

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 10

### Consigna

1. Sean  $\varphi$  y  $\psi$  fórmulas cualesquiera de FORM. Demuestre:
  1. Si  $\models \varphi \leftrightarrow \psi$  y  $\models \varphi$  entonces  $\models \psi$
  2. Si  $\models \varphi$  entonces  $\models \forall x\varphi$  y  $\models \exists x\varphi$
  3.  $\models (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)$
2. Dé  $\varphi$  y  $\psi$  fórmulas de FORM para que se cumplan las siguientes afirmaciones:
  1.  $\not\models \forall x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\forall x\varphi$
  2.  $\not\models \exists x\varphi \rightarrow \forall x\varphi$

## Resolución

### Parte 1

#### Subparte 1

Queremos probar que si  $\models \varphi \leftrightarrow \psi$  y  $\models \varphi$  entonces  $\models \psi$ .

Primero que nada:

1. Consideraremos  $\mathcal{M}$  una estructura del tipo adecuado cualquiera.
2. Sea  $FV(\varphi \leftrightarrow \psi) = \{z_1, \dots, z_k\}$

Usando esto, sigamos con el razonamiento:

$$\begin{aligned}
& \models \varphi \leftrightarrow \psi \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \models cl(\varphi \leftrightarrow \psi) \\
& \iff (\text{definición de clausura}) \\
& \models (\forall z_1) \dots (\forall z_k)(\varphi \leftrightarrow \psi) \\
& \iff (2.4.5) \\
& (\forall a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k] \\
& \iff (\text{definición de sustitución}) \\
& (\forall a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models (\varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k] \leftrightarrow \psi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]) \\
& \iff (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& (\forall a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|) v^{\mathcal{M}}(\varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]) = v^{\mathcal{M}}(\psi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k])
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \models \varphi \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \models cl(\varphi) \\
& \iff (\text{definición de clausura}) \\
& \models (\forall z_1) \dots (\forall z_k)\varphi \\
& \iff (2.4.5) \\
& (\forall a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k] \\
& \iff (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& (\forall a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|) v^{\mathcal{M}}(\varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]) = 1
\end{aligned}$$

Por lo que juntando los dos pasos que hicimos hasta ahora, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& (\forall a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|) v^{\mathcal{M}}(\psi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]) = 1 \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& (\forall a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \psi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k] \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \models \psi \\
& \iff (\text{como consideramos cualquier estructura } \mathcal{M}) \\
& \models \psi
\end{aligned}$$

## Subparte 2

Queremos probar que si  $\models \varphi$  entonces  $\models \forall x \varphi$  y  $\models \exists x \varphi$ .

Primero que nada:

1. Consideraremos  $\mathcal{M}$  una estructura del tipo adecuado cualquiera.

Consideremos dos casos:

- $x \in FV(\varphi)$
- $x \notin FV(\varphi)$

**CASO 1:**  $x \in FV(\varphi)$

En este caso tenemos que  $FV(\varphi) = \{z_1, \dots, z_k, x\}$ , por lo que al considerar las clausuras de las siguientes fórmulas:

- $cl(\varphi) = (\forall z_1) \dots (\forall z_k)(\forall x)\varphi$
- $cl((\forall x)\varphi) = (\forall z_1) \dots (\forall z_k)(\forall x)\varphi$

Se observa que ambas son iguales, por lo que si  $\models \varphi$ , entonces podemos concluir que  $\models (\forall x)\varphi$  por el significado de  $\models$ .

**CASO 2:**  $x \notin FV(\varphi)$

En este caso tenemos que  $FV(\varphi) = \{z_1, \dots, z_k\}$ , y sabemos específicamente que  $x$  no está en dicho conjunto de variables libres. Esto nos permite llegar a la siguiente conclusión por la definición de sustitución:

- $\varphi[t/x] = \varphi \quad (i)$

Veamos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
& \models (\forall x)\varphi \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \models cl((\forall x)\varphi) \\
& \iff (\text{clausura}) \\
& \models (\forall z_1) \dots (\forall z_k)(\forall x)\varphi \\
& \iff (2.4.5) \\
& (\forall \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k, \bar{a}_{k+1} \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k, \bar{a}_{k+1}/z_1, \dots, z_k, x] \\
& \iff (\text{usando la observación } i) \\
& (\forall \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k/z_1, \dots, z_k]
\end{aligned}$$

Donde esto último se cumple, pues se deriva de la hipótesis  $\models \varphi$ .

Ahora nos resta probar que  $\models (\forall x)\varphi \Rightarrow \models (\exists x)\varphi$  para terminar el ejercicio. Consideremos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
& \models (\forall x)\varphi \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \models cl((\forall x)\varphi) \\
& \iff (\text{clausura}) \\
& \models (\forall z_1) \dots (\forall z_k)(\forall x)\varphi \\
& \iff (2.4.5) \\
& (\forall \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in |\mathcal{M}|, \forall \bar{b} \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k/z_1, \dots, z_k][\bar{b}/x] \\
& \iff (\text{significado de } \forall \text{ y } \exists) \\
& (\forall \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in |\mathcal{M}|, \exists \bar{b} \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k/z_1, \dots, z_k][\bar{b}/x] \\
& \iff (2.4.5) \\
& (\forall \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models (\exists x)\varphi[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k/z_1, \dots, z_k] \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \models (\exists x)\varphi \\
& \iff (\text{como consideramos cualquier estructura } \mathcal{M}) \\
& \models (\exists x)\varphi
\end{aligned}$$

Con esto damos por probada esta parte.

### Subparte 3

Queremos probar que  $\models (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)$ .

Para esta parte:

1. Consideraremos  $\mathcal{M}$  una estructura del tipo adecuado cualquiera.

Y consideraremos la siguiente estrategia: primero probaremos la propiedad  $\forall \varphi, \psi \in SENT$ , y luego probaremos el caso general.

#### CASO 1: $\varphi, \psi \in SENT$

Veamos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
& \models (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi) \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \models (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi) \\
& \iff (2.4.5) \\
& \mathcal{M} \models (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow \mathcal{M} \models ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos que probar lo siguiente:

- (H)  $\mathcal{M} \models (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi)$
- (I)  $\mathcal{M} \models ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)$

Partimos desde la hipótesis:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M} \models (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \\
& \iff (2.4.5) \\
& (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\bar{a}/x] \\
& \iff (\text{definición de sustitución}) \\
& (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \leftrightarrow \psi[\bar{a}/x] \\
& \iff (2.4.5) \\
& (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \iff (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x] \\
& \iff (2.4.5) \\
& \mathcal{M} \models (\forall x)\varphi \iff \mathcal{M} \models (\forall x)\psi \\
& \iff (2.4.5) \\
& \mathcal{M} \models ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)
\end{aligned}$$

Por lo que esto prueba la propiedad para las sentencias.

## CASO 2: $\varphi, \psi \in FORM$

Consideremos  $FV((\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)) = \{z_1, \dots, z_k\}$ .

$$\begin{aligned}
& \models (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi) \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \models cl((\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)) \\
& \iff (2.4.5) \\
& (\bar{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k/z_1, \dots, z_k] \\
& \iff (\text{definición de sustitución}) \\
& (\bar{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models (\forall x)(\varphi[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k/z_1, \dots, z_k] \leftrightarrow \psi[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k/z_1, \dots, z_k]) \rightarrow ((\forall x)\varphi[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k/z_1, \dots, z_k] \leftrightarrow (\forall x)\psi[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k/z_1, \dots, z_k])
\end{aligned}$$

Pero observemos que estamos en el caso 1, pues lo que tenemos es una sentencia. Esto concluye el caso 2, y por lo tanto la prueba.

## Parte 2

### Subparte 1

Queremos encontrar  $\varphi \in FORM$  tales que:

- $\not\models \forall x \exists y \varphi \leftrightarrow \exists y \forall x \varphi$

Para esto, consideramos lo siguiente:

1. Tipo de similaridad:  $\langle 2; -; - \rangle$ .
2. Estructura:  $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, \{(0, 1), (1, 0)\} \rangle$ .
3. Llamamos  $P$  al predicado binario mencionado.
4. Consideramos  $\varphi = P(x, y)$

Entonces queremos probar que:

- $v^{\mathcal{M}}(\forall x \exists y P(x, y)) \neq v^{\mathcal{M}}(\exists y \forall x P(x, y))$

Para esto evaluemos ambas dos:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(\forall x \exists y P(x, y)) \\
& \quad = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \quad \min\{v^{\mathcal{M}}(\exists y P(\bar{a}, y)) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& \quad = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \quad \min\{\max\{v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a}, \bar{b}))\} \mid a, b \in |\mathcal{M}|\} \\
& \quad = (\text{considerando } (0,1)) \\
& \quad \min\{1\} \\
& \quad = (\text{aritmética}) \\
& \quad 1
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(\exists y \forall x P(x, y)) \\
& \quad = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \quad \max\{v^{\mathcal{M}}(\forall x P(x, \bar{b})) \mid b \in |\mathcal{M}|\} \\
& \quad = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \quad \max\{\min\{v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a}, \bar{b}))\} \mid a, b \in |\mathcal{M}|\} \\
& \quad = (\text{considerando } (0,0)) \\
& \quad \max\{0\} \\
& \quad = (\text{aritmética}) \\
& \quad 0
\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba, pues hallamos  $\varphi \in FORM$  tal que se cumple:

- $\not\models \forall x \exists y \varphi \leftrightarrow \exists y \forall x \varphi$

## Subparte 2

Queremos encontrar  $\varphi \in FORM$  tales que:

- $\not\models \exists x \varphi \rightarrow \forall x \varphi$

Para esto, consideramos lo siguiente:

1. Tipo de similaridad:  $\langle 1; -; - \rangle$ .
2. Estructura:  $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, \{0\} \rangle$ .
3. Llamamos  $P$  al predicado unario mencionado.
4. Consideramos  $\varphi = P(x)$

Entonces queremos probar que:

- $v^{\mathcal{M}}(\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)) = 0$

Veámoslo:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \\
& \quad = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \max\{1 - v^{\mathcal{M}}(\exists x P(x)), v^{\mathcal{M}}(\forall x P(x))\} \\
& \quad = (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& \max\{1 - \max\{v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}, \min\{v^{\mathcal{M}}(P(\bar{b})) \mid b \in |\mathcal{M}|\}\} \\
& \quad = (\text{considerando } a=0, b=1) \\
& \max\{1 - 1, 0\} \\
& \quad = (\text{aritmética}) \\
& 0
\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba, pues hallamos  $\varphi \in FORM$  tal que se cumple:

- $\not\models \exists x \varphi \rightarrow \forall x \varphi$