Ejercicio 1

Consigna

Demuestre que:

(a) $(((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \in PROP$

(b) $((p_7 \to (\neg \bot)) \leftrightarrow ((p_4 \wedge (\neg p_2)) \to p_1)) \in PROP$

(c) $((\to \notin PROP$

Resolución

Premisa (definición de $PROP$)

El lenguaje de la lógica proposicional $PROP \subseteq \Sigma^*_{PROP}$ está definido inductivamente por:

1. Si $p \in P$, entonces $p \in PROP$
2. $\bot \in PROP$
3. Si $\alpha, \beta \in PROP$, entonces:
   - $(\alpha \wedge \beta) \in PROP$
   - $(\alpha \vee \beta) \in PROP$
   - $(\alpha \to \beta) \in PROP$
   - $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in PROP$
4. Si $\alpha \in PROP$, entonces $(\neg \alpha) \in PROP$

Proposición (a)

Para demostrar que la proposición pertenece a $PROP$ tenemos que dar una forma de construirlo a partir de las reglas del conjunto $PROP$ definido inductivamente.

$$
\begin{aligned}
&(((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \in PROP \\
&\iff \text{(por regla 3)} \\
&\begin{cases} (\neg p_3) \in PROP \\ ((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \in PROP \end{cases} \\
&\iff \text{((i) por regla 4, (ii) por regla 3)} \\
&\begin{cases} p_3 \in PROP \quad (i) \\ \begin{cases} (\neg p_2) \in PROP \\ (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2)) \in PROP \end{cases} \qquad (ii) \end{cases} \\
&\iff (p_3 \in PROP \text{ es trivial, (ii) por regla 3 (iv) y 4 (iii)}) \\
&\begin{cases} p_2 \in PROP \\ \begin{cases} p_3 \in PROP \quad (iii) \\ (p_1 \leftrightarrow p_2) \in PROP \quad (iv) \end{cases} \end{cases} \\
&\iff (\text{saco los elementos de } AT \text{ y regla 3}) \\
&\begin{cases} p_1 \in PROP \\ p_2 \in PROP \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donde esto ultimo se cumple porque $p_1, p_2 \in AT$.

Aclaración La idea que tenemos cuando "sacamos" los elementos de AT, es que por la regla 1 y 2 de $PROP$ sabemos que los elementos de AT pertenecen a $PROP$, por lo que estos elementos no cambian la implicancia de los si y solo si.

Proposición (b)

$$
\begin{aligned}
&((p_7 \to (\neg\bot)) \leftrightarrow ((p_4 \land (\neg p_2)) \to p_1)) \in PROP \\
&\iff \text{(por regla 3)} \\
&\begin{cases} (p_7 \to (\neg\bot)) \in PROP \\ ((p_4 \land (\neg p_2)) \to p_1) \in PROP \end{cases} \\
&\iff \text{(por regla 3)} \\
&\begin{cases} \begin{cases} p_7 \in PROP \\ (\neg\bot) \in PROP \end{cases} & (i) \\ \begin{cases} (p_4 \land (\neg p_2)) \in PROP \\ p_1 \in PROP \end{cases} & (ii) \end{cases} \\
&\iff \text{((i) por regla 4, (ii) por regla 3)} \\
&\begin{cases} \bot \in PROP \\ \begin{cases} p_4 \in PROP \\ (\neg p_2) \in PROP \end{cases} \end{cases} \\
&\iff \text{(por regla 4)} \\
&p_2 \in PROP
\end{aligned}
$$

En este caso eliminamos los elementos de AT sin aclaración, recordar que $\bot \in AT$

Proposición (c)

$$((\to \in PROP$$

Esto ya es absurdo, esto no puede pertenecer a $PROP$ porque por ejemplo, no hay paréntesis a la derecha, no se puede crear una proposición de esta forma utilizando las reglas de $PROP$.

Concluimos que esta palabra no pertenece a $PROP$