

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 4

### Consigna

Considere  $\varphi, \psi, \sigma$  pertenecientes a  $PROP$ .

(a) Pruebe las siguientes consecuencias lógicas:

1.  $\varphi \models \varphi$
2.  $\varphi \vee \psi, \neg\psi \models \varphi$
3.  $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \sigma) \models (\varphi \wedge \sigma)$

(b) Demuestre que:

1. Si  $\varphi \models \psi$  y  $\psi \models \sigma$ , entonces  $\varphi \models \sigma$
2. Si  $\varphi \models \varphi \rightarrow \psi$ , entonces  $\varphi \models \psi$
3. Si  $\varphi \models \neg\varphi$  y  $\psi \models \varphi$ , entonces  $\models \neg\psi$
4. Si  $\Gamma \models \varphi$  y  $\Gamma \models \neg\psi$ , entonces  $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$  (donde  $\Gamma \subseteq PROP$ )

### Resolución (parte a)

Para esta parte usamos la definición de valuación para determinar si las fórmulas dadas son tautologías. Podríamos usar de forma alternativa el concepto de Tableau Semántico.

#### 1. $\varphi \models \varphi$

Sea  $v$  una valuación tal que  $v(\varphi) = 1$ , luego:

$$\begin{aligned} v(\varphi) \\ &= (\text{hipótesis}) \\ 1 \end{aligned}$$

Como cualquier valuación dada en este contexto cumple que  $v(\varphi) = 1$ , podemos concluir que  $\varphi \models \varphi$

## 2. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \models \varphi$

Sea  $v$  una valuación tal que  $v(\varphi \vee \psi) = 1$  y  $v(\neg\psi) = 1$ , luego:

**PARTE 1:**  $v(\varphi \vee \psi) = 1$

$$\begin{aligned} &v(\varphi \vee \psi) \\ &= (\text{definición de valuación}) \\ &\max\{v(\varphi), v(\psi)\} \\ &= (\text{hipótesis}) \\ &1 \end{aligned}$$

**PARTE 2:**  $v(\neg\psi) = 1$

$$\begin{aligned} &v(\neg\psi) = 1 - v(\psi) \\ &\iff (\text{hipótesis}) \\ &1 - v(\psi) = 1 \\ &\iff (\text{despeje}) \\ &v(\psi) = 0 \end{aligned}$$

Entonces ahora juntando con la primer parte, tenemos que:

$$\begin{aligned} &v(\varphi \vee \psi) \\ &= (\text{definición de valuación}) \\ &\max\{v(\varphi), v(\psi)\} \\ &= (\text{por parte 2}) \\ &\max\{v(\varphi), 0\} \\ &= (\text{hipótesis}) \\ &1 \end{aligned}$$

Entonces  $v(\varphi) = 1$ , por lo que podemos concluir que  $\varphi \vee \psi, \neg\psi \models \varphi$

## 3. $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \sigma) \models (\varphi \wedge \sigma)$

Sea  $v$  una valuación tal que  $v(\varphi \wedge \psi) = 1$  y  $v(\psi \wedge \sigma) = 1$ , luego:

**PARTE 1:**  $v(\varphi \wedge \psi) = 1$

$$\begin{aligned} & v(\varphi \wedge \psi) \\ &= (\text{definici3n de valuaci3n}) \\ & \min\{v(\varphi), v(\psi)\} \\ &= (\text{hip3tesis}) \\ & 1 \\ &\Rightarrow (\text{despeje}) \\ & v(\varphi) = 1; v(\psi) = 1 \end{aligned}$$

**PARTE 2:**  $v(\psi \wedge \sigma) = 1$

$$\begin{aligned} & v(\psi \wedge \sigma) \\ &= (\text{definici3n de valuaci3n}) \\ & \min\{v(\psi), v(\sigma)\} \\ &= (\text{hip3tesis}) \\ & 1 \\ &\Rightarrow (\text{despeje}) \\ & v(\psi) = 1; v(\sigma) = 1 \end{aligned}$$

Ahora juntando ambas partes, tenemos que:

$$\begin{aligned} & v(\varphi \wedge \sigma) \\ &= (\text{definici3n de valuaci3n}) \\ & \min\{v(\varphi), v(\sigma)\} \\ &= (\text{parte 1 y 2}) \\ & \min\{1, 1\} \\ &= (\text{despeje}) \\ & 1 \end{aligned}$$

Como cualquier valuaci3n dada en este contexto cumple que  $v(\varphi \wedge \sigma) = 1$ , podemos concluir que  $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \sigma) \models (\varphi \wedge \sigma)$

## Resoluci3n (parte b)

Para esta parte usaremos el concepto de absurdo combinado con la definici3n de valuaci3n.

**1. Si  $\varphi \models \psi$  y  $\psi \models \sigma$ , entonces  $\varphi \models \sigma$**

(H)  $\varphi \models \psi$  y  $\psi \models \sigma$

(I)  $\varphi \models \sigma$

Usando las hip3tesis tenemos que:

## PARTE 1

$$\varphi \models \psi$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } v(\varphi) = 1, \text{ entonces } v(\psi) = 1$$

## PARTE 2

$$\psi \models \sigma$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } v(\psi) = 1, \text{ entonces } v(\sigma) = 1$$

Queremos probar que para una valuación  $v$  cualquiera se cumple la tesis, partamos de que  $v(\varphi) = 1$ :

$$v(\varphi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(por parte 1)}$$

$$v(\psi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(por parte 2)}$$

$$v(\sigma) = 1$$

Entonces, como cualquier valuación dada en este contexto cumple que  $v(\varphi) = 1$  implica  $v(\sigma) = 1$ , podemos concluir que  $\varphi \models \sigma$

## 2. Si $\models \varphi \rightarrow \psi$ , entonces $\varphi \models \psi$

En este caso podemos trabajar con absurdo ya que tenemos una sola hipótesis.

Veamos que pasa si  $\varphi \not\models \psi$ :

$$\varphi \not\models \psi$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\exists v_1 \in Val) \mid v_1(\varphi) = 1; v_1(\psi) = 0$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$v_1(\varphi \rightarrow \psi) = 0$$

$$\Rightarrow \text{(hipótesis)}$$

ABSURDO!

Esto es absurdo porque por hipótesis sabemos que  $\models \varphi \rightarrow \psi$ .

Entonces, tenemos que si  $\models \varphi \rightarrow \psi$ , entonces  $\varphi \models \psi$ .

**3. Si  $\models \neg\varphi$  y  $\psi \models \varphi$ , entonces  $\models \neg\psi$**

(H)  $\models \neg\varphi$  y  $\psi \models \varphi$

(I)  $\models \neg\psi$

Usando las hipótesis tenemos que:

**PARTE 1**

$$\models \neg\varphi$$

$$\iff \text{(definición de tautología)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid v(\neg\varphi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid v(\varphi) = 0$$

**PARTE 2**

$$\psi \models \varphi$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } v(\psi) = 1, \text{ entonces } v(\varphi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(por parte 1: } v(\varphi)=0\text{)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid v(\psi) \neq 1$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid v(\psi) = 0$$

Queremos probar que para una valuación  $v$  cualquiera se cumple la tesis:

$$\models \neg\psi$$

$$\iff \text{(definición de tautología)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid v(\neg\psi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid v(\psi) = 0$$

Donde esto último se cumple para toda valuación  $v$  por la parte 2.

**4. Si  $\Gamma \models \varphi$  y  $\Gamma \models \neg\psi$ , entonces  $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$**

(H)  $\Gamma \models \varphi$  y  $\Gamma \models \neg\psi$

(I)  $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$

Usando las hipótesis tenemos que las valuaciones  $v$  cumplen que:

## PARTE 1

$$\Gamma \models \varphi$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\varphi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\neg\varphi) = 0$$

## PARTE 2

$$\Gamma \models \neg\psi$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\neg\psi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\psi) = 0$$

Veamos que pasa por absurdo si  $\Gamma \not\models (\neg\varphi \vee \psi)$ :

$$\Gamma \not\models (\neg\varphi \vee \psi)$$

$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\neg(\neg\varphi \vee \psi)) = 0$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\neg\varphi \vee \psi) = 1$$

$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } \min\{v(\neg\varphi), v(\psi)\} = 1$$

$$\Rightarrow \text{(por parte 1 y parte 2)}$$

$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma)v(\alpha) = 1, \text{ entonces } \min\{0, 0\} = 1$$

$$\Rightarrow \text{(operatoria)}$$

ABSURDO!

Entonces si  $\Gamma \models \varphi$  y  $\Gamma \models \neg\psi$ , entonces  $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$