

Lógica

Mauro Polenta Mora

CLASE 8 - 27/03/2025

Deducción natural

Introducción

Tenemos dos formas de trabajar para justificar la validez de un razonamiento.

- **Justificación semántica** ($\Gamma \models \alpha$): probar que la veracidad de las hipótesis implica la veracidad de la conclusión.
- **Justificación sintáctica** ($\Gamma \vdash \alpha$): demostrar la conclusión a partir de las hipótesis usando pasos claramente definidos y explicitados.

Justificación sintáctica

- $(\Gamma \vdash \beta)$:
 - Demostrar la conclusión β a partir de las hipótesis de Γ usando pasos claramente definidos y explicitados.
- Qué es una demostración?
 - Es una prueba formal.
 - La corrección de la demostración depende de su forma y no del significado.
 - Cumple reglas precisas de construcción.

Pruebas formales

- Cómo probamos usualmente?
 - Sostenemos hipótesis iniciales (las podemos dar como dato en todo instante de la prueba).
 - Encadenamos pasos simples de deducción que nos permite llegar a la conclusión.
- Por qué pruebas formales?
 - Porque podemos compilar las pruebas hechas, y asegurar su corrección o detectar errores mediante el análisis de su estructura.

Ejemplo

En deducción natural, las demostraciones se formalizan mediante árboles:

$$\frac{\frac{[\alpha \wedge \beta]^1}{\beta} E\wedge_2 \quad \frac{[\alpha \wedge \beta]^1}{\alpha} E\wedge_1}{\frac{\beta \wedge \alpha}{\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha} I\wedge} I\rightarrow^1$$

Figure 1: Figura 1

Reglas de construcción de pruebas

- Construyen una prueba a partir de subpruebas más simples.
- Manejan correctamente las hipótesis (hipótesis globales) y supuestos (hipótesis locales) en cada etapa de la prueba.

El análisis de corrección de una prueba formal puede mecanizarse, y lo ha sido. Existen asistentes y verificadores automáticos de pruebas para el cálculo proposicional.

En general para cada conectivo se definen:

- **Reglas de introducción:** Indican como probar una fórmula con ese conectivo.
- **Reglas de eliminación:** Indican como utilizar una fórmula con ese conectivo.

Reglas de introducción

Conjunción (\wedge)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: $\alpha \wedge \beta$
- Demostración:
 - Probar α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
 - Probar β usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
 - Luego, hemos probado $\alpha \wedge \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} I\wedge$$

Figure 2: Figura 2

Implica (\rightarrow)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$.

- Tesis: $\alpha \rightarrow \beta$
- Demostración:
 - Supongamos α
 - Probar β usando $\delta_1, \dots, \delta_n$ y α
 - Luego, hemos probado $\alpha \rightarrow \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\beta}{\alpha \rightarrow \beta} I \rightarrow^{(k)}$$

Figure 3: Figura 3

Disyunción (\vee)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: $\alpha \vee \beta$
- Demostración:
 - **Opción 1:**
 - * Probar α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$
 - * Luego, hemos probado $\alpha \vee \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
 - **Opción 2:**
 - * Probar β usando $\delta_1, \dots, \delta_n$
 - * Luego, hemos probado $\alpha \vee \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} I \vee_1 \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta} I \vee_2$$

Si y sólo si (\leftrightarrow)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: $\alpha \leftrightarrow \beta$
- Demostración:
 - Directo: Supongamos α y probamos β usando $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$.
 - Recíproco: Supongamos β y probamos α usando $\delta_1, \dots, \delta_n, [\beta]^k$.
 - Luego, hemos probado que $\alpha \leftrightarrow \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} I \leftrightarrow (k)$$

Figure 4: Figura 6

Negación (\neg)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$.
- Tesis: $\neg\alpha$
- Demostración:
 - Supongamos α y probamos una contradicción usando $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$.
 - Luego, hemos probado $\neg\alpha$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\perp}{\neg\alpha} I \neg (k)$$

Figure 5: Figura 7

Reglas de eliminación

Conjunción (\wedge)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: α
- Demostración:
 - Probamos $\alpha \wedge \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
 - Luego, hemos probado α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
 - Simétricamente para β .

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} E \wedge_1$$

Figure 6: Figura 8

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} \quad E \wedge_2$$

Figure 7: Figura 9

Implica (\rightarrow)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: β
- Demostración:
 - Probamos $\alpha \rightarrow \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
 - Probamos α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
 - Luego, probamos β usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta} \quad E \rightarrow$$

Figure 8: Figura 10

Disyunción (\vee)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$ y $\delta_1, \dots, \delta_n, [\beta]^k$.
- Tesis: δ
- Demostración:
 - Probamos $\alpha \vee \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
 - Caso A. Probamos δ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$ y α .
 - Caso B. Probamos δ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$ y β .
 - Luego, probamos δ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \delta \quad \delta}{\delta} \quad E \vee^{(k)}$$

Figure 9: Figura 11

Si y sólo si (\leftrightarrow)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$
- Tesis: β
- Demostración:

- Probamos $\alpha \leftrightarrow \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Probamos α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Luego, probamos β usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Simétricamente para α .

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta} \quad \frac{\alpha}{\beta} E \leftrightarrow_1 \quad \frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha} \quad \frac{\beta}{\alpha} E \leftrightarrow_2$$

Negación (\neg)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: Absurdo.
- Demostración:
 - Probamos $\neg\alpha$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
 - Probamos α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
 - Luego, hemos probado \perp usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\neg\alpha \quad \alpha}{\perp} E \neg$$

Figure 10: Figura 14

Absurdo (\perp)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: α .
- Demostración (por reducción al absurdo):
 - Supongamos $\neg\alpha$
 - Llegamos a una contradicción usando $\delta_1, \dots, \delta_n$ y $[\neg\alpha]^k$.
 - Luego, hemos probado α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\perp}{\alpha} RAA^{(k)}$$

Figure 11: Figura 15

- Demostración:
 - Llegamos a una contradicción usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
 - Luego, hemos probado α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\perp}{\alpha} \quad E \perp$$

Figure 12: Figura 16