Lógica

Mauro Polenta Mora

CLASE 8 - 27/03/2025

Deducción natural

Introducción

Tenemos dos formas de trabajar para justificar la válidez de un razonamiento.

- **Justificación semántica** ($\Gamma \vDash \alpha$): probar que la veracidad de las hipótesis implica la veracidad de la conclusión.
- **Justificación sintáctica** ($\Gamma \vdash \alpha$): demostrar la conclusión a partir de las hipótesis usando pasos claramente definidos y explicitados.

Justificación sintáctica

- ($\Gamma \vdash \beta$):
  - Demostrar la conclusión β a partir de las hipótesis de Γ usando pasos claramente definidos y explicitados.
- Qué es una demostración?
  - Es una prueba formal.
  - La correción de la demostración depende de su forma y no del significado.
  - Cumple reglas precisas de construcción.

Pruebas formales

- Cómo probamos usualmente?
  - Sostenenemos hipótesis iniciales (las podemos dar como dato en todo instante de la prueba).
  - Encadenamos pasos simples de deducción que nos permite llegar a la conclusión.
- Por qué pruebas formales?
  - Porque podemos compilar las pruebas hechas, y asegurar su corrección o detectar errores mediante el análisis de su estructura.

Ejemplo

En deducción natural, las demostraciones se formalizan mediante árboles:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \wedge \beta]^1}{\beta}\,E\wedge_2 \qquad \dfrac{[\alpha \wedge \beta]^1}{\alpha}\,E\wedge_1}{\beta \wedge \alpha}\,I\wedge}{\alpha \wedge \beta \to \beta \wedge \alpha}\,I\to^1$$

Figure 1: Figura 1

Reglas de construcción de pruebas

- Construyen una prueba a partir de subpruebas más simples.
- Manejan correctamente las hipótesis (hipótesis globales) y supuestos (hipótesis locales) en cada etapa de la prueba.

El análisis de corrección de una prueba formal puede mecanizarse, y lo ha sido. Existen asistentes y verificadores automáticos de pruebas para el cálculo proposicional.

En general para cada conectivo se definen:

- **Reglas de introducción**: Indican como probar una fórmula con ese conectivo.
- **Reglas de eliminación**: Indican como utilizar una fórmula con ese conectivo.

Reglas de introducción

Conjunción ($\wedge$)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: $\alpha \wedge \beta$
- Demostración:
  - Probar α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
  - Probar β usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
  - Luego, hemos probado $\alpha \wedge \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\dfrac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}\,I\wedge$$

Figure 2: Figura 2

Implica ($\to$)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$.

- Tesis: $\alpha \to \beta$
- Demostración:
  - Supongamos α
  - Probar β usando $\delta_1, \dots, \delta_n$ y α
  - Luego, hemos probado $\alpha \to \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta} \; I{\to}^{(k)}$$

Figure 3: Figura 3

Disyunción ($\vee$)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: $\alpha \vee \beta$
- Demostración:
  - **Opción 1**:
    * Probar α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$
    * Luego, hemos probado $\alpha \vee \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
  - **Opción 2**:
    * Probar β usando $\delta_1, \dots, \delta_n$
    * Luego, hemos probado $\alpha \vee \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \; I{\vee}_1 \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta} \; I{\vee}_2$$

Si y sólo si ($\leftrightarrow$)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: $\alpha \leftrightarrow \beta$
- Demostración:
  - Directo: Supongamos α y probamos β usando $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$.
  - Reciproco: Supongamos β y probamos α usando $\delta_1, \dots, \delta_n, [\beta]^k$.
  - Luego, hemos probado que $\alpha \leftrightarrow \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta}\ I{\leftrightarrow}^{(k)}$$

Figure 4: Figura 6

Negación ($\neg$)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$.
- Tesis: $\neg\alpha$
- Demostración:
  - Supongamos α y probamos una contradicción usando $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$.
  - Luego, hemos probado $\neg\alpha$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\bot}{\neg\alpha}\ I{\neg}^{(k)}$$

Figure 5: Figura 7

Reglas de eliminación

Conjunción ($\wedge$)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: α
- Demostración:
  - Probamos $\alpha \wedge \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
  - Luego, hemos probado α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
  - Simétricamente para β.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\ E{\wedge}_1$$

Figure 6: Figura 8

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\ E\wedge_2$$

Figure 7: Figura 9

Implica ($\rightarrow$)

- Hipótesis: $\delta_1, \ldots, \delta_n$.
- Tesis: β
- Demostración:
  - Probamos $\alpha \rightarrow \beta$ usando $\delta_1, \ldots, \delta_n$.
  - Probamos α usando $\delta_1, \ldots, \delta_n$.
  - Luego, probamos β usando $\delta_1, \ldots, \delta_n$.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \alpha}{\beta}\ E\rightarrow$$

Figure 8: Figura 10

Disyunción ($\vee$)

- Hipótesis: $\delta_1, \ldots, \delta_n, [\alpha]^k$ y $\delta_1, \ldots, \delta_n, [\beta]^k$.
- Tesis: δ
- Demostración:
  - Probamos $\alpha \vee \beta$ usando $\delta_1, \ldots, \delta_n$.
  - Caso A. Probamos δ usando $\delta_1, \ldots, \delta_n$ y α.
  - Caso B. Probamos δ usando $\delta_1, \ldots, \delta_n$ y β.
  - Luego, probamos δ usando $\delta_1, \ldots, \delta_n$

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \delta \qquad \delta}{\delta}\ E\vee^{(k)}$$

Figure 9: Figura 11

Si y sólo si ($\leftrightarrow$)

- Hipótesis: $\delta_1, \ldots, \delta_n$
- Tesis: β
- Demostración:

- Probamos $\alpha \leftrightarrow \beta$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Probamos α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Luego, probamos β usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Simétricamente para α.

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta \qquad \alpha}{\beta}\, E{\leftrightarrow_1} \qquad \frac{\alpha \leftrightarrow \beta \qquad \beta}{\alpha}\, E{\leftrightarrow_2}$$

Negación ($\neg$)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: Absurdo.
- Demostración:
  - Probamos $\neg\alpha$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
  - Probamos α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
  - Luego, hemos probado $\perp$ usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\neg\alpha \qquad \alpha}{\perp}\, E\neg$$

Figure 10: Figura 14

Absurdo ($\perp$)

- Hipótesis: $\delta_1, \dots, \delta_n$.
- Tesis: α.
- Demostración (por reducción al absurdo):
  - Supongamos $\neg\alpha$
  - Llegamos a una contradicción usando $\delta_1, \dots, \delta_n$ y $[\neg\alpha]^k$.
  - Luego, hemos probado α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.

$$\frac{\perp}{\alpha}\, RAA^{(k)}$$

Figure 11: Figura 15

- Demostración:
  - Llegamos a una contradicción usando $\delta_1, \dots, \delta_n$.
  - Luego, hemos probado α usando $\delta_1, \dots, \delta_n$

$$\frac{\perp}{\alpha}\ E\perp$$

Figure 12: Figura 16