Matemática Discreta II

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 4

Consigna

Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$. Probar las siguientes afirmaciones:

1. $mcd(ca, cb) = c \cdot mcd(a, b)$. *Sugerencia: usar Bezout y probar la doble desigualdad.*
2. Si $c \mid a$ y $c \mid b$ entonces:
    - $mcd(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = \frac{mcd(a,b)}{c}$
3. Si a y b son primos entre sí, entonces:
    - $mcd(a - b, a + b) = 1$ o 2

    Sugerencia: probar primero que $mcd(a - b, a + b)$ divide a $mcd(2a, 2b)$.

Resolución

Parte 1

- $mcd(ca, cb) = c \cdot mcd(a, b)$

La estrategia será probar las dos desigualdades, por lo que vamos a empezar con eso. Llamemos:

- $d = mcd(a, b)$
- $d' = mcd(ca, cb)$

$d' \leq cd$

Veamos el siguiente razonamiento usando Bézout:

$$d = ax + by$$
$$\iff \text{(multiplico por c)}$$
$$cd = cax + cby$$
$$\iff (ca{=}d'q_1; cb{=}d'q_2 \text{ con } q_1,q_2{\in}\mathbb{Z})$$
$$cd = cax + cby$$
$$\iff$$
$$cd = d'q_1x + d'q_2y$$
$$\iff$$
$$cd = d'(q_1x + q_2y)$$
$$\iff ((q_1x{+}q_2y){\in}\mathbb{Z})$$
$$d' \mid cd$$
$$\iff$$
$$d' \leq cd$$

$cd \leq d'$

Veamos el siguiente razonamiento usando Bézout:

$$d' = cax + cby$$
$$\iff (a{=}dq_1; b{=}dq_2 \text{ con } q_1,q_2{\in}\mathbb{Z})$$
$$d' = cdq_1x + cdq_2y$$
$$\iff$$
$$d' = cd(q_1x + q_2y)$$
$$\iff ((q_1x{+}q_2y){\in}\mathbb{Z})$$
$$cd \mid d'$$
$$\iff$$
$$cd \leq d'$$

Juntando las dos partes, tenemos lo que queríamos probar:

- $d' = cd$

Parte 2

- Si $c \mid a$ y $c \mid b$ entonces:
  - $mcd(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = \frac{mcd(a,b)}{c}$

La estrategia será probar las dos desigualdades, por lo que vamos a empezar con eso. Llamemos:

- $d = mcd(a, b)$
- $d' = mcd(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$

$d' \leq \frac{d}{c}$

Veamos el siguiente razonamiento usando Bézout:

$$\begin{aligned}
&d = ax + by \\
&\iff \text{(dividiendo por } c \neq 0) \\
&\frac{d}{c} = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y \\
&\iff \left(\tfrac{a}{c} = d'q_1; \tfrac{b}{c} = d'q_2 \text{ con } q_1, q_2 \in \mathbb{Z}\right) \\
&\frac{d}{c} = d'q_1x + d'q_2y \\
&\iff \\
&\frac{d}{c} = d'(q_1x + q_2y) \\
&\iff \text{(como } (q_1x + q_2y) \in \mathbb{Z}) \\
&d' \mid \frac{d}{c} \\
&\iff \\
&d' \leq \frac{d}{c}
\end{aligned}$$

$\frac{d}{c} \leq d'$

Veamos el siguiente razonamiento usando Bézout:

$$\begin{aligned}
&d' = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y \\
&\iff (a = dq_1; b = dq_2 \text{ con } q_1, q_2 \in \mathbb{Z}) \\
&d' = \frac{d}{c}q_1x + \frac{d}{c}q_2y \\
&\iff \\
&d' = \frac{d}{c}(q_1x + q_2y) \\
&\iff \text{(como } (q_1x + q_2y) \in \mathbb{Z}) \\
&\frac{d}{c} \mid d' \\
&\iff \\
&\frac{d}{c} \leq d'
\end{aligned}$$

- $d' = \frac{d}{c}$

Parte 3

- Si a y b son primos entre sí, entonces:
  - $mcd(a - b, a + b) = 1$ o 2

Sugerencia: probar primero que $mcd(a-b, a+b)$ divide a $mcd(2a, 2b)$.

Como indica la sugerencia, primero probaremos lo que se indica. Es decir:

- $mcd(a-b, a+b) \mid mcd(2a, 2b)$

Llamamos:

- $d = mcd(a-b, a+b)$

Usaremos el siguiente corolario de la igualdad de Bézout:

- Dado $e \in \mathbb{Z}$, si $e \mid a$ y $e \mid b$, entonces $e \mid mcd(a, b)$

Por lo tanto queremos probar que:

1. $d \mid 2a$
2. $d \mid 2b$

Como tenemos que $d \mid a-b$ y $d \mid a+b$ concluimos que:

1. $d \mid 1(a-b) + 1(a+b) \to d \mid 2a$
2. $d \mid (-1)(a-b) + 1(a+b) \to d \mid 2b$

Concluimos entonces que:

- $d \mid mcd(2a, 2b)$

Con esto, retornamos a la propiedad original que queremos probar, es decir que:

- $mcd(a-b, a+b) = 1$ o 2

Veamos el siguiente razonamiento:

$$
\begin{aligned}
& mcd(2a, 2b) \\
& =_{\text{(parte 1 del ejercicio)}} \\
& 2mcd(a, b) \\
& =_{\text{(hipótesis)}} \\
& 2
\end{aligned}
$$

Y cómo $mcd(a-b, a+b) \mid mcd(2a, 2b) = 2$, necesariamente tenemos las dos opciones:

- $mcd(a-b, a+b) = 1$, o
- $mcd(a-b, a+b) = 2$

Lo que demuestra la propiedad.