Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -;\ 2,\ 2,\ 1;\ 1\rangle$.
Sea A una estructura de dicho tipo definida como sigue: $A = \langle \mathbb{N},\ +,\ *,\ S,\ 0\rangle$ donde $S(x) = x + 1$.

1. Defina los símbolos del alfabeto y dé dos términos distintos t_1 y t_2 del lenguaje tales que:

$$t_1^A = t_2^A = 3$$

2. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ hay un término t tal que $t^A = n$.

3. Sea t un término y n un natural. Demuestre que si $t^A = n$ entonces existe t' tal que $t'^A = n$ y tiene más ocurrencias de los símbolos f_1 y c_1.

4. Demuestre por el absurdo que para todo $n \in \mathbb{N}$ hay infinitos términos t tales que $t^A = n$.

Resolución

Parte 1

Considerando el alfabeto por defecto para el tipo definido:

- $f_1, f_2, f_3; c_1$

Encontremos dos términos diferentes tal que su interpretación sea 3:

- $t_1 = f_3(f_3(f_3(c_1)))$
- $t_2 = f_1(f_3(f_3(f_3(c_1))), c_1)$

Es bien fácil ver que ambos términos evaluados en la estructura A son 3.

Parte 2

Probemos la propiedad dada usando el PIP sobre $\mathbb{N}$. Definimos la propiedad como:

$P(n) : (\overline{\forall} n \in \mathbb{N})\overline{\exists} t \in TERM_A$ tal que $t^A = n$

Demostración

Paso base

$P(0) : \exists t \in TERM_A$ tal que $t^A = 0$

Esto es trivial pues $c_1^A = 0$, y sabemos que $c_1 \in TERM_A$

Paso inductivo

(H) $P(n) : \exists t_1 \in TERM_A$ tal que $(t_1)^A = n$
(I) $P(n+1) : \exists t_2 \in TERM_A$ tal que $(t_2)^A = n+1$

Evaluemos la tesis para ver que podemos decir sobre ella:

$$
\begin{gathered}
n+1 \\
=_{\text{(por hipótesis inductiva: } (t_1)^A = n)} \\
(t_1)^A + 1 \\
=_{\text{(por interpretación de } f_3)} \\
f_3((t_1)^A) \\
=_{\text{(por interpretación de términos cerrados)}} \\
f_3(t_1)^A
\end{gathered}
$$

Por lo que encontramos $t_2 \in TERM_A$ tal que se cumple que:

$$f_3(t_1)^A = n+1$$

Lo que prueba la tesis, y por lo tanto la propiedad para todos los naturales. ■

Parte 3

Para probar esta parte, tomaremos un $t \in TERM_A$ cualquiera, que cumpla con $t^A = n$.

Veamos que:

$$
\begin{gathered}
t^A = n \\
\iff \text{(aritmética)} \\
t^A + 0 = n \\
\iff \text{(interpretación de } f_1, c_2) \\
f_1(t, c_1)^A = n
\end{gathered}
$$

Por lo que encontramos $t' = f_1(t, c_1)$ que cumple con lo que buscabamos, es decir que $t'^A = n$.

También se observa trivialmente que t' tiene más ocurrencias de f_1 y c_1 que t, esto porque tiene las mismas que tiene t (pues lo incluye) y a eso le suma una ocurrencia de ambas f_1 y c_1

Para finalizar, podemos concluir que esto se cumple para cualquier t, porque hicimos el razonamiento para un t cualquiera.

Parte 4

Supongamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que solo hay $m \in \mathbb{N}$ términos $t \in \{t_1, \dots, t_m\}$ que cumplen que $t^A = n$.

Consideremos $t' \in \{t_1, \dots, t_m\}$ como el término con la máxima cantidad de ocurrencias de f_1, esto es posible pues los términos son finitos.

De la forma en la que elegimos t', sabemos que $t'^A = n$, por lo que podemos aplicar la propidad que probamos en la parte anterior (parte 3). Con esto obtenemos a quién llamamos $t'' \in TERM_A$, veamos lo que podemos decir sobre este término:

1. Cómo $t''^A = n$ por la propiedad de la parte 3, podemos decir que $t'' \in \{t_1, \dots, t_m\}$.
2. También por la propiedad de la parte 3, t'' tiene más ocurrencias de f_1 que t'.

Pero estas dos observaciones son contradictorias, pues t' era el elemento con mayor cantidad de ocurrencias del conjunto $\{t_1, \dots, t_m\}$. ABSURDO!

Por lo tanto, queda probado que para todo $n \in \mathbb{N}$ hay infinitos términos t tales que $t^A = n$.
$\blacksquare$