Lógica

Mauro Polenta Mora

CLASE 18 - 09/07/2025

Deducción natural en lógica proposicional

Introducción

- Definimos inductivamente el conjunto de las derivaciones DER_P de la lógica de predicados.
- Caso base: derivación trivial (idem $PROP$).
- Para los conectivos: las mismas reglas de introducción y eliminación de $PROP$.
- Para los cuantificadores: se agregan reglas de introducción y eliminación.

Reglas para $\forall$

Regla de introducción

- Hipótesis; $\delta_1, \ldots, \delta_n$, x es una variable fresca.
- Tesis: Para todo x vale α.
- Demostración: Probamos α usando $\delta_1, \ldots, \delta_n$. Como x no aparece en $\delta_1, \ldots, \delta_n$ la prueba es independiente de x. Luego, hemos probado α para cualquier x, usando $\delta_1, \ldots, \delta_n$.

$$\begin{array}{c} \delta_1, \ldots, \delta_n \\ \vdots \\ \dfrac{\alpha}{(\forall x)\alpha}\ I_\forall(*) \end{array}$$

Figure 1: Figura 1

$(*)$ x no ocurre libre en las hipótesis $\delta_1, \ldots, \delta_n$.

Regla de eliminación

- Hipótesis: $\delta_1, \ldots, \delta_n$ y t el nombre de un término.
- Tesis: El término t cumple la propiedad α.
- Demostración: Probamos $(\forall x)\alpha$ usando $\delta_1, \ldots, \delta_n$. Luego, vale $\alpha[t/x]$.

$$\begin{array}{c} \delta_1, \dots, \delta_n \\ \vdots \\ \dfrac{(\forall x)\alpha}{\alpha[t/x]}\ E_{\forall}(*) \end{array}$$

Figure 2: Figura 2

(∗) t debe estar libre para x en α.

Reglas para $\exists$

Regla de introducción

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: Algún individuo cumple la propiedad α.
- Demostración: Pruebo que α vale para cierto t, usando $\delta_1, \dots, \delta_n$. Luego, existe un elemento para el cual vale α

$$\begin{array}{c} \delta_1, \dots, \delta_n \\ \vdots \\ \dfrac{\alpha[t/x]}{(\exists x)\alpha}\ I_{\exists}(*) \end{array}$$

Figure 3: Figura 3

(∗) t debe estar libre para x en α.

Regla de eliminación

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$, algún individuo cumple la propiedad α y $x \notin FV(\{\delta_1, \dots, \delta_n\})$
- Tesis: Se cumple β
- Demostración: Asumimos que x cumple α, probamos β usando $\delta_1, \dots, \delta_n$ y α. Luego, hemos probado β, usando $\delta_1, \dots, \delta_n$ y $(\exists x)\alpha$

$$\dfrac{(\exists x)\alpha \qquad \begin{array}{c} \delta_1, \dots, \delta_n, {\color{red}[\alpha]}^{(1)} \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\beta}\ E_{\exists}^{(1)}(*)$$

Figure 4: Figura 4

(*) x no ocurre libre ni en β ni en las hipótesis $\delta_1, \dots, \delta_n$.

Observación importante

Una derivación para esta lógica, ya no es correcta solo si logramos encontrar un árbol en DER_P con la forma indicada. Ahora también tenemos que justificar el porque cada paso con las reglas de cuantificadores es correcto (lo visto con (*)). Más adelante veremos ejemplos como para entender como realizar esto correctamente.

Consecuencia sintáctica

Sea $\Gamma \subseteq FORM$ y $\varphi \in FORM$. Decimos que φ es consecuencia sintáctica de Γ o que φ se deriva de Γ sii existe $D \in DER_P$ tal que $C(D) = \varphi$ y $H(D) \subseteq \Gamma$.

Notación: - $\Gamma \vdash \varphi$ se lee φ se deriva de Γ. - $\vdash \varphi$ se lee φ es teorema.

Restricciones sobre las variables

Cuando introducimos las reglas de introducción y eliminación de $\forall$ y $\exists$, estas vinieron con varias restricciones sobre variables.

Veamos algunos ejemplos de porque necesitamos estas restricciones:

Ejemplo 1

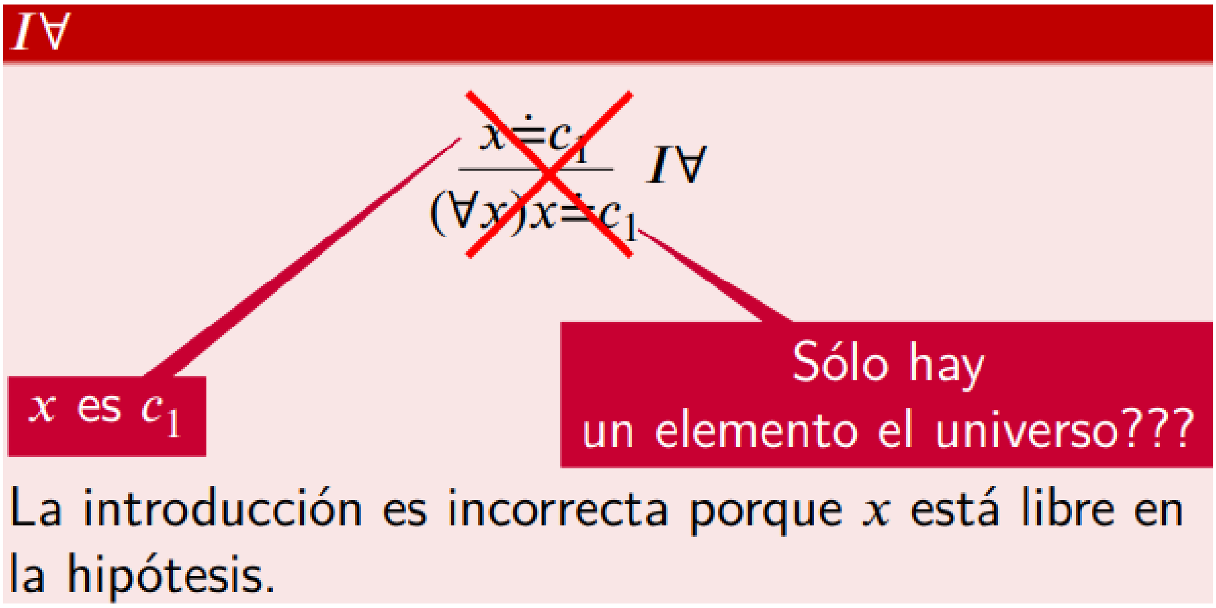

Figure 5: Figura 5

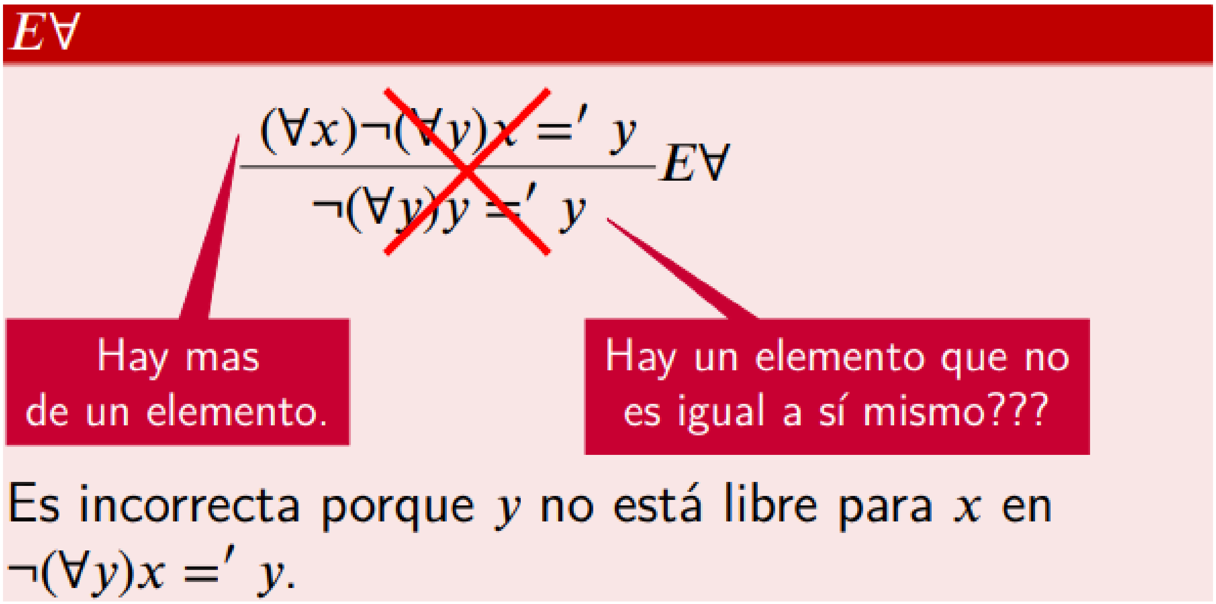

Figure 6: Figura 6

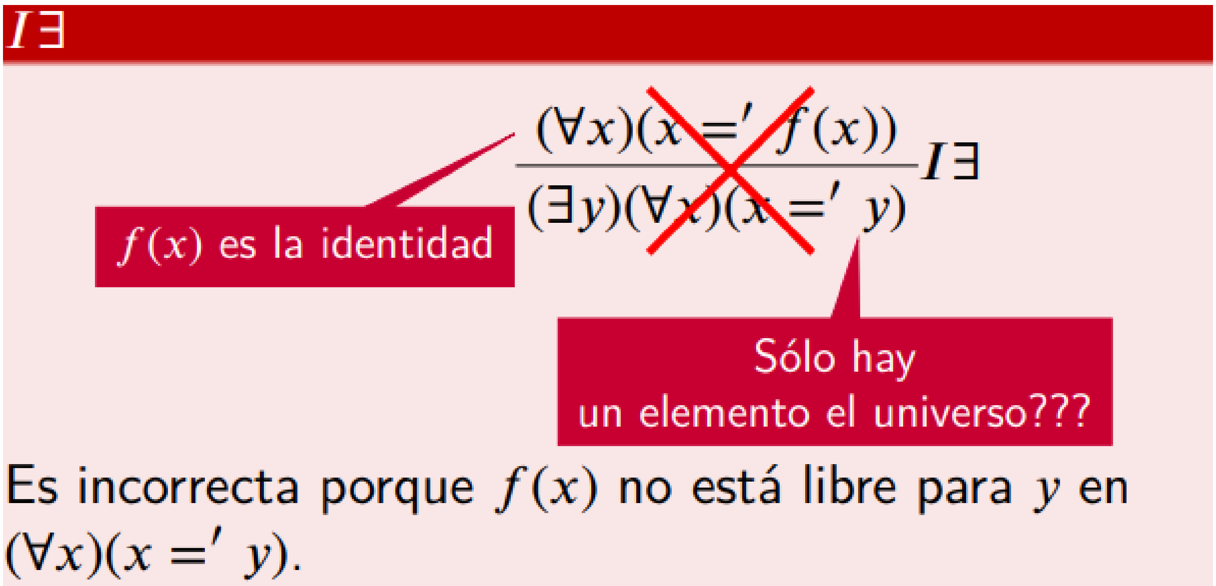

Figure 7: Figura 7

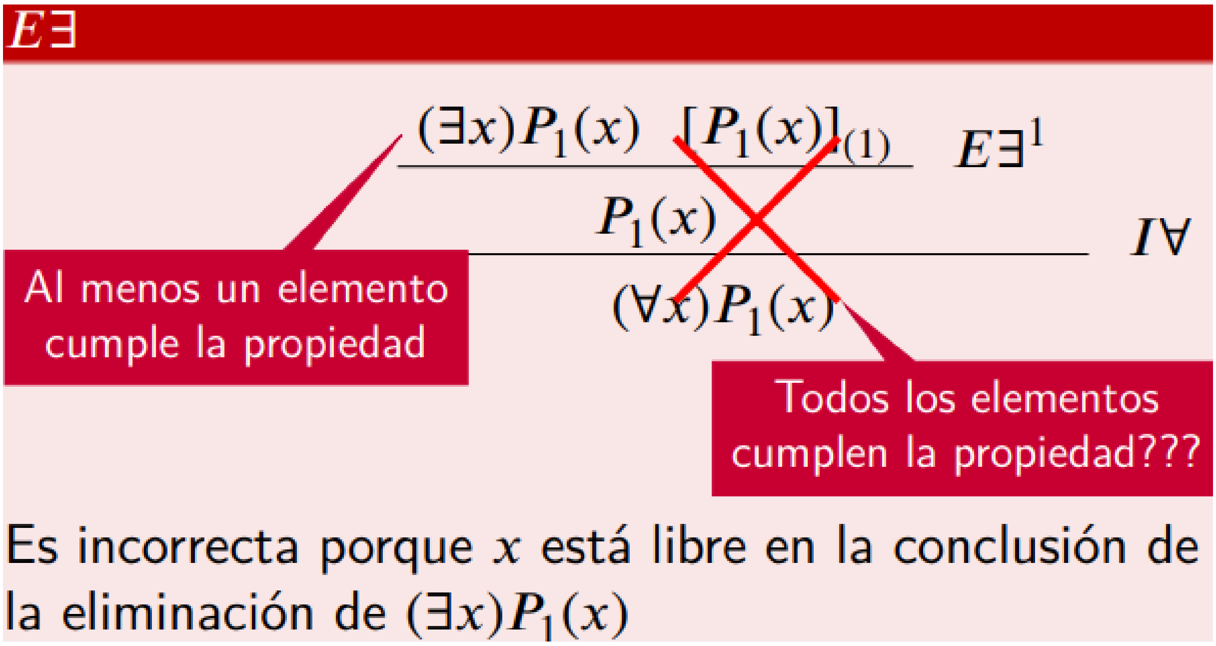

Figure 8: Figura 8

Ejemplo 2

Ejemplo 3

Ejemplo 4

Restricciones y alcance

- Hay que recordar que las hipótesis canceladas, en realidad, son hipótesis normales de subderivaciones.
- Son hipótesis normales (abiertas, sin cancelar) desde donde aparecen hasta la regla que las cancela y por lo tanto, valen las restricciones en todos las reglas que se utilicen entre esos lugares.

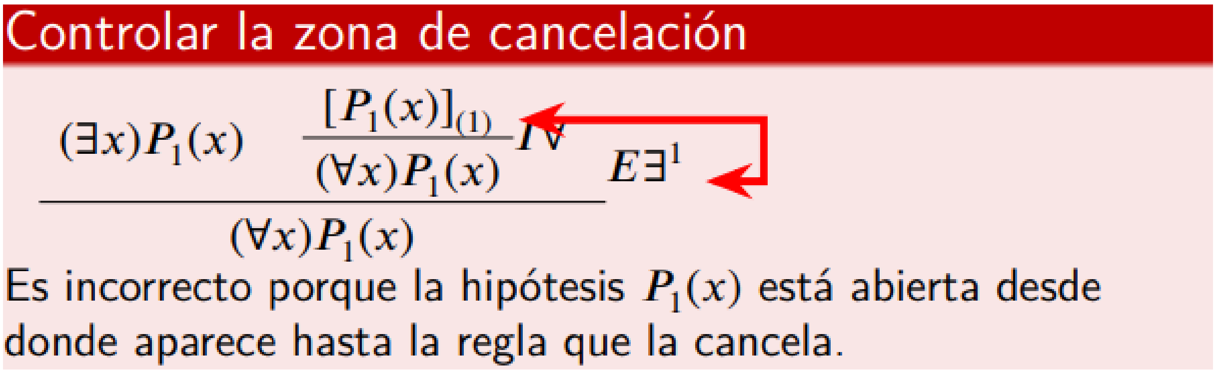

Figure 9: Figura 9

Derivaciones de ejemplo

Ejemplo 1

Veamos que $\vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\alpha \to (\forall x_2)(\forall x_1)\alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall x_1)(\forall x_2)\alpha]^1}{(\forall x_2)\alpha}\,E\forall(****)}{\alpha}\,E\forall(***)}{(\forall x_1)\alpha}\,I\forall(**)}{(\forall x_2)(\forall x_1)\alpha}\,I\forall(*)}{(\forall x_1)(\forall x_2)\alpha \to (\forall x_2)(\forall x_1)\alpha}\,I{\to}^{(1)}$$

Figure 10: Figura 10

Este es el primer paso. Ahora tenemos que demostrar que cada aplicación de las reglas de cuantificadores, está bien aplicado. Veámoslo:

- $(*)I\forall$: La regla está bien aplicada porque x_2 está libre en las hipótesis abiertas a este punto:
  - $(\forall x_1)(\forall x_2)\alpha$
- $(**)I\forall$: La regla está bien aplicada porque x_1 está libre en las hipótesis abiertas a este punto:
  - $(\forall x_1)(\forall x_2)\alpha$
- $(***)E\forall$: La regla está bien aplicada porque x_2 está libre para x_2 en α.
- $(****)E\forall$: La regla está bien aplicada porque x_1 está libre para x_1 en α.

Con esto, la derivación es válida.

Ejemplo 2

Veamos que $\vdash (\exists x_1)(\exists x_2)\alpha \to (\exists x_2)(\exists x_1)\alpha$

$$\dfrac{\dfrac{[(\exists x_1)(\exists x_2)\alpha]^1 \qquad \dfrac{[(\exists x_2)\alpha]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\alpha]^3}{(\exists x_1)\alpha}\,I\exists(iv)}{(\exists x_2)(\exists x_1)\alpha}\,I\exists(iii)}{(\exists x_2)(\exists x_1)\alpha}\,E\exists^{(3)}(ii)}{(\exists x_2)(\exists x_1)\alpha}\,E\exists^{(2)}(i)}{(\exists x_1)(\exists x_2)\alpha \to (\exists x_2)(\exists x_1)\alpha}\,I{\to}^{(1)}$$

Figure 11: Figura 11

- $(i)E\exists$ Es correcto porque:
  - $x_1 \notin FV(C(D))$ que es lo mismo que decir que x_1 no está libre en la conclusión
  - $x_1 \notin FV(H(D))$ porque no hay hipótesis abiertas en este punto.
- $(ii)E\exists$ Es correcto porque:
  - $x_2 \notin FV(C(D))$
  - $x_2 \notin FV(H(D))$ porque no hay hipótesis abiertas en este punto.
- $(iii)I\exists$ Es correcto porque x_2 está libre para x_2 en $(\exists x_1)\alpha$
- $(iv)I\exists$ Es correcto porque x_1 está libre para x_1 en α