

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## CLASE 14 - 16/05/2025

### Semántica de la lógica de predicados

#### Visión intuitiva de la semántica

##### Términos

- Representan elementos del **Universo**. Conviene que cualquier elemento tenga al menos un nombre (una forma de referenciarlo):
  - Se modifica **TERM** para que todo elemento del universo tenga algún nombre.
  - Mostraremos que objetos del universo son representados por cada término cerrado: Símbolo de función aplicado a algún nombre de elemento del universo.

##### Fórmulas

- Representan lo que se dice en el **Universo**.
  - Algunas pueden ser verdaderas o falsas (sentencias - formulas cerradas) en una estructura dada
  - Mostraremos cómo averiguar si una sentencia es verdadera o falsa

##### Constantes

- Las constantes  $c_1, c_2, \dots$  son nombres para los elementos distinguidos del universo.
  - Se usan en cualquier fórmula y cualquier contexto de uso
- Después tenemos las constantes del lenguaje extendido: Una representación habitual de un elemento del universo con un techo  $\bar{x}$ , es un nombre para ese elemento del universo.
  - Ejemplo:  $\bar{1}$  es una constante (sintaxis) para el número 1 que es un elemento de un universo dado
  - Se usan para interpretar las fórmulas con variables

#### Definición (lenguaje extendido para una estructura)

Sea  $\mathcal{M}$  una estructura. El lenguaje extendido para  $\mathcal{M}$ , notado  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$  se obtiene del lenguaje  $\mathcal{L}$  del tipo de  $\mathcal{M}$  agregando símbolos de constante para todos los elementos de  $|\mathcal{M}|$ . Al símbolo de constante asociado a  $a \in |\mathcal{M}|$  lo denotamos como  $\bar{a}$

## Interpretación de términos cerrados de $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ en $\mathcal{M}$

### Definición

Sea  $\mathcal{M} = \langle A, R_1, \dots, R_n, F_1, \dots, F_m, \{C_i \mid 1 \leq i \leq k\} \rangle$  con tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$ . La interpretación de los términos cerrados de  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$  en  $\mathcal{M}$  es una función  $\_^\mathcal{M} : TERM_C \rightarrow |\mathcal{M}|$  que satisface:

- $c_i^\mathcal{M} = C_i$  para todo  $1 \leq i \leq k$
- $\bar{a}^\mathcal{M}$  para todo  $a \in |\mathcal{M}|$
- $f_i(t_1, \dots, t_{a_i})^\mathcal{M} = F_i(t_1^\mathcal{M}, \dots, t_{a_i}^\mathcal{M})$  para  $i = 1, \dots, m$

### Ejemplo

Sea  $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, \text{Primo}, +, -, 0, 1 \rangle$  con tipo  $\langle 1; 2, 1; 2 \rangle$ . La interpretación de los términos cerrados de  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$  en  $\mathcal{M}$  es una función  $\_^\mathcal{M} : TERM_C \rightarrow \mathbb{Z}$  que satisface:

- $c_1^\mathcal{M} = 0$
- $c_2^\mathcal{M} = 1$
- $\bar{n}^\mathcal{M}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$
- $f_1(t_1, t_2)^\mathcal{M} = t_1^\mathcal{M} + t_2^\mathcal{M}$
- $f_2(t_1)^\mathcal{M} = -t_1^\mathcal{M}$

1. Para este caso, qué valor representa el término  $f_1(f_2(c_1), c_2)$ ?

$$\begin{aligned}
 & f_1(f_2(c_1), c_2)^\mathcal{M} \\
 &= \\
 & f_1(-c_1^\mathcal{M}, c_2^\mathcal{M}) \\
 &= \\
 & -c_1^\mathcal{M} + c_2^\mathcal{M} \\
 &= \\
 & -0 + 1 \\
 &= \\
 & 1
 \end{aligned}$$

2. Para este caso, qué valor representa el término  $f_2(f_1(c_1, c_2))$ ?

$$\begin{aligned}
 & f_2(f_1(c_1, c_2))^\mathcal{M} \\
 &= \\
 & f_2(c_1^\mathcal{M}, c_2^\mathcal{M}) \\
 &= \\
 & -(c_1^\mathcal{M} + c_2^\mathcal{M}) \\
 &= \\
 & -(0 + 1) \\
 &= \\
 & -1
 \end{aligned}$$