Lógica

Mauro Polenta Mora

CLASE 19 - 09/07/2025

Deducción natural para lógica de predicados

Propiedades de los cuantificadores

Lema: propiedades de derivabilidad de $\forall$

- Si $\Gamma \vdash \varphi$ y $x \notin FV(\Gamma)$ entonces $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$.
- Si $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$ y t libre para x en φ, entonces $\Gamma \vdash \varphi[t/x]$

Lema: propiedades de derivabilidad de $\exists$

- Si t es libre para x en φ entonces $\varphi[t/x] \vdash (\exists x)\varphi$
- Si $x \notin FV(\psi) \cup FV(\Gamma)$ entonces, si $\{\Gamma, \varphi\} \vdash \psi$ luego $\{\Gamma, (\exists x)\varphi\} \vdash \psi$

Igualdad e identidad

Hasta ahora hemos interpretado el símbolo $='$ en cada estructura como la igualdad. Otra alternativa es caracterizarlo como identidad a través de axiomas.

Esquemas de axiomas

1. $I1 : (\forall x) x =' x$
2. $I2 : (\forall x)(\forall y) x =' y \to y =' x$
3. $I3 : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x =' y \land y =' z \to x =' z)$
4. $I4 : (\forall y_1) \dots (\forall y_n)(\forall z_1) \dots (\forall z_n) \left(\bigwedge_{i=1,\dots,n} y_i =' z_i \right) \to t(y_1, \dots, y_n) =' t(z_1, \dots, z_n)$
   $(\forall y_1) \dots (\forall y_n)(\forall z_1) \dots (\forall z_n) \left(\bigwedge_{i=1,\dots,n} y_i =' z_i \right) \to \varphi(y_1, \dots, y_n) \leftrightarrow \varphi(z_1, \dots, z_n)$

Donde la última noción es la noción que tenemos de sustituir cosas equivalentes entre si, en términos primero, y luego en fórmulas.

Propiedades de los axiomas

- Si una estructura $\mathcal{M}$ es modelo de $I1, I2, I3$ entonces el símbolo $='$ es interpretado por una relación de equivalencia.

- $I4$ exige además que la relación sea una congruencia con respecto a todas las relaciones definibles en el lenguaje.
- Si interpretamos a $='$ como la identidad, se demuestra que toda estructura $\mathcal{M}$ cumple:
  - $\mathcal{M} \models \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$

Identidad y deducción natural

Los axiomas pueden incorporarse como reglas de derivación:

Axioma $I1$

$$\frac{}{t \doteq t}\ RI1$$

Figure 1: Figura 1

Axioma $I2$

$$\frac{t \doteq s}{s \doteq t}\ RI2$$

Figure 2: Figura 2

Axioma $I3$

$$\frac{t \doteq s \qquad s \doteq r}{t \doteq r}\ RI3$$

Figure 3: Figura 3

Axioma $I4$

Para términos:

Para fórmulas:

$(*)$ Para cada $i = 1, \dots, n$ se tiene que t_i y s_i están libres para z_i en φ

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \dots \quad t_n \doteq s_n}{t[t_1, \dots, t_n/z_1, \dots, z_n] \doteq t[s_1, \dots, s_n/z_1, \dots, z_n]} \; RI4$$

Figure 4: Figura 4

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \dots \quad t_n \doteq s_n \quad \varphi[t_1, \dots, t_n/z_1, \dots, z_n]}{\varphi[s_1, \dots, s_n/z_1, \dots, z_n]} \; RI4^*$$

Figure 5: Figura 5

Otras versiones de las reglas

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de tipo $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k\rangle$. Entonces los axiomas $RI4$ pueden derivarse de:

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \dots \quad t_{a_j} \doteq s_{a_j}}{f_j(t_1, \dots, t_{a_j}) \doteq f_j(s_1, \dots, s_{a_j})} \; RI4'$$

Figure 6: Figura 6

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \qquad \dots \qquad t_{r_i} \doteq s_{r_i} \qquad P(t_1, \dots, t_{r_i})}{P_i(s_1, \dots, s_{r_i})} \; RI4'^{*}$$

Figure 7: Figura 7