Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 6

Consigna

1. Sabemos que para toda sentencia σ y estructura A del tipo adecuado se cumple que $A \vDash \sigma$ o $A \vDash \neg\sigma$. Muestre que esta propiedad no vale para σ con $FV(\sigma) \neq \emptyset$.
2. Muestre que ni aún para el caso en que σ sea una sentencia vale que $\vDash \sigma$ o $\vDash \neg\sigma$.

Resolución

Parte 1

Para esta parte queremos buscar una fórmula $\sigma \in FORM_A$ tal que $FV(\sigma) \neq \emptyset$ y una estructura A del tipo adecuado como contraejemplo, tal que se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $A \not\vDash \sigma$
2. $A \not\vDash \neg\sigma$

Veamos que significan ambas según la definición de $\vDash$:

1. Existe v^A tal que $v^A(cl(\sigma)) = 0$
2. Existe v^A tal que $v^A(cl(\neg\sigma)) = 0$

A partir de esto, establezcamos una estructura y la sentencia que vamos a usar:

- $A = \langle \mathbb{N}, Primo, +, 0 \rangle$ con el alfabeto predeterminado (P_1, f_1, c_1)
- $\sigma = P_1(x)$

Ahora, veamos que podemos decir sobre $A \vDash \sigma$:

$$A \models P_1(x)$$
$$\iff \text{(definición de } \models)$$
$$v^A(cl(P_1(x))) = 1$$
$$\iff \text{(definición de clausura)}$$
$$v^A((\forall x)P_1(x)) = 1$$
$$\iff \text{(como } v^A \text{ es una interpretación)}$$
$$min\{v^A(P_1(x)[\overline{n}/x]) \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$$
$$\iff \text{(considerando el 4)}$$
$$\text{ABSURDO! Pues 4 no es primo}$$

Por lo tanto, la suposición inicial fue incorrecta, esto implica que $A \not\models \sigma$. Veamos que podemos decir ahora sobre $A \models \neg\sigma$:

$$A \models \neg P_1(x)$$
$$\iff \text{(definición de } \models)$$
$$v^A(cl(\neg P_1(x))) = 1$$
$$\iff \text{(definición de clausura)}$$
$$v^A((\forall x)\neg P_1(x)) = 1$$
$$\iff \text{(como } v^A \text{ es una interpretación)}$$
$$min\{v^A(\neg P_1(x)[\overline{n}/x]) \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$$
$$\iff \text{(considerando el 2)}$$
$$v^A(\neg P_1(\overline{2})) = 1$$
$$\iff \text{(como } v^A \text{ es una interpretación)}$$
$$1 - v^A(P_1(\overline{2})) = 1$$
$$\iff \text{(aritmética)}$$
$$v^A(P_1(\overline{2})) = 0$$
$$\iff (v^A(P_1(\overline{2})=1))$$
$$\text{ABSURDO!}$$

Lo que escribimos parece más complicado de lo que realmente es, pero básicamente llegamos a que "2 es primo" es una afirmación **FALSA** a partir de nuestras hipótesis, lo cual es claramente absurdo. Esto implica que $A \not\models \sigma$.

Con esto concluimos la prueba de la primer parte.

Parte 2

Para esta parte queremos ver que dada una sentencia $\sigma \in SENT$, tenemos que las siguientes afirmaciones se cumplen simultaneamente:

1. $\not\models \sigma$
2. $\not\models \neg\sigma$

Esto significa que lo que queremos probar es que existen dos estructuras A, B del tipo adecuado que cumple lo siguiente:

1. $v^A(\sigma) = 0$
2. $v^B(\neg\sigma) = 0$

Consideremos $\sigma = (\forall x)P_1(x)$ y veamos ambas subpartes:

Subparte 1

Consideremos para este caso lo siguiente:

- $A = \langle \mathbb{N}, Primo, +, 0 \rangle$ con el alfabeto predeterminado (P_1, f_1, c_1)

Ya probamos en la parte anterior que $v^A(\sigma) = 0$

Subparte 2

- $B = \langle \mathbb{R}, Negativo, +, 1 \rangle$ con el alfabeto predeterminado (P_1, f_1, c_1).

Donde negativo (unario) contiene todos los números negativos.

Probemos que $v^B(\sigma) = 0$

$$
\begin{gathered}
v^B((\forall x)P_1(x)) \\
=_{(\text{como } v^A \text{ es una interpretación})} \\
min\{v^B(P_1(\overline{y})) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
=_{(\text{considerando el } 1)} \\
0
\end{gathered}
$$

Esto concluye la prueba de la segunda parte.