

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## CLASE 15 - 19/05/2025

### Semántica de la lógica de predicados

#### Interpretación de sentencias de $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ en $\mathcal{M}$

La interpretación de las sentencias de  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$  en  $\mathcal{M}$  es una función  $v^{\mathcal{M}} : SENT \rightarrow \{0, 1\}$  que satisface:

- $v^{\mathcal{M}}(t_1 = t_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}} \\ 0 & \text{si } t_1^{\mathcal{M}} \neq t_2^{\mathcal{M}} \end{cases}$
- $v^{\mathcal{M}}(P_j(t_1, \dots, t_{r_j})) = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_{r_j}^{\mathcal{M}} \rangle \in R_j \\ 0 & \text{si } \langle t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_{r_j}^{\mathcal{M}} \rangle \notin R_j \end{cases}$
- $v^{\mathcal{M}}(\perp) = 0$
- $v^{\mathcal{M}}(\neg \alpha) = 1 - v^{\mathcal{M}}(\alpha)$
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha \wedge \beta) = \min\{v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\}$
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha \vee \beta) = \max\{v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\}$
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha \rightarrow \beta) = \max\{1 - v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\}$
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 \iff v^{\mathcal{M}}(\alpha) = v^{\mathcal{M}}(\beta)$
- $v^{\mathcal{M}}((\forall x)\alpha) = \min\{v^{\mathcal{M}}(\alpha[\bar{a}/x]) \mid a \in |\mathcal{M}|\}$
- $v^{\mathcal{M}}((\exists x)\alpha) = \max\{v^{\mathcal{M}}(\alpha[\bar{a}/x]) \mid a \in |\mathcal{M}|\}$

#### Ejemplo 1

Sea  $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, \text{Primo}, +, -, 0, 1 \rangle$  con tipo  $\langle 1; 2, 1; 2 \rangle$ . La interpretación de las sentencias de  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$  en  $\mathcal{M}$  debe satisfacer:

- $v^{\mathcal{M}}(P_1(t_1)) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1^{\mathcal{M}} \text{ es primo} \\ 0 & \text{si } t_1^{\mathcal{M}} \text{ no es primo} \end{cases}$

#### Ejemplo 2

Sea  $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, \text{Primo}, +, -, 0, 1 \rangle$  con tipo  $\langle 1; 2, 1; 2 \rangle$ . Qué valor de verdad tienen las sentencias  $f_1(f_2(c_1), c_2) = c_2$  y  $P_1(f_2(c_1), c_2)$ .

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(f_1(f_2(c_1), c_2) =' c_2) = 1 \\
& \iff (\text{interpretación de sentencias } (=')) \\
& f_1(f_2(c_1), c_2)^{\mathcal{M}} = c_2^{\mathcal{M}} \\
& \iff (\text{interpretación de términos cerrados}) \\
& -c_1^{\mathcal{M}} + c_2^{\mathcal{M}} = c_2^{\mathcal{M}} \\
& \iff (\text{interpretación de términos cerrados}) \\
& -0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Lo cual se cumple, por lo que el valor de verdad de la sentencia  $v^{\mathcal{M}}(f_1(f_2(c_1), c_2) =' c_2) = 1$ . Vayamos con el otro ejemplo:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(P_1(f_1(f_2(c_1), c_2))) = 1 \\
& \iff (\text{interpretación de sentencias}) \\
& f_1(f_2(c_1), c_2)^{\mathcal{M}} \text{ es primo} \\
& \iff (\text{interpretación de términos cerrados}) \\
& -c_1^{\mathcal{M}} + c_2^{\mathcal{M}} \text{ es primo} \\
& \iff (\text{interpretación de términos cerrados}) \\
& -0 + 1 \text{ es primo}
\end{aligned}$$

Dónde lo último se cumple pues 1 pertenece al conjunto de los números primos definido por la estructura  $\mathcal{M}$ .

### Ejemplo 3

Sea  $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, \text{Primo}, +, -, 0, 1 \rangle$  con tipo  $\langle 1; 2, 1; 2 \rangle$ . Qué valor de verdad tienen las sentencias  $(\forall x)P_1(x)$  y  $(\exists x)f_2(x) =' x$ ?

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}((\forall x)P_1(x)) \\
& \iff (\text{interpretación de sentencias}) \\
& \min\{v^{\mathcal{M}}(P_1(\bar{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& = (\text{considerando el 4}) \\
& 0
\end{aligned}$$

Veamos el otro ejemplo:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}((\exists x)f_2(x) =' x) \\
& \iff (\text{interpretación de sentencias}) \\
& \max\{v^{\mathcal{M}}(f_2(\bar{a}) =' \bar{a}) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& = (\text{considerando el 0}) \\
& 1
\end{aligned}$$

## Ejemplo 4

Sea  $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, \text{Primo}, +, -, 0, 1 \rangle$  con tipo  $\langle 1; 2, 1; 2 \rangle$ . Qué valor de verdad tiene la secuencia  $(\forall x)P_1(x) \rightarrow \neg P_1(f_1(x, c_2))$ ?

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}((\forall x)P_1(x) \rightarrow \neg P_1(f_1(x, c_2))) \\
& \quad = (\text{interpretación de sentencias}) \\
& \min\{v^{\mathcal{M}}(P_1(\bar{a}) \rightarrow \neg P_1(f_1(\bar{a}, c_2))) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& \quad = (\text{interpretación de sentencias}) \\
& \min\{\max\{1 - v^{\mathcal{M}}(P_1(\bar{a})), v^{\mathcal{M}}(\neg P_1(f_1(\bar{a}, c_2)))\} \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& \quad = (\text{interpretación de sentencias}) \\
& \min\{\max\{1 - v^{\mathcal{M}}(P_1(\bar{a})), 1 - v^{\mathcal{M}}(P_1(f_1(\bar{a}, c_2)))\} \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& \quad = (\text{interpretación de sentencias}) \\
& \min\{\max\{1 - v^{\mathcal{M}}(P_1(\bar{a})), 1 - v^{\mathcal{M}}(P_1(f_1(\bar{a}, c_2)))\} \mid a \in |\mathcal{M}|\}
\end{aligned}$$

Observemos que tenemos un mínimo afuera del todo. Si encontramos un solo valor de  $a \in |\mathcal{M}|$  para el cual alguna de las expresiones indicadas en el conjunto de adentro tenga valor 0, entonces podremos confirmar que  $v^{\mathcal{M}}((\forall x)P_1(x) \rightarrow \neg P_1(f_1(x, c_2))) = 0$ .

Veamos que:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(P_1(\bar{2})) = 1 \text{ y } v^{\mathcal{M}}(P_1(f_1(\bar{2}, c_2))) = 1 \\
& \quad \implies (\text{interpretación de sentencias}) \\
& v^{\mathcal{M}}(P_1(\bar{2})) = 1 \text{ y } v^{\mathcal{M}}(\neg P_1(f_1(\bar{2}, c_2))) = 0 \\
& \quad \implies (\text{interpretación de sentencias}) \\
& v^{\mathcal{M}}(P_1(\bar{2}) \rightarrow \neg P_1(f_1(\bar{2}, c_2))) = 0 \\
& \quad \implies (\text{operatoria}) \\
& \min\{v^{\mathcal{M}}(P_1(\bar{a}) \rightarrow \neg P_1(f_1(\bar{a}, c_2))) \mid a \in |\mathcal{M}|\} = 0 \\
& \quad \implies (\text{interpretación de sentencias}) \\
& v^{\mathcal{M}}((\forall x)P_1(x) \rightarrow \neg P_1(f_1(x, c_2))) = 0
\end{aligned}$$

**Observación:** Es exactamente el mismo razonamiento que aplicamos en matemática cuando queremos demostrar que una propiedad para todo un conjunto de elementos no se cumple: encontrar un contraejemplo.

## Clausura universal de una fórmula

Antes de interpretar términos, nos aseguraremos de que estén cerrados. Antes de interpretar fórmulas, nos aseguraremos de que sean sentencias.

Sean  $\alpha \in FORM$  y  $FV(\alpha) = \{z_1, \dots, z_k\}$ . - Definimos  $cl(\alpha) = (\forall z_1) \dots (\forall z_k)\alpha$

## Uso de $\models$

- Sea  $\alpha \in SENT$ . Entonces  $\mathcal{M} \models \alpha$  sii  $v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 1$

- Sea  $\alpha \in FORM$ . Entonces  $\mathcal{M} \models \alpha$  sii  $v^{\mathcal{M}}(cl(\alpha)) = 1$
- Sea  $\Gamma \subseteq FORM$ . Entonces  $\mathcal{M} \models \Gamma$  sii  $\mathcal{M} \models \alpha$  para todo  $\alpha \in \Gamma$
- Sea  $\alpha \in FORM$ . Entonces  $\models \alpha$  sii para toda estructura  $\mathcal{M}$  del tipo adecuado  $\mathcal{M} \models \alpha$
- Sea  $\alpha \in SENT, \Gamma \subseteq SENT$ . Entonces  $\Gamma \models \alpha$  sii para toda estructura  $\mathcal{M}$  del tipo adecuado, si  $\mathcal{M} \models \Gamma$  entonces  $\mathcal{M} \models \alpha$