

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 4

### Consigna

Considere un lenguaje de primer orden del tipo  $\langle 1, 2; 2; 0 \rangle$  con dos símbolos de relación  $P_1$  (unario) y  $P_2$  (binario) y un símbolo de función  $f_1$  (binario). Sea  $FORM$  el conjunto de fórmulas de dicho lenguaje. Indique cuáles de las siguientes son fórmulas bien formadas de dicho lenguaje (o sea, cuáles cumplen la definición de  $FORM$ ).

1.  $((\forall x_1)((\exists x_2)P_2(x_1, x_2)))$
2.  $(P_1(x_1) \rightarrow (((\exists x_2)f_1(x_1, x_2) = x_2) \wedge ((\exists x_1)P_2(x_1, x_2))))$
3.  $((\exists x_1)((\exists x_2)f_1(x_1, x_2)) \rightarrow ((\forall x_1)P_1(f_1(x_1, x_1))))$
4.  $((\forall x_1)((\forall x_2)(P_1(x_1) \vee ((\exists x_1)P_2(x_1, x_2))))$
5.  $(P_1((\forall x_1)P_2(x_1, x_2)) \leftrightarrow ((\forall x_1)P_1(P_2(x_1, x_2))))$
6.  $((\exists x_1) \wedge ((\forall x_2)P_2(x_1, x_2)))$
7.  $((\forall x_1)(P_1(x_1) \rightarrow (P_1(f_1(x_1, x_2)) \wedge ((\exists x_1)P_1(f_1(x_1, f_1(x_1, x_2)))))))$

### Resolución

Para esto es conveniente recordar como definimos  $FORM$ :

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$ . El conjunto  $FORM_A$  de las fórmulas del lenguaje de primer orden con alfabeto  $A$  se define inductivamente por:

1.  $\perp \in FORM_A$
2. Si  $t_1, \dots, t_{r_i} \in TERM_A$ , entonces  $P_i(t_1, \dots, t_{r_i}) \in FORM_A$
3. Si  $t_1, t_2 \in TERM_A$ , entonces  $t_1 = t_2 \in FORM_A$
4. Si  $\alpha, \beta \in FORM_A$ , entonces  $(\alpha \square \beta) \in FORM_A$
5. Si  $\alpha \in FORM_A$ , entonces  $(\neg \alpha) \in FORM_A$
6. Si  $\alpha \in FORM_A$ , entonces  $((\forall x_i)\alpha), ((\exists x_i)\alpha) \in FORM_A$

Vamos a pensar la definición basado en el tipo de alfabeto que tenemos.

### Parte 1

$$(\forall x_1)((\exists x_2)P_2(x_1, x_2))$$

Veamos si efectivamente la proposición pertenece a  $FORM_A$ :

$$\begin{aligned}
& (\forall x_1)((\exists x_2)P_2(x_1, x_2)) \in FORM_A \\
& \iff (\text{regla 6 de } FORM_A) \\
& ((\exists x_2)P_2(x_1, x_2)) \in FORM_A \\
& \iff (\text{regla 6 de } FORM_A) \\
& P_2(x_1, x_2) \in FORM_A \\
& \iff (\text{regla 2 de } FORM_A) \\
& x_1, x_2 \in TERM_A \quad \square
\end{aligned}$$

Donde lo último se cumple, por lo que efectivamente la proposición pertenece a  $FORM_A$

## Parte 2

$$(P_1(x_1) \rightarrow (((\exists x_2)f_1(x_1, x_2) = 'x_2) \wedge ((\exists x_1)P_2(x_1, x_2))))$$

Veamos si efectivamente la proposición pertenece a  $FORM_A$ :

1.  $P_1(x_1) \in FORM_A \quad \square$
2.  $((\exists x_2)f_1(x_1, x_2) = 'x_2) \wedge ((\exists x_1)P_2(x_1, x_2)) \in FORM_A \quad \square$ 
  - $((\exists x_2)f_1(x_1, x_2) = 'x_2) \in FORM_A \quad \square$ 
    - $f(x_1, x_2) = 'x_2 \in FORM_A \quad \square$
    - \*  $f(x_1, x_2) \in TERM_A \quad \square$
  - $((\exists x_1)P_2(x_1, x_2)) \in FORM_A \quad \square$ 
    - $P_2(x_1, x_2) \in FORM_A \quad \square$
    - \*  $x_1, x_2 \in TERM_A \quad \square$

Como cada paso se cumple, efectivamente la proposición pertenece a  $FORM_A$

## Parte 3

$$(((\exists x_1)((\exists x_2)f_1(x_1, x_2))) \rightarrow ((\forall x_1)P_1(f_1(x_1, x_1))))$$

Veamos si efectivamente la proposición pertenece a  $FORM_A$ :

1.  $((\exists x_1)((\exists x_2)f_1(x_1, x_2))) \in FORM_A$ 
  - $((\exists x_2)f_1(x_1, x_2)) \in FORM_A$ 
    - $f_1(x_1, x_2) \in FORM_A$  ¡ABSURDO!
2.  $((\forall x_1)P_1(f_1(x_1, x_1))) \in FORM_A$

Observemos que  $f_1(x_1, x_2) \in TERM_A$ , por el razonamiento que hicimos debería estar en  $FORM_A$ , por lo cual la proposición **NO** pertenece a  $FORM_A$ .

## Parte 4

$$((\forall x_1)((\forall x_2)(P_1(x_1) \vee ((\exists x_1)P_2(x_1, x_2))))$$

Veamos si efectivamente la proposición pertenece a  $FORM_A$ :

1.  $((\forall x_2)(P_1(x_1) \vee ((\exists x_1)P_2(x_1, x_2)))) \in FORM_A \quad \square$ 
  - $(P_1(x_1) \vee ((\exists x_1)P_2(x_1, x_2))) \in FORM_A \quad \square$

- $P_1(x_1) \in FORM_A \quad \square$
- $((\exists x_1)P_2(x_1, x_2)) \in FORM_A \quad \square$ 
  - \*  $P_2(x_1, x_2) \in FORM_A \quad \square$
  - $x_1, x_2 \in TERM_A \quad \square$

Como cada paso se cumple, efectivamente la proposición pertenece a  $FORM_A$ .

## Parte 5

$$(P_1((\forall x_1)P_2(x_1, x_2)) \leftrightarrow ((\forall x_1)P_1(P_2(x_1, x_2))))$$

Veamos si efectivamente la proposición pertenece a  $FORM_A$ :

1.  $P_1((\forall x_1)P_2(x_1, x_2)) \in FORM_A$ 
  - $(\forall x_1)P_2(x_1, x_2) \in TERM_A \quad \text{¡ABSURDO!}$
2.  $((\forall x_1)P_1(P_2(x_1, x_2))) \in FORM_A$

Observemos que  $(\forall x_1)P_2(x_1, x_2) \in FORM_A$ , por el razonamiento que hicimos debería estar en  $TERM_A$ , por lo cual la proposición **NO** pertenece a  $FORM_A$ .

## Parte 6

$$((\exists x_1) \wedge ((\forall x_2)P_2(x_1, x_2)))$$

Veamos si efectivamente la proposición pertenece a  $FORM_A$ :

1.  $\wedge((\forall x_2)P_2(x_1, x_2)) \in FORM_A \quad \text{¡ABSURDO!}$

Observemos que  $\wedge((\forall x_2)P_2(x_1, x_2))$  está mal construido, ninguna regla permite construir proposiciones a partir de un conectivo binario con una sola proposición, por lo cual la proposición **NO** pertenece a  $FORM_A$ .

## Parte 7

$$((\forall x_1)(P_1(x_1) \rightarrow (P_1(f_1(x_1, x_2)) \wedge ((\exists x_1)P_1(f_1(x_1, f_1(x_1, x_2)))))))$$

1.  $P_1(x_1) \in FORM_A \quad \square$ 
  - $x_1 \in TERM_A \quad \square$
2.  $(P_1(f_1(x_1, x_2)) \wedge ((\exists x_1)P_1(f_1(x_1, f_1(x_1, x_2)))) \in FORM_A \quad \square$ 
  - $P_1(f_1(x_1, x_2)) \in FORM_A \quad \square$ 
    - $f_1(x_1, x_2) \in TERM_A \quad \square$
  - $(\exists x_1)P_1(f_1(x_1, f_1(x_1, x_2))) \in FORM_A \quad \square$ 
    - $P_1(f_1(x_1, f_1(x_1, x_2))) \in FORM_A \quad \square$ 
      - \*  $f_1(x_1, f_1(x_1, x_2)) \in TERM_A \quad \square$
      - $x_1 \in TERM_A \quad \square$
      - $f_1(x_1, x_2) \in TERM_A \quad \square$

Como cada paso se cumple, efectivamente la proposición pertenece a  $FORM_A$