Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 8

Consigna

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1,\ 1,\ 2;\ 2,\ 1;\ 0\rangle$ con símbolos de predicado $P_1,\ P_2$ (unarios), P_3 (binario) y símbolos de función f_1 (binario), f_2 (unario).

Sea la estructura:

$M = \langle PROP,\ \{\varphi \mid\ \models \varphi\},\ \{\bot\},\ \{(\varphi_1,\ \varphi_2) \mid \varphi_1 \text{ eq } \varphi_2\},\ F_\wedge,\ F_\neg\rangle$

Donde $F_\wedge(\varphi_1,\ \varphi_2) = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ y $F_\neg(\varphi) = (\neg\varphi)$.

Indique si las siguientes frases son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

1. $M \models (\forall x)(P_1(f_2(x)) \to ((\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(x, y))))$
2. $M \models (P_1(x) \to P_2(x))$
3. $M \models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \to P_1(f_1(x, y)))$

Resolución

La idea para esta parte es usar las siguientes propiedades sobre la relación $\models$:

La relación $\models$ refleja el significado intuitivo de los conectivos y los cuantificadores en las sentencias.

Sean $\alpha, \beta \in SENT$, $\gamma \in FORM, FV(\gamma) \subseteq \{x\}$. Entonces,

- $\mathcal{M} \models (\alpha \wedge \beta)$ sii $\mathcal{M} \models \alpha$ y $\mathcal{M} \models \beta$
- $\mathcal{M} \models (\alpha \vee \beta)$ sii $\mathcal{M} \models \alpha$ o $\mathcal{M} \models \beta$
- $\mathcal{M} \models (\neg\alpha)$ sii $\mathcal{M} \not\models \alpha$
- $\mathcal{M} \models (\alpha \to \beta)$ sii (si $\mathcal{M} \models \alpha$ entonces $\mathcal{M} \models \beta$)
- $\mathcal{M} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)$ sii ($\mathcal{M} \models \alpha$ sii $\mathcal{M} \models \beta$)
- $\mathcal{M} \models ((\forall x)\gamma)$ sii para todo $a \in |\mathcal{M}|, \mathcal{M} \models \gamma[\overline{a}, x]$
- $\mathcal{M} \models ((\exists x)\gamma)$ sii existe $a \in |\mathcal{M}|$ tal que $\mathcal{M} \models \gamma[\overline{a}, x]$

Parte 1

$M \vDash (\forall x)(P_1(f_2(x)) \to ((\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(x,y))))$

$\iff$ (propiedades de $\vDash$)

$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)M \vDash P_1(f_2(\overline{\alpha})) \to ((\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(\overline{\alpha},y)))$

$\iff$ (propiedades de $\vDash$)

$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)($ Si $M \vDash P_1(f_2(\overline{\alpha}))$ entonces $M \vDash (\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(\overline{\alpha},y)))$

$\iff$ (propiedades de $\vDash$)

$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)($ Si $M \vDash P_1(f_2(\overline{\alpha}))$ entonces $(\overline{\exists}\beta \in PROP)M \vDash (P_2(\overline{\beta}) \wedge P_3(\overline{\alpha},\overline{\beta})))$

$\iff$ (propiedades de $\vDash$)

$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)($ Si $M \vDash P_1(f_2(\overline{\alpha}))$ entonces $(\overline{\exists}\beta \in PROP)(M \vDash P_2(\overline{\beta})$ y $M \vDash P_3(\overline{\alpha},\overline{\beta})))$

$\iff$ (propiedades de $\vDash$)

$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)($ Si $v^M(P_1(f_2(\overline{\alpha}))) = 1$ entonces $(\overline{\exists}\beta \in PROP)(v^M(P_2(\overline{\beta})) = 1$ y $v^M(P_3(\overline{\alpha},\overline{\beta})) = 1))$

$\iff$ (predicados de M)

$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)($ Si $f_2(\overline{\alpha})^M \in \{\varphi \mid \ \vDash \varphi\}$ entonces $(\overline{\exists}\beta \in PROP)(\overline{\beta}^M \in \{\bot\}$ y $\overline{\alpha}^M$ eq $\overline{\beta}^M))$

$\iff$ (funciones de M e interpretación de términos)

$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)($ Si $\neg\overline{\alpha}^M \in \{\varphi \mid \ \vDash \varphi\}$ entonces $(\overline{\exists}\beta \in PROP)(\beta = \bot$ y α eq $\bot))$

$\iff$ (desarrollo de conjuntos y simplificación)

$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)($ Si $\vDash \neg\alpha$ entonces α eq $\bot)$

$\iff$ (definición de eq)

$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)(\vDash \neg\alpha \implies \vDash \alpha \leftrightarrow \bot)$

$\iff$ (definición de $\vDash$ en $PROP$)

$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)((\overline{\forall}v \in Val)v(\neg\alpha) = 1 \implies (\overline{\forall}v \in Val)v(\alpha \leftrightarrow \bot) = 1)$

$\iff$ (definición de valuación)

$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)((\overline{\forall}v \in Val)v(\alpha) = 0 \implies (\overline{\forall}v \in Val)v(\alpha) = v(\bot))$

$\iff$ (definición de valuación: $v(\bot)$=0)

$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)((\overline{\forall}v \in Val)v(\alpha) = 0 \implies (\overline{\forall}v \in Val)v(\alpha) = 0)$

Como el antecedente y el consecuente son iguales, la propiedad es **VERDADERA**

Parte 2

$$M \vDash (P_1(x) \to P_2(x))$$
$\iff$ (clausura y propiedades de $\vDash$)
$$M \vDash (\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$$
$\iff$ (propiedades de $\vDash$)
$$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)(M \vDash P_1(\overline{\alpha}) \to P_2(\overline{\alpha}))$$
$\iff$ (propiedades de $\vDash$)
$$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)(\text{Si } M \vDash P_1(\overline{\alpha}) \text{ entonces } M \vDash P_2(\overline{\alpha}))$$
$\iff$ (definición de $\vDash$)
$$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)(\text{Si } v^M(P_1(\overline{\alpha})) = 1 \text{ entonces } v^M(P_2(\overline{\alpha})) = 1)$$
$\iff$ (predicados de M)
$$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)(\text{Si } \overline{\alpha}^M \in \{\alpha \mid \vDash \alpha\} \text{ entonces } \overline{\alpha}^M \in \{\bot\})$$
$\iff$ (interpretación de términos y desarrollo de conjuntos)
$$(\overline{\forall}\alpha \in PROP)(\text{Si } \vDash \alpha \text{ entonces } \alpha = \bot)$$

Tomemos por ejemplo $\alpha = \neg\bot$. Sabemos que $\vDash \neg\bot$, pero $\alpha \neq \bot$. Por lo tanto esta propiedad es **FALSA**.

Parte 3

$$M \vDash (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \to P_1(f_1(x, y)))$$
$\iff$ (propiedades de $\vDash$)
$$(\overline{\forall}\alpha, \beta \in PROP)M \vDash (P_1(\overline{\alpha}) \wedge P_1(\overline{\beta}) \to P_1(f_1(\overline{\alpha}, \overline{\beta})))$$
$\iff$ (propiedades de $\vDash$)
$$(\overline{\forall}\alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } M \vDash (P_1(\overline{\alpha}) \wedge P_1(\overline{\beta})) \text{ entonces } M \vDash P_1(f_1(\overline{\alpha}, \overline{\beta})))$$
$\iff$ (propiedades de $\vDash$)
$$(\overline{\forall}\alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } (M \vDash P_1(\overline{\alpha}) \text{ y } M \vDash P_1(\overline{\beta})) \text{ entonces } M \vDash P_1(f_1(\overline{\alpha}, \overline{\beta})))$$
$\iff$ (definición de $\vDash$)
$$(\overline{\forall}\alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } (v^M(P_1(\overline{\alpha})) = 1 \text{ y } v^M(P_1(\overline{\beta})) = 1) \text{ entonces } v^M(P_1(f_1(\overline{\alpha}, \overline{\beta}))) = 1)$$
$\iff$ (interpretación de predicados y funciones de M)
$$(\overline{\forall}\alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } (\overline{\alpha}^M \in \{\varphi \mid \vDash \varphi\} \text{ y } \overline{\beta}^M \in \{\varphi \mid \vDash \varphi\}) \text{ entonces } f_1(\overline{\alpha}, \overline{\beta})^M \in \{\varphi \mid \vDash \varphi\})$$
$\iff$ (desarrollo de conjuntos e interpretación de términos de M)
$$(\overline{\forall}\alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } (\vDash \alpha \text{ y } \vDash \beta) \text{ entonces } (\overline{\alpha}^M \wedge \overline{\beta}^M) \in \{\varphi \mid \vDash \varphi\})$$
$\iff$ (desarrollo de conjuntos e interpretación de términos de M)
$$(\overline{\forall}\alpha, \beta \in PROP)((\vDash \alpha \text{ y } \vDash \beta) \implies \vDash (\alpha \wedge \beta))$$
$\iff$ (definición de $\vDash$ en $PROP$)
$$(\overline{\forall}\alpha, \beta \in PROP)((\overline{\forall}v \in Val)v(\alpha) = 1 \text{ y } (\overline{\forall}v \in Val)v(\beta) = 1 \implies (\forall v \in Val)v(\alpha \wedge \beta) = 1)$$
$\iff$ (definición de valuación)
$$(\overline{\forall}\alpha, \beta \in PROP)((\overline{\forall}v \in Val)v(\alpha) = 1 \text{ y } (\overline{\forall}v \in Val)v(\beta) = 1 \implies (\forall v \in Val)\min\{v(\alpha), v(\beta)\} = 1)$$

Con esto vemos que la propiedad es **VERDADERA**, pues $\min\{v(\alpha), v(\beta)\} = \min\{1, 1\}$ por el antecedente. Y esto último obviamente es igual a 1.