Matemática Discreta II

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 7

Consigna

1. Demostrar que el producto de tres naturales consecutivos es múltiplo de 6.
2. Probar que $n(2n+1)(7n+1)$ es divisible entre 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resolución

Para este ejercicio vamos a considerar como una prueba suficiente que si un entero es múltiplo de 2 y de 3, entonces también es múltiplo de 6.

Parte 1

- Demostrar que el producto de tres naturales consecutivos es múltiplo de 6.

Queremos verificar que para todo $n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2) = 6q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$. Lo haremos verificando en partes separadas que dicho número es múltiplo de 2 y de 3.

Llamemos $m = n(n+1)(n+2)$.

Divisibilidad por 2

- Para todo $n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2) = 2q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

Tenemos los siguientes dos casos posibles para n:

- $n = 2q$ con $q \in \mathbb{Z}$
- $n = 2q+1$ con $q \in \mathbb{Z}$

CASO 1: $n = 2q$

$$
\begin{aligned}
&n(n+1)(n+2) \\
&=_{(\text{sustituyendo } n=2q)} \\
&2q(2q+1)(2q+2) \\
&=_{(\text{reagrupando})} \\
&2(q(2q+1)(2q+2))
\end{aligned}
$$

Y como $q(2q+1)(2q+2) \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

- $m = 2q'$

Por lo tanto, m es múltiplo de 2 para este caso.

CASO 2: $n = 2q + 1$

$$\begin{aligned}
&n(n+1)(n+2) \\
&=_{(\text{sustituyendo } n=2q+1)} \\
&(2q+1)(2q+2)(2q+3) \\
&=_{(\text{operando})} \\
&(2q+1)2(q+1)(2q+3) \\
&=_{(\text{reagrupando})} \\
&2(q+1)(2q+1)(2q+3)
\end{aligned}$$

Y como $(q+1)(2q+1)(2q+3) \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

- $m = 2q'$

Por lo tanto, m es múltiplo de 2 para este caso.

Con esto se concluye que m es múltiplo de 2 en todos los casos. $\square$

Divisibilidad por 3

- Para todo $n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2) = 3q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

Tenemos los siguientes dos casos posibles para n:

- $n = 3q$ con $q \in \mathbb{Z}$
- $n = 3q + 1$ con $q \in \mathbb{Z}$
- $n = 3q + 2$ con $q \in \mathbb{Z}$

CASO 1: $n = 3q$

El caso es directo, de la misma forma que el caso 1 para la divisibilidad entre 2.

CASO 2: $n = 3q + 1$

$$\begin{aligned}
&n(n+1)(n+2) \\
&=_{(\text{sustituyendo } n=3q+1)} \\
&(3q+1)(3q+2)(3q+3) \\
&=_{(\text{operando})} \\
&(3q+1)(3q+2)3(q+1) \\
&=_{(\text{reagrupando})} \\
&3(q+1)(3q+1)(3q+2)
\end{aligned}$$

Y como $(q+1)(3q+1)(3q+2) \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

- $m = 3q'$

Por lo tanto, m es múltiplo de 3 para este caso.

CASO 3: $n = 3q + 2$

$$
\begin{aligned}
& n(n+1)(n+2) \\
& =_{(\text{sustituyendo } n=3q+1)} \\
& (3q+2)(3q+3)(3q+4) \\
& =_{(\text{operando})} \\
& (3q+2)3(q+1)(3q+4) \\
& =_{(\text{reagrupando})} \\
& 3(q+1)(3q+2)(3q+4)
\end{aligned}
$$

Y como $(q+1)(3q+2)(3q+4) \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

- $m = 3q'$

Por lo tanto, m es múltiplo de 3 para este caso.

Con esto se concluye que m es múltiplo de 3 en todos los casos. $\square$