

Lógica

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Sean φ, ψ, σ proposiciones cualesquiera de $PROP$. Demuestre que:

- (a) $\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- (b) $\psi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- (c) $\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \vdash \psi$
- (d) $\neg\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg\varphi$
- (e) $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$
- (f) $\vdash \varphi \vee \psi \rightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- (g) Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \vee \varphi$
- (h) Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \rightarrow \varphi$

Resolución

Demostración (a)

Queremos demostrar que $\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Veamos como hacerlo:

$$\frac{\frac{\frac{[\neg\varphi \wedge \neg\psi]^1}{\neg\varphi} E\wedge_1}{\perp} E\neg}{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)} I\neg^{(1)}$$

Figure 1: Demostración a

Como observación para los siguientes casos, vemos que φ queda “sin justificar” solo porque es una hipótesis, este será el caso para todas las hipótesis que tengamos a la hora

de demostrar consecuencias semánticas.

Demostración (b)

Queremos demostrar que $\psi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Veamos como hacerlo:

$$\frac{\frac{\frac{[\neg\varphi \wedge \neg\psi]^1}{\neg\psi} E\wedge_2 \quad \psi}{\perp} E\neg}{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)} I\neg^{(1)}$$

Figure 2: Demostración b

Demostración (c)

Queremos demostrar que $\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \vdash \psi$. Veamos como hacerlo:

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \quad \frac{\varphi \quad [\neg\psi]^1}{\varphi \wedge \neg\psi} I\wedge}{\frac{\perp}{\psi} RAA^{(1)}} E\neg$$

Figure 3: Demostración c

Demostración (d)

Queremos demostrar que $\neg\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg\psi$. Veamos como hacerlo:

$$\frac{\frac{\frac{[\neg\varphi]^2 \quad [\varphi]^1}{\perp} E\neg}{\psi} E\perp}{\varphi \rightarrow \psi} I\rightarrow^{(1)} \quad \neg\varphi}{(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg\psi} I\leftrightarrow^{(2)}$$

Figure 4: Demostración d

Demostración (e)

Queremos demostrar que $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Veamos como hacerlo:

Demostración (f)

Queremos demostrar que $\vdash \varphi \vee \psi \rightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Veamos como hacerlo:

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg\varphi \quad [\varphi]^1}{\perp} E_{\neg} \\
\frac{\perp}{\psi} E_{\perp} \\
\frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} I_{\rightarrow(1)}
\end{array}$$

Figure 5: Demostración e

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg\varphi \wedge \neg\psi]^2}{\neg\varphi} E_{\wedge_1} \quad [\varphi]^1 \quad \frac{[\neg\varphi \wedge \neg\psi]^2}{\neg\psi} E_{\wedge_2} \quad \frac{[\psi]^1}{\perp} E_{\neg} \\
\frac{[\varphi \vee \psi]^3 \quad \perp \quad \perp}{\perp} E_{\vee(1)} \\
\frac{\perp}{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)} I_{\neg(2)} \\
\frac{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)}{\varphi \vee \psi \rightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)} I_{\rightarrow(3)}
\end{array}$$

Figure 6: Demostración f

Demostración (g)

Queremos demostrar que Si: $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \vee \varphi$. Para esta parte, la prueba es diferente. Veamos como se demuestra:

- (H) $\vdash \varphi$
- (I) $\vdash \varphi \vee \psi$

$$\begin{array}{l}
\vdash \varphi \\
\iff (\text{definición de } \vdash) \\
(\exists D_1 \in DER) \mid C(D_1) = \varphi; H(D_1) = \emptyset \\
\Rightarrow (\text{por regla } IV \text{ de la definición de } DER) \\
(\exists D_2 \in DER) \mid C(D_2) = \varphi \vee \psi; H(D_2) = \emptyset \\
\iff (\text{definición de } \vdash) \\
\vdash \varphi \vee \psi
\end{array}$$

La idea de estos casos es probarlo considerando el lenguaje *DER* y sus reglas

Demostración (g)

Queremos demostrar que: Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \rightarrow \varphi$. Para esta parte, la prueba es diferente. Veamos como se demuestra:

- (H) $\vdash \varphi$
- (I) $\vdash \varphi \rightarrow \psi$

$$\vdash \varphi$$

$$\iff \text{(definición de } \vdash \text{)}$$

$$(\exists D_1 \in DER) \mid C(D_1) = \varphi; H(D_1) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{(por regla } I \rightarrow \text{ de la definición de } DER)$$

$$(\exists D_2 \in DER) \mid C(D_2) = \varphi \rightarrow \psi; H(D_2) = \{\varphi\}$$

$$\iff \text{(definición de } \vdash \text{)}$$

$$\vdash \varphi \rightarrow \psi$$