

Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Demuestre los siguientes teoremas del cálculo de predicados:

1. $\vdash \exists x \varphi \leftrightarrow \varphi$ (con $x \notin FV(\varphi)$)
2. $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x \varphi \wedge \forall x \psi)$
3. $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \forall x \psi)$, con $x \notin FV(\varphi)$
4. $\vdash \exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\exists x \varphi \wedge \psi)$, con $x \notin FV(\psi)$
5. $\vdash \forall x \varphi \leftrightarrow \neg \exists x(\neg \varphi)$
6. $\vdash \neg \exists x \varphi \leftrightarrow \forall x(\neg \varphi)$

Resolución

Parte 2

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x \varphi \wedge \forall x \psi]^1}{\forall x \varphi} E\wedge_1}{\varphi} E\forall(*_2) \quad \frac{\frac{[\forall x \varphi \wedge \forall x \psi]^1}{\forall x \psi} E\wedge_1}{\psi} E\forall(*_3) \quad \frac{\frac{[\forall x(\varphi \wedge \psi)]^1}{\varphi \wedge \psi} E\forall(*_6)}{\varphi} E\wedge_1 \quad \frac{\frac{[\forall x(\varphi \wedge \psi)]^1}{\varphi \wedge \psi} E\forall(*_7)}{\psi} E\wedge_1}{\frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\forall x(\varphi \wedge \psi)} I\forall(*_1) \quad \frac{\frac{\varphi}{\forall x \varphi} I\forall(*_4) \quad \frac{\psi}{\forall x \psi} I\forall(*_5)}{\forall x \varphi \wedge \forall x \psi} I\wedge} \frac{}{\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x \varphi \wedge \forall x \psi)} I\leftrightarrow^{(1)}$$

Figure 1: Figura 1

Donde:

1. $(*_1)$ es correcto pues $x \notin FV(\forall x \varphi \wedge \forall x \psi)$ que es la única hipótesis abierta en este momento.
2. $(*_2)$ es correcto pues x está libre para x en φ
3. $(*_3)$ es correcto pues x está libre para x en ψ

4. $(*_4)$ es correcto pues $x \notin FV(\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$ que es la única hipótesis abierta en este momento.
5. $(*_5)$ es correcto pues $x \notin FV(\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$ que es la única hipótesis abierta en este momento.
6. $(*_6)$ es correcto pues x está libre para x en $(\varphi \wedge \psi)$
7. $(*_7)$ es correcto pues x está libre para x en $(\varphi \wedge \psi)$

Parte 5

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg\exists x(\neg\varphi)]^1}{\frac{\perp}{\varphi} \text{ RAA}^{(2)}} \text{ E}\neg \quad \frac{\frac{[\neg\varphi]^2}{\exists x(\neg\varphi)} \text{ I}\exists(*_2)}{\perp} \text{ E}\neg \quad \frac{[\neg\varphi]^4}{\frac{[\forall x\varphi]^1}{\varphi} \text{ E}\forall(*_4)} \text{ E}\neg \\
\frac{\perp}{\forall x\varphi} \text{ IV}(*_1) \quad \frac{[\exists x(\neg\varphi)]^3}{\perp} \text{ E}\exists^{(4)}(*_3) \\
\frac{\perp}{\neg\exists x(\neg\varphi)} \text{ I}\neg^{(3)} \\
\hline
\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x(\neg\varphi)
\end{array}$$

Figure 2: Figura 2

Donde:

1. $(*_1)$ es correcto pues $x \notin FV(\neg\exists x(\neg\varphi))$ que es la única hipótesis abierta en este punto.
2. $(*_2)$ es correcto pues x está libre para x en $\neg\varphi$
3. $(*_3)$ es correcto pues $x \notin C(D) := FV(\perp)$ y también $x \notin FV(\forall x\varphi)$ que es la única hipótesis abierta en este punto.
4. $(*_4)$ es correcto pues x está libre para x en φ