

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 9

Consigna

Dadas las bases $\mathcal{A} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 .

1. Hallar $coord_{\mathcal{A}}(v)$ y $coord_{\mathcal{B}}(v) \forall v \in \mathbb{R}^3$.
2. Dada $Id : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación identidad, hallar ${}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}}$.
3. Verificar que: $coord_{\mathcal{A}}(v) = {}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}} \cdot coord_{\mathcal{B}}(v)$ y $coord_{\mathcal{B}}(v) = {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}} \cdot coord_{\mathcal{A}}(v)$

Resolución (parte 1)

Hallemos $coord_{\mathcal{A}}(v)$ y $coord_{\mathcal{B}}(v) \forall v \in \mathbb{R}^3$. Para esto, llamemos $v = (x, y, z)$, entonces:

$$coord_{\mathcal{A}}(v) = (a_1, a_2, a_3)$$

Tal que a_1, a_2, a_3 cumplen lo siguiente:

$$(x, y, z) = a_1(1, 1, 0) + a_2(1, 0, 1) + a_3(0, 1, 1)$$

Esto nos deja con el siguiente sistema:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & x & 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y & 0 & -1 & 1 & y - x \\ 0 & 1 & 1 & z & 0 & 1 & 1 & z \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} x & 1 & 1 & 0 & x \\ y - x & 0 & -1 & 1 & y - x \\ z & 0 & 0 & 2 & z + y - x \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \bullet \quad a_3 &= \frac{z+y-x}{2} \\ \bullet \quad a_2 &= -\left(\frac{-z-y+x}{2} + y - x\right) = -\left(\frac{-z+y-x}{2}\right) = \frac{z-y+x}{2} \\ \bullet \quad a_1 &= x + \frac{-z+y-x}{2} = \frac{-z+y+x}{2} \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$coord_{\mathcal{A}}(v) = \left(\frac{-z+y+x}{2}, \frac{z-y+x}{2}, \frac{z+y-x}{2}\right) = \frac{1}{2}(-z+y+x, z-y+x, z+y-x)$$

Ahora hagamos lo mismo con:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (b_1, b_2, b_3)$$

Tal que b_1, b_2, b_3 cumplen lo siguiente:

$$(x, y, z) = b_1(1, 0, 1) + b_2(0, 1, 0) + b_3(-1, 0, 0)$$

Esto nos deja con el sistema:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \end{array}$$

Se observa trivialmente que:

- $b_1 = z$
- $b_2 = y$
- $b_3 = -(x - z) = -x + z$

Entonces:

$$\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (z, y, -x + z)$$

Resolución (parte 2)

Queremos hallar ${}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}}$, para esto tenemos que hallar las coordenadas de los vectores de la base de partida \mathcal{B} transformados, en la base de llegada \mathcal{A} ; es decir:

- $\text{coord}_{\mathcal{A}}(Id(1, 0, 1)) = \frac{1}{2}(0, 2, 0) = (0, 1, 0)$
- $\text{coord}_{\mathcal{A}}(Id(0, 1, 0)) = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$
- $\text{coord}_{\mathcal{A}}(Id(-1, 0, 0)) = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$

Observación: Obviamente acá usamos la fórmula que hallamos en la parte anterior, o sea la siguiente:

$$\text{coord}_{\mathcal{A}}(v) = \frac{1}{2}(-z + y + x, z - y + x, z + y - x)$$

Entonces:

$${}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora hallemos ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}}$:

- $\text{coord}_{\mathcal{B}}(Id(1, 1, 0)) = (0, 1, -1)$
- $\text{coord}_{\mathcal{B}}(Id(1, 0, 1)) = (1, 0, 0)$

- $coord_{\mathcal{B}}(Id(0, 1, 1)) = (1, 1, 1)$

Entonces:

$${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución (parte 3)

Verifiquemos que $coord_{\mathcal{A}}(v) = {}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}} \cdot coord_{\mathcal{B}}(v)$:

$$coord_{\mathcal{A}}(v) = \frac{1}{2}(-z + y + x, z - y + x, z + y - x)$$

$$coord_{\mathcal{B}}(v) = (z, y, -x + z)$$

$$\frac{1}{2}(-z + y + x, z - y + x, z + y - x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ y \\ -x + z \end{pmatrix}$$

Esto se verifica, chequear mentalmente. Ahora lo mismo para:

$$(z, y, -x + z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-z+y+x}{2} \\ \frac{z-y+x}{2} \\ \frac{z+y-x}{2} \end{pmatrix}$$

También se verifica, en caso de duda siempre verificarlo haciendo la cuenta. Mentalmente es más fácil para evitar la cantidad de cuentas