

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 1

### Consigna

Hallar el representante de Riesz de los siguientes funcionales lineales:

1.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(x, y, z) = x + 2y - 3z$
2.  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $T(x, y, z) = ix + (2 + 3i)y + (1 - 2i)z$
3.  $T : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(p) = p(\alpha)$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  fijo
4.  $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(p) = p(0) + p'(1)$

### Resolución

#### Recordatorio (definición de representante de Riesz)

Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno, tal que  $\dim(V) = n$ . Si  $T : V \rightarrow \mathbb{K}$  es una funcional lineal entonces existe un único  $w \in V$  tal que  $T(v) = \langle v, w \rangle \quad \forall v \in V$ . Llamamos a  $w \in V$  el representante de Riesz de la funcional lineal  $T$

#### Parte 1

Consideramos  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(x, y, z) = x + 2y - 3z$ .

Queremos encontrar  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$  tal que para todo  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  se cumpla que  $T(v) = \langle v, w \rangle$ . Considerando el producto interno usual, tenemos que:

$$\bullet \langle (x, y, z), (w_1, w_2, w_3) \rangle = xw_1 + yw_2 + zw_3$$

Para cumplir la igualdad necesitamos que:

$$x + 2y - 3z = xw_1 + yw_2 + zw_3$$

De donde sacamos que:  $w = (1, 2, -3)$

#### Parte 2

Consideramos  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $T(x, y, z) = ix + (2 + 3i)y + (1 - 2i)z$ .

Queremos encontrar  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$  tal que para todo  $v = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  se cumpla que  $T(v) = \langle v, w \rangle$ . Considerando el producto interno usual, tenemos que:

- $\langle (x, y, z), (w_1, w_2, w_3) \rangle = x\overline{w_1} + y\overline{w_2} + z\overline{w_3}$

Para cumplir la igualdad necesitamos que:

$$ix + (2 + 3i)y + (1 - 2i)z = x\overline{w_1} + y\overline{w_2} + z\overline{w_3}$$

De donde sacamos que:  $w = (-i, 2 - 3i, 1 + 2i)$

### Parte 3

Consideramos  $T : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(p) = p(\alpha)$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  fijo.

Queremos encontrar  $w = ax + b \in \mathbb{R}_1[x]$  tal que para todo  $p \in \mathbb{R}_1[x]$  se cumpla que  $T(p) = \langle p, w \rangle$ . Considerando el producto interno usual, tenemos que:

- $\langle p, w \rangle = \int_0^1 (ax + b)p(x)dx$  para todo  $p \in \mathbb{R}_1[x]$

Enfrentaremos este caso de forma diferente a los casos de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{C}^3$ , vamos a trabajar con la base canónica de  $\mathbb{R}_1[x]$  para obtener un sistema que nos permita encontrar  $a$  y  $b$  para construir  $w \in \mathbb{R}_1[x]$ :

- Considerando  $p = 1$ :  
–  $T(1) = 1(\alpha) = 1 = \int_0^1 ax + b \cdot 1dx = \frac{a}{2} + b$
- Considerando  $p = x$ :  
–  $T(x) = x(\alpha) = \alpha = \int_0^1 (ax + b)x dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$

Esto nos deja con el siguiente sistema:

$$\left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \alpha \end{array} \right) \sim_{(2F_1 \text{ y } 6F_2)} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6\alpha \end{array} \right) \sim_{(F_2 - 2F_1)} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 6\alpha - 4 \end{array} \right)$$

Sustituyendo obtenemos que:

- $b = -6\alpha + 4$
- $a = 2 - 2(-6\alpha + 4) = 12\alpha - 6$

Entonces el representante de Riesz es  $w = (12\alpha - 6)x + (-6\alpha + 4)$

### Parte 4

Consideramos  $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(p) = p(0) + p'(1)$

Queremos encontrar  $w = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$  tal que para todo  $p \in \mathbb{R}_2[x]$  se cumpla que  $T(p) = \langle p, w \rangle$ . Considerando el producto interno usual, tenemos que:

- $\langle p, w \rangle = \int_0^1 p(x)(ax^2 + bx + c)dx$

Enfrentaremos este caso de forma diferente a los casos de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{C}^3$ , vamos a trabajar con la base canónica de  $\mathbb{R}_2[x]$  para obtener un sistema que nos permita encontrar  $a$  y  $b$  para construir  $w \in \mathbb{R}_2[x]$ :

- Considerando  $p = 1$ :  
–  $T(1) = 1(0) + 1'(1) = 1 = \int_0^1 1 \cdot (ax^2 + bx + c)dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$

- Considerando  $p = x$ :
  - $T(x) = x(0) + x'(1) = 1 = \int_0^1 x(ax^2 + bx + c)dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2}$
- Considerando  $p = x^2$ :
  - $T(x) = x^2(0) + (x^2)'(1) = 2 = \int_0^1 x^2(ax^2 + bx + c)dx = \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3}$

Esto nos deja con el siguiente sistema:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 2 \end{array} \right) \sim_{(6F_1, 24F_2 \text{ y } 60F_3)} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 6 & 6 \\ 6 & 8 & 12 & 24 \\ 12 & 15 & 20 & 120 \end{array} \right) \sim_{(F_2-3F_1 \text{ y } F_3-6F_1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & 6 \\ 0 & -3 & -16 & 84 \end{array} \right) \sim_{(F_3-3F_2)}$$

Sustituyendo obtenemos que:

- $c = 33$
- $b = -6 - 6(33) = -204$
- $a = \frac{6-6(33)-3(-204)}{2} = 210$

Por lo tanto, tenemos que  $w = 210x^2 - 204x + 33$