conjuntos y reglas

Figure 1: conjuntos y reglas

Ejercicio 1

Consigna

Considere el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales; la lista de subconjuntos de $\mathbb{R}$ de la columna izquierda; y los conjuntos de reglas de la columna derecha.

1. Indique cuales subconjuntos satisfacen cuales conjuntos de reglas.
2. Para cada conjunto de reglas, indicar que conjunto definen.

Resolución (parte 1)

Conjunto A: $\mathbb{N}$

Conjunto de reglas 1: 1. $2 \in S$: Cumple con este punto porque $2 \in \mathbb{N}$ 2. Si $n \in S$, entonces $n + 2 \in S$: Cumple con este punto, porque la suma entre naturales es cerrada; es decir que si a cualquier natural le sumo 2 en particular, voy a obtener otro natural

Conjunto de reglas 2: 1. $3 \in S$: Cumple con este punto porque $3 \in \mathbb{N}$ 2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$: Cumple con este punto por el mismo razonamiento anterior. 3. Si $n \in S$, entonces $n - 1 \in S$: No cumple: $n = 0$ es un contraejemplo

Conjunto de reglas 3:

Se ignorará de aquí en adelante porque tiene una regla sola que ya probamos en el conjunto 3.

Conjunto B: $\mathbb{Z}$

Conjunto de reglas 1: 1. $2 \in S$: Cumple con este punto porque $2 \in \mathbb{Z}$ 2. Si $n \in S$, entonces $n + 2 \in S$: Cumple con este punto, porque la suma entre enteros es cerrada; es decir que si a cualquier entero le sumo 2 en particular, voy a obtener otro entero

Conjunto de reglas 2: 1. $3 \in S$: Cumple con este punto porque $3 \in \mathbb{Z}$ 2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$: Cumple con este punto por el mismo razonamiento anterior. 3. Si $n \in S$, entonces $n - 1 \in S$: Cumple con este punto por el mismo razonamiento anterior, -1 es un entero, entonces la suma con otro entero será un entero.

Conjunto C: $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$

Conjunto de reglas 1: 1. $2 \in S$: No cumple con este punto, porque el conjunto C es el conjunto de los impares, y 2 es par 2. Si $n \in S$, entonces $n + 2 \in S$: Cumple con este punto, porque la suma entre un par e impar, siempre me da un impar, en particular, 2 es par; mientras que $n \in C$ tiene que ser de la forma $2k + 1$ para algún $k \in N$, es decir: impar

Conjunto de reglas 2: 1. $3 \in S$: Cumple con este punto porque 3 es impar 2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$: No cumple con este punto; pues $3 \in C$ pero $4 \notin C$ 3. Si $n \in S$, entonces $n - 1 \in S$: No cumple con este punto; pues $3 \in C$ pero $2 \notin C$

Conjunto D: $\{\pi + k : k \in \mathbb{Z}\}$

Conjunto de reglas 1: 1. $2 \in S$: No cumple con este punto, porque al sumar o restar un entero a π, no puedo obtener 2 2. Si $n \in S$, entonces $n + 2 \in S$: Cumple con este punto, porque si $n \in D$ entonces $n = \pi + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$; sumando 2 a este número, puedo llamar $k' = k + 2$, obteniendo entonces que $n + 2 = \pi + k'$. Como k' es entero por construcción, entonces podemos decir que $n + 2 \in D$

Conjunto de reglas 2: 1. $3 \in S$: No cumple con este punto por el mismo razonamiento anterior (regla 1) 2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$: Cumple con este punto por el mismo razonamiento anterior (regla 2) 3. Si $n \in S$, entonces $n - 1 \in S$: Cumple con este punto por el mismo razonamiento anterior (regla 2)

Observación: Varios de estos razonamientos son verdaderos porque la suma de enteros es cerrada, y para obtener el siguiente elemento (o anterior) sumamos (o restamos) una cantidad entera

Resolución (parte 2)

Conjunto de reglas 1

El conjunto construido por estas reglas es:

$$A : \{2n : n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

Conjunto de reglas 2

El conjunto construido por estas reglas es: $\mathbb{Z}$

Conjunto de reglas 3

Este conjunto de reglas no construye ningún conjunto de forma inductiva, porque no tenemos elementos base.