Ejercicio 3

Consigna

Considere el conjunto inductivo F definido mediante las siguientes reglas: 1. $\langle 0, 1\rangle \in F$ 2. Si $\langle n, m\rangle \in F$, entonces $\langle m, n+m\rangle \in F$

Demostrar que
$$(\forall n \in N)\langle Fibo(n), Fibo(n+1)\rangle \in F$$

donde la función $Fibo$ se define como:

$$Fibo : \mathbb{N} \to \mathbb{N} Fibo(0) = 0 Fibo(1) = 1 Fibo(n+2) = Fibo(n) + Fibo(n+1)$$

Resolución

Observemos que la propiedad que queremos probar, tiene la forma de la tesis del PIP de $\mathbb{N}$, por lo que usaremos dicho principio para probar esta propiedad. Enunciemos la propiedad P

$$P : (\forall n \in \mathbb{N})\langle Fibo(n), Fibo(n+1)\rangle \in F$$

CASO BASE

Sea $n = 0$. Entonces:

$$P(0) : \langle Fibo(0), Fibo(0+1)\rangle \in F P(0) : \langle 0, 1\rangle \in F$$

Acá usamos las reglas ya dadas de $Fibo(0)$ y $Fibo(1)$, y que $\langle 0, 1\rangle$ es un elemento base de F

PASO INDUCTIVO

Asumimos que $P(k)$ se cumple, queremos probar que se cumple para $P(k+1)$. Enunciemos $P(k+1)$:

$$P(k+1) : \langle Fibo(k+1), Fibo(k+1+1)\rangle \in F P(k+1) : \langle Fibo(k+1), Fibo(k+2)\rangle \in F$$

Por la regla de construcción de F, sabemos que:

Si $\langle n, m\rangle \in F$, entonces $\langle m, n+m\rangle \in F$

También sabemos que:

$$P(k) : \langle Fibo(k), Fibo(k+1)\rangle \in F$$

Entonces, con la regla de construcción de F, podemos decir que:

$$\langle Fibo(k), Fibo(k+1)\rangle \in F \Rightarrow \langle Fibo(k+1), Fibo(k) + Fibo(k+1)\rangle \in F$$

Pero con la regla de construcción de $Fibo$ sabemos que:

$$Fibo(n + 2) = Fibo(n) + Fibo(n + 1)$$

Entonces concluimos que:

$$\langle Fibo(k+1), Fibo(k)+Fibo(k+1)\rangle \in F \Rightarrow P(k+1) : \langle Fibo(k+1), Fibo(k+2)\rangle \in F$$

Con esto, queda demostrado el ejercicio