

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 5

### Consigna

- (a) Enumere todas las subfórmulas de las proposiciones del Ejercicio 2.
- (b) Defina la función  $\text{sub} : \text{PROP} \rightarrow 2^{\text{PROP}}$ , que a cada proposición  $\varphi$  le asigna el conjunto de sus subfórmulas.
- (c) Demuestre que la relación “ser subfórmula de” es transitiva.

### Resolución (parte a)

#### Proposición 1

$$\neg(\neg(\neg\perp))$$

Las subfórmulas son:

- $\neg(\neg(\neg\perp))$
- $\neg(\neg\perp)$
- $\neg\perp$
- $\perp$

Es decir, tenemos 4 subfórmulas.

#### Proposición 2

$$(p_0 \rightarrow \perp) \rightarrow ((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge p_5)$$

Las subfórmulas son:

- $(p_0 \rightarrow \perp) \rightarrow ((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge p_5)$
- $(p_0 \rightarrow \perp)$
- $p_0$
- $\perp$
- $(p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge p_5$
- $(p_0 \leftrightarrow p_1)$
- $p_0$
- $p_1$

- $p_5$

Es decir, tenemos 9 subfórmulas.

### Proposición 3

$$\neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_1)$$

Las subfórmulas son:

- $\neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_1)$
- $\neg p_1 \rightarrow \neg p_1$
- $\neg p_1$
- $p_1$

Es decir, tenemos 4 subfórmulas.

### Resolución (parte b)

Esta parte se hizo en el teórico (clase 5), la definición inductiva es la siguiente:

$$SUB : PROP \rightarrow 2^{PROP}$$

1.  $SUB(\varphi) = \{\varphi\}$  con  $\varphi \in AT$
2.  $SUB((\alpha * \beta)) = SUB(\alpha) \cup SUB(\beta) \cup \{(\alpha * \beta)\}$
3.  $SUB((\neg\alpha)) = SUB(\alpha) \cup \{(\neg\alpha)\}$

### Resolución (parte c)

Tenemos que demostrar que la relación de “ser subfórmula de” es transitiva, es decir que:

$$\forall \alpha, \beta, \varphi \in PROP : \alpha \in SUB(\beta) \text{ y } \beta \in SUB(\varphi) \Rightarrow \alpha \in SUB(\varphi)$$

Para demostrar esto usaremos el PIP sobre  $PROP$ , en este caso sobre  $\varphi$ , ya que es el más fácil para los casos base. Vamos a probar la propiedad:

$$P(\varphi) : (\forall \alpha, \beta \in PROP) \quad \alpha \in SUB(\beta) \text{ y } \beta \in SUB(\varphi) \Rightarrow \alpha \in SUB(\varphi)$$

### PASO BASE

#### PARTE 1

$$P(p_i) : (\forall \alpha, \beta \in PROP) \quad \alpha \in SUB(\beta) \text{ y } \beta \in SUB(p_i) \Rightarrow \alpha \in SUB(p_i)$$

Observemos lo siguiente:

- $\beta \in SUB(p_i)$  implica que  $\beta = p_i$  por la definición de subfórmula
- $\alpha \in SUB(\beta)$  implica que  $\alpha \in SUB(p_i)$  por lo anterior, y en consecuencia  $\alpha = p_i$

Juntando lo anterior, la implicancia final quedaría como:

- $\alpha \in SUB(p_i)$  pero  $\alpha = p_i$ , por lo que se cumple la propiedad de forma trivial

## PARTE 2

$$P(\perp) : (\forall \alpha, \beta \in PROP) \quad \alpha \in SUB(\beta) \text{ y } \beta \in SUB(\perp) \Rightarrow \alpha \in SUB(\perp)$$

Es exactamente análoga a la parte anterior.

## PASO INDUCTIVO

$$(H) \ P((\varphi)) : (\forall \alpha, \beta \in PROP) \quad \alpha \in SUB(\beta) \text{ y } \beta \in SUB((\varphi)) \Rightarrow \alpha \in SUB((\varphi))$$

### PARTE 1

$$(T) \ P((\varphi_1 * \varphi_2)) : (\forall \alpha, \beta \in PROP) \quad \alpha \in SUB(\beta) \text{ y } \beta \in SUB((\varphi_1 * \varphi_2)) \Rightarrow \alpha \in SUB((\varphi_1 * \varphi_2))$$

Observemos que para que  $\beta \in SUB((\varphi_1 * \varphi_2))$  solo hay tres posibilidades, o bien:

- $\beta = (\varphi_1 * \varphi_2)$
- $\beta \in SUB(\varphi_1)$
- $\beta \in SUB(\varphi_2)$

El primer caso es trivial, ya que si  $\beta = (\varphi_1 * \varphi_2)$ , entonces  $\alpha \in SUB(\varphi_1 * \varphi_2)$  y se cumple la propiedad.

Los siguientes dos casos también son bastante directos, utilizando la hipótesis, sabemos que lo siguiente es cierto:

- $(\forall \alpha, \beta \in PROP) \quad \alpha \in SUB(\beta) \text{ y } \beta \in SUB((\varphi_1)) \Rightarrow \alpha \in SUB((\varphi_1))$
- $(\forall \alpha, \beta \in PROP) \quad \alpha \in SUB(\beta) \text{ y } \beta \in SUB((\varphi_2)) \Rightarrow \alpha \in SUB((\varphi_2))$

Y como  $\alpha \in SUB(\varphi_1)$  o  $\alpha \in SUB(\varphi_2)$ , entonces  $\alpha \in SUB((\varphi_1 * \varphi_2))$ , por la construcción de la función  $SUB$

### PARTE 2

$$(T) \ P((\neg\varphi)) : (\forall \alpha, \beta \in PROP) \quad \alpha \in SUB(\beta) \text{ y } \beta \in SUB((\neg\varphi)) \Rightarrow \alpha \in SUB((\neg\varphi))$$

Este caso es análogo al anterior, solo que en este caso solo hay dos posibilidades para  $\beta$ :

- $\beta = (\neg\varphi)$
- $\beta \in SUB(\varphi)$

Y nuevamente, si  $\beta = (\neg\varphi)$ , entonces  $\alpha \in SUB(\neg\varphi)$  y se cumple la propiedad.

Si  $\beta \in SUB(\varphi)$ , entonces  $\alpha \in SUB(\varphi)$  por la hipótesis inductiva, y por lo tanto  $\alpha \in SUB((\neg\varphi))$ , por la construcción de la función  $SUB$ .

Esto demuestra la propiedad para todos los casos, por lo que la relación de “ser subfórmula de” es transitiva.

## Conclusión

Para estos ejercicios lo más importante es escribir lo que queremos probar formalmente, y entender bien que proposición de  $PROP$  tomar para hacer el PIP. La buena elección de este nos llevará a demostraciones más simples