

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 9

### Consigna

Considere un lenguaje de primer orden del tipo  $\langle -, 1, 2; 1 \rangle$  con dos símbolos de función  $f_1$  (unario) y  $f_2$  (binario) y un símbolo de constante  $c_1$ .

- (a) Defina inductivamente el conjunto  $TERM_C$  de los términos cerrados pertenecientes a dicho lenguaje.
- (b) Defina recursivamente la función  $F : TERM_C \rightarrow \mathbb{N}$  que calcula la cantidad de ocurrencias de  $c_1$  en un término  $t \in TERM_C$ .
- (c) Demuestre por inducción que para todo  $t \in TERM_C$  se cumple que  $F(t) > 0$ .

### Resolución

#### Recordatorio

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$

- Un término  $t$  es cerrado si  $FV(t) = \emptyset$ .
- Una fórmula es cerrada si  $FV(\alpha) = \emptyset$ . También se dice en este caso que  $\alpha$  es una **sentencia**.
- Una fórmula  $\alpha$  es abierta si no tiene cuantificadores.

**Notación:**

- $TERM_{CA} = \{t \in TERM_A \mid t \text{ es cerrado}\}$
- $SENT_A = \{\alpha \in FORM_A \mid \alpha \text{ es cerrada}\}$

#### Parte a

Para definir inductivamente  $TERM_C$ , observemos que los elementos que pertenezcan a él serán aquellos que son o tienen constantes en él. Ya que si tienen alguna variable, esta pertenecerá a  $FV(t)$ .

Definimos  $TERM_C$  por:

1.  $c_1 \in TERM_C$
2. Si  $t \in TERM_C$ , entonces  $f_1(t) \in TERM_C$

3. Si  $t_1, t_2 \in TERM_C$ , entonces  $f_2(t_1, t_2) \in TERM_C$

## Parte b

Basandonos en la definición dada en el paso anterior tenemos que:

$F : TERM_C \rightarrow \mathbb{N}$  1.  $F(c_1) = 1$  2.  $F(f_1(t)) = F(t)$  3.  $F(f_2(t_1, t_2)) = F(t_1) + F(t_2)$

## Parte c

Queremos probar que para todo  $t \in TERM_C$  se cumple que  $F(t) > 0$ .

Entonces definimos la propiedad  $P$  sobre  $TERM_C$  de la siguiente forma:

$P(t) : F(t) > 0$

## PASO BASE

$P(c_1) : F(c_1) > 0$

Observemos que esto se cumple trivialmente por la regla 1 de la definición de la función  $F$ , que nos dice que  $F(c_1) = 1$

## PASO INDUCTIVO

### PARTE 1

Primero probamos lo correspondiente a la parte 1, es decir que:

(H)  $P(t) : F(t) > 0$

(I)  $P(f_1(t)) : F(f_1(t)) > 0$

Esto también es muy trivial pues la definición de la función  $F$ , en la regla 2 nos dice que:  $F(f_1(t)) = F(t)$ . Por hipótesis tenemos que:

$$F(f_1(t)) = F(t) > 0$$

Aplicando transitividad probamos lo que queríamos verificar.

### PARTE 2

(H)  $P(t_1) : F(t_1) > 0$

(I)  $P(t_2) : F(t_2) > 0$

(J)  $P(f_2(t_1, t_2)) : F(f_2(t_1, t_2)) > 0$

Veamos que podemos decir de la tesis:

$$\begin{aligned}
& F(f_2(t_1, t_2)) \\
& \quad = (\text{por regla 3 de } F) \\
& \quad F(t_1) + F(t_2) \\
& \quad > (\text{por hipótesis inductiva}) \\
& \quad 0 + 0
\end{aligned}$$

Por lo que por transitividad probamos lo que queríamos verificar.

Esto concluye la prueba por inducción y podemos decir que:

$$\forall t \in TERM_C : F(t) > 0$$