

# Lógica

Mauro Polenta Mora

## CLASE 16 - 03/07/2025

### Semántica de la lógica de predicados

#### Nomenclatura

1.  $\mathcal{M}$  es modelo de  $\alpha$  si  $\mathcal{M} \models \alpha$
2.  $\mathcal{M}$  es modelo de  $\Gamma$  si  $\mathcal{M} \models \Gamma$
3.  $\alpha$  es verdadera si  $\models \alpha$
4.  $\alpha$  es consecuencia semántica de  $\Gamma$  si  $\Gamma \models \alpha$
5.  $\alpha$  es satisfecha por  $a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|$  si  $\mathcal{M} \models \alpha[a_1, \dots, a_k/z_1, \dots, z_k]$  con  $FV(\alpha) = \{z_1, \dots, z_k\}, k > 0$
6.  $\alpha$  es satisfactible en  $\mathcal{M}$  si existen  $a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{M}|$  que la satisfacen.
7.  $\alpha$  es satisfactible si existe algún  $\mathcal{M}$  tal que  $\alpha$  es satisfactible en  $\mathcal{M}$

#### Lema 2.4.5: Propiedades de $\models$

La relación  $\models$  refleja el significado intuitivo de los conectivos y los cuantificadores en las sentencias.

Sean  $\alpha, \beta \in SENT, \gamma \in FORM, FV(\gamma) \subseteq \{x\}$ . Entonces,

- $\mathcal{M} \models (\alpha \wedge \beta)$  sii  $\mathcal{M} \models \alpha$  y  $\mathcal{M} \models \beta$
- $\mathcal{M} \models (\alpha \vee \beta)$  sii  $\mathcal{M} \models \alpha$  o  $\mathcal{M} \models \beta$
- $\mathcal{M} \models (\neg \alpha)$  sii  $\mathcal{M} \not\models \alpha$
- $\mathcal{M} \models (\alpha \rightarrow \beta)$  sii (si  $\mathcal{M} \models \alpha$  entonces  $\mathcal{M} \models \beta$ )
- $\mathcal{M} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)$  sii ( $\mathcal{M} \models \alpha$  sii  $\mathcal{M} \models \beta$ )
- $\mathcal{M} \models ((\forall x)\gamma)$  sii para todo  $a \in |\mathcal{M}|, \mathcal{M} \models \gamma[\bar{a}, x]$
- $\mathcal{M} \models ((\exists x)\gamma)$  sii existe  $a \in |\mathcal{M}|$  tal que  $\mathcal{M} \models \gamma[\bar{a}, x]$

### Lema 2.4.5: Demostración

#### Conectivo $\wedge$

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models \alpha \wedge \beta \\ &\iff (\text{definición de } \models) \\ v^{\mathcal{M}}(\alpha \wedge \beta) &= 1 \\ &\iff (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\ \min\{v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\} &= 1 \\ &\iff (\text{aritmética}) \\ v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 1 \text{ y } v^{\mathcal{M}}(\beta) &= 1 \\ &\iff (\text{definición de } \models) \\ \mathcal{M} \models \alpha \text{ y } \mathcal{M} \models \beta\end{aligned}$$

#### Conectivo $\neg$

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models \neg \alpha \\ &\iff (\text{definición de } \models) \\ v^{\mathcal{M}}(\neg \alpha) &= 1 \\ &\iff (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\ v^{\mathcal{M}}(\alpha) &= 0 \\ &\iff (\text{definición de } \models) \\ \mathcal{M} \not\models \alpha\end{aligned}$$

#### Cuantificador $\forall$

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models (\forall x)\alpha \\ &\iff (\text{definición de } \models) \\ \min\{v^{\mathcal{M}}(\alpha[\bar{a}/x]) \mid a \in |\mathcal{M}|\} &= 1 \\ &\iff (\text{aritmética}) \\ \text{para todo } a \in |\mathcal{M}|, \mathcal{M} \models \alpha[\bar{a}/x]\end{aligned}$$

#### Cuantificador $\rightarrow$

Queremos probar que  $\mathcal{M} \models (\alpha \rightarrow \beta)$  sii (si  $\mathcal{M} \models \alpha$  entonces  $\mathcal{M} \models \beta$ ), que es equivalente a decir que:

$$\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta \text{ sii } \mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta$$

Como tenemos un “sii”, tenemos que probar dos partes:

Directo

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& v^{\mathcal{M}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \\
& \iff (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0 \text{ o } v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1
\end{aligned}$$

Entonces a partir de acá separamos en dos casos:

**CASO 1:**  $v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0 \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \not\models \alpha \\
& \iff (\text{definición de implicancia}) \\
& \mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta
\end{aligned}$$

**CASO 2:**  $v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1$

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1 \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \models \beta \\
& \iff (\text{definición de implicancia}) \\
& \mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta$

Recíproco

Para esta parte también habría dos casos que considerar:

1. Cuando  $\mathcal{M} \not\models \alpha$
2. Cuando  $\mathcal{M} \models \alpha$

Pero observemos que el primero es trivial, pues si  $\mathcal{M} \not\models \alpha$ , entonces  $v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0$  y por lo tanto:  $v^{\mathcal{M}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ .

Consideremos el segundo entonces:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M} \models \alpha \\
& \iff (\text{por hipótesis}) \\
& \mathcal{M} \models \beta \\
& \iff (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& v^{\mathcal{M}}(\beta) = 1 \\
& \iff (\text{aritmética}) \\
& \max\{1 - v^{\mathcal{M}}(\alpha), v^{\mathcal{M}}(\beta)\} = 1 \\
& \iff (\text{definición de interpretación } v^{\mathcal{M}}) \\
& v^{\mathcal{M}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \\
& \iff (\text{definición de } \models) \\
& \mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta
\end{aligned}$$

### Lema 2.4.5: Contrarrecíprocos

Sean  $\alpha, \beta \in SENT$ . Entonces,

- $\mathcal{M} \not\models (\alpha \wedge \beta)$  sii  $\mathcal{M} \not\models \alpha$  o  $\mathcal{M} \not\models \beta$
- $\mathcal{M} \not\models (\alpha \vee \beta)$  sii  $\mathcal{M} \not\models \alpha$  y  $\mathcal{M} \not\models \beta$
- $\mathcal{M} \not\models (\neg \alpha)$  sii  $\mathcal{M} \models \alpha$
- $\mathcal{M} \not\models (\alpha \rightarrow \beta)$  sii  $\mathcal{M} \models \alpha$  y  $\mathcal{M} \not\models \beta$
- $\mathcal{M} \not\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$  sii ( $\mathcal{M} \not\models \alpha$  sii  $\mathcal{M} \models \beta$ )
- $\mathcal{M} \not\models (\forall x)\alpha$  sii existe  $a \in |\mathcal{M}|$  tal que  $\mathcal{M} \not\models \alpha[\bar{a}/x]$
- $\mathcal{M} \not\models (\exists x)\alpha$  sii para todo  $a \in |\mathcal{M}|$ ,  $\mathcal{M} \not\models \alpha[\bar{a}/x]$

## Equivalencia y generalización de las Leyes de De Morgan

### Definición de eq

Dados  $\alpha, \beta \in FORM$ , decimos  $\alpha$  eq  $\beta$  sii  $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$

### Teorema 2.5.1 (Leyes de De Morgan generalizadas)

- $\neg(\forall x)\alpha$  eq  $(\exists x)\neg\alpha$
- $\neg(\exists x)\alpha$  eq  $(\forall x)\neg\alpha$
- $(\forall x)\alpha$  eq  $\neg(\exists x)\neg\alpha$
- $(\exists x)\alpha$  eq  $\neg(\forall x)\neg\alpha$

Veamos algunas consideraciones previas:

- No hay ninguna suposición sobre las fórmulas involucradas, por lo que se asume que pueden tener variables libres:  $FV(\alpha) = \{z_1, \dots, z_n\}$ .
- Esto hace que se deban hacer las clausuras antes de hacer las demostraciones.
- Lo que hace que se deban manejar varias constantes en el proceso de demostración.

**Demostración:**  $\neg(\forall x)\alpha \text{ eq } (\exists x)\neg\alpha$

$$\neg(\forall x)\alpha \text{ eq } (\exists x)\neg\alpha$$

$$\iff \text{(definición de eq)}$$

$$\models \neg(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha$$

$$\iff \text{(definición de } \models \text{)}$$

$$(\bar{\forall}\mathcal{M})\mathcal{M} \models \neg(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha$$

$$\iff \text{(clausura y definición } \models \text{)}$$

$$(\bar{\forall}\mathcal{M})\mathcal{M} \models (\forall z_1) \dots (\forall z_n)(\neg(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha)$$

$$\iff \text{(aplicando 2.4.5 } n \text{ veces)}$$

$$(\bar{\forall}\mathcal{M})(\bar{\forall}a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models (\neg(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\neg\alpha)[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n/z_1, \dots, z_n]$$

Observemos que esto se vuelve muy extenso, muy rápido. En la siguiente clase veremos una forma de encarar esta demostración con una mejor estrategia.