

## Ejercicio 9

### Consigna

Sea el conjunto  $\mathcal{T}(PROP)$  de los árboles etiquetados con elementos de  $PROP$  y la función:

$$ARBOL : PROP \rightarrow \mathcal{T}(PROP)$$

que asocia cada proposición de  $PROP$  con su árbol (vista en el teórico).

- (a) Defina una función  $CantAt : PROP \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $CantAt(\varphi)$  sea la cantidad de átomos que ocurren en  $\varphi$ .

Por ejemplo,  $CantAt((p_1 \wedge (\neg p_2))) = 2$ .

- (b) Defina la función  $CantNodos : \mathcal{T}(PROP) \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $CantNodos(ARBOL(\varphi))$  sea la cantidad de nodos del árbol de  $\varphi$ .

Por ejemplo,  $CantNodos(ARBOL((p_1 \wedge (\neg p_2)))) = 4$ .

- (c) Considere la función  $sub$  del Ejercicio 5. Demuestre que  $|sub(\varphi)| \leq CantNodos(ARBOL(\varphi))$ .

### Resolución (parte a)

Esta parte la podemos resolver usando el ERP en  $PROP$ . Veamos como hacerlo:

1.  $CantAt(\varphi) = 1$  con  $\varphi \in AT$
2.  $CantAt((\alpha * \beta)) = CantAt(\alpha) + CantAt(\beta)$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
3.  $CantAt((\neg \alpha)) = CantAt(\alpha)$  con  $\alpha \in PROP$

**Observación:** En este caso comparado con el ejercicio anterior, ignoramos el paso de las funciones  $H$  y vamos directo a la definición de  $CantAt$ . Es muy claro ver como pasamos de definir las explícitamente a definir  $CantAt$  directamente

### Resolución (parte b)

Para esta parte tendremos que usar el ERP en  $\mathcal{T}(PROP)$ . Definamos primero el esquema (ya que no lo hemos visto todavía) y luego apliquemoslo a la resolución del ejercicio.

### ERP para $\mathcal{T}(PROP)$

Sea  $B$  un conjunto, y:

1. una función  $H_{\mathcal{T}(AT)} : \mathcal{T}(AT) \rightarrow B$ , y
2. para cada conector  $* \in C_2$ , una función  $H_* : \mathcal{T}(PROP) \times B \rightarrow B$ , y:
3. una función  $H_{\neg} : \mathcal{T}(PROP) \times B \rightarrow B$

Entonces, existe una única función  $F : \mathcal{T}(PROP) \rightarrow B$  tal que:

1.  $F(\mathcal{T}(\varphi)) = H_{\mathcal{T}(AT)}(\mathcal{T}(\varphi))$  con  $\varphi \in AT$
2.  $F(\mathcal{T}(\alpha * \beta)) = H_*(\mathcal{T}(\alpha * \beta), F(\mathcal{T}(\alpha * \beta)))$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
3.  $F(\mathcal{T}(\neg \alpha)) = H_{\neg}(\mathcal{T}(\neg \alpha), F(\mathcal{T}(\neg \alpha)))$  con  $\alpha \in PROP$

Donde  $\mathcal{T}(\varphi)$  es el árbol etiquetado de  $\varphi$  para cualquier  $\varphi \in PROP$ .

**ATENCIÓN:** El resto del ejercicio se basa en si esto está correcto o no. Entiendo que debería ser correcto, pero no lo tengo 100% confirmado.

### Continuación del ejercicio

Con esto podemos definir  $CantNodos$  de la siguiente forma:

1.  $CantNodos(\mathcal{T}(\varphi)) = 1$  con  $\varphi \in AT$
2.  $CantNodos(\mathcal{T}(\alpha * \beta)) = 1 + CantNodos(\mathcal{T}(\alpha)) + CantNodos(\mathcal{T}(\beta))$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
3.  $CantNodos(\mathcal{T}(\neg\alpha)) = 1 + CantNodos(\mathcal{T}(\alpha))$  con  $\alpha \in PROP$

### Resolución (parte c)

Queremos demostrar que:

$$|sub(\varphi)| \leq CantNodos(ARBOL(\varphi)) \quad \forall \varphi \in PROP$$

Para aclarar, observemos que  $|sub(\varphi)|$  es el cardinal del conjunto de subfórmulas de  $\varphi$ .

Para demostrar esto, vamos a usar el PIP sobre  $PROP$ :

**Definición de  $sub : PROP \rightarrow 2^{PROP}$**

Se hizo en la clase 5 de teórico:

1.  $sub(\varphi) = \{\varphi\}$  con  $\varphi \in AT$
2.  $sub((\alpha * \beta)) = sub(\alpha) \cup sub(\beta) \cup \{(\alpha * \beta)\}$
3.  $sub((\neg\alpha)) = sub(\alpha) \cup \{(\neg\alpha)\}$

### PASO BASE

$$P(\varphi) : sub(\varphi) \leq CantNodos(ARBOL(\varphi)) \text{ con } \varphi \in AT$$

Por la regla 1 de ambas las funciones que estamos usando tenemos que:

1.  $|sub(\varphi)| = |\{\varphi\}| = 1$
2.  $CantNodos(ARBOL(\varphi)) = 1$

Por lo que se cumple la propiedad.

### PASO INDUCTIVO

$$(H) \ P((\varphi)) : sub(\varphi) \leq CantNodos(ARBOL(\varphi)) \text{ con } \varphi \in PROP$$

### PARTE 1

$$(T) \ P((\varphi_1 * \varphi_2)) : sub(\varphi_1 * \varphi_2) \leq CantNodos(ARBOL(\varphi_1 * \varphi_2)) \text{ con } \varphi_1, \varphi_2 \in PROP$$

Para demostrar esto, vamos a usar la definición de  $sub$  y  $CantNodos$ :

1.  $|sub(\varphi_1 * \varphi_2)| = |sub(\varphi_1) \cup sub(\varphi_2) \cup \{(\varphi_1 * \varphi_2)\}| = |sub(\varphi_1)| + |sub(\varphi_2)| + |\{(\varphi_1 * \varphi_2)\}| = |sub(\varphi_1)| + |sub(\varphi_2)| + 1$
2.  $CantNodos(ARBOL(\varphi_1 * \varphi_2)) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi_1)) + CantNodos(ARBOL(\varphi_2))$

Ahora comparemos ambos valores:

$$|sub(\varphi_1)| + |sub(\varphi_2)| + 1 \leq 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi_1)) + CantNodos(ARBOL(\varphi_2)) \iff |sub(\varphi_1)| + |sub(\varphi_2)| + 1 \leq 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi_1)) + CantNodos(ARBOL(\varphi_2))$$

Pero por hipótesis tenemos que:

1.  $|sub(\varphi_1)| \leq CantNodos(ARBOL(\varphi_1))$
2.  $|sub(\varphi_2)| \leq CantNodos(ARBOL(\varphi_2))$

Entonces por estas observaciones, la propiedad se cumple

## PARTE 2

(T)  $P((\neg\varphi_1)) : sub(\neg\varphi_1) \leq CantNodos(ARBOL(\neg\varphi_1))$  con  $\varphi_1 \in PROP$

Para demostrar esto, vamos a usar la definición de  $sub$  y  $CantNodos$ :

1.  $|sub(\neg\varphi_1)| = |sub(\varphi_1) \cup \{(\neg\varphi_1)\}| = |sub(\varphi_1)| + 1$
2.  $CantNodos(ARBOL(\neg\varphi_1)) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi_1))$

Ahora comparemos ambos valores:

$$|sub(\varphi_1)| + 1 \leq 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi_1)) \iff |sub(\varphi_1)| \leq CantNodos(ARBOL(\varphi_1))$$

Donde lo último se cumple por hipótesis. Esto prueba la propiedad para todo  $\varphi \in PROP$