Ejercicio 9

Consigna

Considere el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, y los lenguajes Δ y Γ definidos inductivamente con las siguientes reglas. Demuestre que $\Gamma = \Delta$.

Reglas para Γ:

1. $\varepsilon \in \Gamma$
2. Si $\alpha \in \Gamma$, entonces $a\alpha \in \Gamma$
3. Si $\alpha \in \Gamma$, entonces $b\alpha \in \Gamma$

Reglas para Δ:

1. $\varepsilon \in \Delta$
2. Si $\alpha \in \Delta$, entonces $\alpha a \in \Delta$
3. Si $\alpha \in \Delta$, entonces $\alpha b \in \Delta$

Resolución

Primero, cambiaremos ligeramente ambas las definiciones de los lenguajes Δ y Γ para tener una regla inductiva menos. Veamos como hacerlo:

Reglas para Γ:

1. $\varepsilon \in \Gamma$
2. Si $\alpha \in \Gamma$, $x \in \Sigma$, entonces $x\alpha \in \Gamma$

Reglas para Δ:

1. $\varepsilon \in \Delta$
2. Si $\alpha \in \Delta$, $y \in \Sigma$, entonces $\alpha y \in \Delta$

Bien, ahora queremos probar que $\Delta \subseteq \Gamma$ y $\Gamma \subseteq \Delta$, esto es equivalente a decir que son iguales. Primero vamos a probar que $\Gamma \subseteq \Delta$; para esto usemos el PIP en Γ con la propiedad $P : \alpha \in \Delta$, para probar que todos sus elementos, están incluidos en Δ.

PASO BASE

$P(\varepsilon) : \varepsilon \in \Delta$: Esto se prueba por la regla (i) del lenguaje Δ.

PASO INDUCTIVO

(H) $P(\alpha) : \alpha \in \Delta$
(I) $P(x\alpha) : x\alpha \in \Delta$ con $x \in \Sigma$

Entonces, lo que queremos probar es que para todo $\alpha \in \Delta, \quad x\alpha \in \Delta$. Esto lo podemos probar usando el PIP para Δ. Sea $P'(\alpha) := x\alpha \in \Delta$

(SUB) PASO BASE $\quad P'(\varepsilon) : x\varepsilon \in \Delta$.

Esto se cumple usando (i) y (ii) de la definición de Δ, ya que por (i) sabemos que ε está incluido en Δ, y por (ii) sabemos que $\forall y \in \Sigma : \varepsilon y \in \Delta$. Pero observemos que:

$$x\varepsilon = \varepsilon y$$

Porque ε es la palabra vacía, y x, y representan un símbolo de Σ. Concluyendo, esto se cumple

(SUB) PASO INDUCTIVO

(H) $P'(\alpha) : x\alpha \in \Delta$
(I) $P'(\alpha y) : x\alpha y \in \Delta$

Asumimos que $P'(\alpha)$ es verdadera, entonces por la regla (ii) de Δ podemos decir que:

Como $x\alpha \in \Delta$ y $y \in \Sigma$; entonces:

$$x\alpha y \in \Delta$$

Esto prueba la tesis.

A su vez, volviendo a la primer inducción, esto prueba $P'(\alpha) : x\alpha \in \Delta$. Por lo que probamos que $\Gamma \subseteq \Delta$.

Faltaría probar que $\Delta \subseteq \Gamma$, pero la prueba es básicamente un espejo de la que acabamos de realizar.