

Lógica

Mauro Polenta Mora

CLASE 16 - 03/07/2025

Semántica de la lógica de predicados

Nomenclatura

1. \mathcal{M} es modelo de α si $\mathcal{M} \models \alpha$
2. \mathcal{M} es modelo de Γ si $\mathcal{M} \models \Gamma$
3. α es verdadera si $\models \alpha$
4. α es consecuencia semántica de Γ si $\Gamma \models \alpha$
5. α es satisfecha por $a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|$ si $\mathcal{M} \models \alpha[a_1, \dots, a_k/z_1, \dots, z_k]$ con $FV(\alpha) = \{z_1, \dots, z_k\}, k > 0$
6. α es satisfactible en \mathcal{M} si existen $a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|$ que la satisfacen.
7. α es satisfactible si existe algún \mathcal{M} tal que α es satisfactible en \mathcal{M}

Lema 2.4.5: Propiedades de \models

La relación \models refleja el significado intuitivo de los conectivos y los cuantificadores en las sentencias.

Sean $\alpha, \beta \in SENT, \gamma \in FORM, FV(\gamma) \subseteq \{x\}$. Entonces,

- $\mathcal{M} \models (\alpha \wedge \beta)$ sii $\mathcal{M} \models \alpha$ y $\mathcal{M} \models \beta$
- $\mathcal{M} \models (\alpha \vee \beta)$ sii $\mathcal{M} \models \alpha$ o $\mathcal{M} \models \beta$
- $\mathcal{M} \models (\neg \alpha)$ sii $\mathcal{M} \not\models \alpha$
- $\mathcal{M} \models (\alpha \rightarrow \beta)$ sii (si $\mathcal{M} \models \alpha$ entonces $\mathcal{M} \models \beta$)
- $\mathcal{M} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)$ sii ($\mathcal{M} \models \alpha$ sii $\mathcal{M} \models \beta$)
- $\mathcal{M} \models ((\forall x)\gamma)$ sii para todo $a \in |\mathcal{M}|, \mathcal{M} \models \gamma[\bar{a}, x]$
- $\mathcal{M} \models ((\exists x)\gamma)$ sii existe $a \in |\mathcal{M}|$ tal que $\mathcal{M} \models \gamma[\bar{a}, x]$

Lema 2.4.5: Demostración

Conectivo \wedge

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models \alpha \wedge \beta \\ &\iff (\text{definición de } \models) \\ v^{\mathcal{M}}(\alpha \wedge \beta) &= 1 \\ &\iff (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\ \min\{v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\} &= 1 \\ &\iff (\text{aritmética}) \\ v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 1 \text{ y } v^{\mathcal{M}}(\beta) &= 1 \\ &\iff (\text{definición de } \models) \\ \mathcal{M} \models \alpha \text{ y } \mathcal{M} \models \beta\end{aligned}$$

Conectivo \neg

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models \neg \alpha \\ &\iff (\text{definición de } \models) \\ v^{\mathcal{M}}(\neg \alpha) &= 1 \\ &\iff (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\ v^{\mathcal{M}}(\alpha) &= 0 \\ &\iff (\text{definición de } \models) \\ \mathcal{M} \not\models \alpha\end{aligned}$$

Cuantificador \forall

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models (\forall x)\alpha \\ &\iff (\text{definición de } \models) \\ \min\{v^{\mathcal{M}}(\alpha[\bar{a}/x]) \mid a \in |\mathcal{M}|\} &= 1 \\ &\iff (\text{aritmética}) \\ \text{para todo } a \in |\mathcal{M}|, \mathcal{M} \models \alpha[\bar{a}/x]\end{aligned}$$

Cuantificador \rightarrow

Queremos probar que $\mathcal{M} \models (\alpha \rightarrow \beta)$ sii (si $\mathcal{M} \models \alpha$ entonces $\mathcal{M} \models \beta$), que es equivalente a decir que:

$$\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta \text{ sii } \mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta$$

Como tenemos un “sii”, tenemos que probar dos partes:

Directo

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& v^{\mathcal{M}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \\
& \iff (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0 \text{ o } v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1
\end{aligned}$$

Entonces a partir de acá separamos en dos casos:

CASO 1: $v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0 \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \not\models \alpha \\
& \iff (\text{definición de implicancia}) \\
& \mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta
\end{aligned}$$

CASO 2: $v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1$

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1 \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \models \beta \\
& \iff (\text{definición de implicancia}) \\
& \mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta$

Recíproco

Para esta parte también habría dos casos que considerar:

1. Cuando $\mathcal{M} \not\models \alpha$
2. Cuando $\mathcal{M} \models \alpha$

Pero observemos que el primero es trivial, pues si $\mathcal{M} \not\models \alpha$, entonces $v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0$ y por lo tanto: $v^{\mathcal{M}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$.

Consideremos el segundo entonces:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M} \models \alpha \\
& \iff (\text{por hipótesis}) \\
& \mathcal{M} \models \beta \\
& \iff (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1 \\
& \iff (\text{aritmética}) \\
& \max\{1 - v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\} = 1 \\
& \iff (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& v^{\mathcal{M}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta
\end{aligned}$$

Lema 2.4.5: Contrarrecíprocos

Sean $\alpha, \beta \in SENT$. Entonces,

- $\mathcal{M} \not\models (\alpha \wedge \beta)$ sii $\mathcal{M} \not\models \alpha$ o $\mathcal{M} \not\models \beta$
- $\mathcal{M} \not\models (\alpha \vee \beta)$ sii $\mathcal{M} \not\models \alpha$ y $\mathcal{M} \not\models \beta$
- $\mathcal{M} \not\models (\neg \alpha)$ sii $\mathcal{M} \models \alpha$
- $\mathcal{M} \not\models (\alpha \rightarrow \beta)$ sii $\mathcal{M} \models \alpha$ y $\mathcal{M} \not\models \beta$
- $\mathcal{M} \not\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$ sii ($\mathcal{M} \not\models \alpha$ sii $\mathcal{M} \models \beta$)
- $\mathcal{M} \not\models (\forall x)\alpha$ sii existe $a \in |\mathcal{M}|$ tal que $\mathcal{M} \not\models \alpha[\bar{a}/x]$
- $\mathcal{M} \not\models (\exists x)\alpha$ sii para todo $a \in |\mathcal{M}|$, $\mathcal{M} \not\models \alpha[\bar{a}/x]$

Equivalencia y generalización de las Leyes de De Morgan

Definición de eq

Dados $\alpha, \beta \in FORM$, decimos α eq β sii $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$

Teorema 2.5.1 (Leyes de De Morgan generalizadas)

- $\neg(\forall x)\alpha$ eq $(\exists x)\neg\alpha$
- $\neg(\exists x)\alpha$ eq $(\forall x)\neg\alpha$
- $(\forall x)\alpha$ eq $\neg(\exists x)\neg\alpha$
- $(\exists x)\alpha$ eq $\neg(\forall x)\neg\alpha$

Veamos algunas consideraciones previas:

- No hay ninguna suposición sobre las fórmulas involucradas, por lo que se asume que pueden tener variables libres: $FV(\alpha) = \{z_1, \dots, z_n\}$.
- Esto hace que se deban hacer las clausuras antes de hacer las demostraciones.
- Lo que hace que se deban manejar varias constantes en el proceso de demostración.

Demostración: $\neg(\forall x)\alpha \text{ eq } (\exists x)\neg\alpha$

$$\neg(\forall x)\alpha \text{ eq } (\exists x)\neg\alpha$$

\iff (definición de eq)

$$\models \neg(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha$$

\iff (definición de \models)

$$(\bar{\forall}\mathcal{M})\mathcal{M} \models \neg(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha$$

\iff (clausura y definición \models)

$$(\bar{\forall}\mathcal{M})\mathcal{M} \models (\forall z_1) \dots (\forall z_n)(\neg(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha)$$

\iff (aplicando 2.4.5 n veces)

$$(\bar{\forall}\mathcal{M})(\bar{\forall}a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models (\neg(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha)[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n/z_1, \dots, z_n]$$

Observemos que esto se vuelve muy extenso, muy rápido. En la siguiente clase veremos una forma de encarar esta demostración con una mejor estrategia.