Lógica

Mauro Polenta Mora

CLASE 16 - 03/07/2025

Semántica de la lógica de predicados

Nomenclatura

1. $\mathcal{M}$ es modelo de α si $\mathcal{M} \vDash \alpha$
2. $\mathcal{M}$ es modelo de Γ si $\mathcal{M} \vDash \Gamma$
3. α es verdadera si $\vDash \alpha$
4. α es consecuencia semántica de Γ si $\Gamma \vDash \alpha$
5. α es satisfecha por $a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|$ si $\mathcal{M} \vDash \alpha[a_1, \dots, a_k / z_1, \dots, z_k]$ con $FV(\alpha) = \{z_1, \dots, z_k\}, k > 0$
6. α es satisfactible en $\mathcal{M}$ si existen $a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|$ que la satisfacen.
7. α es satisfactible si existe algún $\mathcal{M}$ tal que α es satisfactible en $\mathcal{M}$

Lema 2.4.5: Propiedades de $\vDash$

La relación $\vDash$ refleja el significado intuitivo de los conectivos y los cuantificadores en las sentencias.

Sean $\alpha, \beta \in SENT$, $\gamma \in FORM, FV(\gamma) \subseteq \{x\}$. Entonces,

- $\mathcal{M} \vDash (\alpha \land \beta)$ sii $\mathcal{M} \vDash \alpha$ y $\mathcal{M} \vDash \beta$
- $\mathcal{M} \vDash (\alpha \lor \beta)$ sii $\mathcal{M} \vDash \alpha$ o $\mathcal{M} \vDash \beta$
- $\mathcal{M} \vDash (\neg\alpha)$ sii $\mathcal{M} \nvDash \alpha$
- $\mathcal{M} \vDash (\alpha \to \beta)$ sii (si $\mathcal{M} \vDash \alpha$ entonces $\mathcal{M} \vDash \beta$)
- $\mathcal{M} \vDash (\alpha \leftrightarrow \beta)$ sii ($\mathcal{M} \vDash \alpha$ sii $\mathcal{M} \vDash \beta$)
- $\mathcal{M} \vDash ((\forall x)\gamma)$ sii para todo $a \in |\mathcal{M}|, \mathcal{M} \vDash \gamma[\overline{a}, x]$
- $\mathcal{M} \vDash ((\exists x)\gamma)$ sii existe $a \in |\mathcal{M}|$ tal que $\mathcal{M} \vDash \gamma[\overline{a}, x]$

Lema 2.4.5: Demostración

Conectivo $\wedge$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models \alpha \wedge \beta \\
&\iff \text{(definición de } \models) \\
&v^{\mathcal{M}}(\alpha \wedge \beta) = 1 \\
&\iff \text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
&min\{v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\} = 1 \\
&\iff \text{(aritmética)} \\
&v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 1 \text{ y } v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1 \\
&\iff \text{(definición de } \models) \\
&\mathcal{M} \models \alpha \text{ y } \mathcal{M} \models \beta
\end{aligned}
$$

Conectivo $\neg$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models \neg\alpha \\
&\iff \text{(definición de } \models) \\
&v^{\mathcal{M}}(\neg\alpha) = 1 \\
&\iff \text{(definición de interpretacion } v^{\mathcal{M}}) \\
&v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0 \\
&\iff \text{(definición de } \models) \\
&\mathcal{M} \not\models \alpha
\end{aligned}
$$

Cuantificador $\forall$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models (\forall x)\alpha \\
&\iff \text{(definición de } \models) \\
&min\{v^{\mathcal{M}}(\alpha[\overline{a}/x]) \mid a \in |\mathcal{M}|\} = 1 \\
&\iff \text{(aritmética)} \\
&\text{para todo } a \in |\mathcal{M}|, \mathcal{M} \models \alpha[\overline{a}/x]
\end{aligned}
$$

Cuantificador $\rightarrow$

Queremos probar que $\mathcal{M} \models (\alpha \rightarrow \beta)$ sii (si $\mathcal{M} \models \alpha$ entonces $\mathcal{M} \models \beta$), que es equivalente a decir que:

$$\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta \text{ sii } \mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta$$

Como tenemos un “sii”, tenemos que probar dos partes:

Directo

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models \alpha \to \beta \\
&\iff \text{(definición de } \models\text{)} \\
&v^{\mathcal{M}}(\alpha \to \beta) = 1 \\
&\iff \text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}\text{)} \\
&v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0 \text{ o } v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1
\end{aligned}
$$

Entonces a partir de acá separamos en dos casos:

CASO 1: $v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0$

$$
\begin{aligned}
&v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0 \\
&\iff \text{(definición de } \models\text{)} \\
&\mathcal{M} \not\models \alpha \\
&\iff \text{(definición de implicancia)} \\
&\mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta
\end{aligned}
$$

CASO 2: $v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1$

$$
\begin{aligned}
&v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1 \\
&\iff \text{(definición de } \models\text{)} \\
&\mathcal{M} \models \beta \\
&\iff \text{(definición de implicancia)} \\
&\mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta$

Recíproco

Para esta parte también habría dos casos que considerar:

1. Cuando $\mathcal{M} \not\models \alpha$
2. Cuando $\mathcal{M} \models \alpha$

Pero observemos que el primero es trivial, pues si $\mathcal{M} \not\models \alpha$, entonces $v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0$ y por lo tanto: $v^{\mathcal{M}}(\alpha \to \beta) = 1$.

Consideremos el segundo entonces:

$\mathcal{M} \models \alpha$

$\iff$ (por hipótesis)

$\mathcal{M} \models \beta$

$\iff$ (definición de interpretación $v^{\mathcal{M}}$)

$v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1$

$\iff$ (aritmética)

$max\{1 - v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\} = 1$

$\iff$ (definición de interpretación $v^{\mathcal{M}}$)

$v^{\mathcal{M}}(\alpha \to \beta) = 1$

$\iff$ (definición de $\models$)

$\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$

Lema 2.4.5: Contrarrecíprocos

Sean $\alpha, \beta \in SENT$. Entonces,

- $\mathcal{M} \not\models (\alpha \land \beta)$ sii $\mathcal{M} \not\models \alpha$ o $\mathcal{M} \not\models \beta$
- $\mathcal{M} \not\models (\alpha \lor \beta)$ sii $\mathcal{M} \not\models \alpha$ y $\mathcal{M} \not\models \beta$
- $\mathcal{M} \not\models (\neg\alpha)$ sii $\mathcal{M} \models \alpha$
- $\mathcal{M} \not\models (\alpha \to \beta)$ sii $\mathcal{M} \models \alpha$ y $\mathcal{M} \not\models \beta$
- $\mathcal{M} \not\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$ sii ($\mathcal{M} \not\models \alpha$ sii $\mathcal{M} \models \beta$)
- $\mathcal{M} \not\models (\forall x)\alpha$ sii existe $a \in |\mathcal{M}|$ tal que $\mathcal{M} \not\models \alpha[\overline{a}/x]$
- $\mathcal{M} \not\models (\exists x)\alpha$ sii para todo $a \in |\mathcal{M}|, \mathcal{M} \not\models \alpha[\overline{a}/x]$

Equivalencia y generalización de las Leyes de De Morgan

Definición de eq

Dados $\alpha, \beta \in FORM$, decimos α eq β sii $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$

Teorema 2.5.1 (Leyes de De Morgan generalizadas)

- $\neg(\forall x)\alpha$ eq $(\exists x)\neg\alpha$
- $\neg(\exists x)\alpha$ eq $(\forall x)\neg\alpha$
- $(\forall x)\alpha$ eq $\neg(\exists x)\neg\alpha$
- $(\exists x)\alpha$ eq $\neg(\forall x)\neg\alpha$

Veamos algunas consideraciones previas:

- No hay ninguna suposición sobre las fórmulas involucradas, por lo que se asume que pueden tener variables libres: $FV(\alpha) = \{z_1, \dots, z_n\}$.
- Esto hace que se deban hacer las clausuras antes de hacer las demostraciones.
- Lo que hace que se deban manejar varias constantes en el proceso de demostración.

Demostración: $\neg(\forall x)\alpha$ **eq** $(\exists x)\neg\alpha$

$$\neg(\forall x)\alpha \text{ eq } (\exists x)\neg\alpha$$
$$\iff \text{(definición de eq)}$$
$$\models \neg(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha$$
$$\iff \text{(definición de } \models)$$
$$(\overline{\forall}\mathcal{M})\mathcal{M} \models \neg(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha$$
$$\iff \text{(clausura y definición } \models)$$
$$(\overline{\forall}\mathcal{M})\mathcal{M} \models (\forall z_1)\dots(\forall z_n)(\neg(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha)$$
$$\iff \text{(aplicando 2.4.5 } n \text{ veces)}$$
$$(\overline{\forall}\mathcal{M})(\overline{\forall}a_1,\dots,a_n \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models (\neg(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha)[\overline{a_1},\dots,\overline{a_n}/z_1,\dots,z_n]$$

Observemos que esto se vuelve muy extenso, muy rápido. En la siguiente clase veremos una forma de encarar esta demostración con una mejor estrategia.