CLASE 2 - 10/02/2025

Inducción

Ejemplo (metavariables)

Retomemos la definición inducitva de los números pares:

1. $0 \in \mathbb{P}$
2. Si $n \in \mathbb{P}$, entonces $n + 2 \in \mathbb{P}$

Observación: Llamamos metavariables (n en este caso) a los elementos que necesitan menos reglas para su construcción

Definición (alfabeto)

Sea $\sum$ un conjunto conocido de cosas distinguibles entre si (símbolos, letras, marcas).

Decimos que:

- Una palabra (o secuencia, o tira, o string) es una secuencia finita de elementos de $\sum$
- Dadas dos palabras w_1 y w_2, podemos formar una nueva palabra $w_1 w_2$ que es la concatenación de ambas.
- Existe una palabra vacía ε que no tiene ninguna letra, y es el neutro de la concatenación.
- $\sum^*$ es el conjunto de todas las palabras que se pueden formar con los elementos de $\sum$
- Cualquier subconjunto de $\sum^*$ que cumpla con las reglas anteriores es un lenguaje.
- Hay lenguajes que se pueden definir inductivamente y tratar como conjuntos inductivos

Ejemplo 1 (lenguaje) Definimos el lenguaje $L_1 \subset \{a, b\}^*$ con las siguientes reglas:

1. $a \in L_1$
2. Si $w \in L_1$, entonces $bwb \in L_1$

Veamos ejemplos de palabras que pertenecen a este lenguaje:

- $a \in L_1$
- $bab \in L_1$
- $bbabb \in L_1$
- $aba \notin L_1$
- $ababab \notin L_1$

Podemos decir que son todas las palabras con la misma cantidad de b a ambos lados de una a que queda en el medio.

Ejemplo 2 (lenguaje) Definimos el lenguaje $L_2 \subset \{a, b, c\}^*$ con las siguientes reglas:

1. $b \in L_2$
2. Si $w \in L_2$, entonces $awc \in L_2$

Pertenencia de un elemento a un conjunto inductivo

Para probar que un elemento pertenece a un conjunto inductivo, basta con mostrar como lo formamos. Su secuencia de formación indica cuáles reglas se usan y en que orden.

Ejemplo $bbabb \in L_1$ porque:

1. $a \in L_1$ por (i)
2. $bab \in L_1$ por (ii)
3. $bbabb \in L_1$ por (ii)

Probar propiedades de conjuntos

Según como definimos al conjunto, tenemos dos formas de probar propiedades:

- Si definimos por extensión: Probar que la propiedad se cumple para todos los elementos del conjunto
- Si definimos por comprensión: Probar que la propiedad se cumple para los elementos que cumplen con la defición del conjunto

Principio de inducción primitiva Sea $N \subset \mathbb{N}$ definido inductivamente por:

1. $0 \in N$
2. Si $n \in N$, entonces $n + 1 \in N$

Sea $P(n)$ una propiedad que queremos probar para todo $n \in \mathbb{N}$. Para probar que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, basta con:

1. Mostrar que $P(0)$ es verdadera
2. Mostrar que si $P(n)$ es verdadera, entonces $P(n + 1)$ es verdadera

Demostración Queremos probar que si se cumplen 1 y 2, entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $X = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$. Por hipótesis, sabemos que 1 y 2 se cumplen. Podemos observar que $\mathbb{N}$ es el minimo subconjunto de X que cumple con 1 y 2. Por lo tanto, $X \subset \mathbb{N}$.

Ejemplo Dado el lenguaje L_1 definido anteriormente, probemos que todas las palabras de L_1 tienen una cantidad impar de letras.

Demostración Por inducción en la formación de las palabras de L_1:

- **Caso base**: a tiene una cantidad impar de letras
  - $|a| = 1$ es impar
- **Paso inductivo**: Si $w \in L_1$ tiene una cantidad impar de letras, entonces bwb tiene una cantidad impar de letras.
  - Por hipótesis, $|w|$ es impar, entonces $|bwb| = |w| + 2$ es impar, ya que si sumo 2 a un número impar, obtengo otro número impar

Por el principio de inducción primitiva, todas las palabras de L_1 tienen una cantidad impar de letras.

Ejemplo 2 Probar que todas las palabras de L_1 son palíndromos

Demostración Por inducción en la formación de las palabras de L_1:

- **Caso base**: a es palíndromo
  - a es palíndromo porque es una sola letra
- **Paso inductivo**: Si $w \in L_1$ es palíndromo, entonces bwb es palíndromo
  - Por hipótesis, w es palíndromo, entonces bwb es palíndromo porque es la misma palabra al revés