

## Ejercicio 18

### Consigna

- (a) Defina el conjunto  $L_{\mathbb{N}}$  de las listas de naturales con el símbolo  $|$  como separador y  $[]$  como la lista vacía.
- (b) Defina la función  $Reduce : (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \times L_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ . Esta función recibe una función binaria de naturales en naturales, un natural y una lista, devolviendo un natural que es la aplicación de la función sobre todos los elementos de la lista. El natural es el valor a devolver en el caso de la lista vacía y usualmente es el neutro de la operación. Ejemplos:
- $Reduce(\cdot, 1, []) = 1$
  - $Reduce(\cdot, 1, 2|3|4|[]) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 24$
- (c) Demuestre que  $Reduce(+, 0, l)$  devuelve la suma de todos los naturales contenidos en la lista  $l$  o 0 si la lista es vacía.

### Resolución (parte a)

Veamos como definir el conjunto  $L_{\mathbb{N}}$  de forma inductiva:

1.  $[] \in L_{\mathbb{N}}$
2. Si  $l \in L_{\mathbb{N}}, n \in \mathbb{N}$  entonces  $n|l \in L_{\mathbb{N}}$

### Resolución (parte b)

Ahora tenemos que definir el ERP para  $L_{\mathbb{N}}$ . Necesitamos:

1.  $F([]) = f_0$
2.  $F(n|l) = f_s(n, l, F(l))$

Entonces definimos  $Reduce : (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \times L_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$  como:

1.  $Reduce(f, m, []) = m$
2.  $Reduce(f, m, n|l) = f(n, Reduce(f, m, l))$

Quizás el resultado se sienta raro, para entenderlo mejor, mirar los ejemplos en la consigna del ejercicio.

### Resolución (parte c)

Para resolver esta parte, usaremos el PIP sobre  $L_{\mathbb{N}}$  con la propiedad:

$P(l) : Reduce(+, 0, l)$  devuelve la suma de todos los elementos de  $l$

#### PASO BASE:

$P([]) : Reduce(+, 0, [])$  devuelve la suma de todos los elementos de  $l$

Esto es trivialmente cierto,  $l$  no tiene elementos por lo que la suma de ellos es 0

#### PASO INDUCTIVO:

(H)  $P(l) : Reduce(+, 0, l)$  devuelve la suma de todos los elementos de  $l$

(I)  $P(n|l) : Reduce(+, 0, n|l)$  devuelve la suma de todos los elementos de  $l$

Veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & Reduce(+, 0, n|l) \\ &= (\text{regla (ii) de } Reduce) \\ &+ (n, Reduce(+, 0, l)) \end{aligned}$$

Sabemos por hipótesis que  $Reduce(+, 0, l)$  es la suma de todos los elementos de  $l$ , también sabemos que  $n|l$  es una lista que contiene todos los elementos de  $l$  y además a  $n$ . Entonces, la suma de todos sus elementos será la suma de todos los elementos de  $l$  más  $n$ .

Eso es lo que obtuvimos cuando desarrollamos  $Reduce(+, 0, n|l)$ , por lo que probamos:

$(\forall l \in L_{\mathbb{N}}) \quad P(l) : Reduce(+, 0, l)$  devuelve la suma de todos los elementos de  $l$ .