

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 8

### Consigna

Considere un lenguaje de primer orden del tipo  $\langle 1, 1, 2; 2, 1; 0 \rangle$  con símbolos de predicado  $P_1, P_2$  (unarios),  $P_3$  (binario) y símbolos de función  $f_1$  (binario),  $f_2$  (unario).

Sea la estructura:

$$M = \langle PROP, \{\varphi \mid \models \varphi\}, \{\perp\}, \{(\varphi_1, \varphi_2) \mid \varphi_1 \text{ eq } \varphi_2\}, F_\wedge, F_\neg \rangle$$

Donde  $F_\wedge(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$  y  $F_\neg(\varphi) = (\neg\varphi)$ .

Indique si las siguientes frases son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

1.  $M \models (\forall x)(P_1(f_2(x)) \rightarrow ((\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(x, y))))$
2.  $M \models (P_1(x) \rightarrow P_2(x))$
3.  $M \models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \rightarrow P_1(f_1(x, y)))$

### Resolución

La idea para esta parte es usar las siguientes propiedades sobre la relación  $\models$ :

La relación  $\models$  refleja el significado intuitivo de los conectivos y los cuantificadores en las sentencias.

Sean  $\alpha, \beta \in SENT$ ,  $\gamma \in FORM$ ,  $FV(\gamma) \subseteq \{x\}$ . Entonces,

- $\mathcal{M} \models (\alpha \wedge \beta)$  sii  $\mathcal{M} \models \alpha$  y  $\mathcal{M} \models \beta$
- $\mathcal{M} \models (\alpha \vee \beta)$  sii  $\mathcal{M} \models \alpha$  o  $\mathcal{M} \models \beta$
- $\mathcal{M} \models (\neg\alpha)$  sii  $\mathcal{M} \not\models \alpha$
- $\mathcal{M} \models (\alpha \rightarrow \beta)$  sii (si  $\mathcal{M} \models \alpha$  entonces  $\mathcal{M} \models \beta$ )
- $\mathcal{M} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)$  sii ( $\mathcal{M} \models \alpha$  sii  $\mathcal{M} \models \beta$ )
- $\mathcal{M} \models ((\forall x)\gamma)$  sii para todo  $a \in |\mathcal{M}|$ ,  $\mathcal{M} \models \gamma[\bar{a}, x]$
- $\mathcal{M} \models ((\exists x)\gamma)$  sii existe  $a \in |\mathcal{M}|$  tal que  $\mathcal{M} \models \gamma[\bar{a}, x]$

## Parte 1

$$M \models (\forall x)(P_1(f_2(x)) \rightarrow ((\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(x, y))))$$

$\iff$  (propiedades de  $\models$ )

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) M \models P_1(f_2(\bar{\alpha})) \rightarrow ((\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(\bar{\alpha}, y)))$$

$\iff$  (propiedades de  $\models$ )

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } M \models P_1(f_2(\bar{\alpha})) \text{ entonces } M \models (\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(\bar{\alpha}, y)))$$

$\iff$  (propiedades de  $\models$ )

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } M \models P_1(f_2(\bar{\alpha})) \text{ entonces } (\bar{\exists} \beta \in PROP) M \models (P_2(\bar{\beta}) \wedge P_3(\bar{\alpha}, \bar{\beta})))$$

$\iff$  (propiedades de  $\models$ )

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } M \models P_1(f_2(\bar{\alpha})) \text{ entonces } (\bar{\exists} \beta \in PROP) (M \models P_2(\bar{\beta}) \text{ y } M \models P_3(\bar{\alpha}, \bar{\beta})))$$

$\iff$  (propiedades de  $\models$ )

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } v^M(P_1(f_2(\bar{\alpha}))) = 1 \text{ entonces } (\bar{\exists} \beta \in PROP) (v^M(P_2(\bar{\beta})) = 1 \text{ y } v^M(P_3(\bar{\alpha}, \bar{\beta})) = 1))$$

$\iff$  (predicados de  $M$ )

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } f_2(\bar{\alpha})^M \in \{\varphi \mid \models \varphi\} \text{ entonces } (\bar{\exists} \beta \in PROP) (\bar{\beta}^M \in \{\perp\} \text{ y } \bar{\alpha}^M \text{ eq } \bar{\beta}^M))$$

$\iff$  (funciones de  $M$  e interpretación de términos)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } \neg \bar{\alpha}^M \in \{\varphi \mid \models \varphi\} \text{ entonces } (\bar{\exists} \beta \in PROP) (\beta = \perp \text{ y } \alpha \text{ eq } \perp))$$

$\iff$  (desarrollo de conjuntos y simplificación)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } \models \neg \alpha \text{ entonces } \alpha \text{ eq } \perp)$$

$\iff$  (definición de  $eq$ )

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\models \neg \alpha \implies \models \alpha \leftrightarrow \perp)$$

$\iff$  (definición de  $\models$  en  $PROP$ )

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) ((\bar{\forall} v \in Val) v(\neg \alpha) = 1 \implies (\bar{\forall} v \in Val) v(\alpha \leftrightarrow \perp) = 1)$$

$\iff$  (definición de valuación)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) ((\bar{\forall} v \in Val) v(\alpha) = 0 \implies (\bar{\forall} v \in Val) v(\alpha) = v(\perp))$$

$\iff$  (definición de valuación:  $v(\perp)=0$ )

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) ((\bar{\forall} v \in Val) v(\alpha) = 0 \implies (\bar{\forall} v \in Val) v(\alpha) = 0)$$

Como el antecedente y el consecuente son iguales, la propiedad es **VERDADERA**

## Parte 2

$$\begin{aligned}
& M \models (P_1(x) \rightarrow P_2(x)) \\
& \iff (\text{clausura y propiedades de } \models) \\
& M \models (\forall x)(P_1(x) \rightarrow P_2(x)) \\
& \iff (\text{propiedades de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha \in PROP)(M \models P_1(\bar{\alpha}) \rightarrow P_2(\bar{\alpha})) \\
& \iff (\text{propiedades de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha \in PROP)(\text{Si } M \models P_1(\bar{\alpha}) \text{ entonces } M \models P_2(\bar{\alpha})) \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha \in PROP)(\text{Si } v^M(P_1(\bar{\alpha})) = 1 \text{ entonces } v^M(P_2(\bar{\alpha})) = 1) \\
& \iff (\text{predicados de } M) \\
& (\bar{\forall} \alpha \in PROP)(\text{Si } \bar{\alpha}^M \in \{\alpha \mid \models \alpha\} \text{ entonces } \bar{\alpha}^M \in \{\perp\}) \\
& \iff (\text{interpretación de términos y desarrollo de conjuntos}) \\
& (\bar{\forall} \alpha \in PROP)(\text{Si } \models \alpha \text{ entonces } \alpha = \perp)
\end{aligned}$$

Tomemos por ejemplo  $\alpha = \neg \perp$ . Sabemos que  $\models \neg \perp$ , pero  $\alpha \neq \perp$ . Por lo tanto esta propiedad es **FALSA**.

## Parte 3

$$\begin{aligned}
& M \models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \rightarrow P_1(f_1(x, y))) \\
& \iff (\text{propiedades de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP) M \models (P_1(\bar{\alpha}) \wedge P_1(\bar{\beta}) \rightarrow P_1(f_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}))) \\
& \iff (\text{propiedades de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } M \models (P_1(\bar{\alpha}) \wedge P_1(\bar{\beta})) \text{ entonces } M \models P_1(f_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}))) \\
& \iff (\text{propiedades de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } (M \models P_1(\bar{\alpha}) \text{ y } M \models P_1(\bar{\beta})) \text{ entonces } M \models P_1(f_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}))) \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } (v^M(P_1(\bar{\alpha})) = 1 \text{ y } v^M(P_1(\bar{\beta})) = 1) \text{ entonces } v^M(P_1(f_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}))) = 1) \\
& \iff (\text{interpretación de predicados y funciones de } M) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } (\bar{\alpha}^M \in \{\varphi \mid \models \varphi\} \text{ y } \bar{\beta}^M \in \{\varphi \mid \models \varphi\}) \text{ entonces } f_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta})^M \in \{\varphi \mid \models \varphi\}) \\
& \iff (\text{desarrollo de conjuntos e interpretación de términos de } M) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } (\models \alpha \text{ y } \models \beta) \text{ entonces } (\bar{\alpha}^M \wedge \bar{\beta}^M) \in \{\varphi \mid \models \varphi\}) \\
& \iff (\text{desarrollo de conjuntos e interpretación de términos de } M) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)((\models \alpha \text{ y } \models \beta) \implies \models (\alpha \wedge \beta)) \\
& \iff (\text{definición de } \models \text{ en } PROP) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)((\bar{\forall} v \in Val)v(\alpha) = 1 \text{ y } (\bar{\forall} v \in Val)v(\beta) = 1 \implies (\bar{\forall} v \in Val)v(\alpha \wedge \beta) = 1) \\
& \iff (\text{definición de valuación}) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)((\bar{\forall} v \in Val)v(\alpha) = 1 \text{ y } (\bar{\forall} v \in Val)v(\beta) = 1 \implies (\bar{\forall} v \in Val)\min\{v(\alpha), v(\beta)\} = 1)
\end{aligned}$$

Con esto vemos que la propiedad es **VERDADERA**, pues  $\min\{v(\alpha), v(\beta)\} = \min\{1, 1\}$  por el antecedente. Y esto último obviamente es igual a 1.