

## Ejercicio 7

### Consigna

Considere el alfabeto  $\Sigma = \{a, b, c\}$ , y los lenguajes  $\Delta$  y  $\Gamma$  definidos en el ejercicio 6. Demuestre, usando el principio de inducción que corresponda, que:

- el largo de las palabras de  $\Delta$  es múltiplo de tres.
- todas las palabras de  $\Delta$  tiene una cantidad par de ocurrencias de la letra  $b$ .
- todas las palabras de  $\Gamma$  tiene una cantidad par de ocurrencias de la letra  $b$ .
- en  $\Gamma$  no hay palabras de largo dos.

### Resolución

Antes de empezar, enunciemos el PIP para ambos lenguajes:

#### LENGUAJE $\Gamma$

Sea  $P$  una propiedad para el lenguaje  $\Gamma$ , si:

- $P(\varepsilon)$
- $P(a)$
- Dados  $\alpha, \beta \in \Gamma$ ; si  $P(\alpha)$  y  $P(\beta)$  entonces  $P(b\alpha c\beta b)$

#### LENGUAJE $\Delta$

Sea  $P$  una propiedad para el lenguaje  $\Delta$ , si:

- $P(\varepsilon)$
- Dado  $\alpha \in \Delta$ ; si  $P(\alpha)$  entonces  $P(b\alpha bc)$
- Dado  $\alpha \in \Delta$ ; si  $P(\alpha)$  entonces  $P(b\alpha ba)$

Ahora si, empecemos a demostrar las propiedades:

### PARTE A

$P$ : El largo de las palabras de  $\Delta$  es múltiplo de 3

#### CASO BASE:

$P(\varepsilon)$ : Se cumple trivialmente porque el largo de una palabra vacía es  $0 = 3 \cdot 0$

#### PASO INDUCTIVO:

Dado  $\alpha \in \Delta$ , quiero probar:

- Si  $P(\alpha)$  entonces  $P(b\alpha bc)$
- Si  $P(\alpha)$  entonces  $P(b\alpha ba)$

Entonces asumo  $P(\alpha)$ ; es decir que el largo de  $\alpha$  es múltiplo de tres. Se observa trivialmente que en ambos casos estoy sumando tres letras, entonces obtendré un múltiplo de 3. Algebraicamente:

$$|\alpha| = 3 \cdot k \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \quad |b\alpha ba| = 3 \cdot (k+1) \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \quad |b\alpha bc| = 3 \cdot (k+1) \text{ para algún } k \in \mathbb{N}$$

Esto prueba la propiedad  $P$ : El largo de las palabras de  $\Delta$  es múltiplo de 3

## PARTE B

Casi análoga a la parte A, es exactamente el mismo razonamiento

## PARTE C

$P$ : Todas las palabras de  $\Gamma$  tienen una cantidad par de ocurrencias de la letra  $b$

### PASO BASE

Consta de dos pasos porque tenemos dos elementos base:

- $P(\varepsilon)$ : Se cumple trivialmente pues al no tener  $b$ , tiene  $0 = 2 \cdot 0$  ocurrencias de  $b$
- $P(a)$ : Se cumple por el mismo razonamiento.

### Paso inductivo

Dado  $\alpha, \beta \in \Delta$ , quiero probar  $P(b\alpha c\beta b)$  asumiendo lo siguiente:

- $P(\alpha)$ :  $\alpha$  tiene una cantidad de ocurrencias de  $b$  par.
- $P(\beta)$ :  $\beta$  tiene una cantidad de ocurrencias de  $b$  par.

Llamemos  $O(b, \alpha)$ ,  $O(b, \beta)$  a las ocurrencias de  $b$  en  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Podemos decir que:

$$O(b, \alpha) = 2 \cdot k_1, O(b, \beta) = 2 \cdot k_2$$

Para algunos  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  Ahora, queremos hallar  $O(b, b\alpha c\beta b)$ , podemos ver que esto está dado por:

$$O(b, b\alpha c\beta b) = O(b, \alpha) + O(b, \beta) + 2$$

Ya que entendemos que la cantidad de  $b$  para esta palabra será la suma entre la cantidad de  $b$  en  $\alpha$  y  $\beta$  más las dos que se agregan en el paso de construcción. Sustituyendo con lo que hallamos anteriormente:

$$\begin{aligned} O(b, b\alpha c\beta b) &= 2 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \\ &= 2 \cdot (k_1 + k_2 + 1) \end{aligned}$$

Con esto concluimos que  $b\alpha c\beta b$  tiene una cantidad de ocurrencias de  $b$  par. Por lo que probamos la propiedad:  $P$ : Todas las palabras de  $\Gamma$  tienen una cantidad par de ocurrencias de la letra  $b$

## PARTE D

Este ejercicio sale utilizando el PIP para  $\Gamma$ , quizás no es tan análogo a los anteriores, pero es muy sencillo de probar también