, z+y-x)$$

Ahora hagamos lo mismo con:

$$coord_{\mathcal{B}}(v) = (b_1, b_2, b_3)$$

Tal que b_1, b_2, b_3 cumplen lo siguiente:

$$(x, y, z) = b_1(1, 0, 1) + b_2(0, 1, 0) + b_3(-1, 0, 0)$$

Esto nos deja con el sistema:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \end{array}\right.$$

Se observa trivialmente que:

- $b_1 = z$
- $b_2 = y$
- $b_3 = -(x - z) = -x + z$

Entonces:

$$coord_{\mathcal{B}}(v) = (z, y, -x + z)$$

Resolución (parte 2)

Queremos hallar ${}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}}$, para esto tenemos que hallar las coordenadas de los vectores de la base de partida $\mathcal{B}$ transformados, en la base de llegada $\mathcal{A}$; es decir:

- $coord_{\mathcal{A}}(Id(1, 0, 1)) = \frac{1}{2}(0, 2, 0) = (0, 1, 0)$
- $coord_{\mathcal{A}}(Id(0, 1, 0)) = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$
- $coord_{\mathcal{A}}(Id(-1, 0, 0)) = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$

Observación: Obviamente acá usamos la fórmula que hallamos en la parte anterior, o sea la siguiente:

$$coord_{\mathcal{A}}(v) = \frac{1}{2}(-z + y + x, z - y + x, z + y - x)$$

Entonces:

$${}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora hallemos ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}}$:

- $coord_{\mathcal{B}}(Id(1, 1, 0)) = (0, 1, -1)$
- $coord_{\mathcal{B}}(Id(1, 0, 1)) = (1, 0, 0)$

- $coord_{\mathcal{B}}(Id(0,1,1)) = (1,1,1)$

Entonces:

$$_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución (parte 3)

Verifiquemos que $coord_{\mathcal{A}}(v) = {}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}} \cdot coord_{\mathcal{B}}(v)$:

$$coord_{\mathcal{A}}(v) = \frac{1}{2}(-z+y+x, z-y+x, z+y-x)$$

$$coord_{\mathcal{B}}(v) = (z, y, -x+z)$$

$$\frac{1}{2}(-z+y+x, z-y+x, z+y-x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ y \\ -x+z \end{pmatrix}$$

Esto se verifica, chequear mentalmente. Ahora lo mismo para:

$$(z, y, -x+z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-z+y+x}{2} \\ \frac{z-y+x}{2} \\ \frac{z+y-x}{2} \end{pmatrix}$$

También se verifica, en caso de duda siempre verificarlo haciendo la cuenta. Mentalmente es más fácil para evitar la cantidad de cuentas