Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 18

Consigna

- (a) Defina el conjunto $L_{\mathbb{N}}$ de las listas de naturales con el símbolo | como separador y [] como la lista vacía.
- (b) Defina la función $Reduce: (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \times L_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$. Esta función recibe una función binaria de naturales en naturales, un natural y una lista, devolviendo un natural que es la aplicación de la función sobre todos los elementos de la lista. El natural es el valor a devolver en el caso de la lista vacía y usualmente es el neutro de la operación. Ejemplos:
 - Reduce(·, 1, []) = 1
 Reduce(·, 1, 2|3|4|[]) = 2 · 3 · 4 · 1 = 24
- (c) Demuestre que Reduce(+,0,l) devuelve la suma de todos los naturales contenidos en la lista l o 0 si la lista es vacía.

Resolución (parte a)

Veamos como definir el conjunto $L_{\mathbb{N}}$ de forma inductiva:

- 1. $[] \in L_{\mathbb{N}}$
- 2. Si $l \in L_{\mathbb{N}}, n \in \mathbb{N}$ entonces $n | l \in L_{\mathbb{N}}$

Resolución (parte b)

Ahora tenemos que definir el ERP para $L_{\mathbb{N}}$. Necesitamos:

1. $F([]) = f_0$ 2. $F(n|l) = f_s(n, l, F(l))$

Entonces definimos $Reduce: (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \times L_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ como:

- $1. \ Reduce(f,m,[]) = m$
- 2. Reduce(f, m, n|l) = f(n, Reduce(f, m, l))

Quizás el resultado se sienta raro, para entenderlo mejor, mirar los ejemplos en la consigna del ejercicio.

Resolución (parte c)

Para resolver esta parte, usaremos el PIP sobre $L_{\mathbb{N}}$ con la propiedad:

P(l): Reduce(+,0,l) devuelve la suma de todos los elementos de l

PASO BASE:

P([]): Reduce(+, 0, []) devuelve la suma de todos los elementos de l

Esto es trivialmente cierto, l no tiene elementos por lo que la suma de ellos es 0

PASO INDUCTIVO:

- (H) P(l): Reduce(+, 0, l) devuelve la suma de todos los elementos de l
- (I) P(n|l) : Reduce(+, 0, n|l) devuelve la suma de todos los elementos de l

Veamos lo siguiente:

$$Reduce(+, 0, n|l)$$

= (regla (ii) de $Reduce$)
+ $(n, Reduce(+, 0, l))$

Sabemos por hipótesis que Reduce(+,0,l) es la suma de todos los elementos de l, también sabemos que n|l es una lista que contiene todos los elementos de l y además a n. Entonces, la suma de todos sus elementos será la suma de todos los elementos de l más n.

Eso es lo que obtuvimos cuando desarrollamos Reduce(+, 0, n|l), por lo que probamos:

 $(\forall l \in L_{\mathbb{N}})$ P(l) : Reduce(+, 0, l) devuelve la suma de todos los elementos de l.