

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 10

### Consigna

Considere la siguiente definición inductiva de la relación  $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ :

1. Si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\langle n, n \rangle \in S$
  2. Si  $\langle n, m \rangle \in S$ , entonces  $\langle n, m + 1 \rangle \in S$
- (a) Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y justifique su respuesta usando la definición de  $S$ .
- $\langle 0, 0 \rangle \in S$
  - $0 \in S$
  - $\langle \pi, \pi \rangle \in S$
  - $\langle 2, 3 \rangle \in S$
  - $\langle 3, 2 \rangle \in S$
- (b) Enuncie el principio de inducción primitiva para  $S$ .
- (c) Considere la siguiente definición inductiva de la relación  $Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ :
1. Si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\langle 0, n \rangle \in Q$
  2. Si  $\langle n, m \rangle \in Q$ , entonces  $\langle n + 1, m + 1 \rangle \in Q$

Demuestre que  $S = Q$ .

### Resolución (parte a)

- $\langle 0, 0 \rangle \in S$ : porque  $0 \in \mathbb{N}$  y usando la regla (i)
- $0 \notin S$ : porque 0 no es un par ordenado
- $\langle \pi, \pi \rangle \notin S$ : porque  $\pi \notin \mathbb{N}$
- $\langle 2, 3 \rangle \in S$ : usando la regla (i) para decir que  $\langle 2, 2 \rangle \in S$  y la regla (ii) para construir  $\langle 2, 3 \rangle \in S$
- $\langle 3, 2 \rangle \notin S$ : supongamos que si pertenece a  $S$ , como los dos naturales son distintos, necesariamente tenemos que haber construido el elemento por la regla (ii); entonces  $\langle 3, 1 \rangle \in S$ , por el mismo razonamiento:  $\langle 3, 0 \rangle \in S$  y  $\langle 3, -1 \rangle \in S$ . Pero esto es absurdo, porque  $-1 \notin \mathbb{N}$

## Resolución (parte b)

Enunciemos el PIP para el conjunto  $S$ :

Sea una propiedad  $P(\langle n, m \rangle)$  para los elementos  $\langle n, m \rangle \in S$ ; si se cumplen:

1. Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(\langle n, n \rangle)$  es verdadera
2. Si  $P(\langle n, m \rangle)$ , entonces  $P(\langle n, m + 1 \rangle)$

Entonces,  $P$  se cumple para todos los elementos de  $S$

## Resolución (parte c)

Sea  $Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ :

1. Si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\langle 0, n \rangle \in Q$
2. Si  $\langle n, m \rangle \in Q$ , entonces  $\langle n + 1, m + 1 \rangle \in Q$

Quiero probar que  $S = Q$ , por lo que seguiremos una dinámica similar a la del ejercicio 9, y probaremos que  $S \subseteq Q$  y  $Q \subseteq S$ . Utilicemos el PIP de  $S$  para probar la siguiente propiedad:  $P(\langle n, m \rangle) : \langle n, m \rangle \in Q$

### PASO BASE

$P(\langle n, n \rangle) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ :

Esto se verifica viendo que por la regla (i) de  $Q$ ,  $\langle 0, 0 \rangle \in Q$ , y usando la regla (ii) puedo construir todos los pares de naturales donde ambos son iguales.

### PASO INDUCTIVO

- (H)  $P(\langle n, m \rangle) : \langle n, m \rangle \in Q$   
(I)  $P(\langle n, m + 1 \rangle) : \langle n, m + 1 \rangle \in Q$

Ahora bastaría con probar  $\langle n, m + 1 \rangle \in Q \quad \forall \langle n, m \rangle \in Q$ . Para esto podemos usar el PIP sobre  $Q$

Sea  $P'(\langle n', m' \rangle) : \langle n', m' + 1 \rangle \in Q$  sobre el conjunto  $Q$ :

### (SUB) PASO BASE

$P'(\langle 0, n \rangle) : \langle 0, n + 1 \rangle$  con  $n \in \mathbb{N}$

Esto se cumple por la regla (i),  $\langle 0, n \rangle \in Q \quad \forall n \in \mathbb{N}$

### (SUB) PASO INDUCTIVO

- (H)  $P'(\langle n', m' \rangle) : \langle n', m' + 1 \rangle \in Q$   
(I)  $P'(\langle n' + 1, m' + 1 \rangle) : \langle n' + 1, m' + 2 \rangle \in Q$

Asumimos (H), es decir que  $\langle n', m' + 1 \rangle \in Q$ , a partir de esto, usando la regla (ii) tenemos que:  $\langle n' + 1, m' + 2 \rangle \in Q$ ; esto es lo que queríamos probar.

Esto implica que  $P'(\langle n', m' \rangle) : \langle n', m' + 1 \rangle \in Q$  se cumple para todo  $\langle n', m' \rangle \in Q$

Por lo tanto, probamos que  $P(\langle n, m \rangle) : \langle n, m \rangle \in Q$ . Es decir, probamos que  $P \subseteq Q$

Faltaría probar que  $Q \subseteq P$ , pero la prueba es básicamente un espejo de la que acabamos de realizar.