Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 1

Consigna

Sean φ, ψ, σ proposiciones cualesquiera de $PROP$. Construya derivaciones que demuestren que las siguientes proposiciones son teoremas del cálculo proposicional:

(a) $\varphi \to \varphi$

(b) $\bot \to \varphi$

(c) $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

(d) $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$

(e) $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

(f) $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \to \neg\psi)$

(g) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow (\psi \to (\varphi \to \sigma))$

(h) $(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$

(i) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma))$

(j) $((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)) \to (\varphi \to (\psi \to \sigma))$

(k) $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$

Resolución

Parte (a)

Queremos probar $\vdash \varphi \to \varphi$, veamos la prueba:

Parte (b)

Queremos probar $\vdash \bot \to \varphi$, veamos la prueba:

$$\dfrac{\dfrac{[\alpha]^1}{\alpha \to \alpha}\, I}{\to^{(1)}}$$

Figure 1: Figura 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\bot]^1}{\varphi}\, E\bot}{\bot \to \varphi}\, I\to}{\to^{(1)}}$$

Figure 2: Figura 2

Parte (c)

Queremos probar $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$, veamos la prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \wedge \neg\alpha]^1}{\neg\alpha}\, E\wedge_2 \qquad \dfrac{[\alpha \wedge \neg\alpha]^1}{\alpha}\, E\wedge_1}{\bot}\, E\neg}{\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)}\, I\neg^{(1)}$$

Figure 3: Figura 3

Parte (d)

Queremos probar $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$, veamos la prueba:

Parte (e)

Queremos probar $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$, veamos la prueba:

Parte (f)

Queremos probar $\vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \to \neg\psi)$, veamos la prueba:

Parte (g)

Queremos probar $\vdash (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow (\psi \to (\varphi \to \sigma))$, veamos la prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1 \qquad [\psi]^2}{\varphi \wedge \psi}\, I\wedge}{\psi \to \varphi \wedge \psi}\, I\to^{(2)}}{\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)}\, I\to^{(1)}$$

Figure 4: Figura 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \wedge \neg\psi)]^1 \qquad \dfrac{[\varphi]^2 \qquad [\neg\psi]^3}{\varphi \wedge \neg\psi}\, I\wedge}{\bot}\, E\neg}{\psi}\, RAA^{(3)}}{\varphi \to \psi}\, I\to^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \neg\psi]^4}{\neg\psi}\, E\wedge_2 \qquad \dfrac{[\varphi \to \psi]^1 \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \neg\psi]^4}{\varphi}\, E\wedge_1}{\psi}\, E\to}{\bot}\, E\neg}{\neg(\varphi \wedge \neg\psi)}\, I\neg^{(4)}}{(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi)}\, I\leftrightarrow^{(1)}$$

Figure 5: Figura 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \to \neg\psi)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \wedge \psi)]^3 \qquad \dfrac{[\varphi]^4 \qquad [\psi]^5}{\varphi \wedge \psi}\, I\wedge}{\bot}\, E\neg}{\neg\psi}\, I\neg^{(5)}}{\varphi \to \neg\psi}\, I\to^{(4)}}{\bot}\, E\neg}{(\varphi \wedge \psi)}\, RAA^{(3)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \to \neg\psi]^2 \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi}\, E\wedge_1}{\neg\psi}\, E\to \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\psi}\, E\wedge_2}{\bot}\, E\neg}{\neg(\varphi \to \neg\psi)}\, I\neg^{(2)}}{(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \to \neg\psi)}\, I\leftrightarrow$$

Figure 6: Figura 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \to (\psi \to \sigma)]^1 \qquad [\varphi]^3}{\psi \to \sigma}\, E\to \qquad [\psi]^2}{\sigma}\, E\to}{\varphi \to \sigma}\, I\to^{(3)}}{\psi \to (\varphi \to \sigma)}\, I\to^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\psi \to (\varphi \to \sigma)]^1 \qquad [\psi]^5}{\varphi \to \sigma}\, E\to \qquad [\varphi]^4}{\sigma}\, E\to}{\psi \to \sigma}\, I\to^{(5)}}{\varphi \to (\psi \to \sigma)}\, I\to^{(4)}$$

$$(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\psi \to (\varphi \to \sigma))\, I\leftrightarrow^{(1)}$$

Figure 7: Figura 7

Parte (h)

Queremos probar $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$, veamos la prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi)]^1}{\varphi \to \neg\psi}\, E\wedge_2 \qquad [\varphi]^2}{\neg\psi}\, E\to \qquad \dfrac{\dfrac{[(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi)]^1}{[\varphi \to \psi]}\, E\wedge_1 \qquad [\varphi]^2}{\psi}\, E\to}{\dfrac{\bot}{\neg\varphi}\, I\neg^{(2)}}\, E\neg}{(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi}\, I\to^{(1)}$$

Figure 8: Figura 8

Parte (i)

Queremos probar $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma))$, veamos la prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \to (\psi \to \sigma)]^2 \qquad [\varphi]^3}{\psi \to \sigma}\, E\to \qquad \dfrac{[\varphi \to \psi]^1 \qquad [\varphi]^3}{\psi}\, E\to}{\sigma}\, E\to}{\varphi \to \sigma}\, I\to^{(3)}}{(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma)}\, I\to^{(2)}}{(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma)}\, I\to^{(1)}$$

Figure 9: Figura 9

Parte (j)

Queremos probar $\vdash ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)) \to (\varphi \to (\psi \to \sigma))$, veamos la prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)]^1 \qquad \dfrac{[\psi]^3}{\varphi \to \psi}\, I\to^{(4)}}{\varphi \to \sigma}\, E\to \qquad [\varphi]^2}{\sigma}\, E\to}{\psi \to \sigma}\, I\to^{(3)}}{\varphi \to (\psi \to \sigma)}\, I\to^{(2)}}{((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)) \to (\varphi \to (\psi \to \sigma))}\, I\to^{(1)}$$

Figure 10: Figura 10

Parte (k)

Queremos probar $\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$, veamos la prueba:

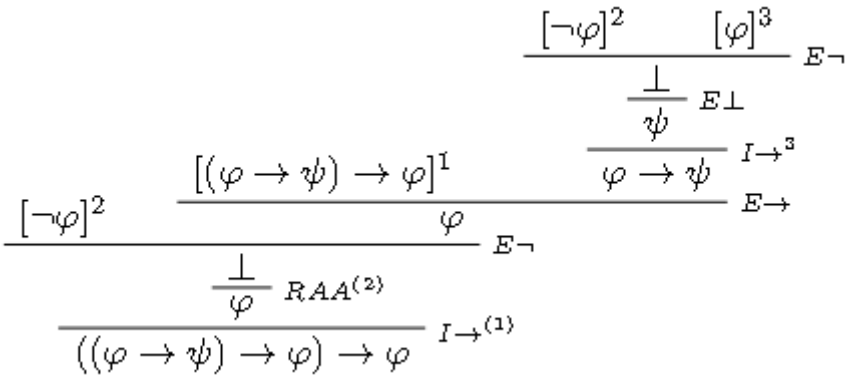

Figure 11: Figura 11