

Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 12

Consigna

Sean φ , ψ fórmulas de un lenguaje de primer orden. Suponer que $FV(\varphi) = FV(\psi) = \{x\}$. Demuestre que:

1. $\models \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$
2. $\models (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$
3. $\models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$
4. $\models (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$
5. $\models (\exists x\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$

Resolución

Para todos los casos, se considera una estructura \mathcal{M} de tipo adecuado cualquiera. Además también se observa que por hipótesis, todas las fórmulas que aparecen en el ejercicio son sentencias.

Parte 1

Demostraremos esto por absurdo, por lo que veamos que pasa si:

- $\not\models \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$

Veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \not\models \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi) \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \not\models \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi) \\
& \iff (\text{contrarrecíproco de 2.4.5}) \\
& \mathcal{M} \models \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \text{ y } \mathcal{M} \not\models (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi) \\
& \iff (\text{contrarrecíproco de 2.4.5}) \\
& \mathcal{M} \models \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \text{ y} \\
& \mathcal{M} \models \forall x\varphi \text{ y} \\
& \mathcal{M} \not\models \forall x\psi \\
& \iff (2.4.5) \\
& (i) \quad (\forall a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models (\varphi[\bar{a}/x] \rightarrow \psi[\bar{a}/x]) \text{ y} \\
& (ii) \quad (\forall a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \text{ y} \\
& (iii) \quad (\forall a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \not\models \psi[\bar{a}/x] \\
& \iff (2.4.5) \\
& (i) \quad (\forall a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \implies \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x] \text{ y} \\
& (ii) \quad (\forall a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \text{ y} \\
& (iii) \quad (\forall a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \not\models \psi[\bar{a}/x]
\end{aligned}$$

Ahora, consideremos $a_1 \in |\mathcal{M}|$ tal que:

- $\mathcal{M} \not\models \psi[\bar{a}_1/x]$, sabemos que este existe por la propiedad (iii)
- Por la propiedad (ii), tenemos que $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}_1/x]$
- Usando lo anterior, más la propiedad (i), podemos concluir que:
 - $\mathcal{M} \models \psi[\bar{a}_1/x]$

Pero esto es absurdo por la primera afirmación que obtuvimos. Por lo tanto:

- $\models \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$

Parte 2

Demostraremos esto por absurdo, veamos que pasa si:

- $\not\models (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$

Veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \not\models (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \not\models (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \\
& \iff (\text{contrarrecíproco de 2.4.5}) \\
& \mathcal{M} \models (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \text{ y} \\
& \mathcal{M} \not\models (\exists x(\varphi \rightarrow \psi)) \\
& \iff (2.4.5 \text{ y contrarrecíproco de 2.4.5}) \\
& \mathcal{M} \models \exists x\varphi \implies \mathcal{M} \models \exists x\psi \text{ y} \\
& (\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \not\models (\varphi[\bar{a}/x] \rightarrow \psi[\bar{a}/x]) \\
& \iff (\text{contrarrecíproco de 2.4.5}) \\
& (i) \quad (\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \implies (\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x] \text{ y} \\
& (ii) \quad (\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \text{ y} \\
& (iii) \quad (\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \not\models \psi[\bar{a}/x]
\end{aligned}$$

Observemos que (i) es totalmente incompatible con (ii) y (iii), pues:

- Por la propiedad (ii), tomo $a_1 \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}_1/x]$
- Entonces por la propiedad (i), tenemos que $(\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x]$
- Pero esto último es absurdo por la propiedad (iii)

Parte 3

Demostraremos esto por absurdo, veamos que pasa si:

- $\not\models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$

Veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \not\models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi) \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \not\models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi) \\
& \iff (2.4.5) \\
& \mathcal{M} \models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \text{ y} \\
& \mathcal{M} \not\models (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi) \\
& \iff (2.4.5 \text{ y contrarrecíproco de 2.4.5}) \\
& (\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \leftrightarrow \psi[\bar{a}/x] \text{ y} \\
& \mathcal{M} \not\models \forall x\varphi \iff \mathcal{M} \models \forall x\psi \\
& \iff (2.4.5) \\
& (\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \iff (\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x] \text{ y} \\
& (\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{a}/x] \iff (\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x]
\end{aligned}$$

Lo cual es trivialmente absurdo.

Parte 4

Demostraremos esto por absurdo, veamos que pasa si:

- $\not\models (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$

Veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \not\models (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \\
& \iff \text{(definición de } \models \text{)} \\
& \mathcal{M} \not\models (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \\
& \iff \text{(2.4.5)} \\
& \mathcal{M} \models (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \text{ y} \\
& \mathcal{M} \not\models \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \\
& \iff \text{(2.4.5 y contrarrecíproco de 2.4.5)} \\
& \mathcal{M} \models \forall x\varphi \implies \mathcal{M} \models \exists x\psi \text{ y} \\
& (\forall a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{a}/x] \rightarrow \psi[\bar{a}/x]
\end{aligned}$$