Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 7

Consigna

Demuestre:

1. $(\forall x)(\forall y)\ x =' y \vdash (\forall y)(\forall x)\ y =' x$

2. $\vdash (\forall z)(z =' x \leftrightarrow z =' y) \to x =' y$

3. $\vdash (\forall x)(\exists y)\ x =' y$

4. $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\neg x =' y \to \neg x =' z \lor \neg y =' z)$

5. Para toda $\varphi \in$ FORM, si $y \notin V(\varphi)$:
   $\vdash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow (\forall y)(x =' y \to \varphi[y/x]))$

6. Para toda $\varphi \in$ FORM, si $y \notin V(\varphi)$:
   $\vdash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow (\exists y)(x =' y \land \varphi[y/x]))$

Resolución

Parte 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)x =' y}{(\forall y)x =' y}\ E\forall(*^4)}{x =' y}\ E\forall(*^3)}{y =' x}\ RI2}{(\forall x)y =' x}\ I\forall(*^2)}{(\forall y)(\forall x)y =' x}\ I\forall(*^1)$$

Figure 1: Figura 1

Donde:

1. $(*_1)$ es correcto pues $y \notin FV((\forall x)(\forall y)x =' y)$
2. $(*_2)$ es correcto pues $x \notin FV((\forall x)(\forall y)x =' y)$
3. $(*_3)$ es correcto pues y está libre para y en $x =' y$
4. $(*_4)$ es correcto pues x está libre para x en $(\forall y)x =' y$

Parte 2

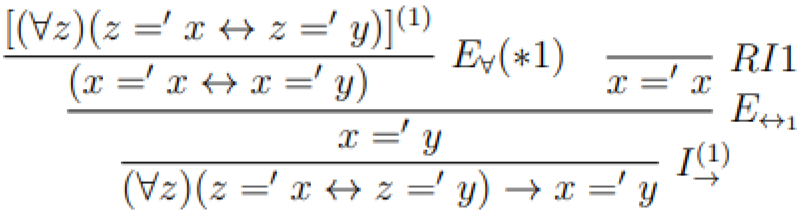

Figure 2: Figura 2

Donde:

1. $(*_1)$ es correcto pues x está libre para z en $(z =' x \leftrightarrow z =' y)$

Parte 4

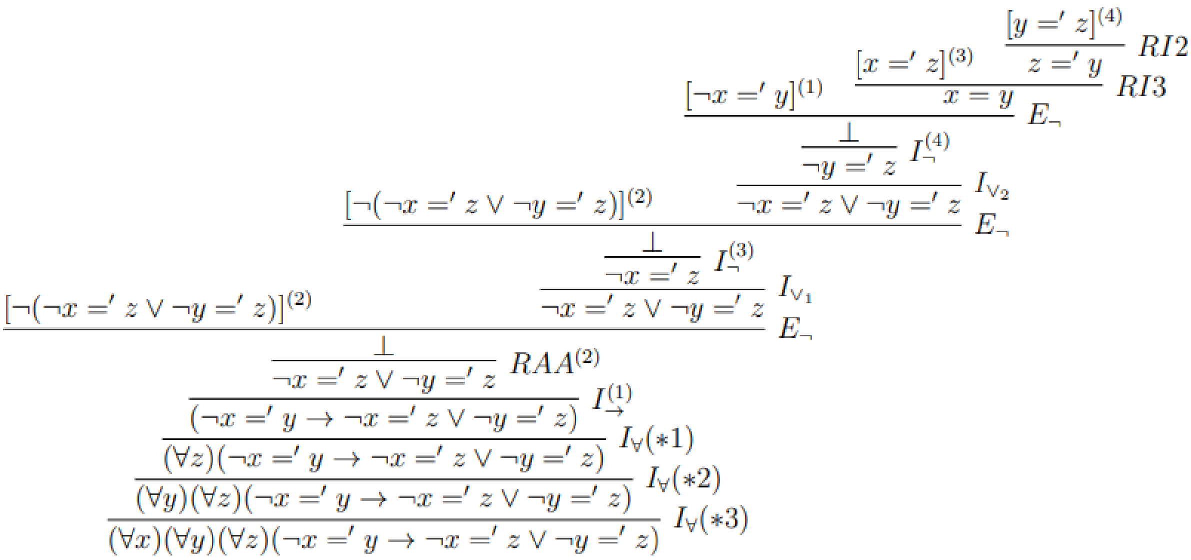

Figure 3: Figura 3

Donde:

1. $(*_1)$ es correcto pues $z \notin FV(\emptyset)$ pues todas las hipótesis fueron canceladas antes.
2. $(*_2)$ es correcto pues $y \notin FV(\emptyset)$ pues todas las hipótesis fueron canceladas antes.
3. $(*_3)$ es correcto pues $x \notin FV(\emptyset)$ pues todas las hipótesis fueron canceladas antes.

Parte 5

1. $(*_1)$ es correcto pues x está libre para y en $(x =' y \to \varphi[y/x])$, esto porque por hipótesis tenemos que $y \notin V(\varphi)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[x =' y]^{(2)}$}
\AxiomC{$[\varphi]^{(1)}$}
\RightLabel{$RI4^{*}(*2)$}
\BinaryInfC{$\varphi[y/x]$}
\RightLabel{$I_{\to}^{(2)}$}
\UnaryInfC{$(x =' y \to \varphi[y/x])$}
\RightLabel{$I_{\forall}(*3)$}
\UnaryInfC{$(\forall y)(x =' y \to \varphi[y/x])$}
\AxiomC{$[(\forall y)(x =' y \to \varphi[y/x])]^{(1)}$}
\RightLabel{$E_{\forall}(*1)$}
\UnaryInfC{$x =' x \to \varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$RI1$}
\UnaryInfC{$x =' x$}
\RightLabel{$E_{\to}$}
\BinaryInfC{φ}
\RightLabel{$I_{\leftrightarrow}^{(1)}$}
\BinaryInfC{$\varphi \leftrightarrow (\forall y)(x =' y \to \varphi[y/x])$}
\RightLabel{$I_{\forall}(*4)$}
\UnaryInfC{$(\forall x)(\varphi \leftrightarrow (\forall y)(x =' y \to \varphi[y/x]))$}
\end{prooftree}
$$

Figure 4: Figura 4

2. $(*_2)$ es correcto pues y está libre para x en φ porque $y \notin V(\varphi)$ y también x está libre para x en φ
3. $(*_3)$ es correcto pues $y \notin FV(\varphi) \subseteq V(\varphi)$
4. $(*_4)$ es correcto pues $x \notin FV(\emptyset)$