

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 3

### Consigna

Sean  $T, S : V \rightarrow W$  y  $R : U \rightarrow V$  transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno sobre  $\mathbb{K}$ , y  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Probar las siguientes propiedades de la adjunta:

1. Si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es base ortonormal de  $V$ , entonces:

$$T^*(w) = \langle w, T(e_1) \rangle_W \cdot e_1 + \dots + \langle w, T(e_n) \rangle_W \cdot e_n, \quad \forall w \in W$$

2.  $(T + S)^* = T^* + S^*$

3.  $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$

4.  $(T \circ R)^* = R^* \circ T^*$

5.  $(T^*)^* = T$

6.  $T$  es invertible  $\Leftrightarrow T^*$  es invertible. Además:  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

7.  $\lambda$  es valor propio de  $T \Leftrightarrow \overline{\lambda}$  es valor propio de  $T^*$

8.  $\ker(T^*) = (\text{Im}(T))^\perp$

9.  $\text{Im}(T^*) = (\ker(T))^\perp$

10.  $\ker(T^*T) = \ker(T)$

11.  $\dim(\text{Im}(T^*T)) = \dim(\text{Im}(T))$

# Resolución

## Parte 1

Queremos probar que si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es base ortonormal de  $V$ , entonces:

$$T^*(w) = \langle w, T(e_1) \rangle_W \cdot e_1 + \dots + \langle w, T(e_n) \rangle_W \cdot e_n, \quad \forall w \in W$$

Para esto, consideremos las siguientes dos propiedades:

1. Dada una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $V$ ,  $\forall v \in V : v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n$ .
2.  $\forall v \in V, \forall w \in V : \langle w, T(v) \rangle_W = \langle T^*(w), v \rangle_V$

Calculemos  $T(v)$ :

$$\begin{aligned} v &= \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n \\ &\iff (\text{aplicando } T) \\ T(v) &= \langle v, e_1 \rangle T(e_1) + \dots + \langle v, e_n \rangle T(e_n) \end{aligned}$$

Por lo que podemos sustituir  $T(v)$  en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \langle w, T(v) \rangle_W &= \langle T^*(w), v \rangle_V \\ &\iff (\text{desarrollo de } T(v)) \\ \left\langle w, \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle_V T(e_i) \right\rangle_W &= \langle T^*(w), v \rangle_V \\ &\iff (\text{propiedades de producto interno}) \\ \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle_V \langle w, T(e_i) \rangle_W &= \langle T^*(w), v \rangle_V \\ &\iff (\text{desarrollo de } v) \\ \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle_V \langle w, T(e_i) \rangle_W &= \left\langle T^*(w), \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle_V e_i \right\rangle_V \\ &\iff (\text{propiedades del producto interno}) \\ \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle_V \langle w, T(e_i) \rangle_W &= \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle_V \langle T^*(w), e_i \rangle_V \\ &\iff (\text{simplificando}) \\ \langle w, T(e_i) \rangle_W &= \langle T^*(w), e_i \rangle_V \end{aligned}$$

Como consideramos  $v \in V$  y  $w \in W$  cualquiera, esta propiedad vale  $\forall v \in V, \forall w \in W, \forall i = 1, \dots, n$ .

Ahora, como  $T^*(w) \in V$ , y tenemos una base ortonormal de  $V$ , podemos expresar  $T^*(w)$  de la siguiente forma:

$$T^*(w) = \sum_{i=1}^n \langle T^*(w), e_i \rangle_V e_i$$

Pero por la igualdad que demostramos anteriormente podemos concluir que:

$$T^*(w) = \sum_{i=1}^n \langle w, T(e_i) \rangle_W e_i$$

Lo que concluye la prueba.

## Parte 2

Queremos probar que  $(T + S)^* = T^* + S^*$ .

Consideremos la siguiente propiedad básica de la adjunta:

- $\forall v \in V, \forall w \in V : \langle w, T(v) \rangle_W = \langle T^*(w), v \rangle_V$

Veamos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} & \langle w, (T + S)(v) \rangle_W \\ &= (\text{propiedades de transf. lineales}) \\ & \langle w, T(v) + S(v) \rangle_W \\ &= (\text{propiedades de producto interno}) \\ & \langle w, T(v) \rangle_W + \langle w, S(v) \rangle_W \\ &= (\text{propiedades de la adjunta}) \\ & \langle T^*(w), v \rangle_V + \langle S^*(w), v \rangle_V \\ &= (\text{propiedades de producto interno}) \\ & \langle T^*(w) + S^*(w), v \rangle_V \\ &= (\text{propiedades de transf. lineales}) \\ & \langle (T^* + S^*)(w), v \rangle_V \end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba.

## Parte 3

Queremos probar que  $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$ .

Consideremos la siguiente propiedad básica de la adjunta:

- $\forall v \in V, \forall w \in V : \langle w, T(v) \rangle_W = \langle T^*(w), v \rangle_V$

Veamos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
& \langle w, (\alpha T)(v) \rangle_W \\
& \quad = (\text{propiedades de transf. lineales}) \\
& \langle w, \alpha(T(v)) \rangle_W \\
& \quad = (\text{propiedades de producto interno}) \\
& \overline{\alpha} \langle w, T(v) \rangle_W \\
& \quad = (\text{propiedades de la adjunta}) \\
& \overline{\alpha} \langle T^*(w), v \rangle_V \\
& \quad = (\text{propiedades de producto interno}) \\
& \langle \overline{\alpha}(T^*(w)), v \rangle_V \\
& \quad = (\text{propiedades de transf. lineales}) \\
& \langle (\overline{\alpha}T^*)(w), v \rangle_V
\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba.

## Parte 4

Queremos probar que  $(T \circ R)^* = R^* \circ T^*$ .

Consideremos la siguiente propiedad básica de la adjunta:

$$\bullet \quad \forall v \in V, \forall w \in V : \langle w, T(v) \rangle_W = \langle T^*(w), v \rangle_V$$

Veamos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
& \langle w, (T \circ R)(v) \rangle_W \\
& \quad = (\text{propiedades de transf. lineales}) \\
& \langle w, T(R(v)) \rangle_W \\
& \quad = (\text{propiedades de la adjunta}) \\
& \langle T^*(w), R(v) \rangle_V \\
& \quad = (\text{propiedades de la adjunta}) \\
& \langle R^*(T^*(w)), v \rangle_W \\
& \quad = (\text{propiedades de transf. lineales}) \\
& \langle (R^* \circ T^*)(w), v \rangle_W
\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba.

## Parte 5

Queremos probar que  $(T^*)^* = T$ .

Consideremos la siguiente propiedad básica de la adjunta:

$$\bullet \quad \forall v \in V, \forall w \in V : \langle w, T(v) \rangle_W = \langle T^*(w), v \rangle_V$$

Veamos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
& \langle T^*(w), v \rangle_V \\
& \quad = (\text{propiedades de la adjunta}) \\
& \langle w, T(v) \rangle_W
\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba.

## Parte 6

Queremos probar que si  $T$  es invertible  $\Leftrightarrow T^*$  es invertible. Además:  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

Consideremos las siguientes propiedades:

1.  $\forall v \in V, \forall w \in V : \langle w, T(v) \rangle_W = \langle T^*(w), v \rangle_V$
2. Sea  $I$  la transformación identidad, entonces:  $I^* = I$

$$\begin{aligned}
T \circ T^{-1} &= I_V \\
& \quad (\text{aplicando adjunta a ambos lados}) \\
(T \circ T^{-1})^* &= I_V^* \\
& \quad (\text{propiedades de la adjunta}) \\
(T^{-1})^* \circ T^* &= I_V
\end{aligned}$$

Esto demuestra que  $(T^{-1})^*$  es la inversa de  $T^*$ , lo que concluye la prueba.