

## Ejercicio 20

### Consigna

Considere los siguientes conjuntos:

- $P = \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$
- $\Sigma = P \cup \{\oplus, \otimes, \cdot, ()\}$
- El conjunto  $L$  definido inductivamente por las siguientes reglas:
  1. Si  $p_i \in P$ , entonces  $p_i \in L$
  2. Si  $\varphi \in L$  y  $\psi \in L$ , entonces  $(\varphi \oplus \psi) \in L$
  3. Si  $\varphi \in L$  y  $\psi \in L$ , entonces  $(\varphi \otimes \psi) \in L$

(a) Dada una función:

- $v_1 : P \rightarrow \{0, 1\}$
- $v_1(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es par} \\ 0 & \text{si } i \text{ no es par} \end{cases}$

Defina una función recursiva  $eval_1 : L \rightarrow \{0, 1\}$  considerando que se evalúa  $\oplus$  como el máximo,  $\otimes$  como el mínimo, y cada  $p_i \in P$  como  $v_1(p_i)$ .

Por ejemplo:  $eval_1(((p_0 \otimes p_1) \oplus p_0)) = 1$

(b) Defina una función recursiva  $eval_2 : L \times (P \rightarrow \{0, 1\}) \rightarrow \{0, 1\}$ , donde se agrega la interpretación de los elementos de  $P$  a la función  $eval_1$ .

Por ejemplo:  $eval_2(((p_0 \otimes p_1) \oplus p_0), v_1) = 1$

(c) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para cualquier función  $v$ :

- $(\forall \varphi, \psi \in L) eval_2((\varphi \oplus \psi), v) = 1 \Rightarrow eval_2(\varphi, v) = 1$
- $(\forall \varphi, \psi \in L) eval_2((\varphi \oplus \psi), v) = 1 \Leftarrow eval_2(\varphi, v) = 1$
- $(\forall \varphi, \psi \in L) eval_2((\varphi \otimes \psi), v) = 1 \Rightarrow eval_2(\varphi, v) = 1$
- $(\forall \varphi, \psi \in L) eval_2((\varphi \otimes \psi), v) = 1 \Leftarrow eval_2(\varphi, v) = 1$

### Resolución

Antes de empezar, debemos tener en cuenta que todo lo siguiente se basa en que  $L$  es libre, pero a priori no tengo una forma de demostrar porque esto es así, aunque intuitivamente es visible que  $L$  es libre.

#### Parte a

Para definir una función recursiva, definamos primero el ERP para el conjunto  $L$ :

1.  $F(p_i) = f_{p_i}$
2.  $F(\varphi \oplus \psi) = f_{s_1}(\varphi, \psi, F(\psi), F(\varphi))$
3.  $F(\varphi \otimes \psi) = f_{s_2}(\varphi, \psi, F(\psi), F(\varphi))$

A partir de esto, usando las definiciones de  $v_1, \oplus, \otimes$ , podemos construir  $eval_1$ :

1.  $eval_1(p_i) = v_1(p_i)$

2.  $eval_1(\varphi \oplus \psi) = mx\{v_1(\varphi), v_1(\psi)\}$
3.  $eval_1(\varphi \otimes \psi) = mn\{v_1(\varphi), v_1(\psi)\}$

Dónde  $v_1(\varphi), v_1(\psi) \in \{0, 1\}$  por lo que podemos usar las funciones  $mx, mn$  sobre  $\mathbb{N}$

**Observación:** El ERP usualmente se ve complejo, pero lo importante es saber que elementos tenemos que definir, y saber decir de que depende la definición de estos.

### Parte b

Construir  $eval_2$  es muy parecido a construir  $eval_1$ , solo que ahora la función  $v$  es dada como parámetro en vez de estar predefinida. Entonces, definimos  $eval_2$ :

1.  $eval_2(p_i) = v(p_i)$
2.  $eval_2(\varphi \oplus \psi) = mx\{v(\varphi), v(\psi)\}$
3.  $eval_2(\varphi \otimes \psi) = mn\{v(\varphi), v(\psi)\}$

Listo, esto nos define  $eval_2$ .

### Parte c

Ahora que tenemos definida  $eval_2$  podemos seguir con esta parte:

**Afirmación #1**  $(\forall \varphi, \psi \in L) eval_2((\varphi \oplus \psi), v) = 1 \Rightarrow eval_2(\varphi, v) = 1$

La hipótesis nos dice que el máximo de  $v(\varphi), v(\psi)$  es 1, es decir que o  $v(\varphi) = 1$  o  $v(\psi) = 1$  o las dos cosas a la vez. Con esto, podemos afirmar que existen algunos  $\varphi, \psi$  tal que  $v(\varphi) = 0$  y  $v(\psi) = 1$  y la hipótesis sigue siendo verdadera, en cambio, en este caso:

$$eval_2(\varphi, v) \neq 1$$

Por lo que esta afirmación es FALSA.

**Afirmación #2**  $(\forall \varphi, \psi \in L) eval_2((\varphi \oplus \psi), v) = 1 \Leftarrow eval_2(\varphi, v) = 1$

La hipótesis cambia en este caso, nos dice que  $v(\varphi) = 1$ , entonces esto nos dice que el máximo entre  $v(\varphi), v(\psi)$  siempre va a ser 1, sin importar quién es  $\psi$ . Entonces:

Esta afirmación es VERDADERA.

**Afirmación #3**  $(\forall \varphi, \psi \in L) eval_2((\varphi \otimes \psi), v) = 1 \Rightarrow eval_2(\varphi, v) = 1$

La hipótesis nos dice que el mínimo entre  $v(\varphi), v(\psi)$  es 1. Esto implica directamente que ambos  $v(\varphi) = v(\psi) = 1$  por lo que:

$$eval_2(\varphi, v) = 1$$

Entonces esta afirmación es VERDADERA.

**Afirmación #4**  $(\forall \varphi, \psi \in L) \text{eval}_2((\varphi \otimes \psi), v) = 1 \Leftrightarrow \text{eval}_2(\varphi, v) = 1$

Si miramos la tesis directamente, podemos confirmar que la única forma de que el mínimo entre  $v(\varphi), v(\psi)$  sea 1, es que ambas sean 1. Por la hipótesis solo sabemos que  $v(\varphi) = 1$ , entonces  $v(\psi)$  podría ser 0, por lo tanto negando la tesis.

Entonces, esta afirmación es FALSA.