

Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

Considere un conjunto A de números reales que incluya al 0. Considere un lenguaje de primer orden con un símbolo de relación binario M que denota la relación $<$ de los reales y otro símbolo binario $='$ que denota la igualdad. Considere un símbolo de función binario m que denota la multiplicación. Podemos usar el lenguaje de primer orden para expresar propiedades. Por ejemplo, la propiedad “ser neutro” puede expresarse como:

$$SER_NEUTRO(x_1) := (\forall x_2)m(x_2, x_1) = ' x_2$$

Usando solamente los símbolos dados, escriba fórmulas de primer orden que expresen las siguientes nociones.

1. x_1 es el máximo de A
2. x_1 es un sucesor inmediato de x_2
3. No hay elementos entre x_1 e x_2
4. La función cuadrado es creciente

Resolución

Primero definimos la estructura del lenguaje de la siguiente forma:

$$E = \langle A, M, =', m, 0 \rangle$$

Parte 1

$$ES_MAXIMO(x_1) := (\forall x_2)M(x_2, x_1) \vee (x_2 = ' x_1)$$

Parte 2

$$ES_SUCESOR(x_1, x_2) := M(x_2, x_1) \wedge \neg((\exists x_3)(M(x_2, x_3) \wedge M(x_3, x_1)))$$

Parte 3

$$SIN_INTERMEDIOS(x_1, x_2) := ES_SUCESOR(x_1, x_2) \vee ES_SUCESOR(x_2, x_1)$$

Parte 4

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(M(x_1, x_2) \rightarrow M(m(x_1, x_1), m(x_2, x_2)))$$