

Lógica

Mauro Polenta Mora

CLASE 18 - 09/07/2025

Deducción natural en lógica proposicional

Introducción

- Definimos inductivamente el conjunto de las derivaciones DER_P de la lógica de predicados.
- Caso base: derivación trivial (idem $PROP$).
- Para los conectivos: las mismas reglas de introducción y eliminación de $PROP$.
- Para los cuantificadores: se agregan reglas de introducción y eliminación.

Reglas para \forall

Regla de introducción

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$, x es una variable fresca.
- Tesis: Para todo x vale α .
- Demostración: Probamos α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$. Como x no aparece en $\delta_1, \dots, \delta_n$ la prueba es independiente de x . Luego, hemos probado α para cualquier x , usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\begin{array}{c} \delta_1, \dots, \delta_n \\ \vdots \\ \alpha \\ \hline (\forall x)\alpha \end{array} I_V(*)$$

Figure 1: Figura 1

(*) x no ocurre libre en las hipótesis $\delta_1, \dots, \delta_n$.

Regla de eliminación

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$ y t el nombre de un término.
- Tesis: El término t cumple la propiedad α .
- Demostración: Probamos $(\forall x)\alpha$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$. Luego, vale $\alpha[t/x]$.

$$\frac{\delta_1, \dots, \delta_n \quad \frac{(\forall x)\alpha}{\alpha[t/x]} \quad E_{\forall}(*)}{(\forall x)\alpha} E_{\forall}(*)$$

Figure 2: Figura 2

(*) t debe estar libre para x en α .

Reglas para \exists

Regla de introducción

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: Algún individuo cumple la propiedad α .
- Demostración: Pruebo que α vale para cierto t , usando $\delta_1, \dots, \delta_n$. Luego, existe un elemento para el cual vale α

$$\frac{\delta_1, \dots, \delta_n \quad \frac{\alpha[t/x]}{(\exists x)\alpha} \quad I_{\exists}(*)}{(\exists x)\alpha} I_{\exists}(*)$$

Figure 3: Figura 3

(*) t debe estar libre para x en α .

Regla de eliminación

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$, algún individuo cumple la propiedad α y $x \notin FV(\{\delta_1, \dots, \delta_n\})$
- Tesis: Se cumple β
- Demostración: Asumimos que x cumple α , probamos β usando $\delta_1, \dots, \delta_n$ y α . Luego, hemos probado β , usando $\delta_1, \dots, \delta_n$ y $(\exists x)\alpha$

$$\frac{(\exists x)\alpha \quad \frac{\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^{(1)} \quad \beta}{E_{\exists}^{(1)}(*)}}{\beta} E_{\exists}^{(1)}(*)$$

Figure 4: Figura 4

(*) x no ocurre libre ni en β ni en las hipótesis $\delta_1, \dots, \delta_n$.

Observación importante

Una derivación para esta lógica, ya no es correcta solo si logramos encontrar un árbol en DER_P con la forma indicada. Ahora también tenemos que justificar el porque cada paso con las reglas de cuantificadores es correcto (lo visto con (*)). Más adelante veremos ejemplos como para entender como realizar esto correctamente.

Consecuencia sintáctica

Sea $\Gamma \subseteq FORM$ y $\varphi \in FORM$. Decimos que φ es consecuencia sintáctica de Γ o que φ se deriva de Γ sii existe $D \in DER_P$ tal que $C(D) = \varphi$ y $H(D) \subseteq \Gamma$.

Notación: - $\Gamma \vdash \varphi$ se lee φ se deriva de Γ . - $\vdash \varphi$ se lee φ es teorema.

Restricciones sobre las variables

Cuando introducimos las reglas de introducción y eliminación de \forall y \exists , estas vinieron con varias restricciones sobre variables.

Veamos algunos ejemplos de porque necesitamos estas restricciones:

Ejemplo 1

$I\forall$

~~$\frac{x = c_1}{(\forall x)x = c_1} I\forall$~~

x es c_1

¿Sólo hay un elemento el universo???

La introducción es incorrecta porque x está libre en la hipótesis.

Figure 5: Figura 5

$E\forall$

$$\frac{(\forall x)\neg(\forall y)x = ' y}{\neg(\forall y)y = ' y} E\forall$$

Hay mas de un elemento.

Hay un elemento que no es igual a sí mismo???

Es incorrecta porque y no está libre para x en $\neg(\forall y)x = ' y$.

Figure 6: Figura 6

$I\exists$

$$\frac{(\forall x)(x = ' f(x))}{(\exists y)(\forall x)(x = ' y)} I\exists$$

$f(x)$ es la identidad

Sólo hay un elemento el universo???

Es incorrecta porque $f(x)$ no está libre para y en $(\forall x)(x = ' y)$.

Figure 7: Figura 7

$E\exists$

$$\frac{(\exists x)P_1(x) \quad [P_1(x)]_{(1)} \quad E\exists^1}{P_1(x)} \quad IV$$

$$\frac{P_1(x) \quad (\forall x)P_1(x)}{(\forall x)P_1(x)}$$

Al menos un elemento cumple la propiedad

Todos los elementos cumplen la propiedad???

Es incorrecta porque x está libre en la conclusión de la eliminación de $(\exists x)P_1(x)$

Figure 8: Figura 8

Ejemplo 2

Ejemplo 3

Ejemplo 4

Restricciones y alcance

- Hay que recordar que las hipótesis canceladas, en realidad, son hipótesis normales de subderivaciones.
- Son hipótesis normales (abiertas, sin cancelar) desde donde aparecen hasta la regla que las cancela y por lo tanto, valen las restricciones en todos las reglas que se utilicen entre esos lugares.

Controlar la zona de cancelación

$$\frac{(\exists x)P_1(x) \quad \frac{[P_1(x)]_{(1)} \quad IV}{(\forall x)P_1(x)} \quad E\exists^1}{(\forall x)P_1(x)}$$

Es incorrecto porque la hipótesis $P_1(x)$ está abierta desde donde aparece hasta la regla que la cancela.

Figure 9: Figura 9

Derivaciones de ejemplo

Ejemplo 1

Veamos que $\vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\alpha \rightarrow (\forall x_2)(\forall x_1)\alpha$

$$\frac{\frac{\frac{[(\forall x_1)(\forall x_2)\alpha]^1}{(\forall x_2)\alpha} E\forall(****)}{\alpha} E\forall(***)}{(\forall x_1)\alpha} I\forall(**)}{(\forall x_2)(\forall x_1)\alpha} I\forall(*)} \frac{}{(\forall x_1)(\forall x_2)\alpha \rightarrow (\forall x_2)(\forall x_1)\alpha} I\rightarrow^{(1)}$$

Figure 10: Figura 10

Este es el primer paso. Ahora tenemos que demostrar que cada aplicación de las reglas de cuantificadores, está bien aplicado. Veámoslo:

- $(*)I\forall$: La regla está bien aplicada porque x_2 está libre en las hipótesis abiertas a este punto:
 $-(\forall x_1)(\forall x_2)\alpha$
- $(**)I\forall$: La regla está bien aplicada porque x_1 está libre en las hipótesis abiertas a este punto:
 $-(\forall x_1)(\forall x_2)\alpha$
- $(***)E\forall$: La regla está bien aplicada porque x_2 está libre para x_2 en α .
- $(****)E\forall$: La regla está bien aplicada porque x_1 está libre para x_1 en α .

Con esto, la derivación es válida.

Ejemplo 2

Veamos que $\vdash (\exists x_1)(\exists x_2)\alpha \rightarrow (\exists x_2)(\exists x_1)\alpha$

$$\frac{[(\exists x_1)(\exists x_2)\alpha]^1}{(\exists x_2)(\exists x_1)\alpha} E\exists^{(2)}(i)}{\frac{[(\exists x_2)(\exists x_1)\alpha]}{(\exists x_1)(\exists x_2)\alpha \rightarrow (\exists x_2)(\exists x_1)\alpha} I\rightarrow^{(1)}}} \frac{[(\exists x_2)\alpha]^2}{(\exists x_2)(\exists x_1)\alpha} E\exists^{(3)}(ii)}{\frac{[(\exists x_2)\alpha]^2}{(\exists x_2)(\exists x_1)\alpha} E\exists^{(3)}(ii)} \frac{[\alpha]^3}{(\exists x_1)\alpha} I\exists(iv)}{(\exists x_2)(\exists x_1)\alpha} I\exists(iii)}$$

Figure 11: Figura 11

- (i) $E\exists$ Es correcto porque:
 - $x_1 \notin FV(C(D))$ que es lo mismo que decir que x_1 no está libre en la conclusión
 - $x_1 \notin FV(H(D))$ porque no hay hipótesis abiertas en este punto.
- (ii) $E\exists$ Es correcto porque:
 - $x_2 \notin FV(C(D))$
 - $x_2 \notin FV(H(D))$ porque no hay hipótesis abiertas en este punto.
- (iii) $I\exists$ Es correcto porque x_2 está libre para x_2 en $(\exists x_1)\alpha$
- (iv) $I\exists$ Es correcto porque x_1 está libre para x_1 en α