Lógica

Mauro Polenta Mora

CLASE 15 - 19/05/2025

Semántica de la lógica de predicados

Interpretación de sentencias de $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ en $\mathcal{M}$

La interpretación de las sentencias de $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ en $\mathcal{M}$ es una función $v^{\mathcal{M}} : SENT \to \{0, 1\}$ que satisface:

- $v^{\mathcal{M}}(t_1 =' t_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}} \\ 0 & \text{si } t_1^{\mathcal{M}} \neq t_2^{\mathcal{M}} \end{cases}$
- $v^{\mathcal{M}}(P_j(t_1, \dots, t_{r_j})) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left\langle t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_{r_j}^{\mathcal{M}} \right\rangle \in R_j \\ 0 & \text{si } \left\langle t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_{r_j}^{\mathcal{M}} \right\rangle \notin R_j \end{cases}$
- $v^{\mathcal{M}}(\bot) = 0$
- $v^{\mathcal{M}}((\neg\alpha)) = 1 - v^{\mathcal{M}}(\alpha)$
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha \land \beta) = min\{v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\}$
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha \lor \beta) = max\{v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\}$
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha \to \beta) = max\{1 - v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\}$
- $v^{\mathcal{M}}(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 \iff v^{\mathcal{M}}(\alpha) = v^{\mathcal{M}}(\beta)$
- $v^{\mathcal{M}}((\forall x)\alpha) = min\{v^{\mathcal{M}}(\alpha[\overline{a}/x]) \mid a \in |\mathcal{M}|\}$
- $v^{\mathcal{M}}((\exists x)\alpha) = max\{v^{\mathcal{M}}(\alpha[\overline{a}/x]) \mid a \in |\mathcal{M}|\}$

Ejemplo 1

Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, Primo, +, -, 0, 1 \rangle$ con tipo $\langle 1; 2, 1; 2 \rangle$. La interpretación de las sentencias de $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ en $\mathcal{M}$ debe satisfacer:

- $v^{\mathcal{M}}(P_1(t_1)) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1^{\mathcal{M}} \text{ es primo} \\ 0 & \text{si } t_1^{\mathcal{M}} \text{ no es primo} \end{cases}$

Ejemplo 2

Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, Primo, +, -, 0, 1 \rangle$ con tipo $\langle 1; 2, 1; 2 \rangle$. Qué valor de verdad tienen las sentencias $f_1(f_2(c_1), c_2) =' c_2$ y $P_1(f_2(c_1), c_2)$.

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(f_1(f_2(c_1), c_2) =' c_2) = 1 \\
\iff & \text{(interpretación de sentencias } (=')) \\
& f_1(f_2(c_1), c_2)^{\mathcal{M}} = c_2^{\mathcal{M}} \\
\iff & \text{(interpretación de términos cerrados)} \\
& -c_1^{\mathcal{M}} + c_2^{\mathcal{M}} = c_2^{\mathcal{M}} \\
\iff & \text{(interpretación de términos cerrados)} \\
& -0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Lo cual se cumple, por lo que el valor de verdad de la sentencia $v^{\mathcal{M}}(f_1(f_2(c_1), c_2) =' c_2) = 1$. Vayamos con el otro ejemplo:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(P_1(f_1(f_2(c_1), c_2))) = 1 \\
\iff & \text{(interpretación de sentencias)} \\
& f_1(f_2(c_1), c_2)^{\mathcal{M}} \text{ es primo} \\
\iff & \text{(interpretación de términos cerrados)} \\
& -c_1^{\mathcal{M}} + c_2^{\mathcal{M}} \text{ es primo} \\
\iff & \text{(interpretación de términos cerrados)} \\
& -0 + 1 \text{ es primo}
\end{aligned}$$

Dónde lo último se cumple pues 1 pertenece al conjunto de los números primos definido por la estructura $\mathcal{M}$.

Ejemplo 3

Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, Primo, +, -, 0, 1 \rangle$ con tipo $\langle 1; 2, 1; 2 \rangle$. Qué valor de verdad tienen las sentencias $(\forall x)P_1(x)$ y $(\exists x)f_2(x) =' x$?

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}((\forall x)P_1(x)) \\
\iff & \text{(interpretación de sentencias)} \\
& min\{v^{\mathcal{M}}(P_1(\overline{a})) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
= & \text{(considerando el 4)} \\
& 0
\end{aligned}$$

Veamos el otro ejemplo:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}((\exists x)f_2(x) =' x) \\
\iff & \text{(interpretación de sentencias)} \\
& max\{v^{\mathcal{M}}(f_2(\overline{a}) =' \overline{a}) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
= & \text{(considerando el 0)} \\
& 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, Primo, +, -, 0, 1 \rangle$ con tipo $\langle 1; 2, 1; 2 \rangle$. Qué valor de verdad tiene la secuencia $(\forall x)P_1(x) \rightarrow \neg P_1(f_1(x, c_2))$?

$$
\begin{gathered}
v^{\mathcal{M}}((\forall x)P_1(x) \rightarrow \neg P_1(f_1(x, c_2))) \\
=_{\text{(interpretación de sentencias)}} \\
min\{v^{\mathcal{M}}(P_1(\overline{a}) \rightarrow \neg P_1(f_1(\overline{a}, c_2))) \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
=_{\text{(interpretación de sentencias)}} \\
min\{max\{1 - v^{\mathcal{M}}(P_1(\overline{a})), v^{\mathcal{M}}(\neg P_1(f_1(\overline{a}, c_2)))\} \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
=_{\text{(interpretación de sentencias)}} \\
min\{max\{1 - v^{\mathcal{M}}(P_1(\overline{a})), 1 - v^{\mathcal{M}}(P_1(f_1(\overline{a}, c_2)))\} \mid a \in |\mathcal{M}|\} \\
=_{\text{(interpretación de sentencias)}} \\
min\{max\{1 - v^{\mathcal{M}}(P_1(\overline{a})), 1 - v^{\mathcal{M}}(P_1(f_1(\overline{a}, c_2)))\} \mid a \in |\mathcal{M}|\}
\end{gathered}
$$

Observemos que tenemos un mínimo afuera del todo. Si encontramos un solo valor de $a \in |\mathcal{M}|$ para el cual alguna de las expresiones indicadas en el conjunto de adentro tenga valor 0, entonces podremos confimar que $v^{\mathcal{M}}((\forall x)P_1(x) \rightarrow \neg P_1(f_1(x, c_2))) = 0$.

Veamos que:

$$
\begin{gathered}
v^{\mathcal{M}}(P_1(\overline{2})) = 1 \text{ y } v^{\mathcal{M}}(P_1(f_1(\overline{2}, c_2))) = 1 \\
\Longrightarrow \text{(interpretación de sentencias)} \\
v^{\mathcal{M}}(P_1(\overline{2})) = 1 \text{ y } v^{\mathcal{M}}(\neg P_1(f_1(\overline{2}, c_2))) = 0 \\
\Longrightarrow \text{(interpretación de sentencias)} \\
v^{\mathcal{M}}(P_1(\overline{2}) \rightarrow \neg P_1(f_1(\overline{2}, c_2))) = 0 \\
\Longrightarrow \text{(operatoria)} \\
min\{v^{\mathcal{M}}(P_1(\overline{a}) \rightarrow \neg P_1(f_1(\overline{a}, c_2))) \mid a \in |\mathcal{M}|\} = 0 \\
\Longrightarrow \text{(interpretación de sentencias)} \\
v^{\mathcal{M}}((\forall x)P_1(x) \rightarrow \neg P_1(f_1(x, c_2))) = 0
\end{gathered}
$$

Observación: Es exactamente el mismo razonamiento que aplicamos en matemática cuando queremos demostrar que una propiedad para todo un conjunto de elementos no se cumple: encontrar un contraejemplo.

Clausura universal de una fórmula

Antes de interpretar términos, nos aseguraremos de que estén cerrados. Antes de interpretar fórmulas, nos aseguraremos de que sean sentencias.

Sean $\alpha \in FORM$ y $FV(\alpha) = \{z_1, \ldots, z_k\}$. - Definimos $cl(\alpha) = (\forall z_1) \ldots (\forall z_k)\alpha$

Uso de $\models$

- Sea $\alpha \in SENT$. Entonces $\mathcal{M} \models \alpha$ sii $v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 1$

- Sea $\alpha \in FORM$. Entonces $\mathcal{M} \vDash \alpha$ sii $v^{\mathcal{M}}(cl(\alpha)) = 1$
- Sea $\Gamma \subseteq FORM$. Entonces $\mathcal{M} \vDash \Gamma$ sii $\mathcal{M} \vDash \alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$
- Sea $\alpha \in FORM$. Entonces $\vDash \alpha$ sii para toda estructura $\mathcal{M}$ del tipo adecuado $\mathcal{M} \vDash \alpha$
- Sea $\alpha \in SENT, \Gamma \subseteq SENT$. Entonces $\Gamma \vDash \alpha$ sii para toda estructura $\mathcal{M}$ del tipo adecuado, si $\mathcal{M} \vDash \Gamma$ entonces $\mathcal{M} \vDash \alpha$

Propiedades de $\vDash$

La relación $\vDash$ refleja el significado intuitivo de los conectivos y los cuantificadores en las sentencias.

Sean $\alpha, \beta \in SENT$, $\gamma \in FORM, FV(\gamma) \subseteq \{x\}$. Entonces,

- $\mathcal{M} \vDash (\alpha \wedge \beta)$ sii $\mathcal{M} \vDash \alpha$ y $\mathcal{M} \vDash \beta$
- $\mathcal{M} \vDash (\alpha \vee \beta)$ sii $\mathcal{M} \vDash \alpha$ o $\mathcal{M} \vDash \beta$
- $\mathcal{M} \vDash (\neg\alpha)$ sii $\mathcal{M} \nvDash \alpha$
- $\mathcal{M} \vDash (\alpha \rightarrow \beta)$ sii (si $\mathcal{M} \vDash \alpha$ entonces $\mathcal{M} \vDash \beta$)
- $\mathcal{M} \vDash (\alpha \leftrightarrow \beta)$ sii ($\mathcal{M} \vDash \alpha$ sii $\mathcal{M} \vDash \beta$)
- $\mathcal{M} \vDash ((\forall x)\gamma)$ sii para todo $a \in |\mathcal{M}|, \mathcal{M} \vDash \gamma[\overline{a}, x]$
- $\mathcal{M} \vDash ((\exists x)\gamma)$ sii existe $a \in |\mathcal{M}|$ tal que $\mathcal{M} \vDash \gamma[\overline{a}, x]$