Ejercicio 18

Consigna

(a) Defina el conjunto $L_{\mathbb{N}}$ de las listas de naturales con el símbolo $|$ como separador y [] como la lista vacía.

(b) Defina la función $Reduce : (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \times L_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$. Esta función recibe una función binaria de naturales en naturales, un natural y una lista, devolviendo un natural que es la aplicación de la función sobre todos los elementos de la lista. El natural es el valor a devolver en el caso de la lista vacía y usualmente es el neutro de la operación. Ejemplos:

- $Reduce(\cdot, 1, []) = 1$
- $Reduce(\cdot, 1, 2|3|4|[]) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 24$

(c) Demuestre que $Reduce(+, 0, l)$ devuelve la suma de todos los naturales contenidos en la lista l o 0 si la lista es vacía.

Resolución (parte a)

Veamos como definir el conjunto $L_{\mathbb{N}}$ de forma inductiva:

1. $[] \in L_{\mathbb{N}}$
2. Si $l \in L_{\mathbb{N}}, n \in \mathbb{N}$ entonces $n|l \in L_{\mathbb{N}}$

Resolución (parte b)

Ahora tenemos que definir el ERP para $L_{\mathbb{N}}$. Necesitamos:

1. $F([]) = f_0$
2. $F(n|l) = f_s(n, l, F(l))$

Entonces definimos $Reduce : (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \times L_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ como:

1. $Reduce(f, m, []) = m$
2. $Reduce(f, m, n|l) = f(n, Reduce(f, m, l))$

Quizás el resultado se sienta raro, para entenderlo mejor, mirar los ejemplos en la consigna del ejercicio.

Resolución (parte c)

Para resolver esta parte, usaremos el PIP sobre $L_{\mathbb{N}}$ con la propiedad:

$P(l) : Reduce(+, 0, l)$ devuelve la suma de todos los elementos de l

PASO BASE:

$P([]) : Reduce(+, 0, [])$ devuelve la suma de todos los elementos de l

Esto es trivialmente cierto, l no tiene elementos por lo que la suma de ellos es 0

PASO INDUCTIVO:

(H) $P(l) : Reduce(+, 0, l)$ devuelve la suma de todos los elementos de l

(I) $P(n|l) : Reduce(+, 0, n|l)$ devuelve la suma de todos los elementos de l

Veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&Reduce(+, 0, n|l) \\
&= \text{(regla (ii) de } Reduce) \\
&+ (n, Reduce(+, 0, l))
\end{aligned}$$

Sabemos por hipótesis que $Reduce(+, 0, l)$ es la suma de todos los elementos de l, también sabemos que $n|l$ es una lista que contiene todos los elementos de l y además a n. Entonces, la suma de todos sus elementos será la suma de todos los elementos de l más n.

Eso es lo que obtuvimos cuando desarrollamos $Reduce(+, 0, n|l)$, por lo que probamos:

$(\forall l \in L_{\mathbb{N}}) \quad P(l) : Reduce(+, 0, l)$ devuelve la suma de todos los elementos de l.