

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 10

### Consigna

En este ejercicio usamos las funciones *con* y *r* del Ejercicio 8 y las funciones *CantNodos* y *CantAt* del Ejercicio 9.

- (a) Defina inductivamente el lenguaje  $PROP_1$  incluido en  $PROP$  tal que  $\perp$  no aparece en ninguna palabra de  $PROP_1$ .
- (b) Demuestre que, si  $\varphi \in PROP_1$ , la cantidad de conectivos en  $\varphi$  más la cantidad de átomos de  $\varphi$  es igual a la cantidad de nodos de  $ARBOL(\varphi)$ .
- (c) Dada  $\varphi \in PROP_1$ , demuestre que la cantidad de conectivos en  $\varphi$  más la cantidad de átomos de  $\varphi$  es menor o igual que  $2^{r(\varphi)+1} - 1$ .

### Premisa

Veamos las definiciones de las funciones que vamos a usar (definidas en ejercicios anteriores):

$con : PROP \rightarrow \mathbb{N}$

- 1.  $con(\alpha) = 0$  con  $\alpha \in AT$
- 2.  $con((\alpha * \beta)) = 1 + con(\alpha) + con(\beta)$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
- 3.  $con((\neg\alpha)) = 1 + con(\alpha)$  con  $\alpha \in PROP$

$CantAt : PROP \rightarrow \mathbb{N}$

- 1.  $CantAt(\varphi) = 1$  con  $\varphi \in AT$
- 2.  $CantAt((\alpha * \beta)) = CantAt(\alpha) + CantAt(\beta)$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
- 3.  $CantAt((\neg\alpha)) = CantAt(\alpha)$  con  $\alpha \in PROP$

$CantNodos : \mathcal{T}(PROP) \rightarrow \mathbb{N}$

- 1.  $CantNodos(\mathcal{T}(\varphi)) = 1$  con  $\varphi \in AT$
- 2.  $CantNodos(\mathcal{T}(\alpha * \beta)) = 1 + CantNodos(\mathcal{T}(\alpha)) + CantNodos(\mathcal{T}(\beta))$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
- 3.  $CantNodos(\mathcal{T}(\neg\alpha)) = 1 + CantNodos(\mathcal{T}(\alpha))$  con  $\alpha \in PROP$

$r : PROP \rightarrow \mathbb{N}$

- 1.  $r(\alpha) = 0$  con  $\alpha \in AT$

2.  $r((\alpha * \beta)) = 1 + \max(r(\alpha), r(\beta))$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
3.  $r((\neg\alpha)) = 1 + r(\alpha)$  con  $\alpha \in PROP$

## Resolución (parte a)

La definición inductiva del lenguaje  $PROP$  es la siguiente:

1. Si  $p \in P$ , entonces  $p \in PROP$
2.  $\perp \in PROP$
3. Si  $\alpha, \beta \in PROP$ , entonces:
  - $(\alpha \wedge \beta) \in PROP$
  - $(\alpha \vee \beta) \in PROP$
  - $(\alpha \rightarrow \beta) \in PROP$
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in PROP$
4. Si  $\alpha \in PROP$ , entonces  $(\neg\alpha) \in PROP$

Si no queremos incluir  $\perp$  en nuestro lenguaje, fácilmente podemos ver que la definición que necesitamos es:

1. Si  $p \in P$ , entonces  $p \in PROP_1$
2. Si  $\alpha, \beta \in PROP_1$ , entonces:
  - $(\alpha \wedge \beta) \in PROP_1$
  - $(\alpha \vee \beta) \in PROP_1$
  - $(\alpha \rightarrow \beta) \in PROP_1$
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in PROP_1$
3. Si  $\alpha \in PROP_1$ , entonces  $(\neg\alpha) \in PROP_1$

Se observa fácilmente que  $PROP_1 \subseteq PROP$ .

## Resolución (parte b)

Queremos demostrar que si  $\varphi \in PROP_1$ , la cantidad de conectivos en  $\varphi$  más la cantidad de átomos de  $\varphi$  es igual a la cantidad de nodos de  $ARBOL(\varphi)$ .

Esta parte se resuelve usando el PIP para  $PROP_1$ , que es exactamente igual que el de  $PROP$  pero sin comprobar la propiedad para  $\perp$  en el paso base.

Queremos demostrar la propiedad  $P$ :

$$P(\varphi) : con(\varphi) + CantAt(\varphi) = CantNodos(ARBOL(\varphi))$$

### PASO BASE

$$P(p_i) : con(p_i) + CantAt(p_i) = CantNodos(ARBOL(p_i)) \text{ con } p_i \in P$$

Usando la regla 1 de las funciones que estamos usando tenemos que:

1.  $con(p_i) = 0$
2.  $CantAt(p_i) = 1$
3.  $CantNodos(ARBOL(p_i)) = 1$

Por lo que podemos observar fácilmente que la propiedad se cumple para este paso.

## PASO INDUCTIVO

$$(H) \ P(\varphi) : con(\varphi) + CantAt(\varphi) = CantNodos(ARBOL(\varphi))$$

### PARTE 1

$$P((\varphi * \psi)) : con((\varphi * \psi)) + CantAt((\varphi * \psi)) = CantNodos(ARBOL((\varphi * \psi)))$$

Usando la regla 2 de todas las funciones, tenemos que:

1.  $con((\varphi * \psi)) = 1 + con(\varphi) + con(\psi)$
2.  $CantAt((\varphi * \psi)) = CantAt(\varphi) + CantAt(\psi)$
3.  $CantNodos(ARBOL((\varphi * \psi))) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi)) + CantNodos(ARBOL(\psi))$

Entonces escribamos la tesis y veamos que podemos construir con lo que hallamos:

$$con((\varphi * \psi)) + CantAt((\varphi * \psi)) = CantNodos(ARBOL((\varphi * \psi))) \iff 1 + con(\varphi) + con(\psi) + CantAt(\varphi) + CantAt(\psi) = CantNodos(ARBOL(\varphi)) + CantNodos(ARBOL(\psi)) + 1$$

Pero usando la hipótesis, sabemos que:

1.  $CantNodos(ARBOL((\varphi))) = con((\varphi)) + CantAt((\varphi))$
2.  $CantNodos(ARBOL((\psi))) = con((\psi)) + CantAt((\psi))$

Entonces podemos sustituir esto en el último paso que teníamos:

$$1 + con(\varphi) + con(\psi) + CantAt(\varphi) + CantAt(\psi) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi)) + CantNodos(ARBOL(\psi)) + 1$$

Por lo que queda probada la propiedad para este punto.

### PARTE 2

$$(T) \ P(\neg\varphi) : con(\neg\varphi) + CantAt(\neg\varphi) = CantNodos(ARBOL(\neg\varphi))$$

Usando la regla 3 de todas las funciones, tenemos que:

1.  $con(\neg\varphi) = 1 + con(\varphi)$
2.  $CantAt(\neg\varphi) = CantAt(\varphi)$
3.  $CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi))$

Entonces escribamos la tesis y veamos que podemos construir con lo que hallamos:

$$con(\neg\varphi) + CantAt(\neg\varphi) = CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) \iff 1 + con(\varphi) + CantAt(\varphi) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi))$$

Donde lo último se cumple por hipótesis, por lo que probamos que la propiedad se cumple para todo  $\varphi \in PROP$

## Resolución (parte c)

Queremos probar que dada  $\varphi \in PROP_1$ , la cantidad de conectivos en  $\varphi$  más la cantidad de átomos de  $\varphi$  es menor o igual que  $2^{r(\varphi)+1} - 1$ .

Podemos ayudarnos a la hora de probar esto, usando la propiedad anterior (la de la parte b), de la siguiente forma:

$$P'(\varphi) : con(\varphi) + CantAt(\varphi) = CantNodos(ARBOL(\varphi)) \leq 2^{r(\varphi)+1} - 1$$

Que se convierte en:

$$P(\varphi) : CantNodos(ARBOL(\varphi)) \leq 2^{r(\varphi)+1} - 1$$

Entonces, si probamos la propiedad  $P$ , usando la propiedad anterior tenemos probado el resultado que queremos.

Usaremos el PIP para  $PROP_1$ , como en la parte anterior.

### PASO BASE

$$P(p_i) : CantNodos(ARBOL(p_i)) \leq 2^{r(p_i)+1} - 1$$

Usando la regla 1 de todas las funciones:

1.  $CantNodos(ARBOL(p_i)) = 1$
2.  $r(p_i) = 0$

Entonces calculando el lado derecho obtenemos que:

$$1 \leq 2^1 - 1$$

Que es verdadero, por lo que el paso base se cumple

### PASO INDUCTIVO

$$(T) \ P(\varphi) : CantNodos(ARBOL(\varphi)) \leq 2^{r(\varphi)+1} - 1$$

#### PARTE 1

$$(T) \ P(\alpha * \beta) : CantNodos(ARBOL(\alpha * \beta)) \leq 2^{r(\alpha * \beta)+1} - 1$$

Usando la regla 2 de todas las funciones:

1.  $CantNodos(ARBOL(\alpha * \beta)) = 1 + CantNodos(ARBOL(\alpha)) + CantNodos(ARBOL(\beta))$
2.  $r((\alpha * \beta)) = 1 + \max(r(\alpha), r(\beta))$

Ahora por hipótesis, podemos plantear:

$$1 + CantNodos(ARBOL(\alpha)) + CantNodos(ARBOL(\beta)) \leq 1 + 2^{r(\alpha)+1} - 1 + 2^{r(\beta)+1} - 1$$

Esto implica que:

$$CantNodos(ARBOL(\alpha * \beta)) \leq 2^{r(\alpha)+1} + 2^{r(\beta)+1} - 1$$

Pero observemos que:

- $2^{r(\alpha)+1} = 2 \cdot 2^{r(\alpha)} \leq 2 \cdot 2^{\max(r(\alpha), r(\beta))} = 2^{\max(r(\alpha), r(\beta))+1}$
- $2^{r(\beta)+1} = 2 \cdot 2^{r(\beta)} \leq 2 \cdot 2^{\max(r(\alpha), r(\beta))} = 2^{\max(r(\alpha), r(\beta))+1}$

Donde los razonamientos que seguimos son meramente algebraicos. Ahora sumando las dos desigualdades, obtenemos que:

$$2 \cdot 2^{r(\alpha)} + 2 \cdot 2^{r(\beta)} \leq 2 \times (2^{\max(r(\alpha), r(\beta))+1}) = 2^{\max(r(\alpha), r(\beta))+2}$$

Ahora, expandiendo la segunda parte de la tesis usando la regla 2 de  $r$ , tenemos que:

$$2^{r(\alpha * \beta)+1} - 1 = 2^{\max(r(\alpha), r(\beta))+2} - 1$$

Entonces por transitividad:

$$CantNodos(ARBOL(\alpha * \beta)) \leq 2^{r(\alpha)+1} + 2^{r(\beta)+1} - 1 \leq 2^{\max(r(\alpha), r(\beta))+2} - 1$$

Por lo tanto, queda probada la propiedad para esta parte.

## PARTE 2

$$(T) \ P(\neg\varphi) : CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) \leq 2^{r(\neg\varphi)+1} - 1$$

Usando la regla 3 de todas las funciones:

1.  $CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi))$
2.  $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$

Ahora por hipótesis, podemos plantear:

$$CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) \leq 1 + 2^{r(\varphi)+1} - 1 \iff CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) \leq 2^{r(\varphi)+1}$$

Pero observemos que:

- $2^{r(\varphi)+1} \leq 2^{r(\neg\varphi)+1} = 2^{r(\varphi)+2}$

Entonces, por transitividad:

$$CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) \leq 2^{r(\varphi)+1} \leq 2^{r(\varphi)+2} = 2^{r(\neg\varphi)+1}$$

Por lo tanto, queda probada la propiedad para esta parte, y por lo tanto queda probada para todo  $\varphi \in PROP_1$