

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

## CLASE 6 - 11/03/2025

### Diagonalización

#### Definición (multiplicidad algebraica y geométrica)

Sea  $T : V \rightarrow V$  con  $\dim(V) = n$  y  $\lambda$  valor propio de  $T$ . Denotamos:

- la **multiplicidad algebraica de  $\lambda$** :  $ma(\lambda)$  como la multiplicidad de  $\lambda$  como raíz del polinomio característico (la cantidad de veces que aparece la raíz)
- la **multiplicidad geométrica de  $\lambda$** :  $mg(\lambda)$  como la dimensión del subespacio asociado a  $\lambda$

#### Proposición

Si  $\lambda_0$  es valor propio de  $T$ , entonces:

$$1 \leq mg(\lambda_0) \leq ma(\lambda_0) \leq n$$

#### Demostración

- $1 \leq mg(\lambda_0)$ : Es obvio, la dimensión de  $S_{\lambda_0}$  tiene que ser al menos 1.
- $ma(\lambda_0) \leq n$ : Es obvio, el polinomio característico no puede ser de mayor grado que la dimensión del espacio.

Ahora, veamos que  $mg(\lambda_0) \leq ma(\lambda_0)$ .

Denotamos  $m = mg(\lambda_0) = \dim(S_{\lambda_0})$ . Consideremos  $\{v_1, \dots, v_m\}$  base de  $S_{\lambda_0}$ . Sabemos que  $T(v_i) = \lambda_0 v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$

Ahora completemos la base de  $S_{\lambda_0}$  hasta obtener una base de  $V$ .

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$$

Ahora, veamos la forma de la matriz asociada a esta base  $\mathcal{B}$ :

$$A = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & x & \cdots & x \\ 0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & x & \cdots & x \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \cdots & x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & y & \cdots & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & \cdots & y \end{pmatrix}$$

Donde podemos observar 3 regiones:

- La parte diagonal donde están los valores propios, que tiene tamaño  $m \times m$ . La llamaremos la matriz  $L$
- La parte  $X$  que tiene tamaño  $(m - n) \times m$
- La parte  $Y$  que tiene tamaño  $(m - n) \times (m - n)$

Y todo lo que está por debajo de la submatriz diagonal, son ceros.

Ahora si quisieramos hallar el polinomio característico de esta matriz, lo haríamos de la siguiente forma:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det \left( \begin{array}{c|c} L - \lambda \mathbb{I} & X \\ \hline 0 & Y - \lambda \mathbb{I}_{(n-m)} \end{array} \right)$$

Usando un resultado de GAL 1, podemos decir que ese determinante es igual a:

$$X_T(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det(L - \lambda \mathbb{I}) \cdot \det(Y - \lambda \mathbb{I}_{(n-m)}) = (\lambda_0 - \lambda)^m \cdot p(\lambda)$$

Donde  $p(\lambda)$  es el polinomio característico de una matriz de tamaño  $(n - m) \times (n - m)$

Observemos que  $\lambda_0$  tiene como mínimo una multiplicidad algebraica  $ma(\lambda_0) = m$ . Pero si  $\lambda_0$  es raíz del polinomio  $p(\lambda)$  la multiplicidad será mayor a  $m$

Con esto, podemos asegurar que:

$$m \leq ma(\lambda_0)$$

Pero  $m = mg(\lambda_0)$ , por lo que probamos la última desigualdad que nos da esta proposición. ■

## Corolario

Sea  $T : V \rightarrow V$  con  $\dim(V) = n$  es diagonalizable si y sólo si:

1. toda raíz  $\lambda$  de  $X_T(\lambda)$  está en  $\mathbb{K}$  y,
2. cumple que  $ma(\lambda) = mg(\lambda)$

## Demostración

Denotamos:

1.  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  como los valores propios de  $T$
2.  $S_{\lambda_1}, \dots, S_{\lambda_r}$  como los subespacios propios asociados a dichos valores propios

Se cumple que:

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subseteq \{\lambda : \lambda \text{ es raíz de } X_T(\lambda)\}$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^r \dim(S_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^r mg(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^r ma(\lambda_i) \leq \sum_{\lambda: \lambda \text{ raíz de } X_T(\lambda)} ma(\lambda) = n$$

Por lo tanto, para que esto suceda, todas las desigualdades necesariamente tienen que ser igualdades.

Además, como sabemos que:

$$T \text{ es diagonalizable} \iff \sum_{i=1}^r \dim(S_{\lambda_i}) = n$$

Esto solo se cumple si las todas las desigualdades anteriores son igualdades, y esto a su vez solo se cumple si:

1. toda raíz  $\lambda$  de  $X_T(\lambda)$  está en  $\mathbb{K}$  porque necesitamos que:

$$ma(\lambda_i) \leq \sum_{\lambda: \lambda \text{ raíz de } X_T(\lambda)} ma(\lambda)$$

2. toda raíz  $\lambda$  de  $X_T(\lambda)$  cumple que  $ma(\lambda) = mg(\lambda)$ , porque necesitamos que:

$$\sum_{i=1}^r mg(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^r ma(\lambda_i)$$

Esto prueba el resultado. ■