Matemática Discreta II

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 6

Consigna

Sean $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{N}$. Probar o refutar (dando contraejemplos) las siguientes afirmaciones:

1. Si $a \mid b$ y $c \mid d$ entonces $ac \mid bd$
2. Si $a \mid b$ entonces $ac \mid bc$
3. Si $a \nmid bc$ entonces $a \nmid b$ y $a \nmid c$
4. Si $ac \mid bc$ entonces $a \mid b$
5. Si $a \mid bc$ entonces $a \mid b$ o $a \mid c$
6. Si $a \mid c$ y $b \mid c$ entonces $ab \mid c$
7. Si $4 \mid a^2$ entonces $2 \mid a$
8. Si $9 \mid b + c$ entonces $9 \mid b$ o $9 \mid c$
9. Si $a + c \mid b + c$ entonces $a \mid b$

Resolución

Parte 1

- Si $a \mid b$ y $c \mid d$ entonces $ac \mid bd$

Por el teorema de la división entera, tenemos que:

1. $a \mid b \to b = aq$ con $q \in \mathbb{Z} \quad (*_1)$
2. $c \mid d \to d = cq'$ con $q' \in \mathbb{Z} \quad (*_2)$

Queremos probar que:

- $ac \mid bd$, que es equivalente a decir que:
- $bd = acq''$ con $q'' \in \mathbb{Z}$

Por las hipótesis $(*_1), (*_2)$

$$
\begin{aligned}
& bd = acq'' \\
& \iff \text{(sustituyendo por las hipótesis)} \\
& aqcq' = acq'' \\
& \iff \text{(operatoria)} \\
& qq' = q''
\end{aligned}
$$

Como $q'' \in \mathbb{Z}$ (pues es el producto de dos enteros), queda demostrado que $ac \mid bd$

Por lo tanto esta afirmación es VERDADERA.

Parte 2

- Si $a \mid b$ entonces $ac \mid bc$

Por el teorema de la división entera, tenemos que:

1. $a \mid b \to b = aq$ con $q \in \mathbb{Z} \quad (*_1)$

Queremos probar que:

- $ac \mid bc$, que es equivalente a decir que:
- $bc = acq'$ con $q' \in \mathbb{Z}$

Por la hipótesis $(*_1)$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& bc = acq' \\
& \iff \text{(sustituyendo por la hipótesis)} \\
& aqc = acq' \\
& \iff \text{(operatoria)} \\
& q = q'
\end{aligned}
$$

Como $q' \in \mathbb{Z}$, queda demostrado que $ac \mid bc$.

Por lo tanto esta afirmación es VERDADERA.

Parte 3

- Si $a \nmid bc$ entonces $a \nmid b$ y $a \nmid c$

Para esta parte, asumimos la hipótesis, y suponemos que $a \mid b$. Por el teorema de la división entera tenemos que:

- $a \mid b \to b = aq$ con $q \in \mathbb{Z}$

A partir de esto tenemos que:

$$
\begin{gathered}
b = aq \\
\iff \\
bc = aqc
\end{gathered}
$$

Donde considerando $q' = qc \in \mathbb{Z}$, tenemos que $a \mid bc$, lo cual es ABSURDO.

Por lo tanto esta afirmación es VERDADERA.

Parte 4

- Si $ac \mid bc$ entonces $a \mid b$

Por el teorema de la división entera, tenemos que:

1. $ac \mid bc \to bc = acq$ con $q \in \mathbb{Z} \quad (*_1)$

Queremos probar que:

- $a \mid b$, que es equivalente a decir que:
- $b = aq'$ con $q' \in \mathbb{Z}$

Por la hipótesis $(*_1)$ tenemos que:

$$\begin{gathered} bc = acq \\ \iff \text{(considerando } c \neq 0\text{)} \\ b = aq \end{gathered}$$

Entonces en este caso, considerando $q' = q \in \mathbb{Z}$, tenemos que la propiedad es verdadera.

Faltaría verificar el caso en el que $c = 0$, pero este es trivial, pues el antecedente sería falso:

- $a0 \nmid b0$ pues 0 no divide a ningún número.

Por lo tanto esta afirmación es VERDADERA.

Parte 5

- Si $a \mid bc$ entonces $a \mid b$ o $a \mid c$

Consideremos $a = 6, b = 3, c = 4$. Entonces:

- $6 \mid 12$, pero:
- $6 \nmid 3$ ni
- $6 \nmid 4$

Por lo que esta afirmación es FALSA.

Parte 6

- Si $a \mid c$ y $b \mid c$ entonces $ab \mid c$

Consideremos $a = 4, b = 2, c = 4$. Entonces:

- $4 \mid 4$ y $2 \mid 4$, pero
- $8 \nmid 4$

Por lo que esta afirmación es FALSA.