

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 4

### Consigna

Considere un lenguaje de primer orden del tipo  $\langle -, 2, 2, 1; 1 \rangle$ .

Sea  $A$  una estructura de dicho tipo definida como sigue:  $A = \langle \mathbb{N}, +, *, S, 0 \rangle$  donde  $S(x) = x + 1$ .

1. Defina los símbolos del alfabeto y dé dos términos distintos  $t_1$  y  $t_2$  del lenguaje tales que:

$$t_1^A = t_2^A = 3$$

2. Demuestre que para todo  $n \in \mathbb{N}$  hay un término  $t$  tal que  $t^A = n$ .
3. Sea  $t$  un término y  $n$  un natural. Demuestre que si  $t^A = n$  entonces existe  $t'$  tal que  $t'^A = n$  y tiene más ocurrencias de los símbolos  $f_1$  y  $c_1$ .
4. Demuestre por el absurdo que para todo  $n \in \mathbb{N}$  hay infinitos términos  $t$  tales que  $t^A = n$ .

### Resolución

#### Parte 1

Considerando el alfabeto por defecto para el tipo definido:

- $f_1, f_2, f_3; c_1$

Encontremos dos términos diferentes tal que su interpretación sea 3:

- $t_1 = f_3(f_3(f_3(c_1)))$
- $t_2 = f_1(f_3(f_3(f_3(c_1))), c_1)$

Es bien fácil ver que ambos términos evaluados en la estructura  $A$  son 3.

#### Parte 2

Probemos la propiedad dada usando el PIP sobre  $\mathbb{N}$ . Definimos la propiedad como:

$P(n) : (\forall n \in \mathbb{N}) \exists t \in TERM_A$  tal que  $t^A = n$

## Demostración

### Paso base

$P(0) : \exists t \in TERM_A$  tal que  $t^A = 0$

Esto es trivial pues  $c_1^A = 0$ , y sabemos que  $c_1 \in TERM_A$

### Paso inductivo

(H)  $P(n) : \exists t_1 \in TERM_A$  tal que  $(t_1)^A = n$

(I)  $P(n+1) : \exists t_2 \in TERM_A$  tal que  $(t_2)^A = n+1$

Evaluemos la tesis para ver que podemos decir sobre ella:

$$\begin{aligned} & n+1 \\ & \text{= (por hipótesis inductiva: } (t_1)^A = n \text{)} \\ & (t_1)^A + 1 \\ & \text{= (por interpretación de } f_3 \text{)} \\ & f_3((t_1)^A) \\ & \text{= (por interpretación de términos cerrados)} \\ & f_3(t_1)^A \end{aligned}$$

Por lo que encontramos  $t_2 \in TERM_A$  tal que se cumple que:

$$f_3(t_1)^A = n+1$$

Lo que prueba la tesis, y por lo tanto la propiedad para todos los naturales. ■

## Parte 3

Para probar esta parte, tomaremos un  $t \in TERM_A$  cualquiera, que cumpla con  $t^A = n$ .

Veamos que:

$$\begin{aligned} & t^A = n \\ & \iff \text{(aritmética)} \\ & t^A + 0 = n \\ & \iff \text{(interpretación de } f_1, c_2 \text{)} \\ & f_1(t, c_1)^A = n \end{aligned}$$

Por lo que encontramos  $t' = f_1(t, c_1)$  que cumple con lo que buscábamos, es decir que  $t'^A = n$ .

También se observa trivialmente que  $t'$  tiene más ocurrencias de  $f_1$  y  $c_1$  que  $t$ , esto porque tiene las mismas que tiene  $t$  (pues lo incluye) y a eso le suma una ocurrencia de ambas  $f_1$  y  $c_1$

Para finalizar, podemos concluir que esto se cumple para cualquier  $t$ , porque hicimos el razonamiento para un  $t$  cualquiera.

## Parte 4

Supongamos que existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que solo hay  $m \in \mathbb{N}$  términos  $t \in \{t_1, \dots, t_m\}$  que cumplen que  $t^A = n$ .

Consideremos  $t' \in \{t_1, \dots, t_m\}$  como el término con la máxima cantidad de ocurrencias de  $f_1$ , esto es posible pues los términos son finitos.

De la forma en la que elegimos  $t'$ , sabemos que  $t'^A = n$ , por lo que podemos aplicar la propiedad que probamos en la parte anterior (parte 3). Con esto obtenemos a quién llamamos  $t'' \in TERM_A$ , veamos lo que podemos decir sobre este término:

1. Cómo  $t''^A = n$  por la propiedad de la parte 3, podemos decir que  $t'' \in \{t_1, \dots, t_m\}$ .
2. También por la propiedad de la parte 3,  $t''$  tiene más ocurrencias de  $f_1$  que  $t'$ .

Pero estas dos observaciones son contradictorias, pues  $t'$  era el elemento con mayor cantidad de ocurrencias del conjunto  $\{t_1, \dots, t_m\}$ . ABSURDO!

Por lo tanto, queda probado que para todo  $n \in \mathbb{N}$  hay infinitos términos  $t$  tales que  $t^A = n$ .

■