Ejercicio 8

Consigna

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}$$

1. Hallar los valores propios y las bases de los subespacios propios de cada una de ellas.
2. Deducir que cada una de ellas es diagonalizable.
3. Hallar la matriz diagonal D semejante a la matriz dada y la matriz de semejanza P (matriz invertible tal que $A = PDP^{-1}$).

Resolución (matriz A)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}$$

PARTE 1

Hallamos el polinomio característico:

$$\mathrm{X}_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1-i \\ 1+i & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

RECORDATORIO: Dados dos complejos $z = a + bi; \quad w = c + di$ cálculamos su producto mediante distributiva y reagrupando términos:

$$\begin{aligned} (a+bi)(c+di) &= ac + adi + bic + bdi^2 \\ &= ac + (ad+bc)i - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Desarrollando el determinante:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_T(\lambda) &= (4-\lambda)(5-\lambda) - ((1-i)(1+i)) \\ &= (20 - 4\lambda - 5\lambda + \lambda^2) - (1 + i - i + 1) \\ &= \lambda^2 - 9\lambda + 20 - 2 \\ &= \lambda^2 - 9\lambda + 18 \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = \frac{9+\sqrt{81-72}}{2} = 6$
- $\lambda_2 = \frac{9-\sqrt{81-72}}{2} = 3$

Ahora tenemos que hallar bases de los subespacios propios para poder determinar si T es diagonalizable.

Subespacio S_3 Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(A - 3\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De esto podemos sacar que:

- $y \in \mathbb{C}$
- $x = (-1+i)y$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 3$ es:

$$S_3 = \{((-1+i)\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(-1+i, 1)\}$$

Subespacio S_6 Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(A - 6\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1-i & 0 \\ 1+i & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las operaciones realizadas fueron: $(1-i)F_2 + F_1$

Cuentas auxiliares: - $-1(1-i) + 1 - i = -1 + i + 1 - i = 0$

De esto podemos sacar que:

- $x = \frac{1-i}{2}y \iff (1+i)x = \frac{(1-i)(1+i)}{2}y \iff (1+i)x = y$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 6$ es:

$$S_6 = \{(\frac{1-i}{2}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

Que es lo mismo que:

$$S_6 = \{(\alpha, (1+i)\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(1, 1+i)\}$$

PARTE 2

Ahora tenemos que deducir que la matriz A es diagonalizable, observemos que:

- $ma(3) = mg(3) = 1$
- $ma(6) = mg(6) = 1$

Entonces A es diagonalizable.

PARTE 3

Necesitamos encontrar una matriz D semejante a A y su matriz de semejanza P.

Está claro que:

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Porque la matriz diagonal semejante a la matriz inicial será aquella matriz con los valores propios de la transformación, repetidos por la mg de cada uno, en la diagonal.

Y la matriz P es la matriz formada por los vectores de la base de vectores propios. Esa base $\mathcal{B} = \{(-1+i, 1), (1, 1+i)\}$ es efectivamente base del espacio porque se probó en el teórico que los subespacios propios de valores propios distintos no comparten ningún vector además del nulo.

$$P = \begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos P^{-1}, con el procedimiento estándar:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1+i & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1-i & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i-2 & -1 & i \\ 1 & 1+i & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i-2 & -1 & i \\ 0 & 3 & 1 & 1-i \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i-2 & -1 & i \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1-i}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-1-i}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1-i}{3} \end{array}\right)$$

Las operaciones realizadas en órden son:

- $F_1 = -F_1$
- $F_1 = F_1 + iF_2$
- $F_2 = F_2 - F_1$
- $F_2 = \frac{1}{3}F_2$
- $F_1 = F_1 - (i-2)F_2$

Cuentas auxiliares: Veamos algunas de las cuentas que precisé hacer (no están en orden)

- $i(1+i) = i + i^2 = i - 1$
- $-1 - \frac{i-2}{3} = \frac{-3+2-i}{3} = \frac{-1-i}{3}$
- $i - \frac{(1-i)(i-2)}{3} = \frac{3i-(3i-1)}{3} = \frac{1}{3}$

- $(1-i)(i-2) = i - 2 - i^2 + 2i = 3i - 1$

Entonces la matriz P^{-1} es la siguiente:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1-i}{3} \end{pmatrix}$$

Resolución (matriz B)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

PARTE 1

Hallemos el polinomio característico:

$$\mathrm{X}_B(\lambda) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la segunda columna:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_B(\lambda) &= (2-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)+2) \\ &= (2-\lambda)(-3\lambda+\lambda^2+2) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = 2$
- $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{9-8}}{2} = 2$
- $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{9-8}}{2} = 1$

Entonces tenemos raíz doble en $\lambda_1 = 2$

Ahora tenemos que hallar bases de los subespacios propios para poder determinar si T es diagonalizable.

Subespacio S_1 Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(B - 1\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De esto podemos sacar que:

- $z = y$
- $x = -2y$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 1$ es:

$$S_1 = \{(-2\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(-2, 1, 1)\}$$

Subespacio S_2 Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(B - 2\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

De esto podemos sacar que:

- $x = -z$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 2$ es:

$$S_2 = \{(-\alpha, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

PARTE 2

Ahora tenemos que deducir que la matriz B es diagonalizable, observemos que:

- $ma(1) = mg(1) = 1$
- $ma(2) = mg(2) = 2$

Entonces A es diagonalizable.

PARTE 3

Necesitamos encontrar una matriz D semejante a A y su matriz de semejanza P.

Por una parte,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Y la matriz P es la matriz formada por los vectores de la base de vectores propios. Esa base $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 1), (0, 1, 0), (-2, 1, 1)\}$ es efectivamente base del espacio porque se probó en el teórico que los subespacios propios de valores propios distintos no comparten ningún vector además del nulo.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos P^{-1}, con el procedimiento estándar:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Las operaciones realizadas en órden son:

- $F_1 = -F_1$
- $F_3 = F_3 + 2F_1$
- $F_3 = \frac{1}{5}F_3$
- $F_1 = F_1 - 2F_3$ y $F_2 = F_2 - F_1$

Entonces la matriz P^{-1} es la siguiente:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 & \frac{-1}{5} \\ \frac{-2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Resolución (matriz C)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}$$

PARTE 1

Hallemos el polinomio característico:

$$\mathrm{X}_B(\lambda) = det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1+i \\ 0 & -1-i & -\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la primer fila

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}_C(\lambda) &= (5-\lambda)(-\lambda(-1-\lambda)-((-1+i)(-1-i))) \\
&= (5-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)
\end{aligned}
$$

Cuentas auxiliares: - $(-1+i)(-1-i) = 1+i-i-i^2 = 2$

Obtenemos entonces que las raíces son:

- $\lambda_1 = 5$
- $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{1+8}}{2} = 1$
- $\lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{1+8}}{2} = -2$

Ahora tenemos que hallar bases de los subespacios propios para poder determinar si T es diagonalizable.

Subespacio S_{-2} Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(C+2\mathbb{I})v = 0$:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+i & 0 \\ 0 & -1-i & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Las operaciones realizadas en órden son: - $F_2 - (-1-i)F_1$

De esto podemos sacar que:

- $x = 0$
- $y = (1-i)z$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_3 = -2$ es:

$$
S_{-2} = \{(0, (1-i)\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}
$$

La base de este subespacio podría ser:

$$
\{(0, 1-i, 1)\}
$$

Subespacio S_1 Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(C-1\mathbb{I})v = 0$:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1+i & 0 \\ 0 & -1-i & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1-i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Las operaciones realizadas en órden son: - $F_2 = \frac{-1}{2}F_2$ - $F_2 - (-1-i)F_1$

De esto podemos sacar que:

- $x = 0$
- $y = (\frac{-1+i}{2})z$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 1$ es:

$$S_1 = \{(0, (\frac{-1+i}{2})\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

Que es lo mismo que:

$$S_1 = \{(0, (-1+i)\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(0, -1+i, 2)\}$$

Subespacio S_5 Para hallar este subespacio tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $(C - 5\mathbb{I})v = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1+i & 0 \\ 0 & -1-i & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1-i}{6} & 0 \\ 0 & -1-i & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1-i}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -5-\frac{i}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Las operaciones realizadas en órden son: - $F_2 = \frac{-1}{6}F_2$ - $F_2 - (-1-i)F_1$

De esto podemos sacar que:

- $z = y = 0$

Por lo tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 5$ es:

$$S_5 = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

La base de este subespacio podría ser:

$$\{(1, 0, 0)\}$$

PARTE 2

Ahora tenemos que deducir que la matriz B es diagonalizable, observemos que:

- $ma(-2) = mg(-2) = 1$
- $ma(1) = mg(1) = 1$
- $ma(5) = mg(5) = 1$

Entonces A es diagonalizable.

PARTE 3

Exactamente el mismo procedimiento que los anteriores, por ahora no lo voy a hacer pero es exactamente igual.