

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## CLASE 13 - 07/05/2025

### Sintáxis de la lógica de predicados

#### Definición (estructura)

Una estructura es una secuencia ordenada:

$$\mathcal{M} = \langle U, R_1, \dots, R_n, F_1, \dots, F_m, \{C_i \mid 1 \leq i \leq k\} \rangle$$

Tal que:

- $U$  es un conjunto no vacío (notación:  $U = |\mathcal{M}|$ )
- $R_1, \dots, R_n$  son relaciones sobre  $U$  ( $n \geq 0$ )
- $F_1, \dots, F_m$  son funciones en  $U$  ( $m \geq 0$ )
- $\{C_i \mid 1 \leq i \leq k\}$  son elementos distinguidos de  $U$

**Observación:** Todo esto corresponde a la idea intuitiva que teníamos en la clase anterior.

#### Ejemplos

- $\langle \mathbb{N}, Par, \leq, +, *, 0, 1 \rangle$  son los naturales.
- $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$  son los enteros.

#### Definición (tipo de similaridad)

Dada una estructura determinada, por ejemplo:

$$\langle U, R_1, \dots, R_n, F_1, \dots, F_m, \{C_i \mid 1 \leq i \leq k\} \rangle$$

Decimos que tiene la siguiente secuencia como tipo de similaridad:

$$\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$$

Donde:

- $R_i \subseteq U^{r_i}$  ( $1 \leq i \leq n$  y  $r_i \geq 0$ ), es decir  $r_1, \dots, r_n$  representan la “aridad” de las relaciones  $R_i$ .

- $F_j : U^{a_j} \rightarrow U$  ( $1 \leq j \leq n$  y  $a_j \geq 0$ ), es decir que  $a_1, \dots, a_m$  representan la cantidad de parámetros que recibe cada función  $F_i$ .
- $k$  es el número de constantes.

## Ejemplos

- $\langle \mathbb{N}, Par, \leq, +, *, 0, 1 \rangle$  tiene tipo  $\langle 1, 2; 2, 2; 2 \rangle$
- $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$  tiene tipo  $\langle -, 2, 1; 1 \rangle$

## Definición (alfabeto de primer orden)

El alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$  para un lenguaje de primer orden consta de los siguientes símbolos: - Símbolos de relación:  $P_1, \dots, P_n, ='$  - Símbolos de función:  $f_1, \dots, f_m$  - Símbolos de constantes  $c_i$  tal que  $1 \leq i \leq k$  - Variables:  $x_1, x_2, x_3, \dots$  - Conectivos:  $\rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \wedge, \vee, \perp$  - Cuantificadores:  $\forall, \exists$  - Auxiliares:  $(, )$

## Definición (términos)

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$ . El conjunto  $TERM_A$  de los términos del lenguaje de primer orden con alfabeto  $A$  se define inductivamente por: 1.  $x_i \in TERM_A$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) 2.  $c_i \in TERM_A$  ( $1 \leq i \leq k$ ) 3. Si  $t_1, \dots, t_{a_i} \in TERM_A$  entonces  $f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \in TERM_A$

## Definición (fórmulas)

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$ . El conjunto  $FORM_A$  de las fórmulas del lenguaje de primer orden con alfabeto  $A$  se define inductivamente por:

1.  $\perp \in FORM_A$
2. Si  $t_1, \dots, t_{r_i} \in TERM_A$ , entonces  $P_i(t_1, \dots, t_{r_i}) \in FORM_A$
3. Si  $t_1, t_2 \in TERM_A$ , entonces  $t_1 = t_2 \in FORM_A$
4. Si  $\alpha, \beta \in FORM_A$ , entonces  $(\alpha \square \beta) \in FORM_A$
5. Si  $\alpha \in FORM_A$ , entonces  $(\neg \alpha) \in FORM_A$
6. Si  $\alpha \in FORM_A$ , entonces  $((\forall x_i) \alpha), ((\exists x_i) \alpha) \in FORM_A$

## Ejemplos

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle 1, 2; 1, 2; 2 \rangle$ .

1. ¿ $f_2(c_1, x_4) \in FORM_A$ ? VERDADERO, pues  $f_2$  es una función que toma dos parámetros y la constante  $c_1$  existe.
2. ¿ $f_1(c_1, x_4) \in FORM_A$ ? FALSO, pues  $f_1$  solo toma un parámetro.
3. ¿ $((\forall x_1)P_2(f_1(x_1), c_1)) \rightarrow ((\exists x_2)P_1(x_2))$ ? VERDADERO, pues todas las funciones y predicados usados cumplen con las reglas marcadas por el tipo de similaridad.
4. ¿ $((\exists x_2)f_2(x_1, c_2)) \in FORM_A$ ? FALSO, pues  $f_2(x_1, c_2) \notin FORM_A$ , por lo que esto no respetaría la regla 6 de construcción.
5. ¿ $((\forall x_1)P_1(x_1, c_1)) \in FORM_A$ ? FALSO, pues  $P_1$  solo toma un parámetro.
6. ¿ $((\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)P_3(x_1, x_2, x_3)) \in FORM_A$ ? FALSO, pues  $P_3$  ni siquiera existe en este tipo de similaridad.

## Reglas de parentización

- Las reglas de precedencia de conectivos son las mismas que para *PROP*.
- Los conectivos de igual precedencia se asocian a la derecha (igual que *PROP*).
- Cuantificadores: el  $\forall$  y  $\exists$  tienen igual precedencia que el  $\neg$ .

**Atención:** No confundir las siguientes fórmulas.

- $(\forall x)(\alpha \rightarrow \beta)$  y  $(\forall x)\alpha \rightarrow \beta$
- $(\exists x)(\alpha \rightarrow \beta)$  y  $(\exists x)\alpha \rightarrow \beta$

## Conjuntos importantes

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$ .

### Definición ( $Var$ )

$Var$  es el conjunto de las variables de  $A$ :  $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

### Definición ( $Const_A$ )

$Const_A$  es el conjunto de los símbolos de constante de  $A$ :  $\{c_i \mid 1 \leq i \leq k\}$

### Definición (fórmulas atómicas $AT_A$ )

$AT_A$  es el conjunto de fórmulas de  $FORM_A$  que se obtienen con las cláusulas base:  
 $(\perp, P_j(t_1, \dots, t_{r_j}, t_i = 't_j))$

## PIP para $TERM_A$

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$ .

(H) Sea  $P$  una propiedad sobre  $TERM_A$ . Si se cumple:

1.  $P(x)$  para todo  $x \in Var$
2.  $P(c)$  para todo  $c \in Const_A$
3. Si  $P(t_1), \dots, P(t_{a_i})$ , entonces  $P(f_i(t_1, \dots, t_{a_i}))$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$

(T) Entonces se cumple  $(\forall t \in TERM_A)P(t)$

## PIP para $FORM_A$

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$ .

(H) Sea  $P$  una propiedad sobre  $TERM_A$ . Si se cumple:

1.  $P(\alpha)$  para todo  $\alpha \in AT_A$
2. Si  $P(\alpha)$  y  $P(\beta)$ , entonces  $P(\alpha \square \beta)$  donde  $\square \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$
3. Si  $P(\alpha)$  entonces  $P(\neg \alpha)$
4. Si  $P(\alpha)$  entonces  $P((\forall x)\alpha)$  y  $P((\exists x)\alpha)$  para todo  $x \in Var$

(T) Entonces se cumple  $(\forall \alpha \in FORM_A)P(\alpha)$

## ERP simplificado para $TERM_A$

Una función está bien definida para  $TERM_A$  cuando tenemos una definición inductiva libre y tenemos lo siguiente:

1.  $F : TERM_A \rightarrow B$
2.  $F(t) = H_b(t)$  si  $t \in Var \cup Const_A$
3.  $F(f_i(t_1, \dots, t_{a_i})) = H_i(t_1, F(t_1), \dots, t_{a_i}, F(t_{a_i}))$

## ERP simplificado para $FORM_A$

Una función está bien definida para  $FORM_A$  cuando tenemos una definición inductiva libre y tenemos lo siguiente:

1.  $F : FORM_A \rightarrow B$
2.  $F(\alpha) = H_{AT}(\alpha)$  si  $\alpha \in AT_A$
3.  $F(\alpha \Box \beta) = H_{\Box}(\alpha, F(\alpha), \beta, F(\beta))$
4.  $F(\neg \alpha) = H_{\neg}(\alpha, F(\alpha))$
5.  $F((\forall x)\alpha) = H_{\forall}(x, \alpha, F(\alpha))$
6.  $F((\exists x)\alpha) = H_{\exists}(x, \alpha, F(\alpha))$

### Observación

Notemos que es exactamente la misma idea que para Lógica Proposicional, los cambios en este caso son mínimos.

## Variables libres y variables ligadas

### Definición (alcance de cuantificadores)

- El alcance del cuantificador  $\forall x$  en la fórmula  $((\forall x)\alpha)$  es la fórmula  $\alpha$
- El alcance del cuantificador  $\exists x$  en la fórmula  $((\exists x)\alpha)$  es la fórmula  $\alpha$

Veamos un ejemplo:

$$(\forall x_1) \boxed{P_1(x_1)} \rightarrow (\forall x_2) \boxed{P_2(x_1, x_2)} \quad (\forall x_2)$$
$$\boxed{(\forall x_1) (P_1(x_1) \rightarrow P_2(x_1, x_2))}$$

Figure 1: Figura 1

O visto de otra manera, con árboles:

### Definición (ocurrencias libres y ligadas)

Una ocurrencia de una variable  $x$  en  $\alpha$  está ligada si se encuentra bajo alcance de un cuantificador  $(\forall x)$  o  $(\exists x)$  o si es la variable de un cuantificador  $(\forall x)$  o  $(\exists x)$ . Si una ocurrencia de una variable  $x$  no está ligada en  $\alpha$ , se dice que es una ocurrencia libre.



Figure 2: Figura 2

### Definición (variables libres y ligadas)

- Una variable  $x$  está ligada en  $\alpha$  si  $x$  tiene alguna ocurrencia ligada en  $\alpha$ .
- Una variable  $x$  está libre en  $\alpha$  si  $x$  tiene alguna ocurrencia libre en  $\alpha$

Por ejemplo:

Sea  $\alpha = (\forall x_1)P_1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)P_2(x_1, x_2)$

- $x_1$  tiene 2 ocurrencias ligadas en  $\alpha$ 
  - entonces  $x_1$  es ligada en  $\alpha$
- $x_1$  tiene 1 ocurrencia libre en  $\alpha$ 
  - entonces  $x_1$  es libre en  $\alpha$

**Observación:** - Una ocurrencia de variable en una fórmula está o bien libre o bien ligada (no ambas). - Una variable puede estar libre y ligada en una misma fórmula.

### Conjunto de variables libres de un término

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$

Definimos  $FV : TERM_A \rightarrow 2^{Var}$  recursivamente en  $TERM_A$ :

- $FV(x) = \{x\}$  si  $x \in Var$
- $FV(c_i) = \emptyset$
- $FV(f_i(t_{a_1}, \dots, t_{a_i})) = FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_{a_i})$

### Conjunto de variables libres de una fórmula

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$

Definimos  $FV : FORM_A \rightarrow 2^{Var}$  recursivamente en  $FORM_A$ :

- $FV(\perp) = \emptyset$

- $FV(P_i(t_{r_1}, \dots, t_{r_i})) = FV(t_{r_1}) \cup \dots \cup FV(t_{r_i})$
- $FV(t_1 = t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$
- $FV((\alpha \square \beta)) = FV(\alpha) \cup FV(\beta)$
- $FV(\neg \alpha) = FV(\alpha)$
- $FV((\forall x)\alpha) = FV(\alpha) - \{x\}$
- $FV((\exists x)\alpha) = FV(\alpha) - \{x\}$

## Fórmulas y términos cerrados

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$

- Un término  $t$  es cerrado si  $FV(t) = \emptyset$ .
- Una fórmula es cerrada si  $FV(\alpha) = \emptyset$ . También se dice en este caso que  $\alpha$  es una **sentencia**.
- Una fórmula  $\alpha$  es abierta si no tiene cuantificadores.

### Notación:

- $TERM_{CA} = \{t \in TERM_A \mid t \text{ es cerrado}\}$
- $SENT_A = \{\alpha \in FORM_A \mid \alpha \text{ es cerrada}\}$

## Sustitución

### Sustitución de términos en términos

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$

Sean  $s, t \in TERM_A$  y  $x_j \in Var$ . Definimos  $s[t/x_j]$  de la siguiente forma:

1.  $x_i[t/x_j] = \begin{cases} t & \text{si } i = j \\ x_i & \text{si } i \neq j \end{cases}$
2.  $c_i[t/x_j] = c_i$
3.  $f_i(t_1, \dots, t_{a_i})[t/x_j] = f_i(t_1[t/x_j], \dots, t_{a_i}[t/x_j])$

### Ejemplo

Sea  $L$  un lenguaje de tipo  $\langle 1, 2; 1, 2; 2 \rangle$ . -  $f_2(x_1, x_2)[x_1/x_2] = f_2(x_1, x_1) - f_1(f_2(c_1, x_3))[c_2/x_3] = f_1(f_2(c_1, c_2)) - f_1(f_2(c_1, x_3))[c_2/x_1] = f_1(f_2(c_1, x_3))$

### Sustitución de variables por términos en fórmulas

Sea  $A$  el alfabeto de tipo  $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$

Sean  $t \in TERM_A, x_j \in Var, \alpha \in FORM_A$ . Definimos  $\alpha[t/x_j]$  de la siguiente forma:

1.  $\perp[t/x_j] = \perp$
2.  $P_j(t_1, \dots, t_{r_j})[t/x_j] = P_j(t_1[t/x_j], \dots, t_{r_j}[t/x_j])$
3.  $(t_1 = t_2)[t/x_j] = (t_1[t/x_j] = t_2[t/x_j])$
4.  $(\alpha \square \beta)[t/x_j] = (\alpha[t/x_j] \square \beta[t/x_j])$
5.  $(\neg \alpha)[t/x_j] = (\neg(\alpha[t/x_j]))$

$$\begin{aligned}
6. ((\forall x_i)\alpha)[t/x_j] &= \begin{cases} ((\forall x_i)\alpha[t/x_j]) & \text{si } i \neq j \\ ((\forall x_i)\alpha) & \text{si } i = j \end{cases} \\
7. ((\exists x_i)\alpha)[t/x_j] &= \begin{cases} ((\exists x_i)\alpha[t/x_j]) & \text{si } i \neq j \\ ((\exists x_i)\alpha) & \text{si } i = j \end{cases}
\end{aligned}$$

### Ejemplo

Sea  $L$  un lenguaje de tipo  $\langle 1, 2; 2; 2 \rangle$

- $P_1(f_1(x_1, x_2))[x_1/x_2] = P_1(f_1(x_1, x_1))$
- $(P_1(x_1) \rightarrow P_2(c_1, x_3))[c_2/x_1] = (P_1(c_2) \rightarrow P_2(c_1, x_3))$
- $((\exists x_1)P_2(x_1, x_3))[c_3, x_3] = ((\exists x_1)P_2(x_1, c_3))$
- $((\exists x_1)P_2(x_1, x_3))[c_1, x_1] = ((\exists x_1)P_2(x_1, x_3))$
- $((\exists x_1)P_2(x_1, x_3))[x_1, x_3] = ((\exists x_1)P_2(x_1, x_1))$

En la última apareció una nueva ligadura, queremos evitar estas situaciones. Introduciremos algunos conceptos para poder evitar tener esta situación.

### Término libre para una variable en una fórmula

Sean  $t \in TERM, \psi \in FORM$ .  $t$  está libre para  $x$  en  $\psi$  si:

1.  $\psi$  es atómica.
2.  $\psi = (\psi_1 \Box \psi_2)$  y  $t$  está libre para  $x$  en  $\psi_1$  y en  $\psi_2$
3.  $\psi = (\neg \psi_1)$  y  $t$  está libre para  $x$  en  $\psi_1$
4.  $\psi = ((\forall y)\psi_1)$  (o  $\psi = ((\exists y)\psi_1)$ ) y se cumple alguna de las siguientes:
  1.  $x \notin FV(((\forall y)\psi_1))$  y respectivamente para  $((\exists y)\psi_1)$
  2.  $y \notin FV(t)$  y  $t$  está libre para  $x$  en  $\psi_1$

**Idea:** La idea de este concepto es que un término es libre para una variable en una fórmula cuando puedo aplicar una sustitución  $[t/x]$  sin generar una nueva ligadura.

### Ejemplos

1. Dada  $((\exists x_1)P_1(x_1, x_3))$ , podemos decir que el término  $x_2$  está libre para  $x_1$  en la fórmula pues:  $x_1 \notin FV((\exists x_1)P_1(x_1, x_3))$
2. Dada  $((\exists x_1)(\forall x_2)P_1(x_1, x_2))$ , podemos decir que cualquier término  $t$  está libre para  $x_2$  en la fórmula pues:  $x_2 \notin FV((\exists x_1)(\forall x_2)P_1(x_1, x_2))$
3. Dada  $((\forall x_3)P_2(x_2))$ , podemos decir que el término  $f(x_3, x_1)$  **NO** está libre para  $x_2$  en la fórmula pues:
  - $x_3 \in FV(f(x_3, x_1))$
  - $x_2 \in FV((\forall x_3)P_2(x_2))$
4. Dada  $((\forall x_4)(\exists x_3)(x_3 = x_2))$  podemos decir que el término  $f(x_3, x_1)$  **NO** está libre para  $x_2$  en la fórmula pues:
  - $x_3 \in FV(f(x_3, x_1))$
  - $x_2 \in FV((\forall x_4)(\exists x_3)(x_3 = x_2))$

## Sustitución simultánea en términos y fórmulas

- $t[t_1, \dots, t_n/x_1, \dots, x_n]$  es el resultado de sustituir las ocurrencias de cada  $x_i$  por  $t_i$  en  $t$  simultáneamente (con  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ ).
- $\alpha[t_1, \dots, t_n/x_1, \dots, x_n]$  se define análogamente.

## Símbolo de predicado $\$$

- Hasta ahora, las sustituciones que definimos nos permiten poner un término dado en lugar de una variable.
- Esto es diferente a como lo teníamos en *PROP*, donde podíamos poner una fórmula en lugar de una fórmula atómica.
- Para hacer esto agregamos una clausula más a la definición de *FORM*:
  - $\$ \in FORM$

Donde básicamente  $\$$  se comporta como una variable de fórmula.

## Fórmula libre para $\$$

Sean  $\alpha, \phi \in FORM$ .  $\phi$  está libre para  $\$$  en  $\alpha$  si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1.  $\alpha$  es atómica
2.  $\alpha = \alpha_1 \Box \alpha_2$  y  $\phi$  está libre para  $\$$  en  $\alpha_1$  y en  $\alpha_2$
3.  $\alpha = (\neg \alpha_1)$  y  $\phi$  está libre para  $\$$  en  $\alpha_1$
4.  $\alpha = ((\forall y)\alpha_1)$  (o  $\alpha = ((\exists y)\alpha_1)$ ) y se cumple alguna de las siguientes:
  1.  $\$$  no ocurre en  $\alpha_1$
  2.  $x \notin FV(\phi)$  y  $\phi$  está libre para  $\$$  en  $\alpha_1$

## Sustitución de fórmulas en fórmulas

Sean  $\alpha, \phi \in FORM$  tal que  $\phi$  esté libre para  $\$$  en  $\alpha$ . Definimos  $\alpha[\phi/\$]$  recursivamente en  $\alpha$ :

1. Si  $\alpha$  es atómica,  $\alpha[\phi/\$] \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \neq \$ \\ \$ & \text{si } \alpha = \$ \end{cases}$
2.  $(\alpha_1 \Box \alpha_2)[\phi/\$] = (\alpha_1[\phi/\$] \Box \alpha_2[\phi/\$])$
3.  $(\neg \alpha_1)[\phi/\$] = (\neg(\alpha_1[\phi/\$]))$
4.  $((\forall x)\alpha_1)[\phi/\$] = ((\forall x)(\alpha_1[\phi/\$]))$
5.  $((\exists x)\alpha_1)[\phi/\$] = ((\exists x)(\alpha_1[\phi/\$]))$