Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 12

Consigna

En cada caso, dados producto interno, subespacio S y vector v, hallar $P_S(v)$.

1. En $\mathbb{R}^4$ con producto interno habitual y:
   - $S = [(1, -1, 1, 1), (2, 1, 0, 3)]$,
   - $v = (1, 2, 3, 4)$
2. Igual a anterior, pero $v = (x, y, z, t)$ cualquiera
3. En $\mathbb{R}^3$ con:
   - $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3$ y,
   - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}$
   - $v = (1, -1, 0)$
4. En $\mathbb{C}^3$ con producto interno usual,
   - $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x + (+i)y - z = 0\}$,
   - $v = (0, 1, i)$

Resolución

Parte 1

Lo primero que deberíamos hacer es verificar si lo que nos dieron como base de S es una base ortonormal:

- $\langle (1, -1, 1, 1), (2, 1, 0, 3) \rangle = 2 - 1 + 0 + 3 = 4 \neq 0$

Como no es ni siquiera ortogonal, tenemos que aplicar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt.

Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ la base ortonormal que queremos hallar, entonces, primero hallamos los vectores w_1, w_2 que forman una base de S y además son ortogonales:

- $w_1 = v_1 = (1, -1, 1, 1)$
- $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$

Entonces, calculemos w_2:

- $\langle (2,1,0,3),(1,-1,1,1)\rangle = 2-1+0+3 = 4$
- $\langle (1,1,1,1),(1,-1,1,1)\rangle = 1-1+1+1 = 4$
- $w_2 = (2,1,0,3)-(1,-1,1,1) = (1,2,-1,2)$

Entonces, ahora tenemos que normalizar los vectores:

- $\|w_1\| = \sqrt{\langle (1,-1,1,1),(1,-1,1,1)\rangle} = \sqrt{1+1+1+1} = \sqrt{4} = 2$
- $\|w_2\| = \sqrt{\langle (1,2,-1,2),(1,2,-1,2)\rangle} = \sqrt{1+4+1+4} = \sqrt{10}$

Concluyendo, la base ortonormal que hallamos es:

- $u_1 = \frac{1}{2}(1,-1,1,1)$
- $u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-1,2)$

Ahora, podemos hallar $P_S(v)$ de la siguiente forma:

- $\langle v,u_1\rangle = \frac{1}{2}\langle (1,2,3,4),(1,-1,1,1)\rangle = \frac{1}{2}(1-2+3+4) = 3$
- $\langle v,u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\langle (1,2,3,4),(1,2,-1,2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(1+4-3+8) = \frac{10}{\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$

$$\begin{aligned}
P_S(v) &= \langle v,u_1\rangle \frac{1}{2}(1,-1,1,1) + \langle v,u_2\rangle \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-1,2) \\
&= \frac{3}{2}(1,-1,1,1) + (1,2,-1,2) \\
&= \left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) + (1,2,-1,2) \\
&= \left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)
\end{aligned}$$

Parte 2

Esta parte va a ser bastante más breve que la anterior, porque no vamos a necesitar hallar la base ortonormal, ya que ya tenemos una: $\mathcal{B} = \{\frac{1}{2}(1,-1,1,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-1,2)\}$.

Con esto, podemos hallar $P_S(v)$ de la siguiente forma:

- $\langle v,u_1\rangle = \langle (x,y,z,t),\frac{1}{2}(1,-1,1,1)\rangle = \frac{1}{2}(x-y+z+t)$
- $\langle v,u_2\rangle = \left\langle (x,y,z,t),\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-1,2)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(x+2y-z+2t)$

$$\begin{aligned}
P_S(v) &= \frac{1}{2}(x-y+z+t)\frac{1}{2}(1,-1,1,1) + \frac{1}{\sqrt{10}}(x+2y-z+2t)\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-1,2) \\
&= \frac{1}{4}(x-y+z+t,-x+y-z-t,x-y+z+t,x-y+z+t) + \frac{1}{10}(x+2y-z+2t,2x+4y- \\
&= \frac{1}{20}(5x-5y+5z+5t,-5x+5y-5z-5t,5x-5y+5z+5t,5x-5y+5z+5t) + \frac{1}{20}(2x+4 \\
&= \frac{1}{20}(7x-y+3z+9t,-x+13y-9z+3t,3x-9y+7z+t,9x+3y+z+13t)
\end{aligned}$$

Parte 3

Veamos los datos que tenemos:

- $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3$ y,
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}$
- $v = (1, -1, 0)$

Primero, encontremos una base de S, los datos que nos dan son que:

- $x \in \mathbb{R}$
- $y \in \mathbb{R}$
- $z = y$

Entonces podemos definir el conjunto como:

- $S = \{(\alpha, \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- $S = [(1, 0, 0), (0, 1, 1)]$

Habría que verificar si la base es ortonormal, primero verifiquemos si es ortogonal

- $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle = 0 + 1 + 0 + 0 + 0 \neq 0$

Entonces, usamos el método de Gram-Schmidt para ortonormalizar el conjunto. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ la base que queremos hallar, entonces, primero hallamos los vectores w_1, w_2 que forman una base de S y además son ortogonales:

- $w_1 = (1, 0, 0)$
- $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$

Entonces, calculemos w_2:

- $\langle v_2, w_1 \rangle = \langle (0, 1, 1), (1, 0, 0) \rangle = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle = 0 + 1 + 0 + 0 + 0 = 1$
- $\langle w_1, w_1 \rangle = \langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle = 2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2$
- $w_2 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, 0) = \frac{1}{2}(-1, 2, 2)$

Ahora deberíamos normalizar los vectores, para esto cálculamos la norma que nos falta:

- $\langle w_2, w_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle (-1, 2, 2), (-1, 2, 2) \rangle = \frac{1}{2}(2 - 2 - 2 + 16 + 4) = 18$

Concluyendo, la base ortonormal que hallamos es:

- $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0)$
- $u_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \frac{1}{2}(-1, 2, 2) = \frac{1}{3\sqrt{2} \cdot 2}(-1, 2, 2) = \frac{1}{6\sqrt{2}}(-1, 2, 2)$

Ahora, podemos hallar $P_S(v)$ de la siguiente forma:

- $\langle v, u_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (1, -1, 0), (1, 0, 0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 + 0 - 1 + 0 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\langle v, u_2 \rangle = \frac{1}{6\sqrt{2}} \langle (1, -1, 0), (-1, 2, 2) \rangle = \frac{1}{6\sqrt{2}}(-2 + 2 + 1 - 8 + 0) = -\frac{7}{6\sqrt{2}}$

No voy a expresar el resultado final porque es muy tedioso.