

Geometría y Álgebra Lineal 2

Mauro Polenta Mora

CLASE 17 - 16/06/2025

Cálculo de la adjunta

Ejemplo 1

Sea $V = W = \mathbb{R}^3$ con producto interno usual, considerando la siguiente transformación lineal:

- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:
- $T(x, y, z) = (y + z, x + y + 2z, 5x - y)$

Para calcular $T^*(x', y', z')$ usamos la base canónica de \mathbb{R}^3 , veamos de calcular T^* para los vectores de la base canónica:

$$\begin{aligned} & \langle (x, y, z), T^*(1, 0, 0) \rangle \\ &= (\text{definición de la adjunta}) \\ & \langle T(x, y, z), (1, 0, 0) \rangle \\ &= (\text{definición de la transformación lineal}) \\ & \langle (y + z, x + y + 2z, 5x - y), (1, 0, 0) \rangle \\ &= (\text{desarrollo}) \\ & y + z \\ &= (\text{producto interno usual}) \\ & \langle (x, y, z), (0, 1, 1) \rangle \end{aligned}$$

Con esto concluimos que $T^*(1, 0, 0) = (0, 1, 1)$.

$$\begin{aligned}
& \langle (x, y, z), T^*(0, 1, 0) \rangle \\
& = (\text{definición de la adjunta}) \\
& \langle T(x, y, z), (0, 1, 0) \rangle \\
& = (\text{definición de la transformación lineal}) \\
& \langle (y + z, x + y + 2z, 5x - y), (0, 1, 0) \rangle \\
& = (\text{desarrollo}) \\
& x + y + 2z \\
& = (\text{producto interno usual}) \\
& \langle (x, y, z), (1, 1, 2) \rangle
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que $T^*(0, 1, 0) = (1, 1, 2)$

$$\begin{aligned}
& \langle (x, y, z), T^*(0, 0, 1) \rangle \\
& = (\text{definición de la adjunta}) \\
& \langle T(x, y, z), (0, 0, 1) \rangle \\
& = (\text{definición de la transformación lineal}) \\
& \langle (y + z, x + y + 2z, 5x - y), (0, 0, 1) \rangle \\
& = (\text{desarrollo}) \\
& 5x - y \\
& = (\text{producto interno usual}) \\
& \langle (x, y, z), (5, -1, 0) \rangle
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que $T^*(0, 0, 1) = (5, -1, 0)$.

Ahora, podemos decir que:

$$\begin{aligned}
T^*(x', y', z') &= x'T^*(1, 0, 0) + y'T^*(0, 1, 0) + z'T^*(0, 0, 1) \\
&= x'(0, 1, 1) + y'(1, 1, 2) + z'(5, -1, 0) \\
&= (y' + 5z', x' + y' - z', x' + 2y')
\end{aligned}$$

Y con esto hallamos $T^*(x', y', z')$ para todo $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

Ejemplo 2

Sea $V = W = \mathcal{M}_{n \times n}$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Dada $M \in \mathcal{M}_{n \times n}$, tomamos la siguiente transformación lineal:

- $T : \mathcal{M}_{n \times n} \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}$
- $T(A) = MA \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n \times n}$

Veamos como hallar T^* , sabemos que por definición de adjunta, debe cumplirse que:

$$\langle T(A), B \rangle = \langle A, T^*(B) \rangle \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

Partamos de $\langle T(A), B \rangle$ y tratemos de llegar a $\langle A, T^*(B) \rangle$:

$$\begin{aligned}
& \langle T(A), B \rangle \\
& \quad = (\text{definición de } T) \\
& \langle MA, B \rangle \\
& \quad = (\text{definición del producto interno dado}) \\
& \operatorname{tr}(B^t MA) \\
& \quad = (\text{propiedades de la traspuesta}) \\
& \operatorname{tr}((M^t B)^t A) \\
& \quad = (\text{definición del producto interno dado}) \\
& \langle A, M^t B \rangle \\
& \quad = (\text{considerando } T^*(B) = M^t B) \\
& \langle A, T^*(B) \rangle
\end{aligned}$$

Considerando que este razonamiento es válido para todo $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, podemos definir $T^*(B) = M^t B$

Propiedades de la adjunta

Sean V, W, U espacios vectoriales sobre el mismo \mathbb{K} con producto interno.

1. Sean $T_1 : V \rightarrow W$ y $T_2 : V \rightarrow W$, entonces $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
2. Sean $T : V \rightarrow W, \alpha \in \mathbb{K}$, entonces $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
3. Sean $T : V \rightarrow W$ y $S : W \rightarrow U, (S \circ T : V \rightarrow U)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$
4. Sea $T : V \rightarrow W$, entonces $(T^*)^* = T$
5. Sea $T : V \rightarrow W, T$ es invertible $\iff T^*$ es invertible y además $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
6. Sea $Id : V \rightarrow V$ la transformación identidad, entonces $Id = Id^*$
7. Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal. λ es un valor propio de $T \iff \overline{\lambda}$ es un valor propio de T^*