

Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Considere φ, ψ, σ pertenecientes a $PROP$.

(a) Pruebe las siguientes consecuencias lógicas:

1. $\varphi \models \varphi$
2. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \models \varphi$
3. $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \sigma) \models (\varphi \wedge \sigma)$

(b) Demuestre que:

1. Si $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \sigma$, entonces $\varphi \models \sigma$
2. Si $\varphi \models \varphi \rightarrow \psi$, entonces $\varphi \models \psi$
3. Si $\varphi \models \neg\varphi$ y $\psi \models \varphi$, entonces $\models \neg\psi$
4. Si $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \neg\psi$, entonces $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$ (donde $\Gamma \subseteq PROP$)

Resolución (parte a)

Para esta parte usamos la definición de valuación para determinar si las fórmulas dadas son tautologías. Podríamos usar de forma alternativa el concepto de Tableau Semántico.

1. $\varphi \models \varphi$

Sea v una valuación tal que $v(\varphi) = 1$, luego:

$$\begin{aligned} v(\varphi) \\ &= (\text{hipótesis}) \\ 1 \end{aligned}$$

Como cualquier valuación dada en este contexto cumple que $v(\varphi) = 1$, podemos concluir que $\varphi \models \varphi$

2. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \models \varphi$

Sea v una valuación tal que $v(\varphi \vee \psi) = 1$ y $v(\neg\psi) = 1$, luego:

PARTE 1: $v(\varphi \vee \psi) = 1$

$$\begin{aligned} &v(\varphi \vee \psi) \\ &= (\text{definición de valuación}) \\ &\max\{v(\varphi), v(\psi)\} \\ &= (\text{hipótesis}) \\ &1 \end{aligned}$$

PARTE 2: $v(\neg\psi) = 1$

$$\begin{aligned} &v(\neg\psi) = 1 - v(\psi) \\ &\iff (\text{hipótesis}) \\ &1 - v(\psi) = 1 \\ &\iff (\text{despeje}) \\ &v(\psi) = 0 \end{aligned}$$

Entonces ahora juntando con la primer parte, tenemos que:

$$\begin{aligned} &v(\varphi \vee \psi) \\ &= (\text{definición de valuación}) \\ &\max\{v(\varphi), v(\psi)\} \\ &= (\text{por parte 2}) \\ &\max\{v(\varphi), 0\} \\ &= (\text{hipótesis}) \\ &1 \end{aligned}$$

Entonces $v(\varphi) = 1$, por lo que podemos concluir que $\varphi \vee \psi, \neg\psi \models \varphi$

3. $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \sigma) \models (\varphi \wedge \sigma)$

Sea v una valuación tal que $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ y $v(\psi \wedge \sigma) = 1$, luego:

PARTE 1: $v(\varphi \wedge \psi) = 1$

$$\begin{aligned} &v(\varphi \wedge \psi) \\ &= (\text{definici3n de valuaci3n}) \\ &\min\{v(\varphi), v(\psi)\} \\ &= (\text{hip3tesis}) \\ &1 \\ &\Rightarrow (\text{despeje}) \\ &v(\varphi) = 1; v(\psi) = 1 \end{aligned}$$

PARTE 2: $v(\psi \wedge \sigma) = 1$

$$\begin{aligned} &v(\psi \wedge \sigma) \\ &= (\text{definici3n de valuaci3n}) \\ &\min\{v(\psi), v(\sigma)\} \\ &= (\text{hip3tesis}) \\ &1 \\ &\Rightarrow (\text{despeje}) \\ &v(\psi) = 1; v(\sigma) = 1 \end{aligned}$$

Ahora juntando ambas partes, tenemos que:

$$\begin{aligned} &v(\varphi \wedge \sigma) \\ &= (\text{definici3n de valuaci3n}) \\ &\min\{v(\varphi), v(\sigma)\} \\ &= (\text{parte 1 y 2}) \\ &\min\{1, 1\} \\ &= (\text{despeje}) \\ &1 \end{aligned}$$

Como cualquier valuaci3n dada en este contexto cumple que $v(\varphi \wedge \sigma) = 1$, podemos concluir que $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \sigma) \models (\varphi \wedge \sigma)$

Resoluci3n (parte b)

Para esta parte usaremos el concepto de absurdo combinado con la definici3n de valuaci3n.

1. Si $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \sigma$, entonces $\varphi \models \sigma$

(H) $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \sigma$

(I) $\varphi \models \sigma$

Usando las hip3tesis tenemos que:

PARTE 1

$$\varphi \models \psi$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } v(\varphi) = 1, \text{ entonces } v(\psi) = 1$$

PARTE 2

$$\psi \models \sigma$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } v(\psi) = 1, \text{ entonces } v(\sigma) = 1$$

Queremos probar que para una valuación v cualquiera se cumple la tesis, partamos de que $v(\varphi) = 1$:

$$v(\varphi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(por parte 1)}$$

$$v(\psi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(por parte 2)}$$

$$v(\sigma) = 1$$

Entonces, como cualquier valuación dada en este contexto cumple que $v(\varphi) = 1$ implica $v(\sigma) = 1$, podemos concluir que $\varphi \models \sigma$

2. Si $\models \varphi \rightarrow \psi$, entonces $\varphi \models \psi$

En este caso podemos trabajar con absurdo ya que tenemos una sola hipótesis.

Veamos que pasa si $\varphi \not\models \psi$:

$$\varphi \not\models \psi$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\exists v_1 \in Val) \mid v_1(\varphi) = 1; v_1(\psi) = 0$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$v_1(\varphi \rightarrow \psi) = 0$$

$$\Rightarrow \text{(hipótesis)}$$

ABSURDO!

Esto es absurdo porque por hipótesis sabemos que $\models \varphi \rightarrow \psi$.

Entonces, tenemos que si $\models \varphi \rightarrow \psi$, entonces $\varphi \models \psi$.

3. Si $\models \neg\varphi$ y $\psi \models \varphi$, entonces $\models \neg\psi$

(H) $\models \neg\varphi$ y $\psi \models \varphi$

(I) $\models \neg\psi$

Usando las hipótesis tenemos que:

PARTE 1

$\models \neg\varphi$

\iff (definición de tautología)

$(\forall v \in Val) \mid v(\neg\varphi) = 1$

\Rightarrow (definición de valuación)

$(\forall v \in Val) \mid v(\varphi) = 0$

PARTE 2

$\psi \models \varphi$

\iff (definición de consecuencia lógica)

$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } v(\psi) = 1, \text{ entonces } v(\varphi) = 1$

\Rightarrow (por parte 1: $v(\varphi)=0$)

$(\forall v \in Val) \mid v(\psi) \neq 1$

\Rightarrow (definición de valuación)

$(\forall v \in Val) \mid v(\psi) = 0$

Queremos probar que para una valuación v cualquiera se cumple la tesis:

$\models \neg\psi$

\iff (definición de tautología)

$(\forall v \in Val) \mid v(\neg\psi) = 1$

\Rightarrow (definición de valuación)

$(\forall v \in Val) \mid v(\psi) = 0$

Donde esto último se cumple para toda valuación v por la parte 2.

4. Si $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \neg\psi$, entonces $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$

(H) $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \neg\psi$

(I) $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$

Usando las hipótesis tenemos que las valuaciones v cumplen que:

PARTE 1

$$\Gamma \models \varphi$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\varphi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\neg\varphi) = 0$$

PARTE 2

$$\Gamma \models \neg\psi$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\neg\psi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\psi) = 0$$

Veamos que pasa por absurdo si $\Gamma \not\models (\neg\varphi \vee \psi)$:

$$\Gamma \not\models (\neg\varphi \vee \psi)$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\neg(\neg\varphi \vee \psi)) = 0$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\neg\varphi \vee \psi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } \min\{v(\neg\varphi), v(\psi)\} = 1$$

$$\Rightarrow \text{(por parte 1 y parte 2)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } \min\{0, 0\} = 1$$

$$\Rightarrow \text{(operatoria)}$$

ABSURDO!

Entonces si $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \neg\psi$, entonces $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$