

## CLASE 2 - 10/02/2025

### Inducción

#### Ejemplo (metavariables)

Retomemos la definición inductiva de los números pares:

1.  $0 \in \mathbb{P}$
2. Si  $n \in \mathbb{P}$ , entonces  $n + 2 \in \mathbb{P}$

**Observación:** Llamamos metavariables ( $n$  en este caso) a los elementos que necesitan menos reglas para su construcción

#### Definición (alfabeto)

Sea  $\Sigma$  un conjunto conocido de cosas distinguibles entre sí (símbolos, letras, marcas).

Decimos que:

- Una palabra (o secuencia, o tira, o string) es una secuencia finita de elementos de  $\Sigma$
- Dadas dos palabras  $w_1$  y  $w_2$ , podemos formar una nueva palabra  $w_1 w_2$  que es la concatenación de ambas.
- Existe una palabra vacía  $\varepsilon$  que no tiene ninguna letra, y es el neutro de la concatenación.
- $\Sigma^*$  es el conjunto de todas las palabras que se pueden formar con los elementos de  $\Sigma$
- Cualquier subconjunto de  $\Sigma^*$  que cumpla con las reglas anteriores es un lenguaje.
- Hay lenguajes que se pueden definir inductivamente y tratar como conjuntos inductivos

**Ejemplo 1 (lenguaje)** Definimos el lenguaje  $L_1 \subset \{a, b\}^*$  con las siguientes reglas:

1.  $a \in L_1$
2. Si  $w \in L_1$ , entonces  $bwb \in L_1$

Veamos ejemplos de palabras que pertenecen a este lenguaje:

- $a \in L_1$
- $bab \in L_1$
- $bbabb \in L_1$
- $aba \notin L_1$
- $ababab \notin L_1$

Podemos decir que son todas las palabras con la misma cantidad de  $b$  a ambos lados de una  $a$  que queda en el medio.

**Ejemplo 2 (lenguaje)** Definimos el lenguaje  $L_2 \subset \{a, b, c\}^*$  con las siguientes reglas:

1.  $b \in L_2$
2. Si  $w \in L_2$ , entonces  $awc \in L_2$

#### Pertenencia de un elemento a un conjunto inductivo

Para probar que un elemento pertenece a un conjunto inductivo, basta con mostrar como lo formamos. Su secuencia de formación indica cuáles reglas se usan y en que orden.

**Ejemplo**  $bbabb \in L_1$  porque:

1.  $a \in L_1$  por (i)
2.  $bab \in L_1$  por (ii)
3.  $bbabb \in L_1$  por (ii)

## Probar propiedades de conjuntos

Según como definimos al conjunto, tenemos dos formas de probar propiedades:

- Si definimos por extensión: Probar que la propiedad se cumple para todos los elementos del conjunto
- Si definimos por comprensión: Probar que la propiedad se cumple para los elementos que cumplen con la definición del conjunto

**Principio de inducción primitiva** Sea  $N \subset \mathbb{N}$  definido inductivamente por:

1.  $0 \in N$
2. Si  $n \in N$ , entonces  $n + 1 \in N$

Sea  $P(n)$  una propiedad que queremos probar para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para probar que  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$ , basta con:

1. Mostrar que  $P(0)$  es verdadera
2. Mostrar que si  $P(n)$  es verdadera, entonces  $P(n + 1)$  es verdadera

**Demostración** Queremos probar que si se cumplen 1 y 2, entonces  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$ . Por hipótesis, sabemos que 1 y 2 se cumplen. Podemos observar que  $\mathbb{N}$  es el mínimo subconjunto de  $X$  que cumple con 1 y 2. Por lo tanto,  $X \subset \mathbb{N}$ .

**Ejemplo** Dado el lenguaje  $L_1$  definido anteriormente, probemos que todas las palabras de  $L_1$  tienen una cantidad impar de letras.

**Demostración** Por inducción en la formación de las palabras de  $L_1$ :

- **Caso base:**  $a$  tiene una cantidad impar de letras
  - $|a| = 1$  es impar
- **Paso inductivo:** Si  $w \in L_1$  tiene una cantidad impar de letras, entonces  $bwb$  tiene una cantidad impar de letras.
  - Por hipótesis,  $|w|$  es impar, entonces  $|bwb| = |w| + 2$  es impar, ya que si sumo 2 a un número impar, obtengo otro número impar

Por el principio de inducción primitiva, todas las palabras de  $L_1$  tienen una cantidad impar de letras.

**Ejemplo 2** Probar que todas las palabras de  $L_1$  son palíndromos

**Demostración** Por inducción en la formación de las palabras de  $L_1$ :

- **Caso base:**  $a$  es palíndromo
  - $a$  es palíndromo porque es una sola letra
- **Paso inductivo:** Si  $w \in L_1$  es palíndromo, entonces  $bwb$  es palíndromo
  - Por hipótesis,  $w$  es palíndromo, entonces  $bwb$  es palíndromo porque es la misma palabra al revés