

## Ejercicio 4

### Consigna

Sea la siguiente propiedad:

*Para toda  $\varphi$  subfórmula de  $\psi$ ,  $\varphi$  ocurre en cualquier secuencia de formación para  $\psi$ .*

Dé una prueba inductiva de la misma.

### Resolución

#### Premisa

Para resolver este ejercicio demos algo de notación para poder formalizar la proposición y ver como aplicar inducción:

- Llamemos  $secFORM_\psi$  al conjunto de todas las secuencias de formación para  $\psi$ .
- $s \in secFORM_\psi$ ,  $|s|$  es la longitud de la secuencia  $s$ .
- $s \in secFORM_\psi$ ,  $\psi \in PROP$ ;  $\psi \in s$  significa que  $\psi$  ocurre en  $s$

Con esto podemos describir más formalmente la propiedad que queremos probar de la siguiente forma.

$$(\forall \psi \in PROP)(\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\forall s \in secFORM_\psi)(\varphi \in s))$$

Esto nos da las herramientas necesarias para poder aplicar inducción.

#### Recordatorio (PIP para $PROP$ )

Sea  $\mathcal{P}$  una propiedad sobre las palabras de  $PROP$  que cumple:

*BASE1:*  $\mathcal{P}(p)$  para todo  $p \in P$  *BASE2:* Se cumple  $\mathcal{P}(\perp)$  *IND1:* Para todo  $\ast \in C_2$  y  $\alpha, \beta \in PROP$  que cumplen  $\mathcal{P}(\alpha)$  y  $\mathcal{P}(\beta)$ , se cumple  $\mathcal{P}((\alpha \ast \beta))$  *IND2:* Para todo  $\alpha \in PROP$  que cumple  $\mathcal{P}(\alpha)$ , se cumple  $\mathcal{P}(\neg \alpha)$

Entonces,  $\mathcal{P}$  se cumple para todas las palabras de  $PROP$ .

#### Comienzo del ejercicio

Observemos que para aplicar inducción tenemos que primero llevar a la propiedad a una forma más adecuada para probarla con el PIP de  $PROP$ . Determinemos sobre cuál de las dos proposiciones  $(\psi, \varphi)$  queremos aplicar el PIP:

- Si fijamos  $\varphi$ , no podemos decir casi nada sobre  $\psi$ , esto porque estaríamos trabajando con una subfórmula de una proposición arbitraria.
- En cambio si fijamos  $\psi$ , podemos decir algo sobre todas las subfórmulas de  $\psi$ , especialmente en los casos más triviales donde  $\psi$  es una variable proposicional o una constante lógica.

Por lo tanto, fijaremos  $\psi$  y aplicaremos inducción sobre la estructura de  $\psi$ , la propiedad que queremos probar se convierte en:

$$P(\psi) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s))$$

## PASO BASE

**PARTE 1**  $P(p_i) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } p_i \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{p_i})(\varphi \in s))$

Para este caso, como  $p_i \in AT$  sabemos que su única subfórmula es si misma. Por otra parte, cualquier secuencia de formación para  $p_i$  debe terminar en si misma por construcción, por lo que  $\varphi \in s \quad \forall \varphi \in \{p_i\}$ .

**PARTE 2**  $P(\perp) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } \perp \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{\perp})(\varphi \in s))$

Para este caso, como  $\perp \in AT$  sabemos que su única subfórmula es si misma. Por otra parte, cualquier secuencia de formación para  $\perp$  debe terminar en  $\perp$  por construcción, por lo que  $\varphi \in s \quad \forall \varphi \in \{\perp\}$ .

## PASO INDUCTIVO

(H)  $P(\psi) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s))$

### PARTE 1

(T)  $P(\neg\psi) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } (\neg\psi) \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{(\neg\psi)})(\varphi \in s))$

Vayamos con lo primero, para que  $\varphi$  sea subfórmula de  $(\neg\psi)$ , tiene que cumplir uno de lo siguientes:

- $\varphi = (\neg\psi)$
- $\varphi$  es subfórmula de  $\psi$

Si  $\varphi = (\neg\psi)$ , la propiedad se cumple porque  $(\neg\psi)$  tiene que estar al final de todas las secuencias de formación para  $(\neg\psi)$  por construcción.

Si  $\varphi$  es subfórmula de  $\psi$ , nos veríamos muy tentados de usar la hipótesis inductiva, pero esta se cumple para  $secFORM_{\psi}$ , no para  $secFORM_{(\neg\psi)}$ . Por lo que no podemos aplicarla directamente, para esto introducimos el siguiente lema:

### LEMA

El prefijo de una secuencia de formación para  $(\neg\psi)$  es una secuencia de formación para  $\psi$ .

### Demostración:

Sea  $s \in secFORM_{(\neg\psi)}$ , entonces  $s$  tiene la forma:

$$s = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \alpha, \dots, \psi, \beta, \dots, (\neg\psi)\}$$

Sabemos que  $s$  es una secuencia de formación, por lo tanto si quitamos elementos de  $s$  del lado derecho (es decir que ningún elemento depende de ellos), seguiremos teniendo una secuencia de formación. Mantengamos el siguiente conjunto:

$$s' = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \alpha, \dots, \psi\}$$

Por la forma en la que quitamos elementos,  $s'$  sigue siendo una secuencia de formación, y como su último elemento es  $\psi$ ,  $s'$  es una secuencia de formación para  $\psi$ .

**Continuación** Ahora, usando la hipótesis tenemos que:

$$P(\psi) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\forall s \in secFORM_\psi)(\varphi \in s))$$

Entonces, como nosotros sabemos que  $\varphi$  es subfórmula de  $\psi$ , podemos decir que  $(\forall s \in secFORM_\psi)(\varphi \in s)$ .

Observemos que para cualquier secuencia de formación  $s \in secFORM_{(\neg\psi)}$  podemos tomar su prefijo  $s' \in secFORM_\psi$  que es una secuencia de formación para  $\psi$ , por lo que  $\varphi \in s'$ , y como  $s'$  es prefijo de  $s$ ,  $\varphi \in s$ .

Esto prueba la propiedad para  $(\neg\psi)$ .

## PARTE 2

$$(T) P((\alpha * \beta)) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } (\alpha * \beta) \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{(\alpha * \beta)})(\varphi \in s))$$

En primer lugar, para que  $\varphi$  sea subfórmula de  $(\alpha * \beta)$ , tiene que cumplir uno de lo siguientes:

- $\varphi = (\alpha * \beta)$
- $\varphi$  es subfórmula de  $\alpha$
- $\varphi$  es subfórmula de  $\beta$

Si  $\varphi = (\alpha * \beta)$ , la propiedad se cumple porque  $(\alpha * \beta)$  tiene que estar al final de todas las secuencias de formación para  $(\alpha * \beta)$  por construcción.

Para los otros dos casos, podemos aplicar la hipótesis inductiva, ya que  $\varphi$  es subfórmula de  $\alpha$  o  $\beta$ , y por lo tanto  $\varphi \in s \quad \forall s \in secFORM_\alpha$  o  $\varphi \in s \quad \forall s \in secFORM_\beta$ .

Pero si  $s$  está en la secuencia de formación de  $\alpha$  o  $\beta$ , también está en la secuencia de formación de  $(\alpha * \beta)$  por construcción, por lo que  $\varphi \in s \quad \forall s \in secFORM_{(\alpha * \beta)}$ .

Esto prueba la propiedad para  $(\alpha * \beta)$ , y termina la prueba total.

## Conclusión

Entiendo que la segunda parte del paso inductivo no necesita un lema, pero lo que estamos dando por entendido es que si  $\varphi$  es subfórmula de  $\alpha$  o  $\beta$ , entonces  $\varphi$  es subfórmula de  $(\alpha * \beta)$ . Me da la sensación que esto es directo de la definición de subfórmula, pero no estoy seguro.