CLASE 5 - 26/02/2025

Lógica proposicional

Más ejemplos de ERP en $PROP$

$RANGO : PROP \to \mathbb{N}$

1. $RANGO(\varphi) = 0$ con $\varphi \in AT$
2. $RANGO((\alpha * \beta)) = 1 + \max\{RANGO(\alpha), RANGO(\beta)\}$ con $\alpha, \beta \in PROP$
3. $RANGO((\neg\alpha)) = 1 + RANGO(\alpha)$ con $\alpha \in PROP$

Sustitución $\to$ _[_/_] $: PROP \times PROP \times P \to PROP$ Observemos que P es el conjunto donde solamente tenemos las proposiciones simples de $PROP$

1. $\bot[\varphi/p] = \bot$
2. $q[\varphi/p] = \begin{cases} \varphi & \text{si } q = p \\ q & \text{si } q \neq p \end{cases}$
3. $(\alpha * \beta)[\varphi/p] = (\alpha[\varphi/p] * \beta[\varphi/p])$

Observación: recordar que q es una proposición simple, es decir $q \in P$

Ejemplo Veamos como hallar la siguiente sustitución: $(p_1 \to ((p_2 \wedge p_1) \vee \bot))[(p_3 \wedge p_4)/p_1]$:

$$(p_1 \to ((p_2 \wedge p_1) \vee \bot))[(p_3 \wedge p_4)/p_1] \Rightarrow$$
$$((p_3 \wedge p_4) \to ((p_2 \wedge (p_3 \wedge p_4)) \vee \bot))$$

Entonces con el ejemplo, observamos que los parámetros en orden, cumplen el siguiente rol:

1. Es la proposición compuesta sobre la que vamos a trabajar.
2. Es la proposición compuesta (o simple) que vamos a sustituir.
3. Es la proposición simple que vamos a buscar en la primer proposición compuesta para reemplazar en su lugar.

Definición (secuencia de formación)

Una secuencia $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de palabras de Σ^*_{PROP} es una secuencia de formación para α_n si y solamente si para todo $k \leq n$ se cumple que:

- $\alpha_k \in AT$ o,
- $\alpha_k = (\alpha_i * \alpha_j)$ con $i, j < k$ y $* \in C_2$ o,
- $\alpha_k = \neg\alpha_j$ con $j < k$

Ejemplos

1. $(p_1 \wedge p_2)$ tiene una secuencia de formación $(p_1, p_2, (p_1 \wedge p_2))$
2. $(p_1 \wedge p_2)$ tiene una secuencia de formación $(p_1, p_2, p_3, \bot, (p_1 \wedge p_2))$
3. $(p_1, p_3, \bot, (p_1 \wedge p_2))$ no es una secuencia de formación de $(p_1 \wedge p_2)$, ya que no tiene a p_2 en su secuencia.

Concluyendo, podemos decir que una secuencia de formación es una secuencia de palabras que nos permite llegar a una proposición compuesta, tienen que estar TODAS las proposiciones simples que se usan en la proposición compuesta. También observamos con el ejemplo (1) y (2) que para una proposición compuesta dada, no hay una única secuencia de formación.

Definición (subfórmula)

Una fórmula $\varphi \in PROP$ es subfórmula de $\alpha \in PROP$ si y solamente si se cumple:

1. $\alpha = \varphi$ o,
2. $\alpha = (\varphi_1 * \varphi_2)$ con $* \in C_2; \varphi_1, \varphi_2 \in PROP$ y φ es subfórmula de φ_1 o,
3. $\alpha = (\varphi_1 * \varphi_2)$ con $* \in C_2; \varphi_1, \varphi_2 \in PROP$ y φ es subfórmula de φ_2 o,
4. $\alpha = (\neg\varphi_1)$ con $\varphi_1 \in PROP$ y φ es subfórmula de φ_1

Conjunto de subfórmulas Veamos una función de $PROP$ para calcular la cantidad de subfórmulas de una proposición:

$SUB : PROP \to 2^{PROP}$

1. $SUB(\varphi) = \{\varphi\}$ con $\varphi \in AT$
2. $SUB((\alpha * \beta)) = SUB(\alpha) \cup SUB(\beta) \cup \{(\alpha * \beta)\}$
3. $SUB((\neg\alpha)) = SUB(\alpha) \cup \{(\neg\alpha)\}$

Teorema

Veamos dos versiones de un teorema que relaciona la función que creamos para hallar todas las subfórmulas de una proposición, con la definición que dimos anteriormente de subfórmula.

1. $(\forall\alpha, \varphi \in PROP)$ φ es subfórmula de α si y solamente si $\varphi \in SUB(\alpha)$
2. $(\forall\alpha \in PROP)$ $SUB(\alpha) = \{\varphi \in PROP : \varphi$ es subfórmula de $\alpha\}$

Demostración La demostración de este teorema se hace por inducción sobre $PROP$, realmente lo que queremos probar es trivial, si observamos bien como construimos la función SUB. De todos modos está hecha en el libro y en la clase se ve.

Teorema

$PROP$ es el conjunto de todas las palabras de Σ^*_{PROP} que tienen una secuencia de formación.

Corolario Sea $\mathcal{P}$ una propiedad de Σ^*_{PROP}. Para demostrar que: para todo $\alpha \in PROP$ se cumple $\mathcal{P}(\alpha)$

Podemos hacer la prueba: - por inducción primitiva - por inducción sobre la longitud de la secuencia de formación de α

Convenciones sintácticas

Definimos $PROP$ utilizando paréntesis para todas las fórmulas no atómicas, esto por que es la única fórma de que el lenguaje sea libre. A la hora de trabajar con $PROP$ vamos a usar las siguientes convenciones, para no utilizar todos los paréntesis:

- Omitimos los paréntesis exteriores de una fórmula, y los que rodean a $\neg$.
- Los conectivos $\wedge$, $\vee$ tienen la misma precedencia.
- Los conectivos $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ tienen la misma precedencia.
- El conectivo $\neg$ tiene la mayor precedencia de todos los conectivos.
- Los conectivos $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ tienen la menor precedencia de todos los conectivos.
- Los conectivos de igual precedencia se asocian a la derecha.

Ejemplos

- $\neg\neg p_1$ abrevia a $(\neg(\neg p_1))$
- $p_1 \rightarrow p_2 \leftrightarrow p_3$ abrevia a $(p_1 \rightarrow (p_2 \leftrightarrow p_3))$
- $p_2 \wedge \perp \vee \neg(p_3 \rightarrow p_1)$ abrevia a $(p_2 \wedge (\perp \vee (\neg(p_3 \rightarrow p_1))))$

ATENCIÓN: Cuando tenemos igual precedencia, agrupamos POR LA DERECHA, esto es opuesto a lo tradicional, por lo tanto MUY importante de recordar.