

Ejercicio 17

Premisa

Llamamos **función de alto orden** a una función que recibe como parámetro o devuelve como resultado otra función. Para definir funciones de esta clase, uno de los parámetros se usa como una función en su definición. Por ejemplo:

$$f(g, x) = g(x) + 1$$

Sea g la función $Succ$ que devuelve el sucesor de un número, entonces:

$$f(Succ, 3) = Succ(3) + 1 = 5$$

Consigna

- (a) Defina la función $reemplazo : \Sigma^* \times (\Sigma \rightarrow \Sigma^*) \rightarrow \Sigma^*$. Esa función debe cumplir que, si $\Sigma = \{a, b\}$ y f es tal que $f(a) = aba$ y $f(b) = bba$, entonces $reemplazo(abab, f) = ababbaababba$
- (b) Encuentre una función f adecuada para probar que:

$$(\forall w \in \Sigma^*) duplicar(w) = reemplazo(w, f)$$

Resolución (parte a)

Observemos que la función debe ser el resultado de aplicar f a todos los elementos de la palabra pasada como parámetro. Veamos como definir inductivamente la función:

- $reemplazo : \Sigma^* \times (\Sigma \rightarrow \Sigma^*) \rightarrow \Sigma^*$
- $reemplazo(\varepsilon, f) = \varepsilon$
- $reemplazo(xw, f) = f(x)reemplazo(w, f)$

Resolución (parte b)

Queremos encontrar una función f para que se cumpla la propiedad:

$$P(w) : duplicar(w) = reemplazo(w, f)$$

Para todo $w \in \Sigma^*$.

Primero recordemos que $duplicar$ se define por (ejercicio 12):

Esta función duplica cada carácter de una palabra, uno a uno

1. $duplicar(\varepsilon) = \varepsilon$
2. $duplicar(xw) = xxduplicar(w)$

La función f que hace sentido usar es la que se define por: $f(x) = xx \quad \forall x \in \Sigma$. Ahora probemos usando el PIP para Σ^* que la propiedad P se cumple.

PASO BASE:

$$P(\varepsilon) : \text{duplicar}(\varepsilon) = \text{reemplazo}(\varepsilon, f)$$

Esto es verdadero, por ambas las reglas (i) de la definición de *duplicar* y *reemplazo* respectivamente.

PASO INDUCTIVO:

$$(H) \ P(w) : \text{duplicar}(w) = \text{reemplazo}(w, f)$$

$$(I) \ P(xw) : \text{duplicar}(xw) = \text{reemplazo}(xw, f)$$

Veamos que podemos decir sobre la tesis usando las reglas de las funciones:

$$\begin{aligned} \text{duplicar}(xw) &= \text{reemplazo}(xw, f) \\ &\iff (\text{reglas (ii) de } \text{reemplazo}, \text{duplicar}) \\ x\text{duplicar}(w) &= f(x)\text{reemplazo}(w, f) \\ &\iff (\text{definición de } f) \\ x\text{duplicar}(w) &= x\text{reemplazo}(w, f) \\ &\iff (\text{simplificar}) \\ \text{duplicar}(w) &= \text{reemplazo}(w, f) \end{aligned}$$

Pero lo último es cierto, por hipótesis inductiva. Entonces probamos la tesis.

Esto significa que $(\forall w \in \Sigma^*) P(w) : \text{duplicar}(w) = \text{reemplazo}(w, f)$ con la f que definimos.