

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 9

### Consigna

Considere el alfabeto  $\Sigma = \{a, b\}$ , y los lenguajes  $\Delta$  y  $\Gamma$  definidos inductivamente con las siguientes reglas. Demuestre que  $\Gamma = \Delta$ .

**Reglas para  $\Gamma$ :**

1.  $\varepsilon \in \Gamma$
2. Si  $\alpha \in \Gamma$ , entonces  $a\alpha \in \Gamma$
3. Si  $\alpha \in \Gamma$ , entonces  $b\alpha \in \Gamma$

**Reglas para  $\Delta$ :**

1.  $\varepsilon \in \Delta$
2. Si  $\alpha \in \Delta$ , entonces  $\alpha a \in \Delta$
3. Si  $\alpha \in \Delta$ , entonces  $\alpha b \in \Delta$

### Resolución

Primero, cambiaremos ligeramente ambas las definiciones de los lenguajes  $\Delta$  y  $\Gamma$  para tener una regla inductiva menos. Veamos como hacerlo:

**Reglas para  $\Gamma$ :**

1.  $\varepsilon \in \Gamma$
2. Si  $\alpha \in \Gamma$ ,  $x \in \Sigma$ , entonces  $x\alpha \in \Gamma$

**Reglas para  $\Delta$ :**

1.  $\varepsilon \in \Delta$
2. Si  $\alpha \in \Delta$ ,  $y \in \Sigma$ , entonces  $\alpha y \in \Delta$

Bien, ahora queremos probar que  $\Delta \subseteq \Gamma$  y  $\Gamma \subseteq \Delta$ , esto es equivalente a decir que son iguales. Primero vamos a probar que  $\Gamma \subseteq \Delta$ ; para esto usemos el PIP en  $\Gamma$  con la propiedad  $P : \alpha \in \Delta$ , para probar que todos sus elementos, están incluidos en  $\Delta$ .

### PASO BASE

$P(\varepsilon) : \varepsilon \in \Delta$ : Esto se prueba por la regla (i) del lenguaje  $\Delta$ .

## PASO INDUCTIVO

(H)  $P(\alpha) : \alpha \in \Delta$

(I)  $P(x\alpha) : x\alpha \in \Delta$  con  $x \in \Sigma$

Entonces, lo que queremos probar es que para todo  $\alpha \in \Delta$ ,  $x\alpha \in \Delta$ . Esto lo podemos probar usando el PIP para  $\Delta$ . Sea  $P'(\alpha) := x\alpha \in \Delta$

### (SUB) PASO BASE

$P'(\varepsilon) : x\varepsilon \in \Delta$ .

Esto se cumple usando (i) y (ii) de la definición de  $\Delta$ , ya que por (i) sabemos que  $\varepsilon$  está incluido en  $\Delta$ , y por (ii) sabemos que  $\forall y \in \Sigma : \varepsilon y \in \Delta$ . Pero observemos que:

$$x\varepsilon = \varepsilon y$$

Porque  $\varepsilon$  es la palabra vacía, y  $x, y$  representan un símbolo de  $\Sigma$ . Concluyendo, esto se cumple

### (SUB) PASO INDUCTIVO

(H)  $P'(\alpha) : x\alpha \in \Delta$

(I)  $P'(\alpha y) : x\alpha y \in \Delta$

Asumimos que  $P'(\alpha)$  es verdadera, entonces por la regla (ii) de  $\Delta$  podemos decir que:

Como  $x\alpha \in \Delta$  y  $y \in \Sigma$ ; entonces:

$$x\alpha y \in \Delta$$

Esto prueba la tesis.

A su vez, volviendo a la primer inducción, esto prueba  $P'(\alpha) : x\alpha \in \Delta$ . Por lo que probamos que  $\Gamma \subseteq \Delta$ .

Faltaría probar que  $\Delta \subseteq \Gamma$ , pero la prueba es básicamente un espejo de la que acabamos de realizar.