Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 7 - 25/03/2025

Gershgorin

Círculos de Gershgorin

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz cuadrada. con la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Considerando la fila i de la matriz, se define el disco de Gershgorin C_i como el disco centrado en a_{ii} con radio R_i tal que:

- R_i es la suma de los módulos de todos los elementos de la fila i a excepción de a_{ii}

Teorema de Gershgorin

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$:

1. Si λ es valor propio de A, entonces $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} C_i$
2. Si el conjunto $M = C_{i1} \cup C_{i2} \cup \ldots \cup C_{im}$ es disjunto con respecto a los demás discos, entonces M contiene exactamente m valores propios de A

Demostración

1. Consideramos λ_0 un valor propio de A, y $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ un vector propio asociado a λ_0. Esto significa que:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Consideramos el componente del vector propio que tiene mayor módulo, es decir el elemento que se encuentra en la posición i_0 tal que $|x_{i_0}| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ Como estamos trabajando con un vector propio, sabemos que por lo menos uno de los valores será distinto de 0, por lo que $|x_{i_0}| > 0$.

Consideremos la igualdad anterior ahora expandiendo la matriz A:

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_0 1} & a_{i_0 2} & ... & a_{i_0 i_0} & ... & a_{i_0 n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i_0 1}x_1 + a_{i_0 2}x_2 + ... + a_{i_0 i_0}x_{i_0} + ... + a_{i_0 n}x_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Y como λ_0 es valor propio tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i_0 1}x_1 + a_{i_0 2}x_2 + ... + a_{i_0 i_0}x_{i_0} + ... + a_{i_0 n}x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda_0 x_{i_0} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Entonces podemos decir que:

$$\begin{aligned}
&a_{i_0 1}x_1 + a_{i_0 2}x_2 + ... + a_{i_0 i_0}x_{i_0} + ... + a_{i_0 n}x_n = \lambda_0 x_{i_0} \\
&a_{i_0 1}x_1 + a_{i_0 2}x_2 + ... + a_{i_0 n}x_n = \lambda_0 x_{i_0} - a_{i_0 i_0}x_{i_0} \\
&\sum_{j=1;j\neq i_0}^{n} a_{i_0 j}x_j = x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0 i_0}) \\
&|\sum_{j=1;j\neq i_0}^{n} a_{i_0 j}x_j| = |x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0 i_0})| \\
&|x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0 i_0})| = |\sum_{j=1;j\neq i_0}^{n} a_{i_0 j}x_j| \leq \sum_{j=1;j\neq i_0}^{n} |a_{i_0 j}x_j| = \sum_{j=1;j\neq i_0}^{n} |a_{i_0 j}||x_j| \\
&|x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0 i_0})| = |\sum_{j=1;j\neq i_0}^{n} a_{i_0 j}x_j| \leq \sum_{j=1;j\neq i_0}^{n} |a_{i_0 j}x_j| = \sum_{j=1;j\neq i_0}^{n} |a_{i_0 j}||x_{i_0}| \\
&|x_{i_0}(\lambda_0 - a_{i_0 i_0})| \leq \sum_{j=1;j\neq i_0}^{n} |a_{i_0 j}||x_{i_0}| \\
&|\lambda_0 - a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j=1;j\neq i_0}^{n} |a_{i_0 j}|
\end{aligned}$$

Donde se observa que el lado derecho de la desigualdad es el radio del disco de Gershgorin C_{i_0}, por lo que $\lambda_0 \in C_{i_0}$, por consecuencia $\lambda_0 \in \bigcup_{i=1}^{n} C_i$

2. Se prueba en el libro rojo, pero no se da en la clase con detalle.