Matemática Discreta II

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 9

Consigna

Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

1. $99 \mid 10^{2n} + 197$
2. $9 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1}$
3. $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$
4. $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$

Resolución

La estrategia para este tipo de ejercicios es usar inducción completa.

Parte 1

- $P(k) : 10^{2k} + 197$

Paso base

- $n = 0 : 99 \mid 10^0 + 197$

Ese caso es trivial pues:

$$10^0 + 197$$
$$=$$
$$198$$
$$=$$
$$99 \cdot 2$$

Por lo tanto la propiedad es válida para $n = 0$

Paso inductivo

- (HI): $P(k) : 10^{2k} + 197$
- (TI): $P(k+1) : 10^{2(k+1)} + 197$

De la hipótesis, podemos llegar a que:

- $10^{2k} + 197 = 99m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$, y por tanto:
- $10^{2k} = 99m - 197 \quad (*_1)$

Expandamos la tesis inductiva para ver si podemos utilizar la hipótesis inductiva:

$$
\begin{aligned}
&10^{2(k+1)} + 197 \\
&=_{\text{(operando)}} \\
&10^{2k+2} + 197 \\
&=_{\text{(operando)}} \\
&10^{2k}10^{2} + 197 \\
&=_{\text{(usando la observación } (*_1))} \\
&(99m - 197)100 + 197 \\
&=_{\text{(operando)}} \\
&100 \cdot 99m - 100 \cdot 197 + 197 \\
&=_{\text{(operando)}} \\
&100 \cdot 99m - 99 \cdot 197 \\
&=_{\text{(sacando factor común)}} \\
&99(100m - 197)
\end{aligned}
$$

Y considerando que $100m - 197 \in \mathbb{Z}$, concluimos que $10^{2(k+1)} + 197$ es múltiplo de 99, lo cual demuestra la propiedad por inducción. $\square$

Parte 2

- $P(k) : 9 \mid 7 \cdot 5^{2k} + 2^{4k+1}$

Paso base

- $n = 0 : 9 \mid 7 \cdot 5^{0} + 2^{0+1}$

Ese caso es trivial pues:

$$
\begin{aligned}
&7 \cdot 5^{0} + 2^{0+1} \\
&= \\
&7 + 2 \\
&= \\
&9 \cdot 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la propiedad es válida para $n = 0$

Paso inductivo

- (HI): $P(k) : 9 \mid 7 \cdot 5^{2k} + 2^{4k+1}$
- (TI): $P(k+1) : 9 \mid 7 \cdot 5^{2(k+1)} + 2^{4(k+1)+1}$

De la hipótesis, podemos llegar a que:

- $7 \cdot 5^{2k} + 2^{4k+1} = 9m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$, y por tanto:
- $2^{4k+1} = 9m - 7 \cdot 5^{2k} \quad (*_1)$

Expandamos la tesis inductiva para ver si podemos utilizar la hipótesis inductiva:

$$
\begin{aligned}
& 7 \cdot 5^{2(k+1)} + 2^{4(k+1)+1} \\
& = \text{(operando)} \\
& 7 \cdot 5^{2k+2} + 2^{4k+5} \\
& = \text{(operando)} \\
& 7 \cdot 5^{2k} 5^2 + 2^{4k+1} 2^4 \\
& = \text{(usando la observación } (*_1)\text{)} \\
& 7 \cdot 5^{2k} 5^2 + (9m - 7 \cdot 5^{2k}) 2^4 \\
& = \text{(operando)} \\
& 7 \cdot 5^{2k} 5^2 + 9m 2^4 - 7 \cdot 5^{2k} 2^4 \\
& = \text{(operando)} \\
& 7 \cdot 5^{2k} (5^2 - 2^4) + 9m 2^4 \\
& = \text{(operando)} \\
& 7 \cdot 5^{2k} (9) + 9m 2^4 \\
& = \text{(sacando factor común)} \\
& 9(7 \cdot 5^{2k} + m 2^4)
\end{aligned}
$$

Y considerando que $7 \cdot 5^{2k} + m2^4 \in \mathbb{Z}$, concluimos que $7 \cdot 5^{2(k+1)} + 2^{4(k+1)+1}$ es múltiplo de 9, lo cual demuestra la propiedad por inducción. $\square$