Ejercicio 10

Consigna

En este ejercicio usamos las funciones con y r del Ejercicio 8 y las funciones $CantNodos$ y $CantAt$ del Ejercicio 9.

(a) Defina inductivamente el lenguaje $PROP_1$ incluido en $PROP$ tal que $\perp$ no aparece en ninguna palabra de $PROP_1$.

(b) Demuestre que, si $\varphi \in PROP_1$, la cantidad de conectivos en φ más la cantidad de átomos de φ es igual a la cantidad de nodos de $ARBOL(\varphi)$.

(c) Dada $\varphi \in PROP_1$, demuestre que la cantidad de conectivos en φ más la cantidad de átomos de φ es menor o igual que $2^{r(\varphi)+1} - 1$.

Premisa

Veamos las definiciones de las funciones que vamos a usar (definidas en ejercicios anteriores):

$con : PROP \to \mathbb{N}$

1. $con(\alpha) = 0$ con $\alpha \in AT$
2. $con((\alpha * \beta)) = 1 + con(\alpha) + con(\beta)$ con $\alpha, \beta \in PROP$
3. $con((\neg\alpha)) = 1 + con(\alpha)$ con $\alpha \in PROP$

$CantAt : PROP \to \mathbb{N}$

1. $CantAt(\varphi) = 1$ con $\varphi \in AT$
2. $CantAt((\alpha * \beta)) = CantAt(\alpha) + CantAt(\beta)$ con $\alpha, \beta \in PROP$
3. $CantAt((\neg\alpha)) = CantAt(\alpha)$ con $\alpha \in PROP$

$CantNodos : \mathcal{T}(PROP) \to \mathbb{N}$

1. $CantNodos(\mathcal{T}(\varphi)) = 1$ con $\varphi \in AT$
2. $CantNodos(\mathcal{T}(\alpha * \beta)) = 1 + CantNodos(\mathcal{T}(\alpha)) + CantNodos(\mathcal{T}(\beta))$ con $\alpha, \beta \in PROP$
3. $CantNodos(\mathcal{T}(\neg\alpha)) = 1 + CantNodos(\mathcal{T}(\alpha))$ con $\alpha \in PROP$

$r : PROP \to \mathbb{N}$

1. $r(\alpha) = 0$ con $\alpha \in AT$
2. $r((\alpha * \beta)) = 1 + \max(r(\alpha), r(\beta))$ con $\alpha, \beta \in PROP$
3. $r((\neg\alpha)) = 1 + r(\alpha)$ con $\alpha \in PROP$

Resolución (parte a)

La definición inductiva del lenguaje $PROP$ es la siguiente:

1. Si $p \in P$, entonces $p \in PROP$
2. $\perp \in PROP$
3. Si $\alpha, \beta \in PROP$, entonces:
    - $(\alpha \wedge \beta) \in PROP$
    - $(\alpha \vee \beta) \in PROP$
    - $(\alpha \to \beta) \in PROP$

- $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in PROP$

4. Si $\alpha \in PROP$, entonces $(\neg\alpha) \in PROP$

Si no queremos incluir $\perp$ en nuestro lenguaje, fácilmente podemos ver que la definición que necesitamos es:

1. Si $p \in P$, entonces $p \in PROP_1$
2. Si $\alpha, \beta \in PROP_1$, entonces:
   - $(\alpha \wedge \beta) \in PROP_1$
   - $(\alpha \vee \beta) \in PROP_1$
   - $(\alpha \rightarrow \beta) \in PROP_1$
   - $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in PROP_1$
3. Si $\alpha \in PROP_1$, entonces $(\neg\alpha) \in PROP_1$

Se observa fácilmente que $PROP_1 \subseteq PROP$.

Resolución (parte b)

Queremos demostrar que si $\varphi \in PROP_1$, la cantidad de conectivos en φ más la cantidad de átomos de φ es igual a la cantidad de nodos de $ARBOL(\varphi)$.

Esta parte se resuelve usando el PIP para $PROP_1$, que es exactamente igual que el de $PROP$ pero sin comprobar la propiedad para $\perp$ en el paso base.

Queremos demostrar la propiedad P:

$$P(\varphi) : con(\varphi) + CantAt(\varphi) = CantNodos(ARBOL(\varphi))$$

PASO BASE

$P(p_i) : con(p_i) + CantAt(p_i) = CantNodos(ARBOL(p_i))$ con $p_i \in P$

Usando la regla 1 de las funciones que estamos usando tenemos que:

1. $con(p_i) = 0$
2. $CantAt(p_i) = 1$
3. $CantNodos(ARBOL(p_i)) = 1$

Por lo que podemos observar fácilemente que la propiedad se cumple para este paso.

PASO INDUCTIVO

(H) $P(\varphi) : con(\varphi) + CantAt(\varphi) = CantNodos(ARBOL(\varphi))$

PARTE 1 $P((\varphi * \psi)) : con((\varphi * \psi)) + CantAt((\varphi * \psi)) = CantNodos(ARBOL((\varphi * \psi)))$

Usando la regla 2 de todas las funciones, tenemos que:

1. $con((\varphi * \psi)) = 1 + con(\varphi) + con(\psi)$
2. $CantAt((\varphi * \psi)) = CantAt(\varphi) + CantAt(\psi)$
3. $CantNodos(ARBOL((\varphi * \psi))) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi)) + CantNodos(ARBOL(\psi))$

Entonces escribamos la tesis y veamos que podemos construir con lo que hallamos:

$$con((\varphi * \psi)) + CantAt((\varphi * \psi)) = CantNodos(ARBOL((\varphi * \psi))) \iff 1 + con(\varphi) + con(\psi) + CantAt($$

Pero usando la hipótesis, sabemos que:

1. $CantNodos(ARBOL((\varphi))) = con((\varphi)) + CantAt((\varphi))$
2. $CantNodos(ARBOL((\psi))) = con((\psi)) + CantAt((\psi))$

Entonces podemos sustituir esto en el último paso que teníamos:

$$1 + con(\varphi) + con(\psi) + CantAt(\varphi) + CantAt(\psi) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi)) + CantNodos(ARB$$

Por lo que queda probada la propiedad para este punto.

PARTE 2

(T) $P(\neg\varphi) : con(\neg\varphi) + CantAt(\neg\varphi) = CantNodos(ARBOL(\neg\varphi))$

Usando la regla 3 de todas las funciones, tenemos que:

1. $con(\neg\varphi) = 1 + con(\varphi)$
2. $CantAt(\neg\varphi) = CantAt(\varphi)$
3. $CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi))$

Entonces escribamos la tesis y veamos que podemos construir con lo que hallamos:

$$con(\neg\varphi) + CantAt(\neg\varphi) = CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) \iff 1 + con(\varphi) + CantAt(\varphi) = 1 + CantNod$$

Donde lo último se cumple por hipótesis, por lo que probamos que la propiedad se cumple para todo $\varphi \in PROP$

Resolución (parte c)

Queremos probar que dada $\varphi \in PROP_1$, la cantidad de conectivos en φ más la cantidad de átomos de φ es menor o igual que $2^{r(\varphi)+1} - 1$.

Podemos ayudarnos a la hora de probar esto, usando la propiedad anterior (la de la parte b), de la siguiente forma:

$$P'(\varphi) : con(\varphi) + CantAt(\varphi) = CantNodos(ARBOL(\varphi)) \leq 2^{r(\varphi)+1} - 1$$

Que se convierte en:

$$P(\varphi) : CantNodos(ARBOL(\varphi)) \leq 2^{r(\varphi)+1} - 1$$

Entonces, si probamos la propiedad P, usando la propiedad anterior tenemos probado el resultado que queremos.

Usaremos el PIP para $PROP_1$, como en la parte anterior.

PASO BASE

$P(p_i) : CantNodos(ARBOL(p_i)) \leq 2^{r(p_i)+1} - 1$

Usando la regla 1 de todas las funciones:

1. $CantNodos(ARBOL(p_i)) = 1$
2. $r(p_i) = 0$

Entonces cálculando el lado derecho obtenemos que:

$$1 \leq 2^1 - 1$$

Que es verdadero, por lo que el paso base se cumple

PASO INDUCTIVO

(T) $P(\varphi) : CantNodos(ARBOL(\varphi)) \leq 2^{r(\varphi)+1} - 1$

PARTE 1

(T) $P(\alpha * \beta) : CantNodos(ARBOL(\alpha * \beta)) \leq 2^{r(\alpha*\beta)+1} - 1$

Usando la regla 2 de todas las funciones:

1. $CantNodos(ARBOL(\alpha*\beta)) = 1 + CantNodos(ARBOL(\alpha)) + CantNodos(ARBOL(\beta))$
2. $r((\alpha * \beta)) = 1 + \max(r(\alpha), r(\beta))$

Ahora por hipótesis, podemos plantear:

$$1 + CantNodos(ARBOL(\alpha)) + CantNodos(ARBOL(\beta)) \leq 1 + 2^{r(\alpha)+1} - 1 + 2^{r(\beta)+1} - 1$$

Esto implica que:

$$CantNodos(ARBOL(\alpha * \beta)) \leq 2^{r(\alpha)+1} + 2^{r(\beta)+1} - 1$$

Pero observemos que:

- $2^{r(\alpha)+1} = 2 \cdot 2^{r(\alpha)} \leq 2 \cdot 2^{\max(r(\alpha),r(\beta))} = 2^{\max(r(\alpha),r(\beta))+1}$
- $2^{r(\beta)+1} = 2 \cdot 2^{r(\beta)} \leq 2 \cdot 2^{\max(r(\alpha),r(\beta))} = 2^{\max(r(\alpha),r(\beta))+1}$

Donde los razonamientos que seguimos son meramente algebraicos. Ahora sumando las dos desigualdades, obtenemos que:

$$2 \cdot 2^{r(\alpha)} + 2 \cdot 2^{r(\beta)} \leq 2 \times \left(2^{\max(r(\alpha),r(\beta))+1}\right) = 2^{\max(r(\alpha),r(\beta))+2}$$

Ahora, expandiendo la segunda parte de la tesis usando la regla 2 de r, tenemos que:

$$2^{r(\alpha*\beta)+1} - 1 = 2^{\max(r(\alpha),r(\beta))+2} - 1$$

Entonces por transitividad:

$$CantNodos(ARBOL(\alpha * \beta)) \leq 2^{r(\alpha)+1} + 2^{r(\beta)+1} - 1 \leq 2^{\max(r(\alpha),r(\beta))+2} - 1$$

Por lo tanto, queda probada la propiedad para esta parte.

PARTE 2

(T) $P(\neg\varphi) : CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) \leq 2^{r(\neg\varphi)+1} - 1$

Usando la regla 3 de todas las funciones:

1. $CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) = 1 + CantNodos(ARBOL(\varphi))$
2. $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$

Ahora por hipótesis, podemos plantear:

$$CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) \leq 1{+}2^{r(\varphi)+1}{-}1 \iff CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) \leq 2^{r(\varphi)+1}$$

Pero observemos que:

- $2^{r(\varphi)+1} \leq 2^{r(\neg\varphi)+1} = 2^{r(\varphi)+2}$

Entonces, por transitividad:

$$CantNodos(ARBOL(\neg\varphi)) \leq 2^{r(\varphi)+1} \leq 2^{r(\varphi)+2} = 2^{r(\neg\varphi)+1}$$

Por lo tanto, queda probada la propiedad para esta parte, y por lo tanto queda probada para todo $\varphi \in PROP_1$