Ejercicio 17

Premisa

Llamamos **función de alto orden** a una función que recibe como parámetro o devuelve como resultado otra función. Para definir funciones de esta clase, uno de los parámetros se usa como una función en su definición. Por ejemplo:

$$f(g,x) = g(x) + 1$$

Sea g la función $Succ$ que devuelve el sucesor de un número, entonces:

$$f(Succ, 3) = Succ(3) + 1 = 5$$

Consigna

(a) Defina la función $reemplazo : \Sigma^* \times (\Sigma \to \Sigma^*) \to \Sigma^*$. Esa función debe cumplir que, si $\Sigma = \{a, b\}$ y f es tal que $f(a) = aba$ y $f(b) = bba$, entonces $reemplazo(abab, f) = ababbaababba$

(b) Encuentre una función f adecuada para probar que:

$$(\forall w \in \Sigma^*)\, duplicar(w) = reemplazo(w, f)$$

Resolución (parte a)

Observemos que la función debe ser el resultado de aplicar f a todos los elementos de la palabra pasada como parámetro. Veamos como definir inductivamente la función:

- $reemplazo : \Sigma^* \times (\Sigma \to \Sigma^*) \to \Sigma^*$
- $reemplazo(\varepsilon, f) = \varepsilon$
- $reemplazo(xw, f) = f(x)reemplazo(w, f)$

Resolución (parte b)

Queremos encontrar una función f para que se cumpla la propiedad:

$P(w) : duplicar(w) = reemplazo(w, f)$

Para todo $w \in \Sigma^*$.

Primero recordemos que $duplicar$ se define por (ejercicio 12):

Esta función duplica cada cáracter de una palabra, uno a uno

1. $duplicar(\varepsilon) = \varepsilon$
2. $duplicar(xw) = xxduplicar(w)$

La función f que hace sentido usar es la que se define por: $f(x) = xx \quad \forall x \in \Sigma$. Ahora probemos usando el PIP para Σ^* que la propiedad P se cumple.

PASO BASE:

$P(\varepsilon) : duplicar(\varepsilon) = reemplazo(\varepsilon, f)$

Esto es verdadero, por ambas las reglas (i) de la definición de $duplicar$ y $reemplazo$ respectivamente.

PASO INDUCTIVO:

(H) $P(w) : duplicar(w) = reemplazo(w, f)$
(I) $P(xw) : duplicar(xw) = reemplazo(xw, f)$

Veamos que podemos decir sobre la tesis usando las reglas de las funciones:

$$
\begin{aligned}
& duplicar(xw) = reemplazo(xw, f) \\
& \iff \text{(reglas (ii) de } reemplazo, duplicar) \\
& xxduplicar(w) = f(x)reemplazo(w, f) \\
& \iff \text{(definición de } f) \\
& xxduplicar(w) = xxreemplazo(w, f) \\
& \iff \text{(simplificar)} \\
& duplicar(w) = reemplazo(w, f)
\end{aligned}
$$

Pero lo último es cierto, por hipótesis inductiva. Entonces probamos la tesis.

Esto significa que $(\forall w \in \Sigma^*) P(w) : duplicar(w) = reemplazo(w, f)$ con la f que definimos.