

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 6

### Consigna

Considere un lenguaje de primer orden de tipo  $\langle -, 2; 1 \rangle$  con un símbolo de función  $f_1$  y un símbolo de constante  $c_1$ .

- (a) En las siguientes fórmulas determine cuáles ocurrencias de variables son libres y cuáles son ligadas. Para aquellas que sean ligadas, señale el cuantificador al cual están ligadas.

1.  $x_2 = x_1$
2.  $x_1 = x_1$
3.  $x_2 = c_1$
4.  $(\exists x_2)f_1(x_2, x_3) = c_1$
5.  $((\forall x_4)f_1(x_1, x_3) = c_1) \wedge ((\exists x_2)x_3 = x_1)$
6.  $((\forall x_3)x_3 = x_4) \rightarrow ((\forall x_5)x_5 = x_2)$
7.  $((\exists x_3)x_3 = c_1) \vee ((\exists x_4)x_3 = x_4)$

- (b) Realice las siguientes sustituciones:

1.  $x_2 = x_1[x_1/x_1]$
2.  $x_1 = x_1[x_3/x_1]$
3.  $x_2 = c_1[f_1(x_1, x_3)/x_3]$
4.  $((\forall x_4)f_1(x_1, x_3) = c_1) \wedge ((\exists x_2)x_3 = x_1)[f_1(x_1, x_2)/x_3]$
5.  $((\forall x_3)x_3 = x_4) \rightarrow ((\forall x_5)x_5 = x_2)[f_1(x_1, x_2)/x_5]$
6.  $((\exists x_3)x_3 = c_1) \vee ((\exists x_4)x_3 = x_4)[f_1(x_1, x_2)/x_3][x_1/x_1]$

- (c) Para las fórmulas resultados de las sustituciones anteriores determine cuáles ocurrencias de variables son libres y cuáles son ligadas. Para aquellas que sean ligadas, señale el cuantificador al cual están ligadas. Compare el resultado con los obtenidos en la parte a.

## Resolución

### Parte a

Determinemos las ocurrencias ligadas y las ocurrencias libres de cada variable en las siguientes fórmulas.

### Fórmula 1

$$x_2 = x_1$$

- $x_2$  tiene 1 ocurrencia libre.
- $x_1$  tiene 1 ocurrencia libre.

### Fórmula 2

$$x_1 = x_1$$

- $x_1$  tiene 2 ocurrencias libres.

### Fórmula 3

$$x_2 = c_1$$

- $x_2$  tiene 1 ocurrencia libre.

### Fórmula 4

$$(\exists x_2)f_1(x_2, x_3) = c_1$$

- $x_2$  tiene 2 ocurrencias ligadas. Ligada a  $(\exists x_2)$ .
- $x_3$  tiene 1 ocurrencia libre.

### Fórmula 5

$$((\forall x_4)f_1(x_1, x_3) = c_1) \wedge ((\exists x_2)x_3 = x_1)$$

- $x_4$  tiene 1 ocurrencia ligada. Ligada a  $(\forall x_4)$ .
- $x_1$  tiene 2 ocurrencias libres.
- $x_3$  tiene 2 ocurrencias libres.
- $x_2$  tiene 1 ocurrencia ligada. Ligada a  $(\exists x_2)$ .

### Fórmula 6

$$((\forall x_3)x_3 = x_4) \rightarrow ((\forall x_5)x_5 = x_2)$$

- $x_3$  tiene 2 ocurrencias ligadas. Ligada a  $(\forall x_3)$ .
- $x_4$  tiene 1 ocurrencia libre.
- $x_5$  tiene 2 ocurrencias ligadas. Ligada a  $(\forall x_5)$ .
- $x_2$  tiene 1 ocurrencia libre.

## Fórmula 7

$$((\exists x_3)x_3 = c_1) \vee ((\exists x_4)x_3 = x_4)$$

- $x_3$  tiene 2 ocurrencias ligadas. Ligada a  $(\exists x_3)$ .
- $x_3$  tiene 1 ocurrencia libre.
- $x_4$  tiene 2 ocurrencias ligadas. Ligada a  $(\exists x_4)$ .

## Parte b

En esta parte realizamos las sustituciones dadas.

### Sustitución 1

$$x_2 = x_1[x_1/x_1]$$

El resultado es:

$$x_2 = x_1$$

### Sustitución 2

$$x_1 = x_1[x_3/x_1]$$

El resultado es:

$$x_3 = x_3$$

### Sustitución 3

$$x_2 = c_1[f_1(x_1, x_3)/x_3]$$

El resultado es:

$$x_2 = c_1$$

### Sustitución 4

$$((\forall x_4)f_1(x_1, x_3) = c_1) \wedge ((\exists x_2)x_3 = x_1)[f_1(x_1, x_2)/x_3]$$

El resultado es:

$$((\forall x_4)f_1(x_1, f_1(x_1, x_2)) = c_1) \wedge ((\exists x_2)f_1(x_1, x_2) = x_1)$$

**ATENCIÓN:** Nos apareció una nueva ligadura en la subfórmula:  $(\exists x_2)f_1(x_1, x_2) = x_1$

### Sustitución 5

$$((\forall x_3)x_3 = x_4) \rightarrow ((\forall x_5)x_5 = x_2)[f_1(x_1, x_2)/x_5]$$

El resultado es:

$$((\forall x_3)x_3 = x_4) \rightarrow ((\forall x_5)x_5 = x_2)$$

En este caso la fórmula queda igual, ya que las dos ocurrencias de  $x_5$  son ligadas.

### Sustitución 6

$$((\exists x_3)x_3 = c_1) \vee ((\exists x_4)x_3 = x_4)[f_1(x_1, x_2)/x_3][x_1/x_1]$$

Vayamos paso a paso:

$$((\exists x_3)x_3 = c_1) \vee ((\exists x_4)f_1(x_1, x_2) = x_4)[x_1/x_1]$$

El resultado final es:

$$((\exists x_3)x_3 = c_1) \vee ((\exists x_4)f_1(x_1, x_2) = x_4)$$

### Parte c

Análoga a la parte (a).