

Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 2

Consigna

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -, 1, 2; 1 \rangle$ con símbolos función f_1 (unario), f_2 (binario) y símbolo de constante c_1 .

Sean A, B estructuras del mismo tipo definidas como sigue:

- $A = \langle \mathbb{N}, S, +, 0 \rangle$ donde $S(x) = x + 1$
- $B = \langle \mathbb{N}, D, *, 1 \rangle$ donde $D(x) = 2 * x$

Demuestre por inducción que para todo término cerrado t (sin constantes extendidas) se cumple que:

$$t^B = 2^{t^A}$$

Resolución

El primer paso del ejercicio es definir $TERM_C$ para poder aplicar el PIP y trabajar con lo que queremos probar de manera formal.

Definimos $TERM_C$ por: 1. $c_1 \in TERM_C$ 2. Si $t_1 \in TERM_C$ entonces $f_1(t_1) \in TERM_C$ 3. Si $t_1, t_2 \in TERM_C$ entonces $f_2(t_1, t_2) \in TERM_C$

La propiedad que queremos probar sobre $t \in TERM_C$ es la siguiente:

- $P(t) : (\forall t \in TERM_C) t^B = 2^{t^A}$

Demostración

Paso base

- $P(c_1) : c_1^B = 2^{(c_1)^A}$

Evaluemos:

$$\begin{aligned}
c_1^B &= 2^{(c_1)^A} \\
\iff & \text{(interpretación de } c_1 \text{ en } A, B) \\
1 &= 2^0 \\
\iff & \text{(aritmética)} \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Por lo que se cumple $P(c_1)$.

Paso inductivo

Parte 1

$$\begin{aligned}
\text{(H)} \quad & P(t_1) : (t_1)^B = 2^{(t_1)^A} \\
\text{(I)} \quad & P(f_1(t_1)) : f_1(t_1)^B = 2^{f_1(t_1)^A}
\end{aligned}$$

Evaluemos la tesis a ver que podemos decir de ella:

$$\begin{aligned}
f_1(t_1)^B &= 2^{f_1(t_1)^A} \\
\iff & \text{(interpretación de } f_1 \text{ en } B) \\
2 \cdot (t_1)^B &= 2^{f_1(t_1)^A} \\
\iff & \text{(interpretación de } f_1 \text{ en } A) \\
2 \cdot (t_1)^B &= 2^{(t_1)^A+1} \\
\iff & \text{(aritmética)} \\
2 \cdot (t_1)^B &= 2 \cdot 2^{(t_1)^A} \\
\iff & \text{(aritmética)} \\
(t_1)^B &= 2^{(t_1)^A}
\end{aligned}$$

Donde esto último es verdadero por hipótesis, por lo que esta parte queda probada.

Parte 2

$$\text{(H1)} \quad P(t_1) : (t_1)^B = 2^{(t_1)^A} \quad \text{(H2)} \quad P(t_2) : (t_2)^B = 2^{(t_2)^A} \quad \text{(T)} \quad P(f_2(t_1, t_2)) : f_2(t_1, t_2)^B = 2^{f_2(t_1, t_2)^A}$$

Evaluemos la tesis a ver que podemos decir de ella:

$$\begin{aligned}
& f_2(t_1, t_2)^B = 2^{f_2(t_1, t_2)^A} \\
& \iff (\text{interpretaci3n de } f_2 \text{ en } B) \\
& t_1^B \cdot t_2^B = 2^{f_2(t_1, t_2)^A} \\
& \iff (\text{interpretaci3n de } f_2 \text{ en } A) \\
& (t_1)^B \cdot (t_2)^B = 2^{(t_1)^A + (t_2)^A} \\
& \iff (\text{aritm3tica}) \\
& (t_1)^B \cdot (t_2)^B = 2^{(t_1)^A} \cdot 2^{(t_2)^A} \\
& \iff (\text{por H2: } (t_2)^B = 2^{(t_2)^A} \neq 0) \\
& (t_1)^B = 2^{(t_1)^A}
\end{aligned}$$

Donde esto 3ltimo se cumple por hip3tesis (H1), por lo que esta parte queda probada.
Esto concluye la demostraci3n. ■