

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

1. Probar que $Im(A)^\perp = Ker(A^t)$; es decir, que si S es el subespacio de \mathbb{R}^m generado por las columnas de A , entonces:

$$S^\perp = \{X \in \mathbb{R}^m : A^t X = \vec{0}\}$$

2. Dado $Y \in \mathbb{R}^m$ y $S = Im(A)$, probar que $s = P_S(Y)$ si y sólo si $s = AX_0$ con $X_0 \in \mathbb{R}^n$ y

$$(A^t A)X_0 = A^t Y$$

3. Dado $Y \in \mathbb{R}^m$, concluir que el vector que minimiza $\|Y - AX\|$ es la solución del sistema:

$$(A^t A)X = A^t Y$$

Resolución

Parte 1

La prueba de esta parte está hecha en la clase de teórico #15.

Parte 2

Sean $Y \in \mathbb{R}^m$ y $S = Im(A)$, queremos probar que:

$$s = P_S(Y) \iff s = AX_0 \quad \text{con } X_0 \in \mathbb{R}^n \text{ y además } (A^t A)X_0 = A^t Y$$

(\Rightarrow)

Para que $s = P_S(Y)$ se tienen que cumplir las siguientes afirmaciones. - Como $s \in S$, $s \in Im(A)$ pues $S = Im(A)$. Entonces $s = AX_0$ para algún $X_0 \in \mathbb{R}^n$ - Por propiedades del complemento ortogonal, tenemos que dados $Y \in \mathbb{R}^m$, $AX_0 \in Im(A)$, se cumple que

$Y - AX_0 \in \text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^t)$ (usando la propiedad 1). - Como $Y - AX_0 \in \text{Ker}(A^t)$, tenemos que $A^t(Y - AX_0) = \vec{0}$, lo que equivale a decir que:

$$\begin{aligned} & \\ & \begin{aligned} & A^t Y - A^t A X_0 = \vec{0} \\ & \iff \text{\scriptstyle{despejando}} \\ & A^t Y = A^t A X_0 \end{aligned} & \\ & \end{aligned}$$

Esto prueba el implica a partir de asumir que $s = P_S(Y)$

(\Leftarrow)

En esta parte asumimos que: - $s = AX_0$ con $X_0 \in \mathbb{R}^n$ - $(A^t A)X_0 = A^t Y$

De la segunda igualdad derivamos fácilmente que $Y - AX_0 \in \text{Ker}(A^t) = \text{Im}(A)^\perp$, entonces $s = P_S(Y)$

Parte 3

También visto en el teórico, el concepto importante detrás de esto es que la proyección ortogonal en un conjunto S dado de un vector, es lo más cercano en distancia al mismo, dentro del conjunto S .