Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 9

Consigna

Sea el conjunto $\mathcal{T}(PROP)$ de los árboles etiquetados con elementos de $PROP$ y la función:

$$ARBOL : PROP \to \mathcal{T}(PROP)$$

que asocia cada proposición de $PROP$ con su árbol (vista en el teórico).

(a) Defina una función $CantAt : PROP \to \mathbb{N}$ tal que $CantAt(\varphi)$ sea la cantidad de átomos que ocurren en φ.

Por ejemplo, $CantAt((p_1 \wedge (\neg p_2))) = 2$.

(b) Defina la función $CantNodos : \mathcal{T}(PROP) \to \mathbb{N}$ tal que $CantNodos(ARBOL(\varphi))$ sea la cantidad de nodos del árbol de φ.

Por ejemplo, $CantNodos(ARBOL((p_1 \wedge (\neg p_2)))) = 4$.

(c) Considere la función sub del Ejercicio 5. Demuestre que $|sub(\varphi)| \leq CantNodos(ARBOL(\varphi))$.

Resolución (parte a)

Esta parte la podemos resolver usando el ERP en $PROP$. Veamos como hacerlo:

1. $CantAt(\varphi) = 1$ con $\varphi \in AT$
2. $CantAt((\alpha * \beta)) = CantAt(\alpha) + CantAt(\beta)$ con $\alpha, \beta \in PROP$
3. $CantAt((\neg\alpha)) = CantAt(\alpha)$ con $\alpha \in PROP$

Observación: En este caso comparado con el ejercicio anterior, ignoramos el paso de las funciones H y vamos directo a la definición de $CantAt$. Es muy claro ver como pasamos de definirlas explicitamente a definir $CantAt$ directamente

Resolución (parte b)

Para esta parte tendremos que usar el ERP en $\mathcal{T}(PROP)$. Definamos primero el esquema (ya que no lo hemos visto todavía) y luego apliquemoslo a la resolución del ejercicio.

ERP para $\mathcal{T}(PROP)$

Sea B un conjunto, y:

1. una función $H_{\mathcal{T}(AT)} : \mathcal{T}(AT) \to B$, y
2. para cada conectivo $* \in C_2$, una función $H_* : \mathcal{T}(PROP) \times B \to B$, y:
3. una función $H_\neg : \mathcal{T}(PROP) \times B \to B$

Entonces, existe una única función $F : \mathcal{T}(PROP) \to B$ tal que:

1. $F(\mathcal{T}(\varphi)) = H_{\mathcal{T}(AT)}(\mathcal{T}(\varphi))$ con $\varphi \in AT$
2. $F(\mathcal{T}(\alpha * \beta)) = H_*(\mathcal{T}(\alpha * \beta), F(\mathcal{T}(\alpha * \beta)))$ con $\alpha, \beta \in PROP$
3. $F(\mathcal{T}(\neg\alpha)) = H_\neg(\mathcal{T}(\neg\alpha), F(\mathcal{T}(\neg\alpha)))$ con $\alpha \in PROP$

Donde $\mathcal{T}(\varphi)$ es el árbol etiquetado de φ para cualquier $\varphi \in PROP$.

ATENCIÓN: El resto del ejercicio se basa en si esto está correcto o no. Entiendo que debería ser correcto, pero no lo tengo 100% confirmado.

Continuación del ejercicio

Con esto podemos definir $CantNodos$ de la siguiente forma:

1. $CantNodos(\mathcal{T}(\varphi)) = 1$ con $\varphi \in AT$
2. $CantNodos(\mathcal{T}(\alpha * \beta)) = 1 + CantNodos(\mathcal{T}(\alpha)) + CantNodos(\mathcal{T}(\beta))$ con $\alpha, \beta \in PROP$
3. $CantNodos(\mathcal{T}(\neg\alpha)) = 1 + CantNodos(\mathcal{T}(\alpha))$ con $\alpha \in PROP$

Resolución (parte c)

Queremos demostrar que:

$$|sub(\varphi)| \leq CantNodos(ARBOL(\varphi)) \quad \forall \varphi \in PROP$$

Para aclarar, observemos que $|sub(\varphi)|$ es el cardinal del conjunto de subfórmulas de φ.

Para demostrar esto, vamos a usar el PIP sobre $PROP$:

Definición de $sub : PROP \to 2^{PROP}$

Se hizo en la clase 5 de teórico:

1. $sub(\varphi) = \{\varphi\}$ con $\varphi \in AT$
2. $sub((\alpha * \beta)) = sub(\alpha) \cup sub(\beta) \cup \{(\alpha * \beta)\}$
3. $sub((\neg\alpha)) = sub(\alpha) \cup \{(\neg\alpha)\}$

PASO BASE

$P(\varphi) : sub(\varphi) \leq CantNodos(ARBOL(\varphi))$ con $\varphi \in AT$

Por la regla 1 de ambas las funciones que estamos usando tenemos que:

1. $|sub(\varphi)| = |\{\varphi\}| = 1$
2. $CantNodos(ARBOL(\varphi)) = 1$

Por lo que se cumple la propiedad.

PASO INDUCTIVO

(H) $P((\varphi)) : sub(\varphi) \leq CantNodos(ARBOL(\varphi))$ con $\varphi \in PROP$

PARTE 1

(T) $P((\varphi_1 * \varphi_2)) : sub(\varphi_1 * \varphi_2) \leq CantNodos(ARBOL(\varphi_1 * \varphi_2))$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in PROP$

Para demostrar esto, vamos a usar la definición de sub y $CantNodos$:

1. $|sub(\varphi_1 * \varphi_2)| = |sub(\varphi_1) \cup sub(\varphi_2) \cup \{(\varphi_1 * \varphi_2)\}| = |sub(\varphi_1)| + |sub(\varphi_2)| + |\{(\varphi_1 * \varphi_2)\}| = |sub(\varphi_1)| + |sub(\varphi_2)| + 1$
2. $CantNodos(ARBOL(\varphi_1 * \varphi_2)) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi_1)) + CantNodos(ARBOL(\varphi_2))$

Ahora comparemos ambos valores:

$$|sub(\varphi_1)| + |sub(\varphi_2)| + 1 \leq 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi_1)) + CantNodos(ARBOL(\varphi_2)) \iff |sub(\varphi_1)| + |$$

Pero por hipótesis tenemos que:

1. $|sub(\varphi_1)| \leq CantNodos(ARBOL(\varphi_1))$
2. $|sub(\varphi_2)| \leq CantNodos(ARBOL(\varphi_2))$

Entonces por estas observaciones, la propiedad se cumple

PARTE 2

(T) $P((\neg\varphi_1)) : sub(\neg\varphi_1) \leq CantNodos(ARBOL(\neg\varphi_1))$ con $\varphi_1 \in PROP$

Para demostrar esto, vamos a usar la definición de sub y $CantNodos$:

1. $|sub(\neg\varphi_1)| = |sub(\varphi_1) \cup \{(\neg\varphi_1)\}| = |sub(\varphi_1)| + 1$
2. $CantNodos(ARBOL(\neg\varphi_1)) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi_1))$

Ahora comparemos ambos valores:

$$|sub(\varphi_1)| + 1 \leq 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi_1)) \iff |sub(\varphi_1)| \leq CantNodos(ARBOL(\varphi_1))$$

Donde lo último se cumple por hipótesis. Esto prueba la propiedad para todo $\varphi \in PROP$