Ejercicio 12

Consigna

(a) Calcule:

1. $((p_1 \wedge p_0) \to (p_0 \to p_3))[((\neg p_0) \to p_3)/p_0]$
2. $((p_3 \leftrightarrow p_0) \vee (p_2 \to (\neg p_0)))[((\neg p_0) \to p_3)/p_0]$
3. $(p_0 \to (p_1 \vee p_0))[(p_0 \wedge (\neg p_1))/p_0][(\neg p_2)/p_0]$

(b) Encuentre una sustitución tal que el resultado de aplicar la sustitución a

$$((\neg p_1) \leftrightarrow ((-p_0) \wedge (p_0 \to p_1)))$$

es

$$((\neg(p_0 \to p_1)) \leftrightarrow ((-p_0) \wedge (p_0 \to (p_0 \to p_1))))$$

Premisa

Recordemos la definición de la función de sustitución:

$\_[\_/\_] : PROP \times PROP \times P \to PROP$

Observemos que P es el conjunto donde solamente tenemos las proposiciones simples de $PROP$

1. $\perp[\varphi/p] = \perp$
2. $q[\varphi/p] = \begin{cases} \varphi & \text{si } q = p \\ q & \text{si } q \neq p \end{cases}$
3. $(\alpha * \beta)[\varphi/p] = (\alpha[\varphi/p] * \beta[\varphi/p])$

Resolución (parte a)

Sustitución #1

La proposición en la que quiero sustituir es:

$$((p_1 \wedge p_0) \to (p_0 \to p_3))$$

Y quiero sustituir $[((\neg p_0) \to p_3)/p_0]$, entonces el resultado es:

$$((p_1 \wedge ((\neg p_0) \to p_3)) \to (((\neg p_0) \to p_3) \to p_3))$$

Sustitución #2

La proposición en la que quiero sustituir es:

$$((p_3 \leftrightarrow p_0) \vee (p_2 \to (\neg p_0)))$$

Y quiero sustituir $[((\neg p_0) \to p_3)/p_0]$, entonces el resultado es:

$$((p_3 \leftrightarrow ((\neg p_0) \to p_3)) \vee (p_2 \to (\neg((\neg p_0) \to p_3))))$$

Sustitución #3

La proposición en la que quiero sustituir es:

$$(p_0 \to (p_1 \vee p_0))$$

Y quiero sustituir $[(p_0 \wedge (\neg p_1))/p_0][(\neg p_2)/p_0]$, observemos que es una doble sustitución, veamos como queda:

Paso 1

$$((p_0 \wedge (\neg p_1)) \to (p_1 \vee (p_0 \wedge (\neg p_1))))$$

Paso 2

$$(((\neg p_2) \wedge (\neg p_1)) \to (p_1 \vee ((\neg p_2) \wedge (\neg p_1))))$$

Resolución (parte b)

Queremos buscar una sustitución tal que el resultado de aplicar la sustitución a

$$((\neg p_1) \leftrightarrow ((-p_0) \wedge (p_0 \to p_1)))$$

es

$$((\neg(p_0 \to p_1)) \leftrightarrow ((-p_0) \wedge (p_0 \to (p_0 \to p_1))))$$

La respuesta es:

$$((\neg p_1) \leftrightarrow ((-p_0) \wedge (p_0 \to p_1)))[(p_0 \to p_1)/p_1]$$

Esto solo se observa, entiendo que no existe una receta para encontrar esto de forma genérica.