

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 3

### Consigna

Considere el conjunto inductivo  $F$  definido mediante las siguientes reglas: 1.  $\langle 0, 1 \rangle \in F$   
2. Si  $\langle n, m \rangle \in F$ , entonces  $\langle m, n + m \rangle \in F$

Demostrar que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \langle Fibo(n), Fibo(n + 1) \rangle \in F$$

donde la función  $Fibo$  se define como:

$$Fibo : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad Fibo(0) = 0 \quad Fibo(1) = 1 \quad Fibo(n + 2) = Fibo(n) + Fibo(n + 1)$$

### Resolución

Observemos que la propiedad que queremos probar, tiene la forma de la tesis del PIP de  $\mathbb{N}$ , por lo que usaremos dicho principio para probar esta propiedad. Enunciemos la propiedad  $P$

$$P : (\forall n \in \mathbb{N}) \langle Fibo(n), Fibo(n + 1) \rangle \in F$$

#### CASO BASE

Sea  $n = 0$ . Entonces:

$$P(0) : \langle Fibo(0), Fibo(0 + 1) \rangle \in F \quad P(0) : \langle 0, 1 \rangle \in F$$

Acá usamos las reglas ya dadas de  $Fibo(0)$  y  $Fibo(1)$ , y que  $\langle 0, 1 \rangle$  es un elemento base de  $F$

#### PASO INDUCTIVO

Asumimos que  $P(k)$  se cumple, queremos probar que se cumple para  $P(k+1)$ . Enunciemos  $P(k + 1)$ :

$$P(k + 1) : \langle Fibo(k + 1), Fibo(k + 1 + 1) \rangle \in F \quad P(k + 1) : \langle Fibo(k + 1), Fibo(k + 2) \rangle \in F$$

Por la regla de construcción de  $F$ , sabemos que:

Si  $\langle n, m \rangle \in F$ , entonces  $\langle m, n + m \rangle \in F$

También sabemos que:

$$P(k) : \langle Fibo(k), Fibo(k + 1) \rangle \in F$$

Entonces, con la regla de construcción de  $F$ , podemos decir que:

$$\langle Fibo(k), Fibo(k + 1) \rangle \in F \Rightarrow \langle Fibo(k + 1), Fibo(k) + Fibo(k + 1) \rangle \in F$$

Pero con la regla de construcción de  $Fibo$  sabemos que:

$$Fibo(n + 2) = Fibo(n) + Fibo(n + 1)$$

Entonces concluimos que:

$$\langle Fibo(k + 1), Fibo(k) + Fibo(k + 1) \rangle \in F \Rightarrow P(k + 1) : \langle Fibo(k + 1), Fibo(k + 2) \rangle \in F$$

Con esto, queda demostrado el ejercicio