

## Ejercicio 7

### Consigna

- (a) Considere una secuencia de formación de  $\psi$  en la que ocurren fórmulas que no son subfórmulas de  $\psi$ :  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \equiv \psi$  de la fórmula  $\psi$ . Sea  $\varphi_i$  la fórmula de la secuencia que no es subfórmula de  $\psi$ , y que aparece más a la derecha en la secuencia. Pruebe que si elimina  $\varphi_i$  de la secuencia de formación dada, la secuencia resultante sigue siendo una secuencia de formación para  $\psi$ .
- (b) A partir del resultado anterior, demuestre que si  $\varphi$  ocurre en una secuencia de formación de largo mínimo para  $\psi$ , entonces  $\varphi$  es una subfórmula de  $\psi$ .

### Resolución (parte a)

Consideremos una secuencia de formación  $s \in \text{secFORM}_\psi$  como la mencionada en la letra. Veamos la forma que tendrá esta secuencia:

$$s = \{\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n, \psi\}$$

Donde  $\varphi_i$  es la fórmula que no es subfórmula de  $\psi$  y que aparece más a la derecha en la secuencia. Si eliminamos  $\varphi_i$  de la secuencia, tendremos:

$$s' = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n, \psi\}$$

Ahora tenemos que ver que  $s'$  es una secuencia de formación para  $\psi$

Por una parte, los siguientes elementos sabemos que cumplirán con las propiedades necesarias para ser una secuencia de formación:

$$\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}$$

Esto porque el elemento que eliminamos está a la derecha de estos elementos en la secuencia original  $s$ , y por lo tanto, no afecta a estos elementos.

Nos quedaría demostrar que los elementos  $\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n, \psi$  también cumplen con las propiedades necesarias para ser una secuencia de formación.

Estos a priori cumplen con las propiedades necesarias para ser una secuencia de formación (porque ya eran parte de una secuencia de formación), excepto en los siguientes casos (tomando  $\varphi$  como un elemento cualquiera entre los mencionados anteriormente):

1.  $\varphi = (\alpha_1 * \varphi_i)$  con  $*$   $\in C_2$
2.  $\varphi = (\neg \varphi_i)$

Por una parte, sabemos que todos los elementos con los que estamos trabajando son subfórmulas de  $\psi$  (porque quitamos el último elemento que no era una subfórmula), pero si  $\varphi$  es de algunas de las formas mencionadas anteriormente:

1. Si  $\varphi = (\alpha_1 * \varphi_i)$  con  $*$   $\in C_2$  entonces  $\varphi_i$  es subfórmula de  $\varphi$  y por lo tanto de  $\psi$ .  
ABSURDO!  $\varphi_i$  no es subfórmula de  $\psi$  por hipótesis.

2. Si  $\varphi = (\neg\varphi_i)$  entonces  $\varphi_i$  es subfórmula de  $\varphi$  y por lo tanto de  $\psi$ . ABSURDO!  $\varphi_i$  no es subfórmula de  $\psi$  por hipótesis.

Por lo tanto, hemos demostrado que  $s'$  es una secuencia de formación para  $\psi$ .

### **Resolución (parte b)**

Probaremos esta parte por absurdo.

Supongamos que tenemos una secuencia  $s \in \text{secFORM}_\psi$  de largo mínimo para  $\psi$  y que existe una fórmula  $\varphi_i$  que no es subfórmula de  $\psi$ .

Utilizando la parte anterior, sabemos que si eliminamos  $\varphi_i$  de la secuencia, la secuencia resultante sigue siendo una secuencia de formación para  $\psi$ .

Pero esto es absurdo, porque si la secuencia original era de largo mínimo, entonces la secuencia resultante no puede ser una secuencia de formación para  $\psi$ .

Esto demuestra que si  $\varphi$  ocurre en una secuencia de formación de largo mínimo para  $\psi$ , entonces  $\varphi$  es una subfórmula de  $\psi$ .