Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -;\ 1,\ 2;\ 1\rangle$ con símbolos función f_1 (unario), f_2 (binario) y símbolo de constante c_1.
Sean A, B estructuras del mismo tipo definidas como sigue:

- $A = \langle \mathbb{N},\ S,\ +,\ 0\rangle$ donde $S(x) = x + 1$
- $B = \langle \mathbb{N},\ D,\ *,\ 1\rangle$ donde $D(x) = 2 * x$

Demuestre por inducción que para todo término cerrado t (sin constantes extendidas) se cumple que:

$$t^B = 2^{t^A}$$

Resolución

El primer paso del ejercicio es definir $TERM_C$ para poder aplicar el PIP y trabajar con lo que queremos probar de manera formal.

Definimos $TERM_C$ por: 1. $c_1 \in TERM_C$ 2. Si $t_1 \in TERM_C$ entonces $f_1(t_1) \in TERM_C$ 3. Si $t_1, t_2 \in TERM_C$ entonces $f_2(t_1, t_2) \in TERM_C$

La propiedad que queremos probar sobre $t \in TERM_C$ es la siguiente:

- $P(t) : (\overline{\forall} t \in TERM_C) t^B = 2^{t^A}$

Demostración

Paso base

- $P(c_1) : c_1^B = 2^{(c_1)^A}$

Evaluemos:

$$
\begin{gathered}
c_1^B = 2^{(c_1)^A} \\
\iff \text{(interpretación de } c_1 \text{ en } A,B) \\
1 = 2^0 \\
\iff \text{(aritmética)} \\
1 = 1
\end{gathered}
$$

Por lo que se cumple $P(c_1)$.

Paso inductivo

Parte 1

(H) $P(t_1) : (t_1)^B = 2^{(t_1)^A}$
(I) $P(f_1(t_1)) : f_1(t_1)^B = 2^{f_1(t_1)^A}$

Evaluemos la tesis a ver que podemos decir de ella:

$$
\begin{gathered}
f_1(t_1)^B = 2^{f_1(t_1)^A} \\
\iff \text{(interpretación de } f_1 \text{ en } B) \\
2 \cdot (t_1)^B = 2^{f_1(t_1)^A} \\
\iff \text{(interpretación de } f_1 \text{ en } A) \\
2 \cdot (t_1)^B = 2^{(t_1)^A + 1} \\
\iff \text{(aritmética)} \\
2 \cdot (t_1)^B = 2 \cdot 2^{(t_1)^A} \\
\iff \text{(aritmética)} \\
(t_1)^B = 2^{(t_1)^A}
\end{gathered}
$$

Donde esto último es verdadero por hipótesis, por lo que esta parte queda probada.

Parte 2

(H1) $P(t_1) : (t_1)^B = 2^{(t_1)^A}$ (H2) $P(t_2) : (t_2)^B = 2^{(t_2)^A}$ (T) $P(f_2(t_1, t_2)) : f_2(t_1, t_2)^B = 2^{f_2(t_1,t_2)^A}$

Evaluemos la tesis a ver que podemos decir de ella:

$$f_2(t_1, t_2)^B = 2^{f_2(t_1,t_2)^A}$$
$$\iff \text{(interpretación de } f_2 \text{ en } B)$$
$$t_1^B \cdot t_2^B = 2^{f_2(t_1,t_2)^A}$$
$$\iff \text{(interpretación de } f_2 \text{ en } A)$$
$$(t_1)^B \cdot (t_2)^B = 2^{(t_1)^A + (t_2)^A}$$
$$\iff \text{(aritmética)}$$
$$(t_1)^B \cdot (t_2)^B = 2^{(t_1)^A} \cdot 2^{(t_2)^A}$$
$$\iff \text{(por H2: } (t_2)^B = 2^{(t_2)^A} \neq 0)$$
$$(t_1)^B = 2^{(t_1)^A}$$

Donde esto último se cumple por hipótesis (H1), por lo que esta parte queda probada.

Esto concluye la demostración. ■