Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Considere el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Considere un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P_1 (unario) que denota la relación "ser par", un símbolo de relación binario $='$ que denota la igualdad, dos símbolos de función f_1 y f_2 (binarios) que denotan la suma y el producto respectivamente y tres símbolos de constante c_1, c_2, c_3 que denotan las constantes 1, 2, 6. Traduzca a fórmulas de primer orden (utilizando solamente los símbolos definidos) cada uno de los siguientes enunciados:

1. Todo natural n cumple que $n^2 + n$ es par.
2. Para todo natural par p existe un natural m tal que $p = 2 \times m$.
3. La suma de dos naturales impares cualesquiera es un natural par.
4. Para todo natural n existe un natural m tal que $n \times (n+1) \times (n+2) = 6 \times m$.
5. No hay ningún natural que sea par e impar a la vez.
6. Hay un natural n que es par y que además cumple que $n + n = n \times n$.
7. La suma posee un neutro, que además es único.
8. La suma es una función inyectiva.

Resolución

Primero definimos la estructura del lenguaje de la siguiente forma:

$$E = \langle \mathbb{N}, P_1, =', f_1, f_2, c_1, c_2, c_3 \rangle$$

Que tiene el siguiente tipo de similaridad:

$$\langle 1, 2; 2, 2; 3 \rangle$$

Parte 1

Todo natural n cumple que $n^2 + n$ es par.

$$(\forall n) P_1(f_1(f_2(n, n), n))$$

Parte 2

Para todo natural par p existe un natural m tal que $p = 2 \times m$.

$$(\forall p)(P_1(p) \to ((\exists m)p =' f_2(2, m)))$$

Parte 3

La suma de dos naturales impares cualesquiera es un natural par.

$$(\forall n_1)(\forall n_2)(\neg P_1(n_1) \wedge \neg P_1(n_2)) \to P_1(f_1(n_1, n_2))$$

Parte 4

Para todo natural n existe un natural m tal que $n \times (n+1) \times (n+2) = 6 \times m$.

$$(\forall n)(\exists m)f_2(n, f_2(f_1(n, 1), f_1(n, 2))) =' f_2(6, m)$$

Parte 5

No hay ningún natural que sea par e impar a la vez.

$$\neg((\exists n)P_1(n) \wedge \neg P_1(n))$$

Parte 6

Hay un natural n que es par y que además cumple que $n + n = n \times n$.

$$(\exists n)P_1(n) \wedge (f_1(n, n) =' f_2(n, n))$$

Parte 7

La suma posee un neutro, que además es único.

$$(\forall n_1)(\exists n_2)(f_1(n_1, n_2) = n_1) \wedge (((\forall n_3)f_1(n_1, n_3) = n_1) \to n_2 =' n_3)$$

Parte 8

La suma es una función inyectiva.

$$(\forall n_1)(\forall n_2)(\forall n_3)(\forall n_4)(\neg(n_1 =' n_3) \wedge \neg(n_2 =' n_4)) \to (\neg(f_1(n_1, n_2) =' f_1(n_3, n_4)))$$