Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 12

Consigna

Sean φ, ψ fórmulas de un lenguaje de primer orden. Suponer que $FV(\varphi) = FV(\psi) = \{x\}$. Demuestre que:

1. $\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
2. $\models (\exists x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$
3. $\models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$
4. $\models (\forall x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$
5. $\models (\exists x\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$

Resolución

Para todos los casos, se considera una estructura $\mathcal{M}$ de tipo adecuado cualquiera. Además también se observa que por hipótesis, todas las fórmulas que aparecen en el ejercicio son sentencias.

Parte 1

Demostraremos esto por absurdo, por lo que veamos que pasa si:

- $\not\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

Veamos lo siguiente:

$\not\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

$\iff$ (definición de $\models$)

$\mathcal{M} \not\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

$\iff$ (contrarrecíproco de 2.4.5)

$\mathcal{M} \models \forall x(\varphi \to \psi)$ y $\mathcal{M} \not\models (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

$\iff$ (contrarrecíproco de 2.4.5)

$\mathcal{M} \models \forall x(\varphi \to \psi)$ y

$\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ y

$\mathcal{M} \not\models \forall x\psi$

$\iff$ (2.4.5)

$(i) \quad (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models (\varphi[\overline{a}/x] \to \psi[\overline{a}/x])$ y

$(ii) \quad (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\overline{a}/x]$ y

$(iii) \quad (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models \psi[\overline{a}/x]$

$\iff$ (2.4.5)

$(i) \quad (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\overline{a}/x] \implies \mathcal{M} \models \psi[\overline{a}/x]$ y

$(ii) \quad (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\overline{a}/x]$ y

$(iii) \quad (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models \psi[\overline{a}/x]$

Ahora, consideremos $a_1 \in |\mathcal{M}|$ tal que:

- $\mathcal{M} \not\models \psi[\overline{a_1}/x]$, sabemos que este existe por la propiedad (iii)
- Por la propiedad (ii), tenemos que $\mathcal{M} \models \varphi[\overline{a_1}/x]$
- Usando lo anterior, más la propiedad (i), podemos concluir que:
  - $\mathcal{M} \models \psi[\overline{a_1}/x]$

Pero esto es absurdo por la primera afirmación que obtuvimos. Por lo tanto:

- $\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

Parte 2

Demostraremos esto por absurdo, veamos que pasa si:

- $\not\models (\exists x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$

Veamos lo siguiente:

$$\not\models (\exists x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$$

$\iff$ (definición de $\models$)

$$\mathcal{M} \not\models (\exists x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$$

$\iff$ (contrarrecíproco de 2.4.5)

$$\mathcal{M} \models (\exists x\varphi \to \exists x\psi) \text{ y}$$

$$\mathcal{M} \not\models (\exists x(\varphi \to \psi))$$

$\iff$ (2.4.5 y contrarrecíproco de 2.4.5)

$$\mathcal{M} \models \exists x\varphi \implies \mathcal{M} \models \exists x\psi \text{ y}$$

$$(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models (\varphi[\overline{a}/x] \to \psi[\overline{a}/x])$$

$\iff$ (contrarrecíproco de 2.4.5)

$$(i) \quad (\overline{\exists} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\overline{a}/x] \implies (\overline{\exists} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}/x] \text{ y}$$

$$(ii) \quad (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\overline{a}/x] \text{ y}$$

$$(iii) \quad (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models \psi[\overline{a}/x]$$

Observemos que (i) es totalmente incompatible con (ii) y (iii), pues:

- Por la propiedad (ii), tomo $a_1 \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi[\overline{a_1}/x]$
- Entonces por la propiedad (i), tenemos que $(\overline{\exists} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}/x]$
- Pero esto último es absurdo por la propiedad (iii)

Parte 3

Demostraremos esto por absurdo, veamos que pasa si:

- $\not\models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$

Veamos lo siguiente:

$$\not\models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$$

$\iff$ (definición de $\models$)

$$\mathcal{M} \not\models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$$

$\iff$ (2.4.5)

$$\mathcal{M} \models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \text{ y}$$

$$\mathcal{M} \not\models (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$$

$\iff$ (2.4.5 y contrarrecíproco de 2.4.5)

$$(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\overline{a}/x] \leftrightarrow \psi[\overline{a}/x] \text{ y}$$

$$\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi \iff \mathcal{M} \models \forall x\psi$$

$\iff$ (2.4.5)

$$(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\overline{a}/x] \iff (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}/x] \text{ y}$$

$$(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models \varphi[\overline{a}/x] \iff (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}/x]$$

Lo cual es trivialmente absurdo.

Parte 4

Demostraremos esto por absurdo, veamos que pasa si:

- $\not\models (\forall x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$

Veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\not\models (\forall x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)\\
&\iff \text{(definición de } \models\text{)}\\
&\mathcal{M} \not\models (\forall x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)\\
&\iff \text{(2.4.5)}\\
&\mathcal{M} \models (\forall x\varphi \to \exists x\psi) \text{ y}\\
&\mathcal{M} \not\models \exists x(\varphi \to \psi)\\
&\iff \text{(2.4.5 y contrarrecíproco de 2.4.5)}\\
&\mathcal{M} \models \forall x\varphi \implies \mathcal{M} \models \exists x\psi \text{ y}\\
&(\forall a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models \varphi[\overline{a}/x] \to \psi[\overline{a}/x]
\end{aligned}$$