Ejercicio 17

Premisa

Llamamos **función de alto orden** a una función que recibe como parámetro o devuelve como resultado otra función. Para definir funciones de esta clase, uno de los parámetros se usa como una función en su definición. Por ejemplo:

$$f(g,x) = g(x) + 1$$

Sea g la función Succ que devuelve el sucesor de un número, entonces:

$$f(Succ,3) = Succ(3) + 1 = 5$$

Consigna

- (a) Defina la función $reemplazo: \Sigma^* \times (\Sigma \to \Sigma^*) \to \Sigma^*$. Esa función debe cumplir que, si $\Sigma = \{a,b\}$ y f es tal que f(a) = aba y f(b) = bba, entonces reemplazo(abab,f) = ababbaababba
- (b) Encuentre una función f adecuada para probar que:

$$(\forall w \in \Sigma^*) duplicar(w) = reemplazo(w, f)$$

Resolución (parte a)

Observemos que la función debe ser el resultado de aplicar f a todos los elementos de la palabra pasada como parámetro. Veamos como definir inductivamente la función:

- $reemplazo : \Sigma^* \times (\Sigma \to \Sigma^*) \to \Sigma^*$
- $reemplazo(\varepsilon, f) = \varepsilon$
- reemplazo(xw, f) = f(x)reemplazo(w, f)

Resolución (parte b)

Queremos encontrar una función f para que se cumpla la propiedad:

$$P(w): duplicar(w) = reemplazo(w, f)$$

Para todo $w \in \Sigma^*$.

Primero recordemos que duplicar se define por (ejercicio 12):

Esta función duplica cada cáracter de una palabra, uno a uno

- 1. $duplicar(\varepsilon) = \varepsilon$
- 2. duplicar(xw) = xxduplicar(w)

La función f que hace sentido usar es la que se define por: $f(x) = xx \quad \forall x \in \Sigma$. Ahora probemos usando el PIP para Σ^* que la propiedad P se cumple.

PASO BASE:

```
P(\varepsilon): duplicar(\varepsilon) = reemplazo(\varepsilon, f)
```

Esto es verdadero, por ambas las reglas (i) de la definición de duplicar y reemplazo respectivamente.

PASO INDUCTIVO:

```
(H) P(w): duplicar(w) = reemplazo(w, f)

(I) P(xw): duplicar(xw) = reemplazo(xw, f)
```

Veamos que podemos decir sobre la tesis usando las reglas de las funciones:

```
\begin{aligned} duplicar(xw) &= reemplazo(xw,f) \\ \Leftrightarrow & (\text{reglas (ii) de } reemplazo, duplicar) \\ xxduplicar(w) &= f(x)reemplazo(w,f) \\ \Leftrightarrow & (\text{definición de } f) \\ xxduplicar(w) &= xxreemplazo(w,f) \\ \Leftrightarrow & (\text{simplificar}) \\ duplicar(w) &= reemplazo(w,f) \end{aligned}
```

Pero lo último es cierto, por hipótesis inductiva. Entonces probamos la tesis.

Esto significa que $(\forall w \in \Sigma^*)P(w): duplicar(w) = reemplazo(w,f)$ con la f que definimos.