Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Sean φ, ψ, σ proposiciones cualesquiera de $PROP$. Demuestre que:

(a) $\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

(b) $\psi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

(c) $\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \vdash \psi$

(d) $\neg\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg\varphi$

(e) $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$

(f) $\vdash \varphi \vee \psi \to \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

(g) Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \vee \varphi$

(h) Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \to \varphi$

Resolución

Demostración (a)

Queremos demostrar que $\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Veamos como hacerlo:

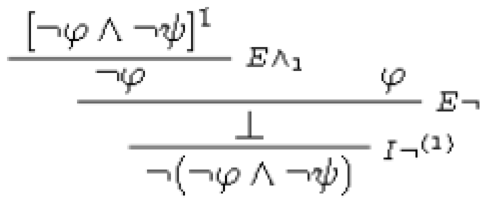

Figure 1: Demostración a

Como observación para los siguientes casos, veamos que φ queda "sin justificar" solo porque es una hipótesis, este será el caso para todas las hipótesis que tengamos a la hora de demostrar consecuencias semánticas.

Demostración (b)

Queremos demostrar que $\psi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Veamos como hacerlo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi \wedge \neg\psi]^1}{\neg\psi}\,E\wedge_2 \qquad \psi}{\bot}\,E\neg}{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)}\,I\neg^{(1)}$$

Figure 2: Demostración b

Demostración (c)

Queremos demostrar que $\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \vdash \psi$. Veamos como hacerlo:

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \qquad \dfrac{\varphi \qquad [\neg\psi]^1}{\varphi \wedge \neg\psi}\,I\wedge}{\bot}\,E\neg}{\psi}\,RAA^{(1)}$$

Figure 3: Demostración c

Demostración (d)

Queremos demostrar que $\neg\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg\varphi$. Veamos como hacerlo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,E\neg}{\psi}\,E\bot}{\varphi \to \psi}\,I\to^{(1)} \qquad \neg\varphi}{(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg\psi}\,I\leftrightarrow^{(2)}$$

Figure 4: Demostración d

Demostración (e)

Queremos demostrar que $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$. Veamos como hacerlo:

Demostración (f)

Queremos demostrar que $\vdash \varphi \vee \psi \to \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Veamos como hacerlo:

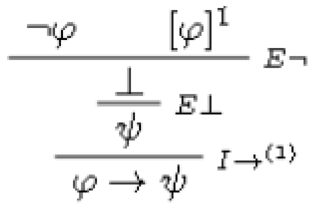

Figure 5: Demostración e

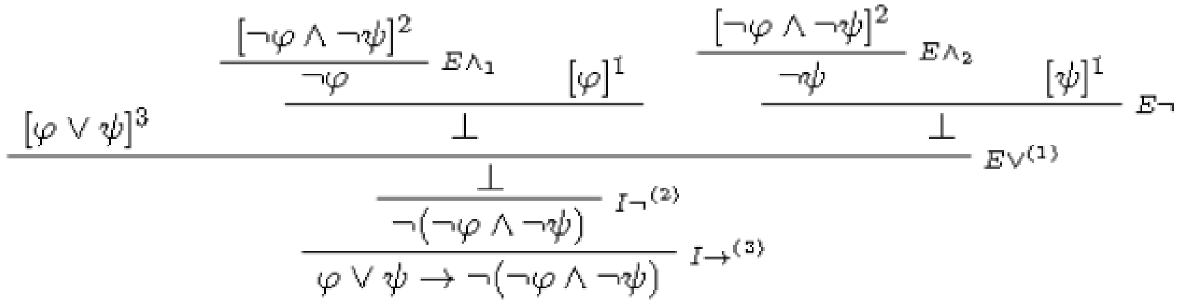

Figure 6: Demostración f

Demostración (g)

Queremos demostrar que Si: $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \vee \varphi$. Para esta parte, la prueba es diferente. Veamos como se demuestra:

(H) $\vdash \varphi$
(I) $\vdash \varphi \vee \psi$

$$\vdash \varphi$$
$$\iff \text{(definición de } \vdash)$$
$$(\exists D_1 \in DER) \mid C(D_1) = \varphi; H(D_1) = \emptyset$$
$$\Rightarrow \text{(por regla } I\vee \text{ de la definición de } DER)$$
$$(\exists D_2 \in DER) \mid C(D_2) = \varphi \vee \psi; H(D_2) = \emptyset$$
$$\iff \text{(definición de } \vdash)$$
$$\vdash \varphi \vee \psi$$

La idea de estos casos es probarlo considerando el lenguaje DER y sus reglas

Demostración (g)

Queremos demostrar que: Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \to \varphi$. Para esta parte, la prueba es diferente. Veamos como se demuestra:

(H) $\vdash \varphi$
(I) $\vdash \varphi \to \psi$

$\vdash \varphi$

$\iff$ (definición de $\vdash$)

$(\exists D_1 \in DER) \mid C(D_1) = \varphi; H(D_1) = \emptyset$

$\Rightarrow$(por regla $I\!\to$ de la definición de DER)

$(\exists D_2 \in DER) \mid C(D_2) = \varphi \to \psi; H(D_2) = \{\varphi\}$

$\iff$ (definición de $\vdash$)

$\vdash \varphi \to \psi$