# Lógica

Mauro Polenta Mora

# Ejercicio 13

## Consigna

Considere la siguiente definición de concatenación:

1. $append : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$
2. $append(\varepsilon, w) = w$
3. $append(au, w) = aappend(u, w)$

(a) Demuestre que $\varepsilon$ es neutro de esta función, es decir:

$$(\forall u \in \Sigma^*)\, append(\varepsilon, u) = u \quad \text{y} \quad (\forall u \in \Sigma^*)\, append(u, \varepsilon) = u$$

(b) Demuestre que el largo de concatenar dos tiras es la suma de sus largos.

# Resolución (parte a)

## Premisa

Definimos $\Sigma^*$ con la inserción a la izquierda.

## Ejercicio

Para demostrar que $\varepsilon$ es neutro de la función *append*, tenemos que probar dos cosas:

1. $(\forall u \in \Sigma^*)\, append(\varepsilon, u) = u$
2. $(\forall u \in \Sigma^*)\, append(u, \varepsilon) = u$

La primera es verdadera directamente, por la regla (2) de la definición de la función. La segunda la probaremos usando el PIP sobre $\Sigma^*$. Queremos probar la propiedad $P(w) : append(w, \varepsilon) = w \quad (\forall w \in \Sigma^*)$

**PASO BASE:**

$P(\varepsilon) : append(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon$

Esto es verdadero, usando la regla (2) de la definición de la función

**PASO INDUCTIVO:**

(H) $P(w) : append(w, \varepsilon) = w$

(I) $P(xw) : append(xw, \varepsilon) = xw$

Ahora, veamos que podemos decir de la tesis, utilizando la definición de *append*:

$$\begin{aligned}
&append(xw, \varepsilon)\\
&= (\text{regla (2) def. } append)\\
&xappend(w, \varepsilon)\\
&= (\text{hip. inductiva})\\
&xw
\end{aligned}$$

Por lo tanto, probamos la propiedad $P(w) : append(w, \varepsilon) = w \quad (\forall w \in \Sigma^*)$

# Resolución (parte b)

Queremos probar que:

$$Largo(append(u, w)) = Largo(u) + Largo(w)$$

Usaremos el PIP sobre $\Sigma^*$ con la propiedad $P(u) : Largo(append(u, w)) = Largo(u) + Largo(w)$

**PASO BASE:**

$P(\varepsilon) : Largo(append(\varepsilon, w)) = Largo(\varepsilon) + Largo(w)$

Veamos que podemos decir de la propiedad usando una cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
&Largo(append(\varepsilon, w)) = Largo(\varepsilon) + Largo(w)\\
&= (\text{def. } append \text{ y regla (i) } Largo)\\
&Largo(w) = 0 + Largo(w)
\end{aligned}$$

Con esto, queda probado el paso base.

**PASO INDUCTIVO**

(H) $P(u) : Largo(append(u, w)) = Largo(u) + Largo(w)$
(I) $P(xu) : Largo(append(xu, w)) = Largo(xu) + Largo(w)$

Veamos que podemos decir de la tesis usando una cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
&Largo(append(xu, w)) = Largo(xu) + Largo(w)\\
&= (\text{regla (iii) } append\text{; regla (ii) } Largo)\\
&Largo(xappend(u, w)) = (1 + Largo(u)) + Largo(w)\\
&= (\text{regla (ii) } Largo)\\
&1 + Largo(append(u, w)) = (1 + Largo(u)) + Largo(w)\\
&= (\text{simplificar})\\
&Largo(append(u, w)) = Largo(u) + Largo(w)
\end{aligned}$$

Esto prueba la propiedad $P(u) : Largo(append(u, w)) = Largo(u) + Largo(w)$.

## Conclusión

Cuando tenemos este tipo de funciones (que tienen más de un argumento), la idea es fijar uno de ellos, y aplicar el ERP para el primero. Es lo que hicimos para resolver la parte b, solo que sin aclararlo de antemano. Viendo como se resuelve dicha parte, podemos entender porque usamos este método.

Otra cosa importante que debemos observar sobre la parte b, es que nuestro razonamiento funciona sin importar que palabra $w \in \Sigma^*$ estemos usando. Pero esto es fundamental para que la propiedad sea cierta, tenemos que saber que se verifica para todo $w \in \Sigma^*$