

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## CLASE 6 - 13/03/2025

### Semántica proposicional

Veamos la diferencia entre sintáxis, semántica e interpretación de un lenguaje:

- **Sintáxis:** Describe el conjunto de las frases válidas del lenguaje, típicamente como un conjunto inductivo
- **Semántica:** Es el significado de las frases válidas del lenguaje. Usualmente involucra diversos conjuntos y relaciones entre ellos
- **Interpretación:** Es un mecanismo que permite la asociación entre los elementos de la sintaxis (frases del lenguaje) y los elementos de la semántica

Veamos estos conceptos aplicado al lenguaje *PROP*:

- **Sintáxis:** Se define un conjunto inductivo, con ciertas fórmulas base (letras proposicionales) y ciertos operadores que construyen nuevas fórmulas
- **Semántica:** El conjunto  $\{0, 1\} : (\{falso, verdadero\})$
- **Interpretación:** Función recursiva que para cada elemento de *PROP* devuelve el valor 0 o 1 en base al valor de las letras proposicionales

### Valuación (Intuición)

- La semántica de una palabra (fórmula) de PROP está dada por su valor de verdad (o sea, si es verdadera o falsa).
- Ese valor se obtiene aplicando una función a la fórmula que se desea evaluar
- Cada función representa un estado de la realidad (o mundo).
  - $v(p_0) = 0, v(p_1) = 1, \dots$  es la representación de un mundo, y  $v(p_0) = 1, \dots, v(p_2) = 1$  es una representación de otro mundo distinto
  - En cada mundo cada proposición de *PROP* puede representar una afirmación distinta de la realidad

### Semántica de *PROP* (Intuición)

La semántica de una palabra (fórmula) de PROP está dada por su valor de verdad (o sea, si es verdadera o falsa). Ese valor se obtiene aplicando una función a la fórmula que se desea evaluar. Cada función representa un estado del universo que se obtiene de la siguiente forma:

- En cada función, cada una de las letras proposicionales puede tomar un valor de verdad
- $\perp$  es falsa en cualquier función
- Los valores de verdad de las fórmulas atómicas se extienden a las fórmulas no atómicas de acuerdo al significado de los conectivos que la forman
- Las letras proposicionales tienen un valor de verdad conocido
- Se abstraen las proposiciones simples a letras
- La frase “Los perros comen salchichas con tuco” colapsa a, por ejemplo,  $p_0$
- Y si esa frase es verdad en una situación  $v$ , diremos que  $v(p_0) = 1$ . Y si es falsa, diremos que  $v(p_0) = 0$ .
- *PROP* está definido inductivamente
- La semántica está dada por los valores de verdad de las proposiciones, ya sean simples o complejas
- Se buscará la forma de construir esa semántica teniendo en cuenta que:
  - Las letras proposicionales pueden tomar cualquier valor
  - El valor de las letras proposicionales se “transmite”, lo que permite calcular el valor de las proposiciones complejas en función del valor de las proposiciones más simples

### Significado de algunos conectivos

- El dos es par o impar. **VERDAD**
- El dos es par o natural. **VERDAD**
- Si  $n$  es múltiplo de 6, entonces 4 es par. **VERDAD**
- Si 4 es impar, entonces 3 es par. **VERDAD**

### Valuación (definición)

Una función  $v : PROP \rightarrow \{0, 1\}$  es una valuación si satisface:

- $v(\perp) = 0$
- $v(\alpha \vee \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$
- $v(\alpha \wedge \beta) = \max\{v(\alpha), v(\beta)\}$
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = \max\{1 - v(\alpha), v(\beta)\}$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 \iff v(\alpha) = v(\beta)$
- $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$

### Teorema

El valor de verdad de los átomos, determina una única valuación (el valor para cualquier fórmula)

(H) Sea  $w : P \rightarrow \{0, 1\}$

(I) Existe una única valuación  $v : PROP \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $v(p) = w(p) \quad \forall p \in P$

### Demostración

Consideremos una función  $v : PROP \rightarrow \{0, 1\}$  definida por recursión primitiva tal que:

- $v(p) = w(p)$  para todo  $p \in P$

- $v$  es una valuación

Esta función existe, y es única porque fue definida por recursión primitiva. Además es valuación (por su propia definición). ■

## Lema

El valor de verdad de una fórmula depende únicamente de los valores de verdad de sus letras proposicionales.

(H) Sea  $\alpha \in PROP$ . Sean  $v, v'$  dos valuaciones tales que  $v(p) = v'(p)$  para todo  $p \in P$  que ocurre en  $\alpha$

(I) Entonces  $v(\alpha) = v'(\alpha)$

## Tautología y consecuencia lógica (definición)

- **Tautología:** Decimos que  $\alpha \in PROP$  es una tautología sii para cualquier valuación  $v$  se cumple que  $v(\alpha) = 1$
- **Consecuencia lógica:** Dadas  $\Gamma \subseteq PROP$  y  $\alpha \in PROP$ , decimos que  $\alpha$  es consecuencia lógica de  $\Gamma$  sii para cualquier valuación  $v$ :
  - Si  $(\forall \gamma \in \Gamma) v(\gamma) = 1$ , entonces  $v(\alpha) = 1$

## Notación

- $\Gamma \models \alpha$  se lee “ $\alpha$  es consecuencia lógica de  $\Gamma$ ”
- $\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$  se lee  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \models \alpha$
- $\models \alpha$  se lee  $\{\} \models \alpha$
- $\models \alpha$  se lee “ $\alpha$  es tautología”

## Aplicaciones

**Investigar**  $\models (p_0 \rightarrow p_0)$

Sea  $v$  una valuación cualquiera, luego:

$$\begin{aligned}
 &v(p_0 \rightarrow p_0) \\
 &= (\text{definición de valuación}) \\
 &\max\{1 - v(p_0), v(p_0)\} \\
 &= (v(p_0) \in \{0, 1\}) \\
 &1
 \end{aligned}$$

Como cualquier valuación  $v$  cumple  $v(p_0 \rightarrow p_0) = 1$ , concluimos que  $\models (p_0 \rightarrow p_0)$

**Investigar**  $\models (\varphi \rightarrow \varphi)$

Sea  $v$  una valuación cualquiera, luego:

$$\begin{aligned}
& v(\varphi \rightarrow \varphi) \\
&= \text{(definición de valuación)} \\
& \max\{1 - v(\varphi), v(\varphi)\} \\
&= (v(\varphi) \in \{0,1\}) \\
& 1
\end{aligned}$$

Como cualquier valuación  $v$  cumple  $v(\varphi \rightarrow \varphi) = 1$ , concluimos que  $\models (\varphi \rightarrow \varphi)$