

Ejercicio 1

Consigna

Demuestre que:

- (a) $((\neg p_2) \rightarrow (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3) \in PROP$
- (b) $((p_7 \rightarrow (\neg \perp)) \leftrightarrow ((p_4 \wedge (\neg p_2)) \rightarrow p_1)) \in PROP$
- (c) $(\neg \notin PROP$

Resolución

Premisa (definición de $PROP$)

El lenguaje de la lógica proposicional $PROP \subseteq \Sigma_{PROP}^*$ está definido inductivamente por:

1. Si $p \in P$, entonces $p \in PROP$
2. $\perp \in PROP$
3. Si $\alpha, \beta \in PROP$, entonces:
 - $(\alpha \wedge \beta) \in PROP$
 - $(\alpha \vee \beta) \in PROP$
 - $(\alpha \rightarrow \beta) \in PROP$
 - $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in PROP$
4. Si $\alpha \in PROP$, entonces $(\neg \alpha) \in PROP$

Proposición (a)

Para demostrar que la proposición pertenece a $PROP$ tenemos que dar una forma de construirlo a partir de las reglas del conjunto $PROP$ definido inductivamente.

$$\begin{aligned} & (((\neg p_2) \rightarrow (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \in PROP \\ & \iff (\text{por regla 3}) \\ & \left\{ \begin{array}{l} (\neg p_3) \in PROP \\ ((\neg p_2) \rightarrow (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \in PROP \end{array} \right. \\ & \iff (\text{(i) por regla 4, (ii) por regla 3}) \\ & \left\{ \begin{array}{l} p_3 \in PROP \quad (i) \\ \left\{ \begin{array}{l} (\neg p_2) \in PROP \\ (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2)) \in PROP \end{array} \right. \quad (ii) \end{array} \right. \\ & \iff (p_3 \in PROP \text{ es trivial, (ii) por regla 3 (iv) y 4 (iii)}) \\ & \left\{ \begin{array}{l} p_2 \in PROP \\ \left\{ \begin{array}{l} p_3 \in PROP \quad (iii) \\ (p_1 \leftrightarrow p_2) \in PROP \quad (iv) \end{array} \right. \end{array} \right. \\ & \iff (\text{saco los elementos de } AT \text{ y regla 3}) \\ & \left\{ \begin{array}{l} p_1 \in PROP \\ p_2 \in PROP \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donde esto ultimo se cumple porque $p_1, p_2 \in AT$.

Aclaración La idea que tenemos cuando “sacamos” los elementos de AT , es que por la regla 1 y 2 de $PROP$ sabemos que los elementos de AT pertenecen a $PROP$, por lo que estos elementos no cambian la implicancia de los si y solo si.

Proposición (b)

$$\begin{aligned}
 & ((p_7 \rightarrow (\neg \perp)) \leftrightarrow ((p_4 \wedge (\neg p_2)) \rightarrow p_1)) \in PROP \\
 & \iff (\text{por regla 3}) \\
 & \left\{ \begin{array}{l} (p_7 \rightarrow (\neg \perp)) \in PROP \\ ((p_4 \wedge (\neg p_2)) \rightarrow p_1) \in PROP \end{array} \right. \\
 & \iff (\text{por regla 3}) \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} p_7 \in PROP \\ (\neg \perp) \in PROP \end{array} \right. \quad (i) \\ \left\{ \begin{array}{l} (p_4 \wedge (\neg p_2)) \in PROP \\ p_1 \in PROP \end{array} \right. \quad (ii) \end{array} \right. \\
 & \iff ((i) \text{ por regla 4, } (ii) \text{ por regla 3}) \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \perp \in PROP \\ \left\{ \begin{array}{l} p_4 \in PROP \\ (\neg p_2) \in PROP \end{array} \right. \end{array} \right. \\
 & \iff (\text{por regla 4}) \\
 & p_2 \in PROP
 \end{aligned}$$

En este caso eliminamos los elementos de AT sin aclaración, recordar que $\perp \in AT$

Proposición (c)

$$((\rightarrow \in PROP$$

Esto ya es absurdo, esto no puede pertenecer a $PROP$ porque por ejemplo, no hay paréntesis a la derecha, no se puede crear una proposición de esta forma utilizando las reglas de $PROP$.

Concluimos que esta palabra no pertenece a $PROP$