

Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 11

Consigna

Sean φ , ψ dos fórmulas cualesquiera y x una variable tal que $x \notin FV(\psi)$.

1. Demuestre usando equivalencias las siguientes afirmaciones:

1. $\models (\forall x\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$

2. $\models (\exists x\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$

3. $\models (\psi \rightarrow \exists x\varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \rightarrow \varphi)$

4. $\models (\psi \rightarrow \forall x\varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi \rightarrow \varphi)$

2. Para cada uno de los casos anteriores encuentre φ y ψ con $x \in FV(\psi)$ de forma tal que las afirmaciones no se cumplen.

Resolución

Parte 1

Para esta parte nos bastará con probar que las fórmulas a ambos lados del \leftrightarrow son equivalentes, pues cada una de ellas nos demuestra una equivalencia entre dichas fórmulas. También recordemos que para esta parte tenemos que $x \notin FV(\psi)$

Subparte 1

$$((\forall x)\varphi) \rightarrow \psi$$

eq (equivalencia de conectivos)

$$(\neg(\forall x)\varphi) \vee \psi$$

eq (leyes generalizadas de De Morgan)

$$((\exists x)\neg\varphi) \vee \psi$$

eq (propiedades de los cuantificadores y $x \notin FV(\psi)$)

$$(\exists x)\neg\varphi \vee (\exists x)\psi$$

eq (distributividad generalizada)

$$(\exists x)(\neg\varphi \vee \psi)$$

eq (equivalencia de conectivos)

$$(\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$$

Esto concluye la prueba.

Subparte 2

$$((\exists x)\varphi) \rightarrow \psi$$

eq (equivalencia de conectivos)

$$(\neg(\exists x)\varphi) \vee \psi$$

eq (leyes generalizadas de De Morgan)

$$((\forall x)\neg\varphi) \vee \psi$$

eq (propiedades de los cuantificadores y $x \notin FV(\psi)$)

$$((\forall x)\neg\varphi) \vee (\forall x)\psi$$

eq (distributividad generalizada)

$$(\forall x)(\neg\varphi \vee \psi)$$

eq (equivalencia de conectivos)

$$(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$$

Esto concluye la prueba

Subparte 3

$$\begin{aligned} & \psi \rightarrow (\exists x)\varphi \\ & \text{eq (equivalencia de conectivos)} \\ & \neg\psi \vee (\exists x)\varphi \\ & \text{eq (propiedades de los cuantificadores y } x \notin FV(\neg\psi)) \\ & (\exists x)\neg\psi \vee (\exists x)\varphi \\ & \text{eq (distributividad generalizada)} \\ & (\exists x)(\neg\psi \vee \varphi) \\ & \text{eq (equivalencia de conectivos)} \\ & (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba.

Subparte 4

$$\begin{aligned} & \psi \rightarrow (\forall x)\varphi \\ & \text{eq (equivalencia de conectivos)} \\ & \neg\psi \vee (\forall x)\varphi \\ & \text{eq (propiedades de los cuantificadores y } x \notin FV(\neg\psi)) \\ & (\forall x)\neg\psi \vee (\forall x)\varphi \\ & \text{eq (distributividad generalizada)} \\ & (\forall x)(\neg\psi \vee \varphi) \\ & \text{eq (equivalencia de conectivos)} \\ & (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Parte 2

Subparte 1

Para esta parte, consideramos lo siguiente:

1. Tipo de similaridad: $\langle 1, 1; -; - \rangle$.
2. Estructura: $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, \{0, 1\}, \{0\} \rangle$.
3. Llamamos P, Q a los predicados unarios mencionados.
4. Consideramos $\varphi = P(x)$ y $\psi = Q(x)$.

$$\bullet \models (\forall x \varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$$

Sustituyendo con $\varphi = P(x)$ y $\psi = Q(x)$:

- $((\forall x)P(x)) \rightarrow Q(x)$
- $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

Ahora verifiquemos las interpretaciones de ambas fórmulas:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(((\forall x)P(x)) \rightarrow Q(x)) \\
& = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \max\{1 - v^{\mathcal{M}}((\forall x)P(x)), v^{\mathcal{M}}(cl(Q(x)))\} \\
& = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \max\{1 - \min\{v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}, v^{\mathcal{M}}((\forall x)Q(x))\} \\
& = (\text{considerando el } 0,1) \\
& \max\{1 - 1, \min\{v^{\mathcal{M}}(Q(\bar{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}\} \\
& = (\text{considerando el } 1) \\
& \max\{0, 0\} \\
& = (\text{aritmética}) \\
& 0
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}((\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x))) \\
& = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \max\{v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a}) \rightarrow Q(\bar{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \max\{\max\{1 - v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a})), v^{\mathcal{M}}(Q(\bar{a}))\} \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& = (\text{considerando el } 0) \\
& \max\{\max\{0, 1\}\} \\
& = (\text{aritmética}) \\
& 1
\end{aligned}$$

Entonces, encontramos un contraejemplo para demostrar que si $x \in FV(\psi)$, entonces la equivalencia no se cumple.

Subparte 2

Para esta parte, consideramos lo siguiente:

1. Tipo de similaridad: $\langle 1, 1; -; - \rangle$.
2. Estructura: $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, \{0\}, \{0\} \rangle$.
3. Llamamos P, Q a los predicados unarios mencionados.
4. Consideramos $\varphi = P(x)$ y $\psi = Q(x)$.

$$\bullet \models (\exists x \varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \forall x (\varphi \rightarrow \psi)$$

Sustituyendo con $\varphi = P(x)$ y $\psi = Q(x)$:

- $((\exists x)P(x)) \rightarrow Q(x)$
- $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

Ahora verifiquemos las interpretaciones de ambas fórmulas:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}((\exists x)P(x) \rightarrow Q(x)) \\
& = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \max\{1 - v^{\mathcal{M}}((\exists x)P(x)), v^{\mathcal{M}}(Q(x))\} \\
& = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \max\{1 - \max\{v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}, v^{\mathcal{M}}(cl(Q(x)))\} \\
& = (\text{considerando el 0}) \\
& \max\{1 - 1, v^{\mathcal{M}}((\forall x)Q(x))\} \\
& = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \max\{1 - 1, \min\{v^{\mathcal{M}}(Q(\bar{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}\} \\
& = (\text{considerando el 1}) \\
& \max\{1 - 1, 0\} \\
& = (\text{aritmética}) \\
& 0
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))) \\
& = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \min\{v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a}) \rightarrow Q(\bar{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \min\{\max\{1 - v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a})), v^{\mathcal{M}}(Q(\bar{a}))\} \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& = (\text{considerando el 1}) \\
& \min\{\max\{1 - 0, 0\}\} \\
& = (\text{aritmética}) \\
& 1
\end{aligned}$$

Entonces, encontramos un contraejemplo para demostrar que si $x \in FV(\psi)$, entonces la equivalencia no se cumple.

Subparte 3

Para esta parte, consideramos lo siguiente:

1. Tipo de similaridad: $\langle 1, 1; -; - \rangle$.
2. Estructura: $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, \{0\}, \{0\} \rangle$.
3. Llamamos P, Q a los predicados unarios mencionados.
4. Consideramos $\varphi = P(x)$ y $\psi = Q(x)$.
 - $\models (\psi \rightarrow \exists x\varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \rightarrow \varphi)$

Sustituyendo con $\varphi = P(x)$ y $\psi = Q(x)$:

- $Q(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$
- $(\exists x)(Q(x) \rightarrow P(x))$

Ahora verifiquemos las interpretaciones de ambas fórmulas:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(Q(x) \rightarrow (\exists x)P(x)) \\
& \quad = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \min\{1 - v^{\mathcal{M}}(Q(x)), v^{\mathcal{M}}((\exists x)P(x))\} \\
& \quad = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \min\{1 - v^{\mathcal{M}}(cl(Q(x))), \max\{v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}\} \\
& \quad = (\text{considerando el 0}) \\
& \min\{1 - \min\{v^{\mathcal{M}}(Q(\bar{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}, 1\} \\
& \quad = (\text{considerando el 1}) \\
& \min\{1 - 0, 1\} \\
& \quad = (\text{aritmética}) \\
& 0
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}((\exists x)(Q(x) \rightarrow P(x))) \\
& \quad = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \max\{v^{\mathcal{M}}(Q(\bar{a}) \rightarrow P(\bar{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& \quad = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \max\{\max\{1 - v^{\mathcal{M}}(Q(\bar{a})), v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a}))\} \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& \quad = (\text{considerando el 0}) \\
& \max\{\max\{0, 1\}\} \\
& \quad = (\text{aritmética}) \\
& 1
\end{aligned}$$

Entonces, encontramos un contraejemplo para demostrar que si $x \in FV(\psi)$, entonces la equivalencia no se cumple.

Subparte 4

Se saltea porque es análoga a las anteriores.