

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 9

### Consigna

(a) Denotamos por “ $|$ ” la barra de Sheffer cuya función de valuación es la siguiente:

$$v(\varphi|\psi) = 0 \text{ si y solo si } v(\varphi) = v(\psi) = 1$$

Denotamos por “ $\downarrow$ ” el conectivo cuya función de valuación es la siguiente:

$$v(\varphi \downarrow \psi) = 1 \text{ si y solo si } v(\varphi) = v(\psi) = 0 \text{ (ni } \varphi \text{ ni } \psi)$$

Demuestre que los conjuntos de conectivos  $\{| \}$  y  $\{\downarrow\}$  son funcionalmente completos. (Sugerencia: Pruebe que  $(\neg p_1) \equiv (p_1|p_1)$  y que  $(\neg p_1) \equiv (p_1 \downarrow p_1)$ )

(b) Considere la conectiva ternaria  $\$$  cuya función de valuación es la siguiente (conectiva mayoría):

$$v(\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = 1 \text{ si y solo si } v(\varphi_1) + v(\varphi_2) + v(\varphi_3) \geq 2$$

Expresé  $\$$  en términos de  $\vee$  y  $\neg$ .

(c) Considere el conectivo  $\#$  cuya función de valuación es la siguiente:

$$v(\varphi\#\psi) = 1 \text{ si y solo si } v(\varphi) \neq v(\psi)$$

Expresé  $\#$  en términos de  $\vee$  y  $\neg$ .

(d) Demuestre que el conjunto  $\{\wedge, \perp\}$  no es funcionalmente completo. (Sugerencia: Pruebe que ninguna fórmula que use solamente esos conectivos puede ser una tautología).

### Resolución (parte a)

La idea para demostrar esto es demostrar que podemos expresar cualquier fórmula de *PROP* reducido a un conjunto completo de conectivos conocido, solo usando los conectivos “ $|$ ” y “ $\downarrow$ ” respectivamente. Es decir que:

$$(\forall \alpha \in PROP_{\{\neg, \wedge\}})(\exists \beta \in PROP_{\{\}}) \text{ tal que } \alpha \text{ eq } \beta$$

Usando en este caso el conjunto de conectivos completo:  $\{\neg, \wedge\}$

## Conectivo “|”

Definamos  $PROP_{\{\}}$  para poder trabajar sobre él.

1.  $p \in PROP_{\{\}}$  con  $p \in P$
2. Si  $\alpha, \beta \in PROP_{\{\}}$ , entonces  $(\alpha|\beta) \in PROP_{\{\}}$

Definamos también  $PROP_{\{\neg, \wedge\}}$  para poder trabajar con el PIP sobre él.

1.  $p \in PROP_{\{\neg, \wedge\}}$  con  $p \in P$
2. Si  $\alpha \in PROP_{\{\neg, \wedge\}}$ , entonces  $\neg \alpha \in PROP_{\{\neg, \wedge\}}$
3. Si  $\alpha, \beta \in PROP_{\{\neg, \wedge\}}$ , entonces  $\alpha \wedge \beta \in PROP_{\{\neg, \wedge\}}$

## Lemas

### Lema #1

$$(\neg \varphi) \equiv (\varphi|\varphi)$$

**Demostración:**  $v(\varphi|\varphi) = 0$  sii  $v(\varphi) = 1$  y en cualquier otro caso vale 1. Esto coincide con  $\neg \varphi$

### Lema #2

$$(\alpha \wedge \beta) \equiv (\alpha|\beta)|(\alpha|\beta)$$

**Demostración:**  $v(\alpha \wedge \beta) = v(\neg(\alpha|\beta))$  porque  $v(\neg(\alpha|\beta)) = 1$  sii  $v(\alpha) = v(\beta) = 1$ . Usando el lema #1 tenemos que:

$$v(\neg(\alpha|\beta)) = v((\alpha|\beta)|(\alpha|\beta))$$

## Demostración

Enunciemos la propiedad  $P(\varphi)$  que queremos demostrar:

$$P(\varphi) : (\exists \beta \in PROP_{\{\}}) \text{ tal que } \varphi \text{ eq } \beta$$

## PASO BASE

$$P(p_i) : (\exists \beta \in PROP_{\{\}}) \text{ tal que } p_i \text{ eq } \beta$$

Esto es directo porque por la definición de  $PROP_{\{\}}$ ,  $p_i \in PROP_{\{\}}$

## PASO INDUCTIVO

### PARTE 1

- (H)  $P(\alpha) : (\exists \alpha' \in PROP_{\{\downarrow\}})$  tal que  $\alpha \text{ eq } \alpha'$
- (I)  $P(\beta) : (\exists \beta' \in PROP_{\{\downarrow\}})$  tal que  $\beta \text{ eq } \beta'$
- (J)  $P(\alpha \wedge \beta) : (\exists \psi \in PROP_{\{\downarrow\}})$  tal que  $\alpha \wedge \beta \text{ eq } \psi$

$$\begin{aligned} & \alpha \text{ eq } \alpha' \text{ y } \beta \text{ eq } \beta' \\ & \Rightarrow (\text{por sustitución por fórmulas equivalentes}) \\ & (\alpha \wedge \beta) \text{ eq } (\alpha' \wedge \beta') \\ & \Rightarrow (\text{por lema \#2}) \\ & (\alpha' \wedge \beta') \text{ eq } ((\alpha'|\beta')|(\alpha'|\beta')) \end{aligned}$$

Cómo este elemento  $((\alpha'|\beta')|(\alpha'|\beta'))$  pertenece a  $PROP_{\{\downarrow\}}$ , hemos demostrado que  $P(\alpha \wedge \beta)$  se cumple.

### PARTE 2

- (H)  $P(\varphi) : (\exists \varphi' \in PROP_{\{\downarrow\}})$  tal que  $\varphi \text{ eq } \varphi'$
- (I)  $P(\neg\varphi) : (\exists \psi \in PROP_{\{\downarrow\}})$  tal que  $\neg\varphi \text{ eq } \psi$

$$\begin{aligned} & \varphi \text{ eq } \varphi' \\ & \Rightarrow (\text{por sustitución por fórmulas equivalentes}) \\ & \neg\varphi \text{ eq } \neg\varphi' \\ & \Rightarrow (\text{por lema \#1}) \\ & \neg\varphi' \text{ eq } (\varphi|\varphi) \end{aligned}$$

Cómo este elemento  $(\varphi|\varphi)$  pertenece a  $PROP_{\{\downarrow\}}$ , hemos demostrado que  $P(\neg\varphi)$  se cumple.

## Conectivo “ $\downarrow$ ”

Definamos  $PROP_{\{\downarrow\}}$  para poder trabajar sobre él.

1.  $p \in PROP_{\{\downarrow\}}$  con  $p \in P$
2. Si  $\alpha, \beta \in PROP_{\{\downarrow\}}$ , entonces  $(\alpha \downarrow \beta) \in PROP_{\{\downarrow\}}$

Definamos también  $PROP_{\{\neg, \vee\}}$  para poder trabajar con el PIP sobre él.

1.  $p \in PROP_{\{\neg, \vee\}}$  con  $p \in P$
2. Si  $\alpha \in PROP_{\{\neg, \vee\}}$ , entonces  $\neg\alpha \in PROP_{\{\neg, \vee\}}$
3. Si  $\alpha, \beta \in PROP_{\{\neg, \vee\}}$ , entonces  $\alpha \vee \beta \in PROP_{\{\neg, \vee\}}$

## Lemas

### Lema #1

$$(\neg\varphi) \equiv (\varphi \downarrow \varphi)$$

**Demostración:**  $v(\varphi \downarrow \varphi) = 1$  sii  $v(\varphi) = 0$  y en cualquier otro caso vale 1. Esto coincide con  $\neg\varphi$

### Lema #2

$$(\alpha \vee \beta) \equiv ((\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta))$$

**Demostración:**  $v(\alpha \vee \beta) = v(\neg(\alpha \downarrow \beta))$  porque  $v(\neg(\alpha \downarrow \beta)) = 0$  sii  $v(\alpha) = v(\beta) = 0$ , en todos los demás casos  $v(\neg(\alpha \downarrow \beta)) = 1$ . Usando el lema #1 tenemos que:

$$v(\neg(\alpha \downarrow \beta)) = v((\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta))$$

## Demostración

Enunciemos la propiedad  $P(\varphi)$  que queremos demostrar:

$$P(\varphi) : (\exists \beta \in PROP_{\{\downarrow\}}) \text{ tal que } \varphi \text{ eq } \beta$$

## PASO BASE

$$P(p_i) : (\exists \beta \in PROP_{\{\downarrow\}}) \text{ tal que } p_i \text{ eq } \beta$$

Esto es directo porque por la definición de  $PROP_{\{\downarrow\}}$ ,  $p_i \in PROP_{\{\downarrow\}}$

## PASO INDUCTIVO

### PARTE 1

$$(H) \ P(\alpha) : (\exists \alpha' \in PROP_{\{\downarrow\}}) \text{ tal que } \alpha \text{ eq } \alpha'$$

$$(I) \ P(\beta) : (\exists \beta' \in PROP_{\{\downarrow\}}) \text{ tal que } \beta \text{ eq } \beta'$$

$$(J) \ P(\alpha \vee \beta) : (\exists \psi \in PROP_{\{\downarrow\}}) \text{ tal que } \alpha \vee \beta \text{ eq } \psi$$

$$\alpha \text{ eq } \alpha' \text{ y } \beta \text{ eq } \beta'$$

$$\Rightarrow \text{(por sustitución por fórmulas equivalentes)}$$

$$(\alpha \vee \beta) \text{ eq } (\alpha' \vee \beta')$$

$$\Rightarrow \text{(por lema \#2)}$$

$$(\alpha' \vee \beta') \text{ eq } ((\alpha' \downarrow \beta') \downarrow (\alpha' \downarrow \beta'))$$

Cómo este elemento  $((\alpha' \downarrow \beta') \downarrow (\alpha' \downarrow \beta'))$  pertenece a  $PROP_{\{\downarrow\}}$ , hemos demostrado que  $P(\alpha \vee \beta)$  se cumple.

## PARTE 2

(H)  $P(\varphi) : (\exists \varphi' \in PROP_{\{\downarrow\}})$  tal que  $\varphi \text{ eq } \varphi'$

(I)  $P(\neg\varphi) : (\exists \psi \in PROP_{\{\downarrow\}})$  tal que  $\neg\varphi \text{ eq } \psi$

$$\begin{aligned} & \varphi \text{ eq } \varphi' \\ & \Rightarrow (\text{por sustitución por fórmulas equivalentes}) \\ & \neg\varphi \text{ eq } \neg\varphi' \\ & \Rightarrow (\text{por lema \#1}) \\ & \neg\varphi' \text{ eq } (\varphi \downarrow \varphi) \end{aligned}$$

Cómo este elemento  $(\varphi \downarrow \varphi)$  pertenece a  $PROP_{\{\downarrow\}}$ , hemos demostrado que  $P(\neg\varphi)$  se cumple.

## Resolución (parte b)

La estrategia que usaremos para esta parte consiste en primero hallar una fórmula de  $PROP$  para expresar  $\$$  en términos de todos los conectivos, y luego encontrar una fórmula equivalente a la última que tenga solo  $\vee$  y  $\neg$ .

### Hallar fórmula de $PROP$ para $\$$

$$\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 1 \text{ si y solo si } v(\varphi_1) + v(\varphi_2) + v(\varphi_3) \geq 2$$

Analicemos primero los casos donde  $\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  es verdadera:

1.  $\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 1, \varphi_3 = 1$
2.  $\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 1, \varphi_3 = 0$
3.  $\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 1$
4.  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 1, \varphi_3 = 1$

Busquemos una fórmula para representar cada una de estas situaciones:

1. Puede ser cualquier fórmula de las que vemos posteriormente porque todas valen 1.
2.  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$
3.  $(\varphi_1 \wedge \varphi_3)$
4.  $(\varphi_2 \wedge \varphi_3)$

Por lo tanto, la fórmula  $\alpha \in PROP$  que representa a  $\$$  es:

$$\alpha = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$$

La intuición de la fórmula que encontramos es que cuando pase alguno de los casos, quiero devolver verdadero. Si no pasa ninguno de ellos entonces tendré que devolver falso.

### Hallar fórmula de *PROP* para $\$$ en términos de $\vee$ y $\neg$

En esta parte tenemos que usar fórmulas equivalentes para reemplazar el  $\wedge$ . Usemos la siguiente fórmula equivalente conocida:

$$\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

Reemplazando en la fórmula  $\alpha$  que encontramos anteriormente:

$$\alpha = \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2) \vee \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_3) \vee \neg(\neg\varphi_2 \vee \neg\varphi_3)$$

### Resolución (parte c)

Usaremos la misma estrategia que para la parte anterior.

### Hallar fórmula de *PROP* para $\#$

$$v(\varphi\#\psi) = 1 \text{ si y solo si } v(\varphi) \neq v(\psi)$$

Analicemos primero los casos donde  $(\varphi\#\psi)$  es verdadera:

1.  $\varphi = 1, \psi = 0$
2.  $\varphi = 0, \psi = 1$

Busquemos una fórmula para representar cada una de estas situaciones:

1.  $(\varphi \wedge \neg\psi)$
2.  $(\neg\varphi \wedge \psi)$

Por lo tanto, la fórmula  $\alpha \in PROP$  que representa a  $\#$  es:

$$\alpha = (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$$

### Hallar fórmula de *PROP* para $\#$ en términos de $\vee$ y $\neg$

En esta parte tenemos que usar fórmulas equivalentes para reemplazar el  $\wedge$ . Usemos la siguiente fórmula equivalente conocida:

$$\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

Reemplazando en la fórmula  $\alpha$  que encontramos anteriormente:

$$\alpha = \neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee \neg(\varphi \vee \neg\psi)$$

## Resolución (parte d)

La estrategia para esta parte es seguir la sugerencia dada en la letra. Queremos probar entonces que ninguna fórmula que use solamente los conectivos  $\wedge$  y  $\perp$  puede ser una tautología. Traduciendo esto a una propiedad  $P$ , tenemos que:

$$P(\varphi) : \exists v \in Val \mid v(\varphi) = 0 \quad (\forall \varphi \in PROP_{\{\wedge, \perp\}})$$

Usemos el PIP sobre  $PROP_{\{\wedge, \perp\}}$  para demostrar esto.

### Demostración

#### PASO BASE

##### PARTE 1

$$P(\perp) : \exists v \in Val \mid v(\perp) = 0$$

Esto es trivialmente cierto para todas las valuaciones  $v \in Val$  por la definición de lo que es una valuación.

##### PARTE 2

$$P(p_i) : \exists v \in Val \mid v(p_i) = 0$$

Basta con tomar una valuación  $v$  tal que  $v(p_i) = 0$ . Por lo que este paso también se cumple.

#### PASO INDUCTIVO

$$(H) \ P(\alpha) : \exists v \in Val \mid v(\alpha) = 0$$

$$(I) \ P(\beta) : \exists v \in Val \mid v(\beta) = 0$$

$$(J) \ P(\alpha \wedge \beta) : \exists v \in Val \mid v(\alpha \wedge \beta) = 0$$

Sea  $v$  una valuación cualquiera que cumple con las hipótesis inductivas, veamos que podemos decir sobre  $v(\alpha \wedge \beta)$ :

$$\begin{aligned} &v(\alpha \wedge \beta) \\ &= (\text{definición de valuación}) \\ &\min\{v(\alpha), v(\beta)\} \\ &= (\text{por hipótesis inductiva}) \\ &\min\{0, 0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces,  $v$  es una valuación que cumple con la tesis. Por lo tanto, hemos demostrado que  $P(\alpha \wedge \beta)$  se cumple.

Esto prueba la propiedad  $\forall \varphi \in PROP_{\{\wedge, \perp\}}$ , es decir que no existen fórmulas que usen solamente los conectivos  $\wedge$  y  $\perp$  que sean tautologías. Por lo tanto, el conjunto  $\{\wedge, \perp\}$  no es funcionalmente completo.