Lógica

Mauro Polenta Mora

CLASE 14 - 16/05/2025

Semántica de la lógica de predicados

Visión intuitiva de la semántica

Términos

- Representan elementos del **Universo**. Conviene que cualquier elemento tenga al menos un nombre (una forma de referenciarlo):
  - Se modifica **TERM** para que todo elemento del universo tenga algún nombre.
  - Mostraremos que objetos del universo son representados por cada término cerrado: Símbolo de función aplicado a algún nombre de elemento del universo.

Fórmulas

- Representan lo que se dice en el **Universo**.
  - Algunas pueden ser verdaderas o falsas (sentencias - formulas cerradas) en una estructura dada
  - Mostraremos cómo averiguar si una sentencia es verdadera o falsa

Constantes

- Las constantes $c_1, c_2, ...$ son nombres para los elementos distinguidos del universo.
  - Se usan en cualquier fórmula y cualquier contexto de uso
- Después tenemos las constantes del lenguaje extendido: Una representación habitual de un elemento del universo con un techo $\overline{x}$, es un nombre para ese elemento del universo.
  - Ejemplo: $\overline{1}$ es una constante (sintáxis) para el número 1 que es un elemento de un universo dado
  - Se usan para interpretar las fórmulas con variables

Definición (lenguaje extendido para una estructura)

Sea $\mathcal{M}$ una estructura. El lenguaje extendido para $\mathcal{M}$, notado $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ se obtiene del lenguaje $\mathcal{L}$ del tipo de $\mathcal{M}$ agregando símbolos de constante para todos los elementos de $|\mathcal{M}|$. Al símbolo de constante asociado a $a \in |\mathcal{M}|$ lo denotamos como $\overline{a}$

Interpretación de términos cerrados de $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ en $\mathcal{M}$

Definición

Sea $\mathcal{M} = \langle A, R_1, \dots, R_n, F_1, \dots, F_m, \{C_i \mid 1 \leq i \leq k\}\rangle$ con tipo $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k\rangle$. La interpretación de los términos cerrados de $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ en $\mathcal{M}$ es una función $\_^{\mathcal{M}} : TERM_C \to |\mathcal{M}|$ que satisface:

- $c_i^{\mathcal{M}} = C_i$ para todo $1 \leq i \leq k$
- $\overline{a}^{\mathcal{M}}$ para todo $a \in |\mathcal{M}|$
- $f_i(t_1, \dots, t_{a_i})^{\mathcal{M}} = F_i(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_{a_i}^{\mathcal{M}})$ para $i = 1, \dots, m$

Ejemplo

Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, Primo, +, -, 0, 1\rangle$ con tipo $\langle 1; 2, 1; 2\rangle$. La interpretación de los términos cerrados de $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ en $\mathcal{M}$ es una función $\_^{\mathcal{M}} : TERM_C \to \mathbb{Z}$ que satisface:

- $c_1^{\mathcal{M}} = 0$
- $c_2^{\mathcal{M}} = 1$
- $\overline{n}^{\mathcal{M}}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$
- $f_1(t_1, t_2)^{\mathcal{M}} = t_1^{\mathcal{M}} + t_2^{\mathcal{M}}$
- $f_2(t_1)^{\mathcal{M}} = -t_1^{\mathcal{M}}$

1. Para este caso, qué valor representa el término $f_1(f_2(c_1), c_2)$?

$$
\begin{array}{l}
f_1(f_2(c_1), c_2)^{\mathcal{M}} \\
= \\
f_1(-c_1^{\mathcal{M}}, c_2^{\mathcal{M}}) \\
= \\
-c_1^{\mathcal{M}} + c_2^{\mathcal{M}} \\
= \\
-0 + 1 \\
= \\
1
\end{array}
$$

2. Para este caso, qué valor representa el término $f_2(f_1(c_1, c_2))$?

$$
\begin{array}{l}
f_2(f_1(c_1, c_2))^{\mathcal{M}} \\
= \\
f_2(c_1^{\mathcal{M}}, c_2^{\mathcal{M}}) \\
= \\
-(c_1^{\mathcal{M}} + c_2^{\mathcal{M}}) \\
= \\
-(0 + 1) \\
= \\
-1
\end{array}
$$