Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 7

Consigna

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle -, 2; 1\rangle$ con un símbolo de función f_1 y un símbolo de constante c_1. Verifique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.

(a) x_1 es libre para x_1 en la fórmula $x_2 =' x_1$.

(b) x_3 es libre para x_1 en la fórmula $x_1 =' x_2$.

(c) c_1 es libre para $f_1(x_1, c_1)$ en la fórmula $f_1(x_1, c_1) =' c_1$.

(d) $f_1(x_1, x_3)$ es libre para x_3 en la fórmula $x_2 =' c_1$.

(e) x_1 es libre para $f_1(x_1, c_1)$ en la fórmula $((\forall x_1)\ f_1(x_1, c_1) =' c_1)$.

(f) $f_1(c_1, x_2)$ es libre para x_2 en la fórmula $((\exists x_2)\ x_2 =' x_1)$.

(g) $f_1(c_1, x_2)$ es libre para x_1 en la fórmula $((\exists x_2)\ x_2 =' x_1)$.

(h) $f_1(x_1, x_2)$ es libre para x_5 en la fórmula $((\forall x_3)\ x_3 =' x_4) \to ((\forall x_5)\ x_5 =' x_2)$.

(i) $f_1(x_1, x_2)$ es libre para x_3 en la fórmula $((\exists x_3)\ x_3 =' c_1) \vee ((\exists x_4)\ x_3 =' x_4)$.

Resolución

Recordatorio

Consideramos la siguiente definición para trabajar en este ejercicio.

Sean $t \in TERM, \psi \in FORM$. t está libre para x en ψ si:

1. ψ es atómica.
2. $\psi = (\psi_1 \square \psi_2)$ y t está libre para x en ψ_1 y en ψ_2
3. $\psi = (\neg \psi_1)$ y t está libre para x en ψ_1
4. $\psi = ((\forall y)\psi_1)$ (o $\psi = ((\exists y)\psi_1)$) y se cumple alguna de las siguientes:
    1. $x \notin FV(((\forall y)\psi_1))$ y respectivamente para $((\exists y)\psi_1)$
    2. $y \notin FV(t)$ y t está libre para x en ψ_1

Afirmación a

x_1 es libre para x_1 en la fórmula $x_2 =' x_1$.

La afirmación es **VERDADERA** pues la fórmula $\phi = (x_2 =' x_1)$ es atómica.

Afirmación b

x_3 es libre para x_1 en la fórmula $x_1 =' x_2$.

La afirmación es **VERDADERA** pues la fórmula $\phi = (x_1 =' x_2)$ es atómica.

Afirmación c

c_1 es libre para $f_1(x_1, c_1)$ en la fórmula $f_1(x_1, c_1) =' c_1$.

La afirmación es **FALSA**, pues estamos evaluando si un **término** es libre para una **variable** en una **fórmula**. En este caso, no podemos evaluar la expresión pues $f_1(x_1, c_1)$ **NO** es una variable.

Afirmación d

$f_1(x_1, x_3)$ es libre para x_3 en la fórmula $x_2 =' c_1$.

La afirmación es **VERDADERA**, pues la fórmula $\phi = (x_2 =' c_1)$ es atómica.

Afirmación e

x_1 es libre para $f_1(x_1, c_1)$ en la fórmula $((\forall x_1)\ f_1(x_1, c_1) =' c_1)$.

La afirmación es **FALSA**, pues estamos evaluando si un **término** es libre para una **variable** en una **fórmula**. En este caso, no podemos evaluar la expresión pues $f_1(x_1, c_1)$ **NO** es una variable.

Afirmación f

$f_1(c_1, x_2)$ es libre para x_2 en la fórmula $((\exists x_2)\ x_2 =' x_1)$.

La afirmación es **VERDADERA**, pues: - $x_2 \notin FV((\exists x_2)\ x_2 =' x_1)$ (Regla 4.1 en la definición)

Afirmación g

$f_1(c_1, x_2)$ es libre para x_1 en la fórmula $((\exists x_2)\ x_2 =' x_1)$.

La afirmación es **FALSA**, pues: - $x_2 \in FV(f_1(c_1, x_2))$ - $x_1 \in FV((\exists x_2)\ x_2 =' x_1)$

Entonces se hace falsa por la regla 4 de la definición.

Afirmación h

$f_1(x_1, x_2)$ es libre para x_5 en la fórmula $((\forall x_3)\ x_3 =' x_4) \to ((\forall x_5)\ x_5 =' x_2)$.

Para este ejemplo vamos a tener que aplicar un paso de recursión, deberíamos evaluar las siguientes afirmaciones para verificar el resultado final:

- $f_1(x_1, x_2)$ es libre para x_5 en la fórmula $((\forall x_3)\ x_3 =' x_4)$.

    - Esta es VERDADERA, pues $x_3 \notin FV(f_1(x_1, x_2))$ (Regla 4.2 en la definición)
- $f_1(x_1, x_2)$ es libre para x_5 en la fórmula $((\forall x_5)\ x_5 =' x_2)$.
    - Esta es VERDADERA, pues $x_5 \notin FV((\forall x_5)\ x_5 =' x_2)$ (Regla 4.1 en la definición)

Por lo que podemos concluir que esta afirmación es **VERDADERA**.

Afirmación i

$f_1(x_1, x_2)$ es libre para x_3 en la fórmula $((\exists x_3)\ x_3 =' c_1) \vee ((\exists x_4)\ x_3 =' x_4)$.

Para este ejemplo vamos a tener que aplicar un paso de recursión, deberíamos evaluar las siguientes afirmaciones para verificar el resultado final:

- $f_1(x_1, x_2)$ es libre para x_3 en la fórmula $((\exists x_3)\ x_3 =' c_1)$.
    - Esta es VERDADERA, pues $x_3 \notin FV((\exists x_3)\ x_3 =' c_1)$ (Regla 4.1 en la definición)
- $f_1(x_1, x_2)$ es libre para x_3 en la fórmula $((\exists x_4)\ x_3 =' x_4)$.
    - Esta es VERDADERA, pues $x_4 \notin FV(f_1(x_1, x_2))$ (Regla 4.2 en la definición)

Por lo que podemos concluir que esta afirmación es **VERDADERA**.