Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Considere φ, ψ, σ pertenecientes a $PROP$.

(a) Pruebe las siguientes consecuencias lógicas:

1. $\varphi \vDash \varphi$
2. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \vDash \varphi$
3. $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \sigma) \vDash (\varphi \wedge \sigma)$

(b) Demuestre que:

1. Si $\varphi \vDash \psi$ y $\psi \vDash \sigma$, entonces $\varphi \vDash \sigma$
2. Si $\vDash \varphi \to \psi$, entonces $\varphi \vDash \psi$
3. Si $\vDash \neg\varphi$ y $\psi \vDash \varphi$, entonces $\vDash \neg\psi$
4. Si $\Gamma \vDash \varphi$ y $\Gamma \vDash \neg\psi$, entonces $\Gamma \vDash \neg(\neg\varphi \vee \psi)$ (donde $\Gamma \subseteq PROP$)

Resolución (parte a)

Para esta parte usamos la definición de valuación para determinar si las fórmulas dadas son tautologías. Podríamos usar de forma alternativa el concepto de Tableau Semántico.

1. $\varphi \vDash \varphi$

Sea v una valuación tal que $v(\varphi) = 1$, luego:

$$\begin{aligned} & v(\varphi) \\ & = \text{(hipótesis)} \\ & 1 \end{aligned}$$

Como cualquier valuación dada en este contexto cumple que $v(\varphi) = 1$, podemos concluir que $\varphi \vDash \varphi$

2. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \models \varphi$

Sea v una valuación tal que $v(\varphi \vee \psi) = 1$ y $v(\neg\psi) = 1$, luego:

PARTE 1: $v(\varphi \vee \psi) = 1$

$$
\begin{aligned}
& v(\varphi \vee \psi) \\
& \ = \text{(definición de valuación)} \\
& max\{v(\varphi), v(\psi)\} \\
& \ = \text{(hipótesis)} \\
& 1
\end{aligned}
$$

PARTE 2: $v(\neg\psi) = 1$

$$
\begin{aligned}
& v(\neg\psi) = 1 - v(\psi) \\
& \quad \iff \text{(hipótesis)} \\
& 1 - v(\psi) = 1 \\
& \quad \iff \text{(despeje)} \\
& v(\psi) = 0
\end{aligned}
$$

Entonces ahora juntando con la primer parte, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& v(\varphi \vee \psi) \\
& \ = \text{(definición de valuación)} \\
& max\{v(\varphi), v(\psi)\} \\
& \ = \text{(por parte 2)} \\
& max\{v(\varphi), 0\} \\
& \ = \text{(hipótesis)} \\
& 1
\end{aligned}
$$

Entonces $v(\varphi) = 1$, por lo que podemos concluir que $\varphi \vee \psi, \neg\psi \models \varphi$

3. $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \sigma) \models (\varphi \wedge \sigma)$

Sea v una valuación tal que $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ y $v(\psi \wedge \sigma) = 1$, luego:

PARTE 1: $v(\varphi \wedge \psi) = 1$

$$
\begin{aligned}
& v(\varphi \wedge \psi) \\
& = \text{(definición de valuación)} \\
& min\{v(\varphi), v(\psi)\} \\
& = \text{(hipótesis)} \\
& 1 \\
& \Rightarrow \text{(despeje)} \\
& v(\varphi) = 1; v(\psi) = 1
\end{aligned}
$$

PARTE 2: $v(\psi \wedge \sigma) = 1$

$$
\begin{aligned}
& v(\psi \wedge \sigma) \\
& = \text{(definición de valuación)} \\
& min\{v(\psi), v(\sigma)\} \\
& = \text{(hipótesis)} \\
& 1 \\
& \Rightarrow \text{(despeje)} \\
& v(\psi) = 1; v(\sigma) = 1
\end{aligned}
$$

Ahora juntando ambas partes, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& v(\varphi \wedge \sigma) \\
& = \text{(definición de valuación)} \\
& min\{v(\varphi), v(\sigma)\} \\
& = \text{(parte 1 y 2)} \\
& min\{1, 1\} \\
& = \text{(despeje)} \\
& 1
\end{aligned}
$$

Como cualquier valuación dada en este contexto cumple que $v(\varphi \wedge \sigma) = 1$, podemos concluir que $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \sigma) \vDash (\varphi \wedge \sigma)$

Resolución (parte b)

Para esta parte usaremos el concepto de absurdo combinado con la definición de valuación.

1. Si $\varphi \vDash \psi$ y $\psi \vDash \sigma$, entonces $\varphi \vDash \sigma$

(H) $\varphi \vDash \psi$ y $\psi \vDash \sigma$

(I) $\varphi \vDash \sigma$

Usando las hipótesis tenemos que:

PARTE 1

$$\begin{aligned}
&\varphi \vDash \psi \\
&\iff \text{(definición de consecuencia lógica)} \\
&(\forall v \in Val) \mid \text{Si } v(\varphi) = 1, \text{ entonces } v(\psi) = 1
\end{aligned}$$

PARTE 2

$$\begin{aligned}
&\psi \vDash \sigma \\
&\iff \text{(definición de consecuencia lógica)} \\
&(\forall v \in Val) \mid \text{Si } v(\psi) = 1, \text{ entonces } v(\sigma) = 1
\end{aligned}$$

Queremos probar que para una valuación v cualquiera se cumple la tesis, partamos de que $v(\varphi) = 1$:

$$\begin{aligned}
&v(\varphi) = 1 \\
&\Rightarrow \text{(por parte 1)} \\
&v(\psi) = 1 \\
&\Rightarrow \text{(por parte 2)} \\
&v(\sigma) = 1
\end{aligned}$$

Entonces, como cualquier valuación dada en este contexto cumple que $v(\varphi) = 1$ implica $v(\sigma) = 1$, podemos concluir que $\varphi \vDash \sigma$

2. Si $\vDash \varphi \to \psi$, entonces $\varphi \vDash \psi$

En este caso podemos trabajar con absurdo ya que tenemos una sola hipótesis.

Veamos que pasa si $\varphi \nvDash \psi$:

$$\begin{aligned}
&\varphi \nvDash \psi \\
&\iff \text{(definición de consecuencia lógica)} \\
&(\exists v_1 \in Val) \mid v_1(\varphi) = 1; v_1(\psi) = 0 \\
&\Rightarrow \text{(definición de valuación)} \\
&v_1(\varphi \to \psi) = 0 \\
&\Rightarrow \text{(hipótesis)} \\
&\text{ABSURDO!}
\end{aligned}$$

Esto es absurdo porque por hipótesis sabemos que $\vDash \varphi \to \psi$.

Entonces, tenemos que si $\vDash \varphi \to \psi$, entonces $\varphi \vDash \psi$.

3. Si $\models \neg\varphi$ y $\psi \models \varphi$, entonces $\models \neg\psi$

(H) $\models \neg\varphi$ y $\psi \models \varphi$

(I) $\models \neg\psi$

Usando las hipótesis tenemos que:

PARTE 1

$$\begin{aligned}&\models \neg\varphi\\ &\iff \text{(definición de tautología)}\\ &(\forall v \in Val) \mid v(\neg\varphi) = 1\\ &\Rightarrow \text{(definición de valuación)}\\ &(\forall v \in Val) \mid v(\varphi) = 0\end{aligned}$$

PARTE 2

$$\begin{aligned}&\psi \models \varphi\\ &\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}\\ &(\forall v \in Val) \mid \text{Si } v(\psi) = 1, \text{ entonces } v(\varphi) = 1\\ &\Rightarrow \text{(por parte 1: } v(\varphi)\text{=0)}\\ &(\forall v \in Val) \mid v(\psi) \neq 1\\ &\Rightarrow \text{(definición de valuación)}\\ &(\forall v \in Val) \mid v(\psi) = 0\end{aligned}$$

Queremos probar que para una valuación v cualquiera se cumple la tesis:

$$\begin{aligned}&\models \neg\psi\\ &\iff \text{(definición de tautología)}\\ &(\forall v \in Val) \mid v(\neg\psi) = 1\\ &\Rightarrow \text{(definición de valuación)}\\ &(\forall v \in Val) \mid v(\psi) = 0\end{aligned}$$

Donde esto último se cumple para toda valuación v por la parte 2.

4. Si $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \neg\psi$, entonces $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$

(H) $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \neg\psi$

(I) $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$

Usando las hipótesis tenemos que las valuaciones v cumplen que:

PARTE 1

$$\Gamma \vDash \varphi$$
$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$
$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma) v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\varphi) = 1$$
$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$
$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma) v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\neg\varphi) = 0$$

PARTE 2

$$\Gamma \vDash \neg\psi$$
$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$
$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma) v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\neg\psi) = 1$$
$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$
$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma) v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\psi) = 0$$

Veamos que pasa por absurdo si $\Gamma \nvDash \neg(\neg\varphi \vee \psi)$:

$$\Gamma \nvDash \neg(\neg\varphi \vee \psi)$$
$$\iff \text{(definición de consecuencia lógica)}$$
$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma) v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\neg(\neg\varphi \vee \psi)) = 0$$
$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$
$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma) v(\alpha) = 1, \text{ entonces } v(\neg\varphi \vee \psi) = 1$$
$$\Rightarrow \text{(definición de valuación)}$$
$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma) v(\alpha) = 1, \text{ entonces } min\{v(\neg\varphi), v(\psi)\} = 1$$
$$\Rightarrow \text{(por parte 1 y parte 2)}$$
$$(\forall v \in Val) \mid \text{Si } (\forall \alpha \in \Gamma) v(\alpha) = 1, \text{ entonces } min\{0, 0\} = 1$$
$$\Rightarrow \text{(operatoria)}$$
$$\text{ABSURDO!}$$

Entonces si $\Gamma \vDash \varphi$ y $\Gamma \vDash \neg\psi$, entonces $\Gamma \vDash \neg(\neg\varphi \vee \psi)$