

# Matemática Discreta II

Mauro Polenta Mora

## Ejercicio 9

### Consigna

Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

1.  $99 \mid 10^{2n} + 197$
2.  $9 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1}$
3.  $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$
4.  $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$

### Resolución

La estrategia para este tipo de ejercicios es usar inducción completa.

#### Parte 1

- $P(k) : 10^{2k} + 197$

#### Paso base

- $n = 0 : 99 \mid 10^0 + 197$

Ese caso es trivial pues:

$$\begin{aligned} &10^0 + 197 \\ &= \\ &198 \\ &= \\ &99 \cdot 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto la propiedad es válida para  $n = 0$

#### Paso inductivo

- (HI):  $P(k) : 10^{2k} + 197$
- (TI):  $P(k+1) : 10^{2(k+1)} + 197$

De la hipótesis, podemos llegar a que:

- $10^{2k} + 197 = 99m$  para algún  $m \in \mathbb{Z}$ , y por tanto:
- $10^{2k} = 99m - 197 \quad (*_1)$

Expandamos la tesis inductiva para ver si podemos utilizar la hipótesis inductiva:

$$\begin{aligned}
 &10^{2(k+1)} + 197 \\
 &= (\text{operando}) \\
 &10^{2k+2} + 197 \\
 &= (\text{operando}) \\
 &10^{2k} 10^2 + 197 \\
 &= (\text{usando la observación } (*_1)) \\
 &(99m - 197) 100 + 197 \\
 &= (\text{operando}) \\
 &100 \cdot 99m - 100 \cdot 197 + 197 \\
 &= (\text{operando}) \\
 &100 \cdot 99m - 99 \cdot 197 \\
 &= (\text{sacando factor común}) \\
 &99(100m - 197)
 \end{aligned}$$

Y considerando que  $100m - 197 \in \mathbb{Z}$ , concluimos que  $10^{2(k+1)} + 197$  es múltiplo de 99, lo cual demuestra la propiedad por inducción.  $\square$

## Parte 2

- $P(k) : 9 \mid 7 \cdot 5^{2k} + 2^{4k+1}$

### Paso base

- $n = 0 : 9 \mid 7 \cdot 5^0 + 2^{0+1}$

Ese caso es trivial pues:

$$\begin{aligned}
 &7 \cdot 5^0 + 2^{0+1} \\
 &= \\
 &7 + 2 \\
 &= \\
 &9 \cdot 1
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la propiedad es válida para  $n = 0$

### Paso inductivo

- (HI):  $P(k) : 9 \mid 7 \cdot 5^{2k} + 2^{4k+1}$
- (TI):  $P(k+1) : 9 \mid 7 \cdot 5^{2(k+1)} + 2^{4(k+1)+1}$

De la hipótesis, podemos llegar a que:

- $7 \cdot 5^{2k} + 2^{4k+1} = 9m$  para algún  $m \in \mathbb{Z}$ , y por tanto:
- $2^{4k+1} = 9m - 7 \cdot 5^{2k} \quad (*_1)$

Expandamos la tesis inductiva para ver si podemos utilizar la hipótesis inductiva:

$$\begin{aligned}
& 7 \cdot 5^{2(k+1)} + 2^{4(k+1)+1} \\
& \quad = (\text{operando}) \\
& 7 \cdot 5^{2k+2} + 2^{4k+5} \\
& \quad = (\text{operando}) \\
& 7 \cdot 5^{2k} 5^2 + 2^{4k+1} 2^4 \\
& \quad = (\text{usando la observación } (*_1)) \\
& 7 \cdot 5^{2k} 5^2 + (9m - 7 \cdot 5^{2k}) 2^4 \\
& \quad = (\text{operando}) \\
& 7 \cdot 5^{2k} 5^2 + 9m 2^4 - 7 \cdot 5^{2k} 2^4 \\
& \quad = (\text{operando}) \\
& 7 \cdot 5^{2k} (5^2 - 2^4) + 9m 2^4 \\
& \quad = (\text{operando}) \\
& 7 \cdot 5^{2k} (9) + 9m 2^4 \\
& \quad = (\text{sacando factor común}) \\
& 9(7 \cdot 5^{2k} + m 2^4)
\end{aligned}$$

Y considerando que  $7 \cdot 5^{2k} + m 2^4 \in \mathbb{Z}$ , concluimos que  $7 \cdot 5^{2(k+1)} + 2^{4(k+1)+1}$  es múltiplo de 9, lo cual demuestra la propiedad por inducción.  $\square$