

## Ejercicio 8

### Consigna

- (a) Defina una función de rango  $r : PROP \rightarrow \mathbb{N}$  que dada una fórmula proposicional calcula la altura del árbol asociado a esa fórmula. Ejemplo:  $r(p_i) = 0$ .

Calcule el rango de las proposiciones del Ejercicio 1.

- (b) Defina una función  $con : PROP \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $con(\varphi)$  denota la cantidad de ocurrencias de conectivos en la fórmula  $\varphi$ .

Calcule  $con$  para las proposiciones del Ejercicio 1.

- (c) Indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta y cuál no, y en cada caso justifique su respuesta mediante la demostración:
1. Para toda fórmula  $\varphi$ ,  $r(\varphi) \geq con(\varphi)$ .
  2. Para toda fórmula  $\varphi$ ,  $r(\varphi) < con(\varphi)$ .
  3. Para toda fórmula  $\varphi$ ,  $r(\varphi) \leq con(\varphi)$ .

### Premisa

Estaremos definiendo funciones usando el ERP sobre  $PROP$ , veamos como se define dicho esquema:

Sea  $B$  un conjunto, y:

1. una función  $H_{AT} : AT \rightarrow B$ , y
2. para cada conectivo  $*$   $\in C_2$ , una función  $H_* : PROP \times B \times PROP \times B \rightarrow B$ , y
3. una función  $H_{\neg} : PROP \times B \rightarrow B$

Entonces, existe una única función  $F : PROP \rightarrow B$  tal que:

1.  $F(\alpha) = H_{AT}(\alpha)$  con  $\alpha \in AT$
2.  $F((\alpha * \beta)) = H_*(\alpha, F(\alpha), \beta, F(\beta))$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
3.  $F((\neg\alpha)) = H_{\neg}(\alpha, F(\alpha))$  con  $\alpha \in PROP$

### Resolución (parte a)

**Observación:** Se define la altura de un árbol por la máxima cantidad de aristas que se deben recorrer para llegar a una hoja.

Definamos la función  $r : PROP \rightarrow \mathbb{N}$  que dado una fórmula proposicional, calcula la altura del árbol asociado a esa fórmula. Para esto definamos las funciones auxiliares  $H_{AT}$ ,  $H_*$  y  $H_{\neg}$ :

1.  $H_{AT}(\alpha) = 0$  con  $\alpha \in AT$
2.  $H_*(\alpha, h_1, \beta, h_2) = 1 + \max(h_1, h_2)$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
3.  $H_{\neg}(\alpha, h) = 1 + h$  con  $\alpha \in PROP$

Entonces, definimos  $r : PROP \rightarrow \mathbb{N}$  como:

1.  $r(\alpha) = 0$  con  $\alpha \in AT$
2.  $r((\alpha * \beta)) = 1 + \max(r(\alpha), r(\beta))$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
3.  $r((\neg\alpha)) = 1 + r(\alpha)$  con  $\alpha \in PROP$

fig1

Figure 1: fig1

fig2

Figure 2: fig2

Calculemos  $r$  para las proposiciones del Ejercicio 1:

### Proposición 1

$$(((\neg p_2) \rightarrow (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \in PROP$$

Calculemos su altura:

$$r((((\neg p_2) \rightarrow (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3))) = 4$$

### Proposición 2

$$((p_7 \rightarrow (\neg \perp)) \leftrightarrow ((p_4 \wedge (\neg p_2)) \rightarrow p_1)) \in PROP$$

Calculemos su altura:

$$r(((p_7 \rightarrow (\neg \perp)) \leftrightarrow ((p_4 \wedge (\neg p_2)) \rightarrow p_1))) = 4$$

### Resolucion (parte b)

Definamos la función  $con : PROP \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $con(\varphi)$  denota la cantidad de ocurrencias de conectivos en la fórmula  $\varphi$ . Para esto definamos las funciones auxiliares  $H_{AT}$ ,  $H_*$  y  $H_{\neg}$ :

1.  $H_{AT}(\alpha) = 0$  con  $\alpha \in AT$
2.  $H_*(\alpha, c_1, \beta, c_2) = 1 + c_1 + c_2$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
3.  $H_{\neg}(\alpha, c) = 1 + c$  con  $\alpha \in PROP$

Entonces, definimos  $con : PROP \rightarrow \mathbb{N}$  como:

1.  $con(\alpha) = 0$  con  $\alpha \in AT$
2.  $con((\alpha * \beta)) = 1 + con(\alpha) + con(\beta)$  con  $\alpha, \beta \in PROP$
3.  $con((\neg \alpha)) = 1 + con(\alpha)$  con  $\alpha \in PROP$

Calculemos  $con$  para las proposiciones del Ejercicio 1:

fig1

Figure 3: fig1

fig2

Figure 4: fig2

fig3

Figure 5: fig3

### Proposición 1

$$(((\neg p_2) \rightarrow (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \in PROP$$

Calculemos la cantidad de conectivos:

$$con((((\neg p_2) \rightarrow (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3))) = 6$$

### Proposición 2

$$((p_7 \rightarrow (\neg \perp)) \leftrightarrow ((p_4 \wedge (\neg p_2)) \rightarrow p_1)) \in PROP$$

Calculemos la cantidad de conectivos:

$$con(((p_7 \rightarrow (\neg \perp)) \leftrightarrow ((p_4 \wedge (\neg p_2)) \rightarrow p_1))) = 6$$

Observar que  $\perp$  no es considerado un conectivo.

### Resolucion (parte c)

#### Afirmación 1

Para toda fórmula  $\varphi$ ,  $r(\varphi) \geq con(\varphi)$ .

Esta afirmación es FALSA, tenemos como contraejemplo cualquiera de las proposiciones del Ejercicio 1.

#### Afirmación 2

Para toda fórmula  $\varphi$ ,  $r(\varphi) < con(\varphi)$ .

Esta afirmación es FALSA, veamos el siguiente contraejemplo:

$$\varphi = \neg(\neg(\neg p_1))$$

Observemos que:  $r(\varphi) = 3$  y  $con(\varphi) = 3$

#### Afirmación 3

Para toda fórmula  $\varphi$ ,  $r(\varphi) \leq con(\varphi)$ .

Esta afirmación es VERDADERA, veamos la demostración usando el PIP sobre *PROP*

**PASO BASE**  $P(\alpha) : r(\alpha) \leq con(\alpha)$  con  $\alpha \in AT$

Usando las respectivas reglas 1 de  $r$  y  $con$  tenemos que:

1.  $r(\alpha) = 0$  con  $\alpha \in AT$
2.  $con(\alpha) = 0$  con  $\alpha \in AT$

Entonces,  $r(\alpha) \leq con(\alpha)$

## **PASO INDUCTIVO**

(H)  $P(\varphi) : r(\varphi) \leq con(\varphi)$  con  $\varphi \in PROP$

### **PARTE 1**

(T)  $P((\neg\varphi)) : r((\neg\varphi)) \leq con((\neg\varphi))$  con  $\varphi \in PROP$

Usando las respectivas reglas 3 de  $r$  y  $con$  tenemos que:

1.  $r((\neg\varphi)) = 1 + r(\varphi)$  con  $\varphi \in PROP$
2.  $con((\neg\varphi)) = 1 + con(\varphi)$  con  $\varphi \in PROP$

Entonces veamos la siguiente cadena de sii:

$$r((\neg\varphi)) \leq con((\neg\varphi)) \iff 1 + r(\varphi) \leq 1 + con(\varphi) \iff r(\varphi) \leq con(\varphi)$$

Donde lo último se cumple por la hipótesis

### **PARTE 2**

(T)  $P((\varphi * \psi)) : r((\varphi * \psi)) \leq con((\varphi * \psi))$  con  $\varphi, \psi \in PROP$

Usando las respectivas reglas 2 de  $r$  y  $con$  tenemos que:

1.  $r((\varphi * \psi)) = 1 + \max(r(\varphi), r(\psi))$  con  $\varphi, \psi \in PROP$
2.  $con((\varphi * \psi)) = 1 + con(\varphi) + con(\psi)$  con  $\varphi, \psi \in PROP$

Entonces veamos la siguiente cadena de sii:

$$r((\varphi * \psi)) \leq con((\varphi * \psi)) \iff 1 + \max(r(\varphi), r(\psi)) \leq 1 + con(\varphi) + con(\psi) \iff \max(r(\varphi), r(\psi)) \leq con(\varphi) + con(\psi)$$

Pero sabemos por hipótesis que:

1.  $r(\varphi) \leq con(\varphi)$
2.  $r(\psi) \leq con(\psi)$

Por consecuencia,  $\max(r(\varphi), r(\psi)) \leq con(\varphi) + con(\psi)$

Entonces,  $r((\varphi * \psi)) \leq con((\varphi * \psi))$

Esto prueba la propiedad para todo  $\varphi$