Ejercicio 6

Consigna

Una relación binaria entre dos conjuntos A y B puede entenderse como un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. En particular, la relación subfórmula la podemos definir como un conjunto de pares de fórmulas:

- $SUBF \subseteq PROP \times PROP$
- $SUBF = \{\langle \varphi, \psi \rangle : \varphi \text{ es subfórmula de } \psi\}$

(a) Escribir una definición inductiva del conjunto $SUBF$.

(b) Formular el PIP correspondiente a la definición anterior.

(c) Demostrar por inducción en $SUBF$ la propiedad dada en el Ejercicio 4.

Resolución (parte a)

Veamos como definir inductivamente el conjunto $SUBF$.

1. $\langle \varphi, \varphi \rangle \in SUBF$ para todo $\varphi \in PROP$.
2. Si $\langle \varphi, \psi_1 \rangle \in SUBF$ entonces $\langle \varphi, (\psi_1 * \psi_2) \rangle, \langle \varphi, (\psi_2 * \psi_1) \rangle \in SUBF$ para todo $\psi_2 \in PROP$ y $* \in C_2$.
3. Si $\langle \varphi, \psi \rangle \in SUBF$, entonces $\langle \varphi, \neg\psi \rangle \in SUBF$

La construcción viene a partir de la definición original de subfórmula.

Resolución (parte b)

Formulemos el PIP para el conjunto $SUBF$.

Sea una propiedad P sobre $SUBF$. Si:

1. $P(\varphi, \varphi)$ para todo $\varphi \in PROP$
2. Si $P(\varphi, \psi_1)$ entonces $P(\varphi, (\psi_1 * \psi_2))$ y $P(\varphi, (\psi_2 * \psi_1))$ para todo $\psi_2 \in PROP$ y $* \in C_2$.
3. Si $P(\varphi, \psi)$ entonces $P(\varphi, \neg\psi)$

Entonces $P(\varphi, \psi)$ para todo $\langle \varphi, \psi \rangle \in SUBF$.

Resolución (parte c)

Vamos a demostrar por inducción en $SUBF$ la propiedad dada en el Ejercicio 4, es decir:

$$P(\psi) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s))$$

Pero esta propiedad está formulada sobre $PROP$, ahora formulémosla para $SUBF$:

$$P(\langle \varphi, \psi \rangle) : (\langle \varphi, \psi \rangle \in SUBF \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s))$$

Ahora si podemos probarla usando el PIP:

PASO BASE

$P(\langle\varphi,\varphi\rangle) : (\langle\varphi,\varphi\rangle \in SUBF \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{\varphi})(\varphi \in s))$

Esto es trivial, ya que obviamente φ está en su propia secuencia de formación.

PASO INDUCTIVO

(H) $P(\langle\varphi,\psi_1\rangle) : (\langle\varphi,\psi_1\rangle \in SUBF \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{\psi_1})(\varphi \in s))$

PARTE 1 (T1) $P(\langle\varphi,(\psi_1*\psi_2)\rangle) : (\langle\varphi,(\psi_1*\psi_2)\rangle \in SUBF \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{(\psi_1*\psi_2)})(\varphi \in s))$

(T2) $P(\langle\varphi,(\psi_2 * \psi_1)\rangle) : (\langle\varphi,(\psi_2 * \psi_1)\rangle \in SUBF \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{(\psi_2*\psi_1)})(\varphi \in s))$

Trabajemos sobre (T1), ya que (T2) es análoga. Utilizando la hipótesis (H) sabemos que:

- $\langle\varphi,\psi_1\rangle \in SUBF$ entonces (por regla 2 de la definición inductiva de $SUBF$) $\langle\varphi,(\psi_1 * \psi_2)\rangle \in SUBF$
- También sabemos que $(\forall s \in secFORM_{\psi_1})(\varphi \in s)$

Por lo tanto, φ está en todas las secuencias de formación de ψ_1, y como todas las secuencias de formación de $(\psi_1 * \psi_2)$ contienen a una secuencia de formación de ψ_1, φ está en todas las secuencias de formación de $(\psi_1 * \psi_2)$.

PARTE 2

(T) $P(\langle\varphi,\neg\psi\rangle) : (\langle\varphi,\neg\psi\rangle \in SUBF \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{(\neg\psi)})(\varphi \in s))$

Utilizando la hipótesis (H) sabemos que:

- $\langle\varphi,\psi\rangle \in SUBF$ entonces (por regla 3 de la definición inductiva de $SUBF$) $\langle\varphi,\neg\psi\rangle \in SUBF$
- También sabemos que $(\forall s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$

Por lo tanto, φ está en todas las secuencias de formación de ψ, y como todas las secuencias de formación de $(\neg\psi)$ contienen a una secuencia de formación de ψ, φ está en todas las secuencias de formación de $(\neg\psi)$.