

## Ejercicio 12

### Consigna

Considere un alfabeto  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ .

(a) Defina las siguientes funciones:

- $largo : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$
- $duplicar : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$
- $invertir : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$
- $ltimo : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$
- $principio : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^*$
- $primero : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma$
- $resto : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^*$

(b) Demuestre inductivamente que el largo de una palabra duplicada es el doble de la palabra original.

### Resolución (parte a)

#### Recordatorio

Veamos el ERP para  $\Sigma^*$ :

(H) Sea  $B$  un conjunto y:

1.  $f_\varepsilon \in B$
2.  $f_s : \Sigma \times \Sigma^* \times B \rightarrow B$

(T) Entonces existe una función única  $F : \Sigma^* \rightarrow B$  tal que:

1.  $F(\varepsilon) = f_\varepsilon$
2.  $F(xw) = f_s(x, w, F(w))$

Esto nos da las bases sobre las que vamos a trabajar a la hora de construir las funciones dadas por el ejercicio.

#### Premisa

Definimos  $\Sigma^*$  utilizando la inserción por la izquierda. También es importante observar que estamos ante una definición inductiva **LIBRE**, es decir que para cada elemento de  $\Sigma^*$ , solo hay una forma de crearlo. Esto nos permite usar el ERP

### Ejercicio

**Dominio  $\Sigma^*$**  Para definir una función, debemos dar  $f_\varepsilon$  y  $f_s$ . Veamos como hacerlo

#### Largo

1.  $f_\varepsilon = 0$
2.  $f_s(x, w, Largo(w)) = 1 + Largo(w)$

Entonces, definimos  $Largo(xw)$ :

1.  $Largo(\varepsilon) = f_\varepsilon = 0$
2.  $Largo(xw) = f_s(x, w, Largo(w)) = 1 + Largo(w)$

**Observación:** A partir de ahora vamos a “ignorar” el primer paso, simplemente definiremos la función  $F$ , con este ejemplo está claro quienes son  $f_\varepsilon$  y  $f_s(x, w, F(w))$

**Duplicar** Esta función duplica cada carácter de una palabra, uno a uno

1.  $Duplicar(\varepsilon) = \varepsilon$
2.  $Duplicar(xw) = xx Duplicar(w)$

**Invertir**

1.  $Invertir(\varepsilon) = \varepsilon$
2.  $Invertir(xw) = Invertir(w)x$

**Dominio  $\Sigma^+$**  A partir de ahora, trabajamos con el dominio  $\Sigma^+$ , definido inductivamente de la siguiente forma:

1.  $\forall x \in \Sigma, x \in \Sigma^+$
2. Si  $w \in \Sigma^+, x \in \Sigma$ , entonces  $xw \in \Sigma^+$

Básicamente, solo cambiamos la regla base, lo veremos reflejado en los ejercicios a la hora de definir los elementos base de la función, en vez de  $f_\varepsilon$ , tendremos  $f_x$

**Largo**

1.  $Largo(x) = 1$
2.  $Largo(xw) = 1 + Largo(w)$

**Último**

1.  $Ultimo(x) = x$
2.  $Ultimo(xw) = Ultimo(w)$

**Principio** Se interpreta esta función como tomar todos los elementos de la palabra a excepción del último de ellos.

1.  $Principio(x) = \varepsilon$
2.  $Principio(xw) = x Principio(w)$

**Primero**

1.  $Primero(x) = x$
2.  $Primero(xw) = x$

**Resto** Se interpreta esta función como tomar todos los elementos de la palabra a excepción del primero de ellos.

1.  $Resto(x) = \varepsilon$
2.  $Resto(xw) = w$

## Duplicar

1.  $Duplicar(x) = xx$
2.  $Duplicar(xw) = xxDuplicar(w)$

## Invertir

1.  $Invertir(x) = x$
2.  $Invertir(xw) = Invertir(w)x$

## Resolución (parte b)

Queremos demostrar inductivamente que el largo de una palabra duplicada es el doble de la palabra original. Para esto podemos usar el PIP en  $\Sigma^*$  y las funciones que creamos. Queremos probar que:

$$(\forall w \in \Sigma^*) \quad P(w) : \text{Largo}(Duplicar(w)) = 2 \cdot \text{Largo}(w)$$

## PASO BASE

$$P(\varepsilon) : \text{Largo}(Duplicar(\varepsilon)) = 2 \cdot \text{Largo}(\varepsilon)$$

Usando las definiciones, sabemos que:

- $Duplicar(\varepsilon) = \varepsilon$
- $\text{Largo}(\varepsilon) = 0$

Esto implica:

$$\text{Largo}(\varepsilon) = 2 \cdot 0$$

Por lo tanto,  $P(\varepsilon)$  se cumple

## PASO INDUCTIVO

$$(H) \quad P(w) : \text{Largo}(Duplicar(w)) = 2 \cdot \text{Largo}(w)$$

$$(I) \quad P(xw) : \text{Largo}(Duplicar(xw)) = 2 \cdot \text{Largo}(xw)$$

Veamos que podemos decir sobre la expresión de la tesis, usando las reglas constructivas de las funciones  $\text{Largo}$  y  $Duplicar$ :

$$\text{Largo}(Duplicar(xw)) = 2 \cdot \text{Largo}(xw)$$

$$\iff \text{Largo}(xxDuplicar(w)) = 2 \cdot (\text{Largo}(w) + 1)$$

$$\iff 1 + \text{Largo}(xDuplicar(w)) = 2 \cdot \text{Largo}(w) + 2$$

$$\iff 2 + \text{Largo}(Duplicar(w)) = 2 \cdot \text{Largo}(w) + 2$$

$$\iff \text{Largo}(Duplicar(w)) = 2 \cdot \text{Largo}(w)$$

**Observación:** contando como primero el primer “sii”:

- Del primer paso al segundo, consideramos  $x\text{Duplicar}(w)$  una palabra, por eso podemos sacar una  $x$  para afuera sumando 1 (estamos usando la definición de *Largo*)
- Del segundo paso al tercero, hacemos lo mismo, quitamos la otra  $x$  con el mismo razonamiento
- Del tercer paso al cuarto, sacamos los 2 que están sumando ya que están de ambos lados

Sumando que sabemos que el último paso se cumple por (H), por lo que entonces la propiedad se cumple para todo  $w \in \Sigma^*$