# Lógica

Mauro Polenta Mora

# Ejercicio 2

## Consigna

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -;\ 1,\ 2;\ 1\rangle$ con símbolos función $f_1$ (unario), $f_2$ (binario) y símbolo de constante $c_1$.
Sean $A, B$ estructuras del mismo tipo definidas como sigue:

- $A = \langle \mathbb{N},\ S,\ +,\ 0\rangle$ donde $S(x) = x + 1$
- $B = \langle \mathbb{N},\ D,\ *,\ 1\rangle$ donde $D(x) = 2 * x$

Demuestre por inducción que para todo término cerrado $t$ (sin constantes extendidas) se cumple que:

$$t^B = 2^{t^A}$$

## Resolución

El primer paso del ejercicio es definir $TERM_C$ para poder aplicar el PIP y trabajar con lo que queremos probar de manera formal.

Definimos $TERM_C$ por: 1. $c_1 \in TERM_C$ 2. Si $t_1 \in TERM_C$ entonces $f_1(t_1) \in TERM_C$ 3. Si $t_1, t_2 \in TERM_C$ entonces $f_2(t_1, t_2) \in TERM_C$

La propiedad que queremos probar sobre $t \in TERM_C$ es la siguiente:

- $P(t) : (\overline{\forall} t \in TERM_C) t^B = 2^{t^A}$

### Demostración

#### Paso base

- $P(c_1) : c_1^B = 2^{(c_1)^A}$

Evaluemos:

$$
\begin{gathered}
c_1^B = 2^{(c_1)^A} \\
\iff \text{(interpretación de } c_1 \text{ en } A, B) \\
1 = 2^0 \\
\iff \text{(aritmética)} \\
1 = 1
\end{gathered}
$$

Por lo que se cumple $P(c_1)$.

**Paso inductivo**

**Parte 1**

(H) $P(t_1) : (t_1)^B = 2^{(t_1)^A}$
(I) $P(f_1(t_1)) : f_1(t_1)^B = 2^{f_1(t_1)^A}$

Evaluemos la tesis a ver que podemos decir de ella:

$$
\begin{gathered}
f_1(t_1)^B = 2^{f_1(t_1)^A} \\
\iff \text{(interpretación de } f_1 \text{ en } B) \\
2 \cdot (t_1)^B = 2^{f_1(t_1)^A} \\
\iff \text{(interpretación de } f_1 \text{ en } A) \\
2 \cdot (t_1)^B = 2^{(t_1)^A + 1} \\
\iff \text{(aritmética)} \\
2 \cdot (t_1)^B = 2 \cdot 2^{(t_1)^A} \\
\iff \text{(aritmética)} \\
(t_1)^B = 2^{(t_1)^A}
\end{gathered}
$$

Donde esto último es verdadero por hipótesis, por lo que esta parte queda probada.

**Parte 2**

(H1) $P(t_1) : (t_1)^B = 2^{(t_1)^A}$ (H2) $P(t_2) : (t_2)^B = 2^{(t_2)^A}$ (T) $P(f_2(t_1, t_2)) : f_2(t_1, t_2)^B = 2^{f_2(t_1, t_2)^A}$

Evaluemos la tesis a ver que podemos decir de ella:

$$
\begin{gathered}
f_2(t_1,t_2)^B = 2^{f_2(t_1,t_2)^A} \\
\Longleftrightarrow \text{ (interpretación de } f_2 \text{ en } B) \\
t_1^B \cdot t_2^B = 2^{f_2(t_1,t_2)^A} \\
\Longleftrightarrow \text{ (interpretación de } f_2 \text{ en } A) \\
(t_1)^B \cdot (t_2)^B = 2^{(t_1)^A + (t_2)^A} \\
\Longleftrightarrow \text{ (aritmética)} \\
(t_1)^B \cdot (t_2)^B = 2^{(t_1)^A} \cdot 2^{(t_2)^A} \\
\Longleftrightarrow \text{ (por H2: } (t_2)^B = 2^{(t_2)^A} \neq 0) \\
(t_1)^B = 2^{(t_1)^A}
\end{gathered}
$$

Donde esto último se cumple por hipótesis (H1), por lo que esta parte queda probada.

Esto concluye la demostración. ■