Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 17

Consigna

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1;\ 1;\ 0\rangle$ y las siguientes fórmulas:

- $\varphi_1 := P(f(x)) \wedge (\exists y)\neg P(y)$
- $\varphi_2 := (\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x)$

1. Para cada caso proporcione una estructura $\mathcal{M}_i$ en caso que exista. Justifique su respuesta.
    1. $\mathcal{M}_1 \vDash \varphi_1$
    2. $\mathcal{M}_2 \vDash \varphi_2$
    3. $\mathcal{M}_3 \nvDash \varphi_2$
2. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones:
    1. $\vDash (\forall x)(P(f(x)) \wedge (\exists y)\neg P(y)) \vee ((\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x))$
    2. Existe $\psi \in$ SENT tal que ψ no es subfórmula de φ_1, φ_1 no es subfórmula de ψ y $\psi \vDash \varphi_1$

Resolución

Parte 1

Subparte 1

Queremos encontrar una estructura $\mathcal{M}_1$ que cumpla lo siguiente:

- $\mathcal{M}_1 \vDash P(f(x)) \wedge (\exists y)\neg P(y)$

Desarrollemos lo que queremos demostrar para establecer alguna condición sobre $\mathcal{M}_1$:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_1 \vDash P(f(x)) \land (\exists y)\neg P(y) \\
&\quad \iff \text{(clausura y definición de } \vDash\text{)} \\
&\mathcal{M}_1 \vDash (\forall x)(P(f(x)) \land (\exists y)\neg P(y)) \\
&\quad \iff \text{(2.4.5)} \\
&(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \vDash (P(f(x)) \land (\exists y)\neg P(y))[\overline{a}/x] \\
&\quad \iff \text{(sustitución)} \\
&(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \vDash (P(f(\overline{a})) \land (\exists y)\neg P(y)) \\
&\quad \iff \text{(2.4.5)} \\
&(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \vDash P(f(\overline{a})) \text{ y} \\
&(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \vDash (\exists y)\neg P(y) \\
&\quad \iff \text{(2.4.5 y eliminar para todo redundante)} \\
&(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \vDash P(f(\overline{a})) \text{ y} \\
&(\overline{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \vDash \neg P(y)[\overline{b}/x] \\
&\quad \iff \text{(sustitución y 2.4.5)} \\
&(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \vDash P(f(\overline{a})) \text{ y} \\
&(\overline{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \nvDash P(\overline{b})
\end{aligned}
$$

Entonces, consideremos la siguiente estructura:

- $\mathcal{M}_1 = \langle \{0,1\}; \{0\}; f \rangle$
- Con $f(a) = 0 \quad \forall a \in |\mathcal{M}_1|$

Subparte 2

Queremos encontrar una estructura $\mathcal{M}_2$ que cumpla lo siguiente:

- $\mathcal{M}_2 \vDash (\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x)$

Desarrollemos lo que queremos demostrar para establecer alguna condición sobre $\mathcal{M}_2$:

$\mathcal{M}_2 \models (\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x)$

$\iff$ (definición de $\models$)

$\mathcal{M}_2 \models (\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x)$

$\iff$ (equivalencia de conectivos)

$\mathcal{M}_2 \models \neg(\exists x)(\forall y)x =' y \lor (\forall x)x =' f(x)$

$\iff$ (2.4.5)

$\mathcal{M}_2 \models \neg(\exists x)(\forall y)x =' y$ o
$\mathcal{M}_2 \models (\forall x)x =' f(x)$

$\iff$ (2.4.5)

$\mathcal{M}_2 \not\models (\exists x)(\forall y)x =' y$ o
$(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)\mathcal{M}_2 \models x =' f(x)[\overline{a}/x]$

$\iff$ (2.4.5)

$(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)(\overline{\exists} b \in |\mathcal{M}_2|)\mathcal{M}_2 \not\models (x =' y)[\overline{a}/x][\overline{b}/y]$ o
$(\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)\mathcal{M}_2 \models (x =' f(x))[\overline{a}/x]$

$\iff$ (sustitución)

$(i) \quad (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)(\overline{\exists} b \in |\mathcal{M}_2|)\mathcal{M}_2 \not\models (\overline{a} =' \overline{b})$ o
$(ii) \quad (\overline{\forall} a \in |\mathcal{M}_2|)\mathcal{M}_2 \models (\overline{a} =' f(\overline{a}))$

Entonces, consideremos la siguiente estructura:

- $\mathcal{M}_2 = \langle \{0, 1\}; \emptyset; f \rangle$
- Con $f(a) = a \quad \forall a \in |\mathcal{M}_2|$

Observemos que la estructura es válida, pues se cumple la propiedad (ii) por la definición que consideramos de f.

Subparte 3

Queremos encontrar una estructura $\mathcal{M}_3$ que cumpla lo siguiente:

- $\mathcal{M}_3 \not\models (\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x)$

Desarrollemos lo que queremos demostrar para establecer alguna condición sobre $\mathcal{M}_3$:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_3 \not\models (\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x) \\
&\iff \text{(contrarrecíproco de 2.4.5)} \\
&\mathcal{M}_3 \models (\exists x)(\forall y)x =' y \text{ y} \\
&\mathcal{M}_3 \not\models (\forall x)x =' f(x) \\
&\iff \text{(2.4.5 y contrarrecíproco de 2.4.5)} \\
&(\overline{\exists} a \in |\mathcal{M}_3|)(\overline{\forall} b \in |\mathcal{M}_3|)\mathcal{M}_3 \models (x =' y)[\overline{a}/x][\overline{b}/x] \text{ y} \\
&(\overline{\exists} a \in |\mathcal{M}_3|)\mathcal{M}_3 \not\models x =' f(x)[\overline{a}/x] \\
&\iff \text{(sustitución)} \\
&(i) \quad (\overline{\exists} a \in |\mathcal{M}_3|)(\overline{\forall} b \in |\mathcal{M}_3|)\mathcal{M}_3 \models (\overline{a} =' \overline{b}) \text{ y} \\
&(ii) \quad (\overline{\exists} a \in |\mathcal{M}_3|)\mathcal{M}_3 \not\models \overline{a} =' f(\overline{a})
\end{aligned}
$$

Observemos lo siguiente:

- Para poder cumplir la propiedad (i), necesariamente el universo tendría que tener cardinalidad 1, pues tendría que existir un elemento en el universo que sea igual a todos los demás elementos del universo.
- Para poder cumplir la propiedad (ii), necesariamente el universo tendría que tener cardinalidad mayor a 1, pues si tuviera un solo elemento, no podemos definir f de otra forma que no sea como la función identidad (esto incumpliría con la propiedad para el caso de un solo elemento).

Esto prueba que no existe ninguna estructura que cumpla lo siguiente.

Observación: Con esto podemos concluir que:

- $\models (\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x)$

Parte 2

Subparte 1

Queremos probar que $\models (\forall x)(P(f(x)) \wedge (\exists y)\neg P(y)) \vee ((\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x))$.

Desarrollemos lo que queremos demostrar para ver a que podemos llegar:

$$
\begin{aligned}
&\models (\forall x)(P(f(x)) \wedge (\exists y)\neg P(y)) \vee ((\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x)) \\
&\iff \text{(2.4.5)} \\
&(i) \quad \models (\forall x)(P(f(x)) \wedge (\exists y)\neg P(y)) \text{ o} \\
&(ii) \quad \models ((\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x))
\end{aligned}
$$

Y como sabemos que (ii) se cumple, esto prueba la propiedad.

Subparte 2

Esta afirmación es trivial pues $\neg\bot \in SENT$, y esta sentencia claramente cumple con la condición de que:

- $\varphi_1 \models \neg\bot$

Y además ni es subformula de φ, ni φ es subformula de ella.