Ejercicio 11

Consigna

Considere la siguiente función definida por recursión primitiva en $\mathbb{N}$:

$$f(0) = 0, \quad f(n+1) = f(n) + 2 \times (n+1)$$

Pruebe que $(\forall n \in \mathbb{N})\, f(n) = n \times (n+1)$.

Resolución

Recordatorio

Planteemos el ERP para $\mathbb{N}$, para contextualizar:

(H) Sea B un conjunto y:

1. $f_0 \in B$
2. $f_s : \mathbb{N} \times B \to B$

(T) Entonces existe una función única $F : \mathbb{N} \to B$ tal que:

1. $F(0) = f_0$
2. $F(n+1) = f_s(n, F(n))$

Ejercicio

Entonces en la función que nos dan:

- $f_0 = 0$
- $F(n) = f(n)$
- $f_s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que: $f_s(n, f(n)) = f(n) + 2 \times (n+1)$

Queremos probar que $(\forall n \in \mathbb{N})\, f(n) = n \times (n+1)$; para esto usaremos el PIP para $\mathbb{N}$ con la propiedad $P(n) : f(n) = n \times (n+1)$.

Observación: Es importante distinguir que tenemos dos fórmulas que funcionan totalmente distinto la una de la otra. Una de ellas es una fórmula cerrada, mientras que la otra es una fórmula por recursión.

PASO BASE $\quad P(0) : f(0) = 0 \times (0+1)$

$f(0) = 0$ usando la fórmula cerrada, pero también la recursión define que $f(0) = 0$, por lo que esto se cumple

PASO INDUCTIVO

(H) $P(n) : f(n) = n \times (n+1)$
(I) $P(n+1) : f(n+1) = (n+1) \times (n+2)$

Entonces asumimos que $f(n) = n \times (n+1)$, con esto podemos sustituir en la regla constructiva de la función definida por ERP:

$$f(n+1) = f(n) + 2 \times (n+1)$$

$$\Rightarrow f(n+1) = n \times (n+1) + 2 \times (n+1)$$
$$\Rightarrow f(n+1) = (n+1)(n+2)$$

Esto es exactamente lo que queríamos probar, lo que da por finalizado el ejercicio.