

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## CLASE 5 - 26/02/2025

### Lógica proposicional

#### Más ejemplos de ERP en $PROP$

$RANGO : PROP \rightarrow \mathbb{N}$

1.  $RANGO(\varphi) = 0$  con  $\varphi \in AT$
2.  $RANGO((\alpha * \beta)) = 1 + \max\{RANGO(\alpha), RANGO(\beta)\}$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
3.  $RANGO((\neg\alpha)) = 1 + RANGO(\alpha)$  con  $\alpha \in PROP$

**Sustitución**  $\rightarrow \_[_/_] : PROP \times PROP \times P \rightarrow PROP$

Observemos que  $P$  es el conjunto donde solamente tenemos las proposiciones simples de  $PROP$

1.  $\perp[\varphi/p] = \perp$
2.  $q[\varphi/p] = \begin{cases} \varphi & \text{si } q = p \\ q & \text{si } q \neq p \end{cases}$
3.  $(\alpha * \beta)[\varphi/p] = (\alpha[\varphi/p] * \beta[\varphi/p])$

**Observación:** recordar que  $q$  es una proposición simple, es decir  $q \in P$

#### Ejemplo

Veamos como hallar la siguiente sustitución:  $(p_1 \rightarrow ((p_2 \wedge p_1) \vee \perp))[(p_3 \wedge p_4)/p_1]$ :

$$(p_1 \rightarrow ((p_2 \wedge p_1) \vee \perp))[(p_3 \wedge p_4)/p_1] \Rightarrow \\ ((p_3 \wedge p_4) \rightarrow ((p_2 \wedge (p_3 \wedge p_4)) \vee \perp))$$

Entonces con el ejemplo, observamos que los parámetros en orden, cumplen el siguiente rol:

1. Es la proposición compuesta sobre la que vamos a trabajar.
2. Es la proposición compuesta (o simple) que vamos a sustituir.
3. Es la proposición simple que vamos a buscar en la primer proposición compuesta para reemplazar en su lugar.

## Definición (secuencia de formación)

Una secuencia  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  de palabras de  $\Sigma_{PROP}^*$  es una secuencia de formación para  $\alpha_n$  si y solamente si para todo  $k \leq n$  se cumple que:

- $\alpha_k \in AT$  o,
- $\alpha_k = (\alpha_i * \alpha_j)$  con  $i, j < k$  y  $*$   $\in C_2$  o,
- $\alpha_k = \neg \alpha_j$  con  $j < k$

## Ejemplos

1.  $(p_1 \wedge p_2)$  tiene una secuencia de formación  $(p_1, p_2, (p_1 \wedge p_2))$
2.  $(p_1 \wedge p_2)$  tiene una secuencia de formación  $(p_1, p_2, p_3, \perp, (p_1 \wedge p_2))$
3.  $(p_1, p_3, \perp, (p_1 \wedge p_2))$  no es una secuencia de formación de  $(p_1 \wedge p_2)$ , ya que no tiene a  $p_2$  en su secuencia.

Concluyendo, podemos decir que una secuencia de formación es una secuencia de palabras que nos permite llegar a una proposición compuesta, tienen que estar TODAS las proposiciones simples que se usan en la proposición compuesta. También observamos con el ejemplo (1) y (2) que para una proposición compuesta dada, no hay una única secuencia de formación.

## Definición (subfórmula)

Una fórmula  $\varphi \in PROP$  es subfórmula de  $\alpha \in PROP$  si y solamente si se cumple:

1.  $\alpha = \varphi$  o,
2.  $\alpha = (\varphi_1 * \varphi_2)$  con  $*$   $\in C_2$ ;  $\varphi_1, \varphi_2 \in PROP$  y  $\varphi$  es subfórmula de  $\varphi_1$  o,
3.  $\alpha = (\varphi_1 * \varphi_2)$  con  $*$   $\in C_2$ ;  $\varphi_1, \varphi_2 \in PROP$  y  $\varphi$  es subfórmula de  $\varphi_2$  o,
4.  $\alpha = (\neg \varphi_1)$  con  $\varphi_1 \in PROP$  y  $\varphi$  es subfórmula de  $\varphi_1$

## Conjunto de subfórmulas

Veamos una función de  $PROP$  para calcular la cantidad de subfórmulas de una proposición:

$$SUB : PROP \rightarrow 2^{PROP}$$

1.  $SUB(\varphi) = \{\varphi\}$  con  $\varphi \in AT$
2.  $SUB((\alpha * \beta)) = SUB(\alpha) \cup SUB(\beta) \cup \{(\alpha * \beta)\}$
3.  $SUB((\neg \alpha)) = SUB(\alpha) \cup \{(\neg \alpha)\}$

## Teorema

Veamos dos versiones de un teorema que relaciona la función que creamos para hallar todas las subfórmulas de una proposición, con la definición que dimos anteriormente de subfórmula.

1.  $(\forall \alpha, \varphi \in PROP) \quad \varphi$  es subfórmula de  $\alpha$  si y solamente si  $\varphi \in SUB(\alpha)$
2.  $(\forall \alpha \in PROP) \quad SUB(\alpha) = \{\varphi \in PROP : \varphi \text{ es subfórmula de } \alpha\}$

## Demostración

La demostración de este teorema se hace por inducción sobre  $PROP$ , realmente lo que queremos probar es trivial, si observamos bien como construimos la función  $SUB$ . De todos modos está hecha en el libro y en la clase se ve.

## Teorema

$PROP$  es el conjunto de todas las palabras de  $\Sigma_{PROP}^*$  que tienen una secuencia de formación.

## Corolario

Sea  $\mathcal{P}$  una propiedad de  $\Sigma_{PROP}^*$ . Para demostrar que: para todo  $\alpha \in PROP$  se cumple  $\mathcal{P}(\alpha)$

Podemos hacer la prueba: - por inducción primitiva - por inducción sobre la longitud de la secuencia de formación de  $\alpha$

## Convenciones sintácticas

Definimos  $PROP$  utilizando paréntesis para todas las fórmulas no atómicas, esto por que es la única forma de que el lenguaje sea libre. A la hora de trabajar con  $PROP$  vamos a usar las siguientes convenciones, para no utilizar todos los paréntesis:

- Omitimos los paréntesis exteriores de una fórmula, y los que rodean a  $\neg$ .
- Los conectivos  $\wedge, \vee$  tienen la misma precedencia.
- Los conectivos  $\rightarrow$  y  $\leftrightarrow$  tienen la misma precedencia.
- El conectivo  $\neg$  tiene la mayor precedencia de todos los conectivos.
- Los conectivos  $\rightarrow$  y  $\leftrightarrow$  tienen la menor precedencia de todos los conectivos.
- Los conectivos de igual precedencia se asocian a la derecha.

## Ejemplos

- $\neg\neg p_1$  abrevia a  $(\neg(\neg p_1))$
- $p_1 \rightarrow p_2 \leftrightarrow p_3$  abrevia a  $(p_1 \rightarrow (p_2 \leftrightarrow p_3))$
- $p_2 \wedge \perp \vee \neg(p_3 \rightarrow p_1)$  abrevia a  $(p_2 \wedge (\perp \vee (\neg(p_3 \rightarrow p_1))))$

**ATENCIÓN:** Cuando tenemos igual precedencia, agrupamos POR LA DERECHA, esto es opuesto a lo tradicional, por lo tanto MUY importante de recordar.