Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

Demuestre que:

- (a) $(((\neg p_2) \rightarrow (p_3 \lor (p_1 \leftrightarrow p_2))) \land (\neg p_3)) \in PROP$
- (b) $((p_7 \to (\neg \bot)) \leftrightarrow ((p_4 \land (\neg p_2)) \to p_1)) \in PROP$
- (c) $((\rightarrow \notin PROP)$

Resolución

Premisa (definición de PROP)

El lenguaje de la lógica proposicional $PROP \subseteq \Sigma_{PROP}^*$ está definido inductivamente por:

- 1. Si $p \in P$, entonces $p \in PROP$
- 2. $\perp \in PROP$
- 3. Si $\alpha, \beta \in PROP$, entonces:
 - $(\alpha \land \beta) \in PROP$
 - $(\alpha \lor \beta) \in PROP$
 - $(\alpha \to \beta) \in PROP$
 - $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in PROP$
- 4. Si $\alpha \in PROP$, entonces $(\neg \alpha) \in PROP$

Proposición (a)

Para demostrar que la proposición pertenece a PROP tenemos que dar una forma de construirlo a partir de las reglas del conjunto PROP definido inductivamente.

$$\begin{aligned} &(((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \in PROP \\ &\Leftrightarrow \text{ (por regla 3)} \\ & \left\{ (\neg p_3) \in PROP \\ & (((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \in PROP \\ &\Leftrightarrow \text{ ((i) por regla 4, (ii) por regla 3)} \end{aligned} \right. \\ & \left\{ p_3 \in PROP \quad (i) \\ & \left\{ (\neg p_2) \in PROP \\ & (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2)) \in PROP \\ &\Leftrightarrow \text{ } (p_3 \in PROP \text{ es trivial, (ii) por regla 3 (iv) y 4 (iii))} \right. \\ & \left\{ p_2 \in PROP \\ & \left\{ p_3 \in PROP \quad (iii) \\ & (p_1 \leftrightarrow p_2) \in PROP \quad (iv) \\ &\Leftrightarrow \text{ (saco los elementos de } AT \text{ y regla 3)} \right. \\ & \left\{ p_1 \in PROP \\ & p_2 \in PROP \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Donde esto ultimo se cumple porque $p_1, p_2 \in AT$.

Aclaración

La idea que tenemos cuando "sacamos" los elementos de AT, es que por la regla 1 y 2 de PROP sabemos que los elementos de AT pertenecen a PROP, por lo que estos elementos no cambian la implicancia de los si y solo si.

Proposición (b)

$$((p_7 \to (\neg \bot)) \leftrightarrow ((p_4 \land (\neg p_2)) \to p_1)) \in PROP \\ \Leftrightarrow (\text{por regla } 3) \\ \begin{cases} (p_7 \to (\neg \bot)) \in PROP \\ ((p_4 \land (\neg p_2)) \to p_1) \in PROP \end{cases} \\ \Leftrightarrow (\text{por regla } 3) \\ \begin{cases} \begin{cases} p_7 \in PROP \\ (\neg \bot) \in PROP \end{cases} \\ (p_4 \land (\neg p_2)) \in PROP \\ p_1 \in PROP \end{cases} \\ \Leftrightarrow ((\text{i}) \text{ por regla } 4, (\text{ii}) \text{ por regla } 3) \end{cases} \\ \begin{cases} \\ \bot \in PROP \\ (\neg p_2) \in PROP \end{cases} \\ \Leftrightarrow (\text{por regla } 4) \\ p_2 \in PROP \end{cases}$$

En este caso eliminamos los elementos de AT sin aclaración, recordar que $\bot \in AT$

Proposición (c)

$$((\rightarrow \in PROP))$$

Esto ya es absurdo, esto no puede pertenecer a PROP porque por ejemplo, no hay paréntesis a la derecha, no se puede crear una proposición de esta forma utilizando las reglas de PROP.

Concluimos que esta palabra no pertenece a PROP