Ejercicio 12

Consigna

Considere un alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.

(a) Defina las siguientes funciones:

- $largo : \Sigma^* \to \mathbb{N}$
- $duplicar : \Sigma^* \to \Sigma^*$
- $invertir : \Sigma^* \to \Sigma^*$
- $ltimo : \Sigma^+ \to \Sigma$
- $principio : \Sigma^+ \to \Sigma^*$
- $primero : \Sigma^+ \to \Sigma$
- $resto : \Sigma^+ \to \Sigma^*$

(b) Demuestre inductivamente que el largo de una palabra duplicada es el doble de la palabra original.

Resolución (parte a)

Recordatorio

Veamos el ERP para Σ^*:

(H) Sea B un conjunto y:

1. $f_\varepsilon \in B$
2. $f_s : \Sigma \times \Sigma^* \times B \to B$

(T) Entonces existe una función única $F : \Sigma^* \to B$ tal que:

1. $F(\varepsilon) = f_\varepsilon$
2. $F(xw) = f_s(x, w, F(w))$

Esto nos da las bases sobre las que vamos a trabajar a la hora de construir las funciones dadas por el ejercicio.

Premisa

Definimos Σ^* utilizando la inserción por la izquierda. También es importante observar que estamos ante una definición inductiva **LIBRE**, es decir que para cada elemento de Σ^*, solo hay una forma de crearlo. Esto nos permite usar el ERP

Ejercicio

Dominio Σ^* Para definir una función, debemos dar f_ε y f_s. Veamos como hacerlo

Largo

1. $f_\varepsilon = 0$
2. $f_s(x, w, Largo(w)) = 1 + Largo(w)$

Entonces, definimos $Largo(xw)$:

1. $Largo(\varepsilon) = f_\varepsilon = 0$
2. $Largo(xw) = f_s(x, w, Largo(w)) = 1 + Largo(w)$

Observación: A partir de ahora vamos a “ignorar” el primer paso, simplemente definiremos la función F, con este ejemplo está claro quienes son f_ε y $f_s(x, w, F(w))$

Duplicar Esta función duplica cada cáracter de una palabra, uno a uno

1. $Duplicar(\varepsilon) = \varepsilon$
2. $Duplicar(xw) = xxDuplicar(w)$

Invertir

1. $Invertir(\varepsilon) = \varepsilon$
2. $Invertir(xw) = Invertir(w)x$

Dominio Σ^+ A partir de ahora, trabajamos con el dominio Σ^+, definido inductivamente de la siguiente forma:

1. $\forall x \in \Sigma, x \in \Sigma^+$
2. Si $w \in \Sigma^+, x \in \Sigma$, entonces $xw \in \Sigma^+$

Básicamente, solo cambiamos la regla base, lo veremos reflejado en los ejercicios a la hora de definir los elementos base de la función, en vez de f_ε, tendremos f_x

Largo

1. $Largo(x) = 1$
2. $Largo(xw) = 1 + Largo(w)$

Último

1. $Ultimo(x) = x$
2. $Ultimo(xw) = Ultimo(w)$

Principio Se interpreta esta función como tomar todos los elementos de la palabra a excepción del último de ellos.

1. $Principio(x) = \varepsilon$
2. $Principio(xw) = xPrincipio(w)$

Primero

1. $Primero(x) = x$
2. $Primero(xw) = x$

Resto Se interpreta esta función como tomar todos los elementos de la palabra a excepción del primero de ellos.

1. $Resto(x) = \varepsilon$
2. $Resto(xw) = w$

Duplicar

1. $Duplicar(x) = xx$
2. $Duplicar(xw) = xxDuplicar(w)$

Invertir

1. $Invertir(x) = x$
2. $Invertir(xw) = Invertir(w)x$

Resolución (parte b)

Queremos demostrar inductivamente que el largo de una palabra duplicada es el doble de la palabra original. Para esto podemos usar el PIP en Σ^* y las funciones que creamos. Queremos probar que:

$$(\forall w \in \Sigma^*) \quad P(w) : Largo(Duplicar(w)) = 2 \cdot Largo(w)$$

PASO BASE

$P(\varepsilon) : Largo(Duplicar(\varepsilon)) = 2 \cdot Largo(\varepsilon)$

Usando las definiciones, sabemos que:

- $Duplicar(\varepsilon) = \varepsilon$
- $Largo(\varepsilon) = 0$

Esto implica:

$Largo(\varepsilon) = 2 \cdot 0$

Por lo tanto, $P(\varepsilon)$ se cumple

PASO INDUCTIVO

(H) $P(w) : Largo(Duplicar(w)) = 2 \cdot Largo(w)$
(I) $P(xw) : Largo(Duplicar(xw)) = 2 \cdot Largo(xw)$

Veamos que podemos decir sobre la expresión de la tesis, usando las reglas constructivas de las funciones $Largo$ y $Duplicar$:

$$Largo(Duplicar(xw)) = 2 \cdot Largo(xw)$$

$$\begin{aligned}
&\iff Largo(xxDuplicar(w)) = 2 \cdot (Largo(w) + 1) \\
&\iff 1 + Largo(xDuplicar(w)) = 2 \cdot Largo(w) + 2 \\
&\iff 2 + Largo(Duplicar(w)) = 2 \cdot Largo(w) + 2 \\
&\iff Largo(Duplicar(w)) = 2 \cdot Largo(w)
\end{aligned}$$

Observación: contando como primero el primer “sii”:

- Del primer paso al segundo, consideramos $xDuplicar(w)$ una palabra, por eso podemos sacar una x para afuera sumando 1 (estamos usando la definición de $Largo$)
- Del segundo paso al tercero, hacemos lo mismo, quitamos la otra x con el mismo razonamiento
- Del tercer paso al cuarto, sacamos los 2 que están sumando ya que están de ambos lados

Sumando que sabemos que el último paso se cumple por (H), por lo que entonces la propiedad se cumple para todo $w \in \Sigma^*$