Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Sea la siguiente propiedad:

Para toda φ subfórmula de ψ, φ ocurre en cualquier secuencia de formación para ψ.

Dé una prueba inductiva de la misma.

Resolución

Premisa

Para resolver este ejercicio demos algo de notación para poder formalizar la proposición y ver como aplicar inducción:

- Llamemos $secFORM_\psi$ al conjunto de todas las secuencias de formación para ψ.
- $s \in secFORM_\psi$, $|s|$ es la longitud de la secuencia s.
- $s \in secFORM_\psi, \psi \in PROP; \psi \in s$ significa que ψ ocurre en s

Con esto podemos describir más formalmente la propiedad que queremos probar de la siguiente forma.

$$(\forall \psi \in PROP)(\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\forall s \in secFORM_\psi)(\varphi \in s))$$

Esto nos da las herramientas necesarias para poder aplicar inducción.

Recordatorio (PIP para $PROP$)

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad sobre las palabras de $PROP$ que cumple:

BASE1: $\mathcal{P}(p)$ para todo $p \in P$ *BASE2*: Se cumple $\mathcal{P}(\bot)$ *IND1*: Para todo $* \in C_2$ y $\alpha, \beta \in PROP$ que cumplen $\mathcal{P}(\alpha)$ y $\mathcal{P}(\beta)$, se cumple $\mathcal{P}((\alpha * \beta))$ *IND2*: Para todo $\alpha \in PROP$ que cumple $\mathcal{P}(\alpha)$, se cumple $\mathcal{P}((\neg\alpha))$

Entonces, $\mathcal{P}$ se cumple para todas las palabras de $PROP$.

Comienzo del ejercicio

Observemos que para aplicar inducción tenemos que primero llevar a la propiedad a una forma más adecuada para probarla con el PIP de $PROP$. Determinemos sobre cuál de las dos proposiciones (ψ, φ) queremos aplicar el PIP:

- Si fijamos φ, no podemos decir casi nada sobre ψ, esto porque estaríamos trabajando con una subfórmula de una proposición arbitraria.
- En cambio si fijamos ψ, podemos decir algo sobre todas las subfórmulas de ψ, especialmente en los casos más triviales donde ψ es una variable proposicional o una constante lógica.

Por lo tanto, fijaremos ψ y aplicaremos inducción sobre la estructura de ψ, la propiedad que queremos probar se convierte en:

$$P(\psi) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s))$$

PASO BASE

PARTE 1

$P(p_i) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } p_i \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{p_i})(\varphi \in s))$

Para este caso, como $p_i \in AT$ sabemos que su única subfórmula es si misma. Por otra parte, cualquier secuencia de formación para p_i debe terminar en si misma por construcción, por lo que $\varphi \in s \quad \forall \varphi \in \{p_i\}$.

PARTE 2

$P(\bot) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } \bot \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{\bot})(\varphi \in s))$

Para este caso, como $\bot \in AT$ sabemos que su única subfórmula es si misma. Por otra parte, cualquier secuencia de formación para $\bot$ debe terminar en $\bot$ por construcción, por lo que $\varphi \in s \quad \forall \varphi \in \{\bot\}$.

PASO INDUCTIVO

(H) $P(\psi) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s))$

PARTE 1

(T) $P(\neg\psi) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } (\neg\psi) \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{(\neg\psi)})(\varphi \in s))$

Vayamos con lo primero, para que φ sea subfórmula de $(\neg\psi)$, tiene que cumplir uno de lo siguientes:

- $\varphi = (\neg\psi)$
- φ es subfórmula de ψ

Si $\varphi = (\neg\psi)$, la propiedad se cumple porque $(\neg\psi)$ tiene que estar al final de todas las secuencias de formación para $(\neg\psi)$ por construcción.

Si φ es subfórmula de ψ, nos veríamos muy tentados de usar la hipótesis inductiva, pero esta se cumple para $secFORM_\psi$, no para $secFORM_{(\neg\psi)}$. Por lo que no podemos aplicarla directamente, para esto introducimos el siguiente lema:

LEMA

El prefijo de una secuencia de formación para $(\neg\psi)$ es una secuencia de formación para ψ.

Demostración:

Sea $s \in secFORM_{(\neg\psi)}$, entonces s tiene la forma:

$$s = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \alpha, \ldots, \psi, \beta, \ldots, (\neg\psi)\}$$

Sabemos que s es una secuencia de formación, por lo tanto si quitamos elementos de s del lado derecho (es decir que ningún elemento depende de ellos), seguiremos teniendo una secuencia de formación. Mantengamos el siguiente conjunto:

$$s' = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \alpha, \ldots, \psi\}$$

Por la forma en la que quitamos elementos, s' sigue siendo una secuencia de formación, y como su último elemento es ψ, s' es una secuencia de formación para ψ.

Continuación

Ahora, usando la hipótesis tenemos que:

$$P(\psi) : (\forall\varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\forall s \in secFORM_\psi)(\varphi \in s))$$

Entonces, como nosotros sabemos que φ es subfórmula de ψ, podemos decir que $(\forall s \in secFORM_\psi)(\varphi \in s)$.

Observemos que para cualquier secuencia de formación $s \in secFORM_{(\neg\psi)}$ podemos tomar su prefijo $s' \in secFORM_\psi$ que es una secuencia de formación para ψ, por lo que $\varphi \in s'$, y como s' es prefijo de s, $\varphi \in s$.

Esto prueba la propiedad para $(\neg\psi)$.

PARTE 2

$$\text{(T)}\quad P((\alpha*\beta)) : (\forall\varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } (\alpha*\beta) \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{(\alpha*\beta)})(\varphi \in s))$$

En primer lugar, para que φ sea subfórmula de $(\alpha * \beta)$, tiene que cumplir uno de lo siguientes:

- $\varphi = (\alpha * \beta)$
- φ es subfórmula de α
- φ es subfórmula de β

Si $\varphi = (\alpha * \beta)$, la propiedad se cumple porque $(\alpha * \beta)$ tiene que estar al final de todas las secuencias de formación para $(\alpha * \beta)$ por construcción.

Para los otros dos casos, podemos aplicar la hipótesis inductiva, ya que φ es subfórmula de α o β, y por lo tanto $\varphi \in s \quad \forall s \in secFORM_\alpha$ o $\varphi \in s \quad \forall s \in secFORM_\beta$.

Pero si s está en la secuencia de formación de α o β, también está en la secuencia de formación de $(\alpha * \beta)$ por construcción, por lo que $\varphi \in s \quad \forall s \in secFORM_{(\alpha*\beta)}$.

Esto prueba la propiedad para $(\alpha * \beta)$, y termina la prueba total.

Conclusión

Entiendo que la segunda parte del paso inductivo no necesita un lema, pero lo que estamos dando por entendido es que si φ es subfórmula de α o β, entonces φ es subfórmula de $(\alpha * \beta)$. Me da la sensación que esto es directo de la definición de subfórmula, pero no estoy seguro.