Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 11

Consigna

Sean $\varphi,\ \psi$ dos fórmulas cualesquiera y x una variable tal que $x \notin FV(\psi)$.

1. Demuestre usando equivalencias las siguientes afirmaciones:
    1. $\models (\forall x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$
    2. $\models (\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$
    3. $\models (\psi \to \exists x\varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$
    4. $\models (\psi \to \forall x\varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi \to \varphi)$
2. Para cada uno de los casos anteriores encuentre φ y ψ con $x \in FV(\psi)$ de forma tal que las afirmaciones no se cumplen.

Resolución

Parte 1

Para esta parte nos bastará con probar que las fórmulas a ambos lados del $\leftrightarrow$ son equivalentes, pues cada una de ellas nos demuestra una equivalencia entra dichas fórmulas. También recordemos que para esta parte tenemos que $x \notin FV(\psi)$

Subparte 1

$$((\forall x)\varphi) \to \psi$$

eq (equivalencia de conectivos)

$$(\neg(\forall x)\varphi) \lor \psi$$

eq (leyes generalizadas de De Morgan)

$$((\exists x)\neg\varphi) \lor \psi$$

eq (propiedades de los cuantificadores y $x \notin FV(\psi)$)

$$(\exists x)\neg\varphi \lor (\exists x)\psi$$

eq (distributividad generalizada)

$$(\exists x)(\neg\varphi \lor \psi)$$

eq (equivalencia de conectivos)

$$(\exists x)(\varphi \to \psi)$$

Esto concluye la prueba.

Subparte 2

$$((\exists x)\varphi) \to \psi$$

eq (equivalencia de conectivos)

$$(\neg(\exists x)\varphi) \lor \psi$$

eq (leyes generalizadas de De Morgan)

$$((\forall x)\neg\varphi) \lor \psi$$

eq (propiedades de los cuantificadores y $x \notin FV(\psi)$)

$$((\forall x)\neg\varphi) \lor (\forall x)\psi$$

eq (distributividad generalizada)

$$(\forall x)(\neg\varphi \lor \psi)$$

eq (equivalencia de conectivos)

$$(\forall x)(\varphi \to \psi)$$

Esto concluye la prueba

Subparte 3

$$
\begin{aligned}
&\psi \to (\exists x)\varphi \\
&\text{ eq (equivalencia de conectivos)} \\
&\neg\psi \vee (\exists x)\varphi \\
&\text{ eq (propiedades de los cuantificadores y } x \notin FV(\neg\psi)) \\
&(\exists x)\neg\psi \vee (\exists x)\varphi \\
&\text{eq (distributividad generalizada)} \\
&(\exists x)(\neg\psi \vee \varphi) \\
&\text{ eq (equivalencia de conectivos)} \\
&(\exists x)(\psi \to \varphi)
\end{aligned}
$$

Esto concluye la prueba.

Subparte 4

$$
\begin{aligned}
&\psi \to (\forall x)\varphi \\
&\text{eq (equivalencia de conectivos)} \\
&\neg\psi \vee (\forall x)\varphi \\
&\text{eq (propiedades de los cuantificadores y } x \notin FV(\neg\psi)) \\
&(\forall x)\neg\psi \vee (\forall x)\varphi \\
&\text{eq (distributividad generalizada)} \\
&(\forall x)(\neg\psi \vee \varphi) \\
&\text{eq (equivalencia de conectivos)} \\
&(\forall x)(\psi \to \varphi)
\end{aligned}
$$

Parte 2

Subparte 1

Para esta parte, consideramos lo siguiente:

1. Tipo de similaridad: $\langle 1, 1; -; - \rangle$.
2. Estructura: $\mathcal{M} = \langle \{0,1\}, \{0,1\}, \{0\} \rangle$.
3. Llamamos P, Q a los predicados unarios mencionados.
4. Consideramos $\varphi = P(x)$ y $\psi = Q(x)$.

- $\models (\forall x \varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$

Sustituyendo con $\varphi = P(x)$ y $\psi = Q(x)$:

- $((\forall x)P(x)) \to Q(x)$
- $(\exists x)(P(x) \to Q(x))$

Ahora verifiquemos las interpretaciones de ambas fórmulas:

$$v^{\mathcal{M}}(((\forall x)P(x)) \to Q(x))$$
$$=_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})}$$
$$max\{1 - v^{\mathcal{M}}((\forall x)P(x)), v^{\mathcal{M}}(cl(Q(x)))\}$$
$$=_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})}$$
$$max\{1 - min\{v^{\mathcal{M}}(P(\overline{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}, v^{\mathcal{M}}((\forall x)Q(x))\}$$
$$=_{\text{(considerando el 0,1)}}$$
$$max\{1 - 1, min\{v^{\mathcal{M}}(Q(\overline{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}\}$$
$$=_{\text{(considerando el 1)}}$$
$$max\{0, 0\}$$
$$=_{\text{(aritmética)}}$$
$$0$$

Por otra parte:

$$v^{\mathcal{M}}((\exists x)(P(x) \to Q(x)))$$
$$=_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})}$$
$$max\{v^{\mathcal{M}}(P(\overline{a}) \to Q(\overline{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}$$
$$=_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})}$$
$$max\{max\{1 - v^{\mathcal{M}}(P(\overline{a})), v^{\mathcal{M}}(Q(\overline{a}))\} \mid a \in |\mathcal{M}|\}$$
$$=_{\text{(considerando el 0)}}$$
$$max\{max\{0, 1\}\}$$
$$=_{\text{(aritmética)}}$$
$$1$$

Entonces, encontramos un contraejemplo para demostrar que si $x \in FV(\psi)$, entonces la equivalencia no se cumple.

Subparte 2

Para esta parte, consideramos lo siguiente:

1. Tipo de similaridad: $\langle 1, 1; -; - \rangle$.
2. Estructura: $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, \{0\}, \{0\} \rangle$.
3. Llamamos P, Q a los predicados unarios mencionados.
4. Consideramos $\varphi = P(x)$ y $\psi = Q(x)$.

- $\models (\exists x \varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$

Sustituyendo con $\varphi = P(x)$ y $\psi = Q(x)$:

- $((\exists x)P(x)) \to Q(x)$
- $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$

Ahora verifiquemos las interpretaciones de ambas fórmulas:

$$
\begin{aligned}
&v^{\mathcal{M}}(((\exists x)P(x)) \to Q(x)) \\
&=_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
&max\{1 - v^{\mathcal{M}}((\exists x)P(x)), v^{\mathcal{M}}(Q(x))\} \\
&=_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
&max\{1 - max\{v^{\mathcal{M}}(P(\overline{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}, v^{\mathcal{M}}(cl(Q(x)))\} \\
&=_{\text{(considerando el 0)}} \\
&max\{1 - 1, v^{\mathcal{M}}((\forall x)Q(x))\} \\
&=_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
&max\{1 - 1, min\{v^{\mathcal{M}}(Q(\overline{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}\} \\
&=_{\text{(considerando el 1)}} \\
&max\{1 - 1, 0\} \\
&=_{\text{(aritmética)}} \\
&0
\end{aligned}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
&v^{\mathcal{M}}((\forall x)(P(x) \to Q(x))) \\
&=_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
&min\{v^{\mathcal{M}}(P(\overline{a}) \to Q(\overline{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
&=_{\text{(definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
&min\{max\{1 - v^{\mathcal{M}}(P(\overline{a})), v^{\mathcal{M}}(Q(\overline{a}))\} \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
&=_{\text{(considerando el 1)}} \\
&min\{max\{1 - 0, 0\}\} \\
&=_{\text{(aritmética)}} \\
&1
\end{aligned}
$$

Entonces, encontramos un contraejemplo para demostrar que si $x \in FV(\psi)$, entonces la equivalencia no se cumple.

Subparte 3

Para esta parte, consideramos lo siguiente:

1. Tipo de similaridad: $\langle 1, 1; -; - \rangle$.
2. Estructura: $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, \{0\}, \{0\} \rangle$.
3. Llamamos P, Q a los predicados unarios mencionados.
4. Consideramos $\varphi = P(x)$ y $\psi = Q(x)$.

- $\models (\psi \to \exists x\varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$

Sustituyendo con $\varphi = P(x)$ y $\psi = Q(x)$:

- $Q(x) \to (\exists x)P(x)$
- $(\exists x)(Q(x) \to P(x))$

Ahora verifiquemos las interpretaciones de ambas fórmulas:

$$
\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(Q(x) \to (\exists x)P(x)) \\
& =_{(\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
& min\{1 - v^{\mathcal{M}}(Q(x)), v^{\mathcal{M}}((\exists x)P(x))\} \\
& =_{(\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
& min\{1 - v^{\mathcal{M}}(cl(Q(x))), max\{v^{\mathcal{M}}(P(\overline{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\}\} \\
& =_{(\text{considerando el 0})} \\
& min\{1 - min\{v^{\mathcal{M}}(Q(\overline{a})) \mid a \in |\mathcal{M}\}, 1\} \\
& =_{(\text{considerando el 1})} \\
& min\{1 - 0, 1\} \\
& =_{(\text{aritmética})} \\
& 0
\end{aligned}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}((\exists x)(Q(x) \to P(x))) \\
& =_{(\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
& max\{v^{\mathcal{M}}(Q(\overline{a}) \to P(\overline{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& =_{(\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}})} \\
& max\{max\{1 - v^{\mathcal{M}}(Q(\overline{a})), v^{\mathcal{M}}(P(\overline{a}))\} \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
& =_{(\text{considerando el 0})} \\
& max\{max\{0, 1\}\} \\
& =_{(\text{aritmética})} \\
& 1
\end{aligned}
$$

Entonces, encontramos un contraejemplo para demostrar que si $x \in FV(\psi)$, entonces la equivalencia no se cumple.

Subparte 4

Se saltea porque es análoga a las anteriores.