

## Ejercicio 17

### Premisa

Llamamos **función de alto orden** a una función que recibe como parámetro o devuelve como resultado otra función. Para definir funciones de esta clase, uno de los parámetros se usa como una función en su definición. Por ejemplo:

$$f(g, x) = g(x) + 1$$

Sea  $g$  la función  $Succ$  que devuelve el sucesor de un número, entonces:

$$f(Succ, 3) = Succ(3) + 1 = 5$$

### Consigna

- (a) Defina la función  $reemplazo : \Sigma^* \times (\Sigma \rightarrow \Sigma^*) \rightarrow \Sigma^*$ . Esa función debe cumplir que, si  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $f$  es tal que  $f(a) = aba$  y  $f(b) = bba$ , entonces  $reemplazo(abab, f) = ababbaababba$
- (b) Encuentre una función  $f$  adecuada para probar que:

$$(\forall w \in \Sigma^*) duplicar(w) = reemplazo(w, f)$$

### Resolución (parte a)

Observemos que la función debe ser el resultado de aplicar  $f$  a todos los elementos de la palabra pasada como parámetro. Veamos como definir inductivamente la función:

- $reemplazo : \Sigma^* \times (\Sigma \rightarrow \Sigma^*) \rightarrow \Sigma^*$
- $reemplazo(\varepsilon, f) = \varepsilon$
- $reemplazo(xw, f) = f(x)reemplazo(w, f)$

### Resolución (parte b)

Queremos encontrar una función  $f$  para que se cumpla la propiedad:

$$P(w) : duplicar(w) = reemplazo(w, f)$$

Para todo  $w \in \Sigma^*$ .

Primero recordemos que  $duplicar$  se define por (ejercicio 12):

Esta función duplica cada carácter de una palabra, uno a uno

1.  $duplicar(\varepsilon) = \varepsilon$
2.  $duplicar(xw) = xxduplicar(w)$

La función  $f$  que hace sentido usar es la que se define por:  $f(x) = xx \quad \forall x \in \Sigma$ . Ahora probemos usando el PIP para  $\Sigma^*$  que la propiedad  $P$  se cumple.

**PASO BASE:**

$$P(\varepsilon) : \text{duplicar}(\varepsilon) = \text{reemplazo}(\varepsilon, f)$$

Esto es verdadero, por ambas las reglas (i) de la definición de *duplicar* y *reemplazo* respectivamente.

**PASO INDUCTIVO:**

$$(H) \ P(w) : \text{duplicar}(w) = \text{reemplazo}(w, f)$$

$$(I) \ P(xw) : \text{duplicar}(xw) = \text{reemplazo}(xw, f)$$

Veamos que podemos decir sobre la tesis usando las reglas de las funciones:

$$\begin{aligned} & \text{duplicar}(xw) = \text{reemplazo}(xw, f) \\ & \iff (\text{reglas (ii) de } \text{reemplazo}, \text{duplicar}) \\ & xx\text{duplicar}(w) = f(x)\text{reemplazo}(w, f) \\ & \iff (\text{definición de } f) \\ & xx\text{duplicar}(w) = xx\text{reemplazo}(w, f) \\ & \iff (\text{simplificar}) \\ & \text{duplicar}(w) = \text{reemplazo}(w, f) \end{aligned}$$

Pero lo último es cierto, por hipótesis inductiva. Entonces probamos la tesis.

Esto significa que  $(\forall w \in \Sigma^*) P(w) : \text{duplicar}(w) = \text{reemplazo}(w, f)$  con la  $f$  que definimos.