Lógica

Mauro Polenta Mora

CLASE 6 - 13/03/2025

Semántica proposicional

Veamos la diferencia entre sintáxis, semántica e interpretación de un lenguaje:

- **Sintáxis**: Describe el conjunto de las frases válidas del lenguaje, típicamente como un conjunto inductivo
- **Semántica**: Es el significado de las frases válidas del lenguaje. Usualmente involucra diversos conjuntos y relaciones entre ellos
- **Interpretación**: Es un mecanismo que permite la asociación entre los elementos de la sintaxis (frases del lenguaje) y los elementos de la semántica

Veamos estos conceptos aplicado al lenguaje $PROP$:

- **Sintáxis**: Se define un conjunto inductivo, con ciertas fórmulas base (letras proposicionales) y ciertos operadores que construyen nuevas fórmulas
- **Semántica**: El conjunto $\{0, 1\} : (\{falso, verdadero\})$
- **Interpretación**: Función recursiva que para cada elemento de $PROP$ devuelve el valor 0 o 1 en base al valor de las letras proposicionales

Valuación (Intuición)

- La semántica de una palabra (fórmula) de PROP está dada por su valor de verdad (o sea, si es verdadera o falsa).
- Ese valor se obtiene aplicando una función a la fórmula que se desea evaluar
- Cada función representa un estado de la realidad (o mundo).
  - $v(p_0) = 0, v(p_1) = 1, ...$ es la representación de un mundo, y $v(p_0) = 1, ..., v(p_2) = 1$ es una representación de otro mundo distinto
  - En cada mundo cada proposición de $PROP$ puede representar una afirmación distinta de la realidad

Semántica de $PROP$ (Intuición)

La semántica de una palabra (fórmula) de PROP está dada por su valor de verdad (o sea, si es verdadera o falsa). Ese valor se obtiene aplicando una función a la fórmula que se desea evaluar. Cada función representa un estado del universo que se obtiene de la siguiente forma:

- En cada función, cada una de las letras proposicionales puede tomar un valor de verdad
- $\perp$ es falsa en cualquier función
- Los valores de verdad de las fórmulas atómicas se extienden a las fórmulas no atómicas de acuerdo al significado de los conectivos que la forman
- Las letras proposicionales tienen un valor de verdad conocido
- Se abstraen las proposiciones simples a letras
- La frase "Los perros comen salchichas con tuco" colapsa a, por ejemplo, p_0
- Y si esa frase es verdad en una situación v, diremos que $v(p_0) = 1$. Y si es falsa, diremos que $v(p_0) = 0$.
- $PROP$ está definido inductivamente
- La semántica está dada por los valores de verdad de las proposiciones, ya sean simples o complejas
- Se buscará la forma de construir esa semántica teniendo en cuenta que:
  - Las letras proposicionales pueden tomar cualquier valor
  - El valor de las letras proposicionales se "transmite", lo que permite calcular el valor de las proposiciones complejas en función del valor de las proposiciones más simples

Significado de algunos conectivos

- El dos es par o impar. **VERDAD**
- El dos es par o natural. **VERDAD**
- Si n es múltiplo de 6, entonces 4 es par. **VERDAD**
- Si 4 es impar, entonces 3 es par. **VERDAD**

Valuación (definición)

Una función $v : PROP \to \{0, 1\}$ es una valuación si satisface:

- $v(\perp) = 0$
- $v(\alpha \vee \beta) = min\{v(\alpha), v(\beta)\}$
- $v(\alpha \wedge \beta) = max\{v(\alpha), v(\beta)\}$
- $v(\alpha \to \beta) = max\{1 - v(\alpha), v(\beta)\}$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 \iff v(\alpha) = v(\beta)$
- $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$

Teorema

El valor de verdad de los átomos, determina una única valuación (el valor para cualquier fórmula)

(H) Sea $w : P \to \{0, 1\}$
(I) Existe una única valuación $v : PROP \to \{0, 1\}$ tal que $v(p) = w(p) \quad \forall p \in P$

Demostración

Consideremos una función $v : PROP \to \{0, 1\}$ definida por recursión primitiva tal que:

- $v(p) = w(p)$ para todo $p \in P$

- v es una valuación

Esta función existe, y es única porque fue definida por recursión primitiva. Además es valuación (por su propia definición). ■

Lema

El valor de verdad de una fórmula depende únicamente de los valores de verdad de sus letras proposicionales.

(H) Sea $\alpha \in PROP$. Sean v, v' dos valuaciones tales que $v(p) = v'(p)$ para todo $p \in P$ que ocurre en α

(I) Entonces $v(\alpha) = v'(\alpha)$

Tautología y consecuencia lógica (definición)

- **Tautología**: Decimos que $\alpha \in PROP$ es una tautología sii para cualquier valuación v se cumple que $v(\alpha) = 1$
- **Consecuencia lógica**: Dadas $\Gamma \subseteq PROP$ y $\alpha \in PROP$, decimos que α es consecuencia lógica de Γ sii para cualquier valuación v:
  - Si $(\forall \gamma \in \Gamma) v(\gamma) = 1$, entonces $v(\alpha) = 1$

Notación

- $\Gamma \vDash \alpha$ se lee "α es consecuencia lógica de Γ"
- $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vDash \alpha$ se lee $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \vDash \alpha$
- $\vDash \alpha$ se lee $\{\} \vDash \alpha$
- $\vDash \alpha$ se lee "α es tautología"

Aplicaciones

Investigar $\vDash (p_0 \to p_0)$

Sea v una valuación cualquiera, luego:

$$\begin{aligned}
&v(p_0 \to p_0) \\
&= _{\text{(definición de valuación)}} \\
&max\{1 - v(p_0), v(p_0)\} \\
&= _{(v(p_0) \in \{0,1\})} \\
&1
\end{aligned}$$

Como cualquier valuación v cumple $v(p_0 \to p_0) = 1$, concluimos que $\vDash (p_0 \to p_0)$

Investigar $\vDash (\varphi \to \varphi)$

Sea v una valuación cualquiera, luego:

$v(\varphi \to \varphi)$

$= \text{(definición de valuación)}$

$max\{1 - v(\varphi), v(\varphi)\}$

$= {\scriptstyle (v(\varphi) \in \{0,1\})}$

1

Como cualquier valuación v cumple $v(\varphi \to \varphi) = 1$, concluimos que $\models (\varphi \to \varphi)$