Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1, 2; 2; 0\rangle$ con dos símbolos de relación P_1 (unario) y P_2 (binario) y un símbolo de función f_1 (binario). Sea $FORM$ el conjunto de fórmulas de dicho lenguaje. Indique cuáles de las siguientes son fórmulas bien formadas de dicho lenguaje (o sea, cuáles cumplen la definición de $FORM$).

1. $((\forall x_1)((\exists x_2)P_2(x_1, x_2)))$
2. $(P_1(x_1) \to (((\exists x_2)f_1(x_1, x_2) =' x_2) \wedge ((\exists x_1)P_2(x_1, x_2))))$
3. $(((\exists x_1)((\exists x_2)f_1(x_1, x_2))) \to ((\forall x_1)P_1(f_1(x_1, x_1))))$
4. $((\forall x_1)((\forall x_2)(P_1(x_1) \vee ((\exists x_1)P_2(x_1, x_2)))))$
5. $(P_1((\forall x_1)P_2(x_1, x_2)) \leftrightarrow ((\forall x_1)P_1(P_2(x_1, x_2))))$
6. $((\exists x_1) \wedge ((\forall x_2)P_2(x_1, x_2)))$
7. $((\forall x_1)(P_1(x_1) \to (P_1(f_1(x_1, x_2)) \wedge ((\exists x_1)P_1(f_1(x_1, f_1(x_1, x_2)))))))$

Resolución

Para esto es conveniente recordar como definimos $FORM$:

Sea A el alfabeto de tipo $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k\rangle$. El conjunto $FORM_A$ de las fórmulas del lenguaje de primer orden con alfabeto A se define inductivamente por:

1. $\bot \in FORM_A$
2. Si $t_1, \dots, t_{r_i} \in TERM_A$, entonces $P_i(t_1, \dots, t_{r_i}) \in FORM_A$
3. Si $t_1, t_2 \in TERM_A$, entonces $t_1 =' t_2 \in FORM_A$
4. Si $\alpha, \beta \in FORM_A$, entonces $(\alpha \square \beta) \in FORM_A$
5. Si $\alpha \in FORM_A$, entonces $(\neg\alpha) \in FORM_A$
6. Si $\alpha \in FORM_A$, entonces $((\forall x_i)\alpha), ((\exists x_i)\alpha) \in FORM_A$

Vamos a pensar la definición basado en el tipo de alfabeto que tenemos.

Parte 1

$$(\forall x_1)((\exists x_2)P_2(x_1, x_2))$$

Veamos si efectivamente la proposición pertenece a $FORM_A$:

$$(\forall x_1)((\exists x_2)P_2(x_1,x_2)) \in FORM_A$$
$$\iff \text{(regla 6 de } FORM_A)$$
$$((\exists x_2)P_2(x_1,x_2)) \in FORM_A$$
$$\iff \text{(regla 6 de } FORM_A)$$
$$P_2(x_1,x_2) \in FORM_A$$
$$\iff \text{(regla 2 de } FORM_A)$$
$$x_1, x_2 \in TERM_A \quad \square$$

Donde lo último se cumple, por lo que efectivamente la proposición pertenece a $FORM_A$

Parte 2

$$(P_1(x_1) \to (((\exists x_2)f_1(x_1,x_2) =' x_2) \land ((\exists x_1)P_2(x_1,x_2))))$$

Veamos si efectivamente la proposición pertenece a $FORM_A$:

1. $P_1(x_1) \in FORM_A \quad \square$
2. $(((\exists x_2)f_1(x_1,x_2) =' x_2) \land ((\exists x_1)P_2(x_1,x_2))) \in FORM_A \quad \square$
   - $((\exists x_2)f_1(x_1,x_2) =' x_2) \in FORM_A \quad \square$
     - $f(x_1,x_2) =' x_2 \in FORM_A \quad \square$
       - $f(x_1,x_2) \in TERM_A \quad \square$
   - $((\exists x_1)P_2(x_1,x_2)) \in FORM_A \quad \square$
     - $P_2(x_1,x_2) \in FORM_A \quad \square$
       - $x_1, x_2 \in TERM_A \quad \square$

Como cada paso se cumple, efectivamente la proposición pertenece a $FORM_A$

Parte 3

$$(((\exists x_1)((\exists x_2)f_1(x_1,x_2))) \to ((\forall x_1)P_1(f_1(x_1,x_1))))$$

Veamos si efectivamente la proposición pertenece a $FORM_A$:

1. $((\exists x_1)((\exists x_2)f_1(x_1,x_2))) \in FORM_A$
   - $((\exists x_2)f_1(x_1,x_2)) \in FORM_A$
     - $f_1(x_1,x_2) \in FORM_A$ ¡ABSURDO!
2. $((\forall x_1)P_1(f_1(x_1,x_1))) \in FORM_A$

Observemos que $f_1(x_1,x_2) \in TERM_A$, por el razonamiento que hicimos debería estar en $FORM_A$, por lo cual la proposición **NO** pertenece a $FORM_A$.

Parte 4

$$((\forall x_1)((\forall x_2)(P_1(x_1) \lor ((\exists x_1)P_2(x_1,x_2)))))$$

Veamos si efectivamente la proposición pertenece a $FORM_A$:

1. $((\forall x_2)(P_1(x_1) \lor ((\exists x_1)P_2(x_1,x_2)))) \in FORM_A \quad \square$
   - $(P_1(x_1) \lor ((\exists x_1)P_2(x_1,x_2))) \in FORM_A \quad \square$

  - $P_1(x_1) \in FORM_A$ $\square$
  - $((\exists x_1)P_2(x_1, x_2)) \in FORM_A$ $\square$
    - $P_2(x_1, x_2) \in FORM_A$ $\square$
      - $x_1, x_2 \in TERM_A$ $\square$

Como cada paso se cumple, efectivamente la proposición pertenece a $FORM_A$.

Parte 5

$$(P_1((\forall x_1)P_2(x_1, x_2)) \leftrightarrow ((\forall x_1)P_1(P_2(x_1, x_2))))$$

Veamos si efectivamente la proposición pertenece a $FORM_A$:

1. $P_1((\forall x_1)P_2(x_1, x_2)) \in FORM_A$
   - $(\forall x_1)P_2(x_1, x_2) \in TERM_A$ ¡ABSURDO!
2. $((\forall x_1)P_1(P_2(x_1, x_2))) \in FORM_A$

Observemos que $(\forall x_1)P_2(x_1, x_2) \in FORM_A$, por el razonamiento que hicimos debería estar en $TERM_A$, por lo cual la proposición **NO** pertenece a $FORM_A$.

Parte 6

$$((\exists x_1) \wedge ((\forall x_2)P_2(x_1, x_2)))$$

Veamos si efectivamente la proposición pertenece a $FORM_A$:

1. $\wedge((\forall x_2)P_2(x_1, x_2)) \in FORM_A$ ¡ABSURDO!

Observemos que $\wedge((\forall x_2)P_2(x_1, x_2))$ está mal construido, ninguna regla permite construir proposiciones a partir de un conectivo binario con una sola proposición, por lo cual la proposición **NO** pertenece a $FORM_A$.

Parte 7

$$((\forall x_1)(P_1(x_1) \to (P_1(f_1(x_1, x_2)) \wedge ((\exists x_1)P_1(f_1(x_1, f_1(x_1, x_2)))))))$$

1. $P_1(x_1) \in FORM_A$ $\square$
   - $x_1 \in TERM_A$ $\square$
2. $(P_1(f_1(x_1, x_2)) \wedge ((\exists x_1)P_1(f_1(x_1, f_1(x_1, x_2))))) \in FORM_A$ $\square$
   - $P_1(f_1(x_1, x_2)) \in FORM_A$ $\square$
     - $f_1(x_1, x_2) \in TERM_A$ $\square$
   - $(\exists x_1)P_1(f_1(x_1, f_1(x_1, x_2))) \in FORM_A$ $\square$
     - $P_1(f_1(x_1, f_1(x_1, x_2))) \in FORM_A$ $\square$
       - $f_1(x_1, f_1(x_1, x_2)) \in TERM_A$ $\square$
         - $x_1 \in TERM_A$ $\square$
         - $f_1(x_1, x_2) \in TERM_A$ $\square$

Como cada paso se cumple, efectivamente la proposición pertenece a $FORM_A$