

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## CLASE 8 - 27/03/2025

### Deducción natural

#### Introducción

Tenemos dos formas de trabajar para justificar la validez de un razonamiento.

- **Justificación semántica** ( $\Gamma \models \alpha$ ): probar que la veracidad de las hipótesis implica la veracidad de la conclusión.
- **Justificación sintáctica** ( $\Gamma \vdash \alpha$ ): demostrar la conclusión a partir de las hipótesis usando pasos claramente definidos y explicitados.

#### Justificación sintáctica

- $(\Gamma \vdash \beta)$ :
  - Demostrar la conclusión  $\beta$  a partir de las hipótesis de  $\Gamma$  usando pasos claramente definidos y explicitados.
- Qué es una demostración?
  - Es una prueba formal.
  - La corrección de la demostración depende de su forma y no del significado.
  - Cumple reglas precisas de construcción.

#### Pruebas formales

- Cómo probamos usualmente?
  - Sostenemos hipótesis iniciales (las podemos dar como dato en todo instante de la prueba).
  - Encadenamos pasos simples de deducción que nos permite llegar a la conclusión.
- Por qué pruebas formales?
  - Porque podemos compilar las pruebas hechas, y asegurar su corrección o detectar errores mediante el análisis de su estructura.

#### Ejemplo

En deducción natural, las demostraciones se formalizan mediante árboles:

$$\frac{\frac{[\alpha \wedge \beta]^1}{\beta} E\wedge_2 \quad \frac{[\alpha \wedge \beta]^1}{\alpha} E\wedge_1}{\beta \wedge \alpha} I\wedge \quad \frac{\beta \wedge \alpha}{\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha} I \rightarrow^1$$

Figure 1: Figura 1

## Reglas de construcción de pruebas

- Construyen una prueba a partir de subpruebas más simples.
- Manejan correctamente las hipótesis (hipótesis globales) y supuestos (hipótesis locales) en cada etapa de la prueba.

El análisis de corrección de una prueba formal puede mecanizarse, y lo ha sido. Existen asistentes y verificadores automáticos de pruebas para el cálculo proposicional.

En general para cada conectivo se definen:

- **Reglas de introducción:** Indican como probar una fórmula con ese conectivo.
- **Reglas de eliminación:** Indican como utilizar una fórmula con ese conectivo.

## Reglas de introducción

### Conjunción ( $\wedge$ )

- Hipótesis:  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
- Tesis:  $\alpha \wedge \beta$
- Demostración:
  - Probar  $\alpha$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
  - Probar  $\beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
  - Luego, hemos probado  $\alpha \wedge \beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} I\wedge$$

Figure 2: Figura 2

### Implica ( $\rightarrow$ )

- Hipótesis:  $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$ .

- Tesis:  $\alpha \rightarrow \beta$
- Demostración:
  - Supongamos  $\alpha$
  - Probar  $\beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$  y  $\alpha$
  - Luego, hemos probado  $\alpha \rightarrow \beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .

$$\frac{\beta}{\alpha \rightarrow \beta} I \rightarrow^{(k)}$$

Figure 3: Figura 3

### Disyunción ( $\vee$ )

- Hipótesis:  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
- Tesis:  $\alpha \vee \beta$
- Demostración:
  - **Opción 1:**
    - \* Probar  $\alpha$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$
    - \* Luego, hemos probado  $\alpha \vee \beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
  - **Opción 2:**
    - \* Probar  $\beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$
    - \* Luego, hemos probado  $\alpha \vee \beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} I \vee_1 \quad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta} I \vee_2$$

### Si y sólo si ( $\leftrightarrow$ )

- Hipótesis:  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
- Tesis:  $\alpha \leftrightarrow \beta$
- Demostración:
  - Directo: Supongamos  $\alpha$  y probamos  $\beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$ .
  - Recíproco: Supongamos  $\beta$  y probamos  $\alpha$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n, [\beta]^k$ .
  - Luego, hemos probado que  $\alpha \leftrightarrow \beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} I \leftrightarrow (k)$$

Figure 4: Figura 6

### Negación ( $\neg$ )

- Hipótesis:  $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$ .
- Tesis:  $\neg\alpha$
- Demostración:
  - Supongamos  $\alpha$  y probamos una contradicción usando  $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$ .
  - Luego, hemos probado  $\neg\alpha$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .

$$\frac{\perp}{\neg\alpha} I \neg (k)$$

Figure 5: Figura 7

### Reglas de eliminación

#### Conjunción ( $\wedge$ )

- Hipótesis:  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
- Tesis:  $\alpha$
- Demostración:
  - Probamos  $\alpha \wedge \beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
  - Luego, hemos probado  $\alpha$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
  - Simétricamente para  $\beta$ .

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} E \wedge_1$$

Figure 6: Figura 8

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} E \wedge_2$$

Figure 7: Figura 9

### Implica ( $\rightarrow$ )

- Hipótesis:  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
- Tesis:  $\beta$
- Demostración:
  - Probamos  $\alpha \rightarrow \beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
  - Probamos  $\alpha$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
  - Luego, probamos  $\beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta} E \rightarrow$$

Figure 8: Figura 10

### Disyunción ( $\vee$ )

- Hipótesis:  $\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^k$  y  $\delta_1, \dots, \delta_n, [\beta]^k$ .
- Tesis:  $\delta$
- Demostración:
  - Probamos  $\alpha \vee \beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
  - Caso A. Probamos  $\delta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$  y  $\alpha$ .
  - Caso B. Probamos  $\delta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$  y  $\beta$ .
  - Luego, probamos  $\delta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \delta \quad \delta}{\delta} E \vee^{(k)}$$

Figure 9: Figura 11

### Si y sólo si ( $\leftrightarrow$ )

- Hipótesis:  $\delta_1, \dots, \delta_n$
- Tesis:  $\beta$
- Demostración:

- Probamos  $\alpha \leftrightarrow \beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
- Probamos  $\alpha$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
- Luego, probamos  $\beta$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
- Simétricamente para  $\alpha$ .

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta} \quad \frac{\alpha}{\beta} E \leftrightarrow_1 \quad \frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha} \quad \frac{\beta}{\alpha} E \leftrightarrow_2$$

### Negación ( $\neg$ )

- Hipótesis:  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
- Tesis: Absurdo.
- Demostración:
  - Probamos  $\neg\alpha$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
  - Probamos  $\alpha$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
  - Luego, hemos probado  $\perp$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .

$$\frac{\neg\alpha \quad \alpha}{\perp} E \neg$$

Figure 10: Figura 14

### Absurdo ( $\perp$ )

- Hipótesis:  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
- Tesis:  $\alpha$ .
- Demostración (por reducción al absurdo):
  - Supongamos  $\neg\alpha$
  - Llegamos a una contradicción usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$  y  $[\neg\alpha]^k$ .
  - Luego, hemos probado  $\alpha$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .

$$\frac{\perp}{\alpha} RAA^{(k)}$$

Figure 11: Figura 15

- Demostración:
  - Llegamos a una contradicción usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .
  - Luego, hemos probado  $\alpha$  usando  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .

$$\frac{\perp}{\alpha} \quad E \perp$$

Figure 12: Figura 16