

Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 8

Consigna

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1, 1, 2; 2, 1; 0 \rangle$ con símbolos de predicado P_1, P_2 (unarios), P_3 (binario) y símbolos de función f_1 (binario), f_2 (unario).

Sea la estructura:

$$M = \langle PROP, \{\varphi \mid \models \varphi\}, \{\perp\}, \{(\varphi_1, \varphi_2) \mid \varphi_1 \text{ eq } \varphi_2\}, F_\wedge, F_\neg \rangle$$

Donde $F_\wedge(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ y $F_\neg(\varphi) = (\neg\varphi)$.

Indique si las siguientes frases son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

1. $M \models (\forall x)(P_1(f_2(x)) \rightarrow ((\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(x, y))))$
2. $M \models (P_1(x) \rightarrow P_2(x))$
3. $M \models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \rightarrow P_1(f_1(x, y)))$

Resolución

La idea para esta parte es usar las siguientes propiedades sobre la relación \models :

La relación \models refleja el significado intuitivo de los conectivos y los cuantificadores en las sentencias.

Sean $\alpha, \beta \in SENT$, $\gamma \in FORM$, $FV(\gamma) \subseteq \{x\}$. Entonces,

- $\mathcal{M} \models (\alpha \wedge \beta)$ sii $\mathcal{M} \models \alpha$ y $\mathcal{M} \models \beta$
- $\mathcal{M} \models (\alpha \vee \beta)$ sii $\mathcal{M} \models \alpha$ o $\mathcal{M} \models \beta$
- $\mathcal{M} \models (\neg\alpha)$ sii $\mathcal{M} \not\models \alpha$
- $\mathcal{M} \models (\alpha \rightarrow \beta)$ sii (si $\mathcal{M} \models \alpha$ entonces $\mathcal{M} \models \beta$)
- $\mathcal{M} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)$ sii ($\mathcal{M} \models \alpha$ sii $\mathcal{M} \models \beta$)
- $\mathcal{M} \models ((\forall x)\gamma)$ sii para todo $a \in |\mathcal{M}|$, $\mathcal{M} \models \gamma[\bar{a}, x]$
- $\mathcal{M} \models ((\exists x)\gamma)$ sii existe $a \in |\mathcal{M}|$ tal que $\mathcal{M} \models \gamma[\bar{a}, x]$

Parte 1

$$M \models (\forall x)(P_1(f_2(x)) \rightarrow ((\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(x, y))))$$

\iff (propiedades de \models)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) M \models P_1(f_2(\bar{\alpha})) \rightarrow ((\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(\bar{\alpha}, y)))$$

\iff (propiedades de \models)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } M \models P_1(f_2(\bar{\alpha})) \text{ entonces } M \models (\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(\bar{\alpha}, y)))$$

\iff (propiedades de \models)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } M \models P_1(f_2(\bar{\alpha})) \text{ entonces } (\bar{\exists} \beta \in PROP) M \models (P_2(\bar{\beta}) \wedge P_3(\bar{\alpha}, \bar{\beta})))$$

\iff (propiedades de \models)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } M \models P_1(f_2(\bar{\alpha})) \text{ entonces } (\bar{\exists} \beta \in PROP) (M \models P_2(\bar{\beta}) \text{ y } M \models P_3(\bar{\alpha}, \bar{\beta})))$$

\iff (propiedades de \models)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } v^M(P_1(f_2(\bar{\alpha}))) = 1 \text{ entonces } (\bar{\exists} \beta \in PROP) (v^M(P_2(\bar{\beta})) = 1 \text{ y } v^M(P_3(\bar{\alpha}, \bar{\beta})) = 1))$$

\iff (predicados de M)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } f_2(\bar{\alpha})^M \in \{\varphi \mid \models \varphi\} \text{ entonces } (\bar{\exists} \beta \in PROP) (\bar{\beta}^M \in \{\perp\} \text{ y } \bar{\alpha}^M \text{ eq } \bar{\beta}^M))$$

\iff (funciones de M e interpretación de términos)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } \neg \bar{\alpha}^M \in \{\varphi \mid \models \varphi\} \text{ entonces } (\bar{\exists} \beta \in PROP) (\beta = \perp \text{ y } \alpha \text{ eq } \perp))$$

\iff (desarrollo de conjuntos y simplificación)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\text{ Si } \models \neg \alpha \text{ entonces } \alpha \text{ eq } \perp)$$

\iff (definición de eq)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) (\models \neg \alpha \implies \models \alpha \leftrightarrow \perp)$$

\iff (definición de \models en $PROP$)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) ((\bar{\forall} v \in Val) v(\neg \alpha) = 1 \implies (\bar{\forall} v \in Val) v(\alpha \leftrightarrow \perp) = 1)$$

\iff (definición de valuación)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) ((\bar{\forall} v \in Val) v(\alpha) = 0 \implies (\bar{\forall} v \in Val) v(\alpha) = v(\perp))$$

\iff (definición de valuación: $v(\perp)=0$)

$$(\bar{\forall} \alpha \in PROP) ((\bar{\forall} v \in Val) v(\alpha) = 0 \implies (\bar{\forall} v \in Val) v(\alpha) = 0)$$

Como el antecedente y el consecuente son iguales, la propiedad es **VERDADERA**

Parte 2

$$\begin{aligned}
& M \models (P_1(x) \rightarrow P_2(x)) \\
& \iff (\text{clausura y propiedades de } \models) \\
& M \models (\forall x)(P_1(x) \rightarrow P_2(x)) \\
& \iff (\text{propiedades de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha \in PROP)(M \models P_1(\bar{\alpha}) \rightarrow P_2(\bar{\alpha})) \\
& \iff (\text{propiedades de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha \in PROP)(\text{Si } M \models P_1(\bar{\alpha}) \text{ entonces } M \models P_2(\bar{\alpha})) \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha \in PROP)(\text{Si } v^M(P_1(\bar{\alpha})) = 1 \text{ entonces } v^M(P_2(\bar{\alpha})) = 1) \\
& \iff (\text{predicados de } M) \\
& (\bar{\forall} \alpha \in PROP)(\text{Si } \bar{\alpha}^M \in \{\alpha \mid \models \alpha\} \text{ entonces } \bar{\alpha}^M \in \{\perp\}) \\
& \iff (\text{interpretación de términos y desarrollo de conjuntos}) \\
& (\bar{\forall} \alpha \in PROP)(\text{Si } \models \alpha \text{ entonces } \alpha = \perp)
\end{aligned}$$

Tomemos por ejemplo $\alpha = \neg \perp$. Sabemos que $\models \neg \perp$, pero $\alpha \neq \perp$. Por lo tanto esta propiedad es **FALSA**.

Parte 3

$$\begin{aligned}
& M \models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \rightarrow P_1(f_1(x, y))) \\
& \iff (\text{propiedades de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP) M \models (P_1(\bar{\alpha}) \wedge P_1(\bar{\beta}) \rightarrow P_1(f_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}))) \\
& \iff (\text{propiedades de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } M \models (P_1(\bar{\alpha}) \wedge P_1(\bar{\beta})) \text{ entonces } M \models P_1(f_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}))) \\
& \iff (\text{propiedades de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } (M \models P_1(\bar{\alpha}) \text{ y } M \models P_1(\bar{\beta})) \text{ entonces } M \models P_1(f_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}))) \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } (v^M(P_1(\bar{\alpha})) = 1 \text{ y } v^M(P_1(\bar{\beta})) = 1) \text{ entonces } v^M(P_1(f_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}))) = 1) \\
& \iff (\text{interpretación de predicados y funciones de } M) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } (\bar{\alpha}^M \in \{\varphi \mid \models \varphi\} \text{ y } \bar{\beta}^M \in \{\varphi \mid \models \varphi\}) \text{ entonces } f_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta})^M \in \{\varphi \mid \models \varphi\}) \\
& \iff (\text{desarrollo de conjuntos e interpretación de términos de } M) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)(\text{Si } (\models \alpha \text{ y } \models \beta) \text{ entonces } (\bar{\alpha}^M \wedge \bar{\beta}^M) \in \{\varphi \mid \models \varphi\}) \\
& \iff (\text{desarrollo de conjuntos e interpretación de términos de } M) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)((\models \alpha \text{ y } \models \beta) \implies \models (\alpha \wedge \beta)) \\
& \iff (\text{definición de } \models \text{ en } PROP) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)((\bar{\forall} v \in Val)v(\alpha) = 1 \text{ y } (\bar{\forall} v \in Val)v(\beta) = 1 \implies (\bar{\forall} v \in Val)v(\alpha \wedge \beta) = 1) \\
& \iff (\text{definición de valuación}) \\
& (\bar{\forall} \alpha, \beta \in PROP)((\bar{\forall} v \in Val)v(\alpha) = 1 \text{ y } (\bar{\forall} v \in Val)v(\beta) = 1 \implies (\bar{\forall} v \in Val)\min\{v(\alpha), v(\beta)\} = 1)
\end{aligned}$$

Con esto vemos que la propiedad es **VERDADERA**, pues $\min\{v(\alpha), v(\beta)\} = \min\{1, 1\}$ por el antecedente. Y esto último obviamente es igual a 1.