Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Sean φ, ψ fórmulas de FORM. Construya derivaciones que demuestren:

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \vdash (\forall x\ \varphi \to \forall x\ \psi)$

2. $\forall x\ \varphi \vdash \neg\forall x(\neg\varphi)$

3. $\forall x\ \varphi \vdash \forall z\ \varphi[z/x]$ (donde z no ocurre en φ)

4. $\forall x \forall y\ \varphi \vdash \forall y \forall x\ \varphi$

5. $\forall x \forall y\ \varphi \vdash \forall x\ \varphi[x/y]$, con $x \notin BV(\varphi)$

6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \exists x\ \varphi \wedge \exists x\ \psi$

7. $\exists x\ \varphi,\ \forall x(\varphi \to \psi) \vdash \exists x\ \psi$

Resolución

Parte 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(\neg\varphi)]^1}{\neg\varphi}\,E\forall(*_1) \qquad \dfrac{\forall x\varphi}{\varphi}\,E\forall(*_2)}{\bot}\,E\neg}{\neg\forall x(\neg\varphi)}\,I\neg^{(1)}$$

Figure 1: Figura 1

Donde:

1. $(*_1)$ es correcto pues x está libre para x en $\neg\varphi$

2. $(*_2)$ es correcto pues x está libre para x en φ

Parte 3

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\varphi}{\varphi[z/x]}\,E\forall(*_2)}{\forall z\varphi[z/x]}\,I\forall(*_1)$$

Figure 2: Figura 2

Donde:

1. $(*_1)$ es correcto pues $z \notin FV(\forall x\varphi)$ que es la hipótesis abierta en este momento.
2. $(*_2)$ es correcto pues z está libre para x en φ (pues por hipótesis z no ocurre en φ)

Parte 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\forall y\varphi}{\forall y\varphi}\,E\forall(*_3)}{\varphi[x/y]}\,E\forall(*_2)}{\forall x\varphi[x/y]}\,I\forall(*_1)$$

Figure 3: Figura 3

Donde:

1. $(*_1)$ es correcto pues $x \notin FV(\forall x\forall y\varphi)$ que es la hipótesis abierta en este momento.
2. $(*_2)$ es correcto pues x está libre para y en φ por la hipótesis de que $x \notin BV(\varphi)$ que significa que no aparece $(\forall x)$ en φ
3. $(*_3)$ es correcto pues x está libre para x en $\forall y\varphi$

Parte 6

Donde:

1. $(*_1)$ es correcto pues x está libre para x en φ
2. $(*_2)$ es correcto pues x está libre para x en ψ
3. $(*_3)$ es correcto pues x está libre para x en $(\varphi \wedge \psi)$
4. $(*_4)$ es correcto pues x está libre para x en $(\varphi \wedge \psi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\varphi \wedge \psi)}{\varphi \wedge \psi}\, E\forall(*_3)}{\varphi}\, E\wedge_1}{\exists x\varphi}\, I\exists(*_1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\varphi \wedge \psi)}{\varphi \wedge \psi}\, E\forall(*_4)}{\psi}\, E\wedge_2}{\exists x\psi}\, I\exists(*_2)}{\exists x\varphi \wedge \exists x\psi}\, I\wedge$$

Figure 4: Figura 4