

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 7

### Consigna

Considere un lenguaje de primer orden de tipo  $\langle -, 2; 1 \rangle$  con un símbolo de función  $f_1$  y un símbolo de constante  $c_1$ . Verifique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.

- (a)  $x_1$  es libre para  $x_1$  en la fórmula  $x_2 = ' x_1$ .
- (b)  $x_3$  es libre para  $x_1$  en la fórmula  $x_1 = ' x_2$ .
- (c)  $c_1$  es libre para  $f_1(x_1, c_1)$  en la fórmula  $f_1(x_1, c_1) = ' c_1$ .
- (d)  $f_1(x_1, x_3)$  es libre para  $x_3$  en la fórmula  $x_2 = ' c_1$ .
- (e)  $x_1$  es libre para  $f_1(x_1, c_1)$  en la fórmula  $((\forall x_1) f_1(x_1, c_1) = ' c_1)$ .
- (f)  $f_1(c_1, x_2)$  es libre para  $x_2$  en la fórmula  $((\exists x_2) x_2 = ' x_1)$ .
- (g)  $f_1(c_1, x_2)$  es libre para  $x_1$  en la fórmula  $((\exists x_2) x_2 = ' x_1)$ .
- (h)  $f_1(x_1, x_2)$  es libre para  $x_5$  en la fórmula  $((\forall x_3) x_3 = ' x_4) \rightarrow ((\forall x_5) x_5 = ' x_2)$ .
- (i)  $f_1(x_1, x_2)$  es libre para  $x_3$  en la fórmula  $((\exists x_3) x_3 = ' c_1) \vee ((\exists x_4) x_3 = ' x_4)$ .

### Resolución

#### Recordatorio

Consideramos la siguiente definición para trabajar en este ejercicio.

Sean  $t \in TERM$ ,  $\psi \in FORM$ .  $t$  está libre para  $x$  en  $\psi$  si:

1.  $\psi$  es atómica.
2.  $\psi = (\psi_1 \Box \psi_2)$  y  $t$  está libre para  $x$  en  $\psi_1$  y en  $\psi_2$
3.  $\psi = (\neg \psi_1)$  y  $t$  está libre para  $x$  en  $\psi_1$
4.  $\psi = ((\forall y)\psi_1)$  (o  $\psi = ((\exists y)\psi_1)$ ) y se cumple alguna de las siguientes:
  1.  $x \notin FV(((\forall y)\psi_1))$  y respectivamente para  $((\exists y)\psi_1)$
  2.  $y \notin FV(t)$  y  $t$  está libre para  $x$  en  $\psi_1$

#### Afirmación a

$x_1$  es libre para  $x_1$  en la fórmula  $x_2 = ' x_1$ .

La afirmación es **VERDADERA** pues la fórmula  $\phi = (x_2 = ' x_1)$  es atómica.

### Afirmación b

$x_3$  es libre para  $x_1$  en la fórmula  $x_1 = ' x_2$ .

La afirmación es **VERDADERA** pues la fórmula  $\phi = (x_1 = ' x_2)$  es atómica.

### Afirmación c

$c_1$  es libre para  $f_1(x_1, c_1)$  en la fórmula  $f_1(x_1, c_1) = ' c_1$ .

La afirmación es **FALSA**, pues estamos evaluando si un **término** es libre para una **variable** en una **fórmula**. En este caso, no podemos evaluar la expresión pues  $f_1(x_1, c_1)$  **NO** es una variable.

### Afirmación d

$f_1(x_1, x_3)$  es libre para  $x_3$  en la fórmula  $x_2 = ' c_1$ .

La afirmación es **VERDADERA**, pues la fórmula  $\phi = (x_2 = ' c_1)$  es atómica.

### Afirmación e

$x_1$  es libre para  $f_1(x_1, c_1)$  en la fórmula  $((\forall x_1) f_1(x_1, c_1) = ' c_1)$ .

La afirmación es **FALSA**, pues estamos evaluando si un **término** es libre para una **variable** en una **fórmula**. En este caso, no podemos evaluar la expresión pues  $f_1(x_1, c_1)$  **NO** es una variable.

### Afirmación f

$f_1(c_1, x_2)$  es libre para  $x_2$  en la fórmula  $((\exists x_2) x_2 = ' x_1)$ .

La afirmación es **VERDADERA**, pues: -  $x_2 \notin FV((\exists x_2) x_2 = ' x_1)$  (Regla 4.1 en la definición)

### Afirmación g

$f_1(c_1, x_2)$  es libre para  $x_1$  en la fórmula  $((\exists x_2) x_2 = ' x_1)$ .

La afirmación es **FALSA**, pues: -  $x_2 \in FV(f_1(c_1, x_2))$  -  $x_1 \in FV((\exists x_2) x_2 = ' x_1)$

Entonces se hace falsa por la regla 4 de la definición.

### Afirmación h

$f_1(x_1, x_2)$  es libre para  $x_5$  en la fórmula  $((\forall x_3) x_3 = ' x_4) \rightarrow ((\forall x_5) x_5 = ' x_2)$ .

Para este ejemplo vamos a tener que aplicar un paso de recursión, deberíamos evaluar las siguientes afirmaciones para verificar el resultado final:

- $f_1(x_1, x_2)$  es libre para  $x_5$  en la fórmula  $((\forall x_3) x_3 = ' x_4)$ .

- Esta es VERDADERA, pues  $x_3 \notin FV(f_1(x_1, x_2))$  (Regla 4.2 en la definición)
- $f_1(x_1, x_2)$  es libre para  $x_5$  en la fórmula  $((\forall x_5) x_5 = ' x_2)$ .
  - Esta es VERDADERA, pues  $x_5 \notin FV((\forall x_5) x_5 = ' x_2)$  (Regla 4.1 en la definición)

Por lo que podemos concluir que esta afirmación es **VERDADERA**.

### Afirmación i

$f_1(x_1, x_2)$  es libre para  $x_3$  en la fórmula  $((\exists x_3) x_3 = ' c_1) \vee ((\exists x_4) x_3 = ' x_4)$ .

Para este ejemplo vamos a tener que aplicar un paso de recursión, deberíamos evaluar las siguientes afirmaciones para verificar el resultado final:

- $f_1(x_1, x_2)$  es libre para  $x_3$  en la fórmula  $((\exists x_3) x_3 = ' c_1)$ .
  - Esta es VERDADERA, pues  $x_3 \notin FV((\exists x_3) x_3 = ' c_1)$  (Regla 4.1 en la definición)
- $f_1(x_1, x_2)$  es libre para  $x_3$  en la fórmula  $((\exists x_4) x_3 = ' x_4)$ .
  - Esta es VERDADERA, pues  $x_4 \notin FV(f_1(x_1, x_2))$  (Regla 4.2 en la definición)

Por lo que podemos concluir que esta afirmación es **VERDADERA**.