

## Ejercicio 6

### Consigna

Una relación binaria entre dos conjuntos  $A$  y  $B$  puede entenderse como un subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$ . En particular, la relación subfórmula la podemos definir como un conjunto de pares de fórmulas:

- $SUBF \subseteq PROP \times PROP$
- $SUBF = \{\langle \varphi, \psi \rangle : \varphi \text{ es subfórmula de } \psi\}$

- (a) Escribir una definición inductiva del conjunto  $SUBF$ .
- (b) Formular el PIP correspondiente a la definición anterior.
- (c) Demostrar por inducción en  $SUBF$  la propiedad dada en el Ejercicio 4.

### Resolución (parte a)

Veamos como definir inductivamente el conjunto  $SUBF$ .

1.  $\langle \varphi, \varphi \rangle \in SUBF$  para todo  $\varphi \in PROP$ .
2. Si  $\langle \varphi, \psi_1 \rangle \in SUBF$  entonces  $\langle \varphi, (\psi_1 * \psi_2) \rangle, \langle \varphi, (\psi_2 * \psi_1) \rangle \in SUBF$  para todo  $\psi_2 \in PROP$  y  $*$   $\in C_2$ .
3. Si  $\langle \varphi, \psi \rangle \in SUBF$ , entonces  $\langle \varphi, \neg\psi \rangle \in SUBF$

La construcción viene a partir de la definición original de subfórmula.

### Resolución (parte b)

Formulemos el PIP para el conjunto  $SUBF$ .

Sea una propiedad  $P$  sobre  $SUBF$ . Si:

1.  $P(\varphi, \varphi)$  para todo  $\varphi \in PROP$
2. Si  $P(\varphi, \psi_1)$  entonces  $P(\varphi, (\psi_1 * \psi_2))$  y  $P(\varphi, (\psi_2 * \psi_1))$  para todo  $\psi_2 \in PROP$  y  $*$   $\in C_2$ .
3. Si  $P(\varphi, \psi)$  entonces  $P(\varphi, \neg\psi)$

Entonces  $P(\varphi, \psi)$  para todo  $\langle \varphi, \psi \rangle \in SUBF$ .

### Resolución (parte c)

Vamos a demostrar por inducción en  $SUBF$  la propiedad dada en el Ejercicio 4, es decir:

$$P(\psi) : (\forall \varphi \in PROP)(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\forall s \in secFORM_\psi)(\varphi \in s))$$

Pero esta propiedad está formulada sobre  $PROP$ , ahora formulémosla para  $SUBF$ :

$$P(\langle \varphi, \psi \rangle) : (\langle \varphi, \psi \rangle \in SUBF \Rightarrow (\forall s \in secFORM_\psi)(\varphi \in s))$$

Ahora si podemos probarla usando el PIP:

## PASO BASE

$$P(\langle \varphi, \varphi \rangle) : (\langle \varphi, \varphi \rangle \in SUBF \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{\varphi})(\varphi \in s))$$

Esto es trivial, ya que obviamente  $\varphi$  está en su propia secuencia de formación.

## PASO INDUCTIVO

$$(H) P(\langle \varphi, \psi_1 \rangle) : (\langle \varphi, \psi_1 \rangle \in SUBF \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{\psi_1})(\varphi \in s))$$

$$\textbf{PARTE 1} \quad (T1) P(\langle \varphi, (\psi_1 * \psi_2) \rangle) : (\langle \varphi, (\psi_1 * \psi_2) \rangle \in SUBF \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{(\psi_1 * \psi_2)})(\varphi \in s))$$

$$(T2) P(\langle \varphi, (\psi_2 * \psi_1) \rangle) : (\langle \varphi, (\psi_2 * \psi_1) \rangle \in SUBF \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{(\psi_2 * \psi_1)})(\varphi \in s))$$

Trabajemos sobre (T1), ya que (T2) es análoga. Utilizando la hipótesis (H) sabemos que:

- $\langle \varphi, \psi_1 \rangle \in SUBF$  entonces (por regla 2 de la definición inductiva de  $SUBF$ )  $\langle \varphi, (\psi_1 * \psi_2) \rangle \in SUBF$
- También sabemos que  $(\forall s \in secFORM_{\psi_1})(\varphi \in s)$

Por lo tanto,  $\varphi$  está en todas las secuencias de formación de  $\psi_1$ , y como todas las secuencias de formación de  $(\psi_1 * \psi_2)$  contienen a una secuencia de formación de  $\psi_1$ ,  $\varphi$  está en todas las secuencias de formación de  $(\psi_1 * \psi_2)$ .

## PARTE 2

$$(T) P(\langle \varphi, \neg\psi \rangle) : (\langle \varphi, \neg\psi \rangle \in SUBF \Rightarrow (\forall s \in secFORM_{(\neg\psi)})(\varphi \in s))$$

Utilizando la hipótesis (H) sabemos que:

- $\langle \varphi, \psi \rangle \in SUBF$  entonces (por regla 3 de la definición inductiva de  $SUBF$ )  $\langle \varphi, \neg\psi \rangle \in SUBF$
- También sabemos que  $(\forall s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$

Por lo tanto,  $\varphi$  está en todas las secuencias de formación de  $\psi$ , y como todas las secuencias de formación de  $(\neg\psi)$  contienen a una secuencia de formación de  $\psi$ ,  $\varphi$  está en todas las secuencias de formación de  $(\neg\psi)$ .