# Matemática Discreta II

Mauro Polenta Mora

# Ejercicio 2

## Consigna

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Probar que si $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces $d \mid (ax + by)$, para todo $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. Probar que $mcd(a, b) = mcd(b, a - bq)$, para todo $q \in \mathbb{Z}$.
3. Describir el Algoritmo de Euclides para calcular el $mcd(a, b)$.
4. Usar el Algoritmo de Euclides para calcular el $mcd(a, b)$ en los siguientes casos:
   1. $a = 63, b = 15$
   2. $a = 455, b = 1235$
   3. $a = 2366, b = 273$

## Resolución

### Parte 1

- Probar que si $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces $d \mid (ax + by)$, para todo $x, y \in \mathbb{Z}$.

Como $d|a$ y $d|b$, tenemos que:

- $a = dq_1$ con $q_1 \in \mathbb{Z}$
- $b = dq_2$ con $q_2 \in \mathbb{Z}$

Entonces tenemos que:

- $ax + by = dq_1x + dq_2y$, y sacando factor común $d$:
- $ax + by = d(q_1x + q_2y)$ con $q_1x + q_2y \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto tenemos que $d \mid (ax + by)$

### Parte 2

- Probar que $mcd(a, b) = mcd(b, a - bq)$, para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Llamamos:

- $d = mcd(a, b)$, y
- $d' = mcd(b, a - bq)$

La estrategia para probar esta parte es mostrar que $d \leq d'$ y $d' \leq d$.

$d \leq d'$

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{(por propiedades de divisibilidad (1.1.5))}$$
$$\begin{cases} d \mid a - bx \\ d \mid b \end{cases}$$

Entonces tenemos que $d \in Div(a - bx) \cup Div(b)$, por lo tanto $d \leq mcd(b, a - bx) = d'$.

$d' \leq d$

$$\begin{cases} d \mid b \\ d \mid a - bx \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{(por propiedades de divisibilidad (1.1.5))}$$
$$\begin{cases} d \mid b \\ d \mid 1(a - bx) + bx \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{(por propiedades de divisibilidad (1.1.5))}$$
$$\begin{cases} d \mid b \\ d \mid a \end{cases}$$

Entonces tenemos que $d' \in Div(a) \cup Div(b)$, por lo tanto $d' \leq mcd(a, b) = d$.

### Conclusión

Juntando las dos partes, tenemos que:

- $d \leq d'$, y
- $d' \leq d$

Entonces, podemos concluir que:

- $d = d'$

Que es lo que queríamos probar. $\square$

## Parte 3

Está hecho en la clase 2 del teórico.

## Parte 4

1. $a = 63, b = 15$
2. $a = 455, b = 1235$
3. $a = 2366, b = 273$

### Subparte 1

- $a = 63, b = 15$

$$mcd(63, 15)$$
$$=$$
$$mcd(15, 3)$$
$$=$$
$$mcd(3, 0)$$
$$=$$
$$3$$

### Subparte 2

- $a = 455, b = 1235$

$$mcd(455, 1235)$$
$$=$$
$$mcd(1235, 455)$$
$$=$$
$$mcd(455, 325)$$
$$=$$
$$mcd(325, 130)$$
$$=$$
$$mcd(130, 65)$$
$$=$$
$$mcd(65, 0)$$
$$=$$
$$65$$

### Subparte 3

- $a = 2366, b = 273$

$$mcd(2366, 273)$$
$$=$$
$$mcd(273, 182)$$
$$=$$
$$mcd(182, 91)$$
$$=$$
$$mcd(91, 0)$$
$$=$$
$$91$$