Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 10

Consigna

1. Sean φ y ψ fórmulas cualesquiera de FORM. Demuestre:
    1. Si $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ y $\vDash \varphi$ entonces $\vDash \psi$
    2. Si $\vDash \varphi$ entonces $\vDash \forall x \varphi$ y $\vDash \exists x \varphi$
    3. $\vDash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)$
2. Dé φ y ψ fórmulas de FORM para que se cumplan las siguientes afirmaciones:
    1. $\nvDash \forall x \exists y \varphi \leftrightarrow \exists y \forall x \varphi$
    2. $\nvDash \exists x \varphi \rightarrow \forall x \varphi$

Resolución

Parte 1

Subparte 1

Queremos probar que si $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ y $\vDash \varphi$ entonces $\vDash \psi$.

Primero que nada:

1. Consideraremos $\mathcal{M}$ una estructura del tipo adecuado cualquiera.
2. Sea $FV(\varphi \leftrightarrow \psi) = \{z_1, \ldots, z_k\}$

Usando esto, sigamos con el razonamiento:

$\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$

$\iff$ (definición de $\vDash$)

$\vDash cl(\varphi \leftrightarrow \psi)$

$\iff$ (definición de clausura)

$\vDash (\forall z_1) \dots (\forall z_k)(\varphi \leftrightarrow \psi)$

$\iff$ (2.4.5)

$(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]$

$\iff$ (definición de sustitución)

$(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash (\varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k] \leftrightarrow \psi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k])$

$\iff$ (definición de interpretación $v^{\mathcal{M}}$)

$(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|)v^{\mathcal{M}}(\varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]) = v^{\mathcal{M}}(\psi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k])$

Por otro lado, tenemos que:

$\vDash \varphi$

$\iff$ (definición de $\vDash$)

$\vDash cl(\varphi)$

$\iff$ (definición de clausura)

$\vDash (\forall z_1) \dots (\forall z_k)\varphi$

$\iff$ (2.4.5)

$(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]$

$\iff$ (definición de interpretación $v^{\mathcal{M}}$)

$(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|)v^{\mathcal{M}}(\varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]) = 1$

Por lo que juntando los dos pasos que hicimos hasta ahora, tenemos que:

$(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|)v^{\mathcal{M}}(\psi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]) = 1$

$\iff$ (definición de $\vDash$)

$(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash \psi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]$

$\iff$ (definición de $\vDash$)

$\mathcal{M} \vDash \psi$

$\iff$ (como consideramos cualquier estructura $\mathcal{M}$)

$\vDash \psi$

Subparte 2

Queremos probar que si $\vDash \varphi$ entonces $\vDash \forall x\varphi$ y $\vDash \exists x\varphi$.

Primero que nada:

1. Consideraremos $\mathcal{M}$ una estructura del tipo adecuado cualquiera.

Consideremos dos casos:

- $x \in FV(\varphi)$
- $x \notin FV(\varphi)$

CASO 1: $x \in FV(\varphi)$

En este caso tenemos que $FV(\varphi) = \{z_1, \dots, z_k, x\}$, por lo que al considerar las clausuras de las siguientes fórmulas:

- $cl(\varphi) = (\forall z_1) \dots (\forall z_k)(\forall x)\varphi$
- $cl((\forall x)\varphi) = (\forall z_1) \dots (\forall z_k)(\forall x)\varphi$

Se observa que ambas son iguales, por lo que si $\vDash \varphi$, entonces podemos concluir que $\vDash (\forall x)\varphi$ por el significado de $\vDash$.

CASO 2: $x \notin FV(\varphi)$

En este caso tenemos que $FV(\varphi) = \{z_1, \dots, z_k\}$, y sabemos específicamente que x no está en dicho conjunto de variables libres. Esto nos permite llegar a la siguiente conclusión por la definición de sustitución:

- $\varphi[t/x] = \varphi \quad (i)$

Veamos el siguiente razonamiento:

$$
\begin{aligned}
&\vDash (\forall x)\varphi \\
&\quad \Longleftrightarrow \text{(definición de } \vDash) \\
&\vDash cl((\forall x)\varphi) \\
&\quad \Longleftrightarrow \text{(clausura)} \\
&\vDash (\forall z_1) \dots (\forall z_k)(\forall x)\varphi \\
&\quad \Longleftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
&(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k, a_{k+1} \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}/z_1, \dots, z_k, x] \\
&\quad \Longleftrightarrow \text{(usando la observación } i) \\
&(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]
\end{aligned}
$$

Donde esto último se cumple, pues se deriva de la hipótesis $\vDash \varphi$.

Ahora nos resta probar que $\vDash (\forall x)\varphi \Rightarrow \vDash (\exists x)\varphi$ para terminar el ejercicio. Consideremos el siguiente razonamiento:

$\vDash (\forall x)\varphi$

$\iff$ (definición de $\vDash$)

$\vDash cl((\forall x)\varphi)$

$\iff$ (clausura)

$\vDash (\forall z_1) \dots (\forall z_k)(\forall x)\varphi$

$\iff$ (2.4.5)

$(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|, \overline{\forall} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k][\overline{b}/x]$

$\iff$ (significado de $\overline{\forall}$ y $\overline{\exists}$)

$(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|, \overline{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k][\overline{b}/x]$

$\iff$ (2.4.5)

$(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash (\exists x)\varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]$

$\iff$ (definición de $\vDash$)

$\mathcal{M} \vDash (\exists x)\varphi$

$\iff$ (como consideramos cualquier estructura $\mathcal{M}$)

$\vDash (\exists x)\varphi$

Con esto damos por probada esta parte.

Subparte 3

Queremos probar que $\vDash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)$.

Para esta parte:

1. Consideraremos $\mathcal{M}$ una estructura del tipo adecuado cualquiera.

Y consideraremos la siguiente estrategia: primero probaremos la propiedad $\overline{\forall}\varphi, \psi \in SENT$, y luego probaremos el caso general.

CASO 1: $\varphi, \psi \in SENT$

Veamos el siguiente razonamiento:

$\vDash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)$

$\iff$ (definición de $\vDash$)

$\mathcal{M} \vDash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)$

$\iff$ (2.4.5)

$\mathcal{M} \vDash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow \mathcal{M} \vDash ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)$

Por lo que tenemos que probar lo siguiente:

(H) $\mathcal{M} \vDash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi)$
(I) $\mathcal{M} \vDash ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)$

Partimos desde la hipótesis:

$$\mathcal{M} \vDash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi)$$
$\iff$ (2.4.5)
$$(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[\overline{a}/x]$$
$\iff$ (definición de sustitución)
$$(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{a}/x] \leftrightarrow \psi[\overline{a}/x]$$
$\iff$ (2.4.5)
$$(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{a}/x] \iff (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash \psi[\overline{a}/x]$$
$\iff$ (2.4.5)
$$\mathcal{M} \vDash (\forall x)\varphi \iff \mathcal{M} \vDash (\forall x)\psi$$
$\iff$ (2.4.5)
$$\mathcal{M} \vDash ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)$$

Por lo que esto prueba la propiedad para las sentencias.

CASO 2: $\varphi, \psi \in FORM$

Consideremos $FV((\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)) = \{z_1, \dots, z_k\}$.

$$\vDash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)$$
$\iff$ (definición de $\vDash$)
$$\mathcal{M} \vDash cl((\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi))$$
$\iff$ (2.4.5)
$$(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi)[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]$$
$\iff$ (definición de sustitución)
$$(\overline{\forall} a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \vDash (\forall x)(\varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k] \leftrightarrow \psi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1, \dots, z_k]) \to ((\forall x)\varphi[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}/z_1,$$

Pero observemos que estamos en el caso 1, pues lo que tenemos es una sentencia. Esto concluye el caso 2, y por lo tanto la prueba.

Parte 2

Subparte 1

Queremos encontrar $\varphi \in FORM$ tales que:

- $\nvDash \forall x \exists y \varphi \leftrightarrow \exists y \forall x \varphi$

Para esto, consideramos lo siguiente:

1. Tipo de similaridad: $\langle 2; -; - \rangle$.
2. Estructura: $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, \{(0, 1), (1, 0)\} \rangle$.
3. Llamamos P al predicado binario mencionado.
4. Consideramos $\varphi = P(x, y)$

Entonces queremos probar que:

- $v^{\mathcal{M}}(\forall x \exists y P(x,y)) \neq v^{\mathcal{M}}(\exists y \forall x P(x,y))$

Para esto evaluemos ambas dos:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(\forall x \exists y P(x,y)) \\
& =_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
& min\{v^{\mathcal{M}}(\exists y P(\overline{a},y)) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& =_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
& min\{max\{v^{\mathcal{M}}(P(\overline{a},\overline{b}))\} \mid a,b \in |\mathcal{M}|\} \\
& =_{\text{(considerando (0,1))}} \\
& min\{1\} \\
& =_{\text{(aritmética)}} \\
& 1
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(\exists y \forall x P(x,y)) \\
& =_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
& max\{v^{\mathcal{M}}(\forall x P(x,\overline{b})) \mid b \in |\mathcal{M}|\} \\
& =_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
& max\{min\{v^{\mathcal{M}}(P(\overline{a},\overline{b}))\} \mid a,b \in |\mathcal{M}|\} \\
& =_{\text{(considerando (0,0))}} \\
& max\{0\} \\
& =_{\text{(aritmética)}} \\
& 0
\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba, pues hallamos $\varphi \in FORM$ tal que se cumple:

- $\not\models \forall x \exists y \varphi \leftrightarrow \exists y \forall x \varphi$

Subparte 2

Queremos encontrar $\varphi \in FORM$ tales que:

- $\not\models \exists x \varphi \to \forall x \varphi$

Para esto, consideramos lo siguiente:

1. Tipo de similaridad: $\langle 1; -; - \rangle$.
2. Estructura: $\mathcal{M} = \langle \{0,1\}, \{0\} \rangle$.
3. Llamamos P al predicado unario mencionado.
4. Consideramos $\varphi = P(x)$

Entonces queremos probar que:

- $v^{\mathcal{M}}(\exists x P(x) \to \forall x P(x)) = 0$

Veámoslo:

$$v^{\mathcal{M}}(\exists x P(x) \to \forall x P(x))$$
$$=_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})}$$
$$max\{1 - v^{\mathcal{M}}(\exists x P(x)), v^{\mathcal{M}}(\forall x P(x))\}$$
$$=_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})}$$
$$max\{1 - max\{v^{\mathcal{M}}(P(\overline{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}, min\{v^{\mathcal{M}}(P(\bar{b})) \mid b \in |\mathcal{M}|\}\}$$
$$=_{\text{(considerando } a=0, b=1)}$$
$$max\{1 - 1, 0\}$$
$$=_{\text{(aritmética)}}$$
$$0$$

Esto concluye la prueba, pues hallamos $\varphi \in FORM$ tal que se cumple:

- $\not\models \exists x \varphi \to \forall x \varphi$