Matemática Discreta II

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 3

Consigna

Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que $mcd(a, b) = 1$ (a y b son primos entre sí). Probar o dar un contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

1. Si $a \mid (bc)$ entonces $a \mid c$
2. Si $a \mid c$ y $b \mid c$ entonces $ab \mid c$.
3. ¿Valen las partes anteriores si $mcd(a, b) \neq 1$?

Resolución

Parte 1

- Si $a \mid (bc)$ entonces $a \mid c$

Como $mcd(a, b) = 1$, por Bézout tenemos que:

- $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $ax + by = 1$, múltiplicando la expresión por c tenemos que:
- $cax + cby = c$

Veamos el siguiente razonamiento, basándonos en que $a \mid bc$:

$$
\begin{aligned}
& cax + cby = c \\
& \iff {\scriptstyle (bc = \dot{a}, \text{ es decir } bc = az \text{ con } z \in \mathbb{Z})} \\
& cax + azy = c \\
& \iff \\
& a(cx + zy) = c
\end{aligned}
$$

Como $cx + zy \in \mathbb{Z}$ tenemos que $c = \dot{a}$ que es lo que queríamos probar.

Parte 2

- Si $a \mid c$ y $b \mid c$ entonces $ab \mid c$

Por hipótesis tenemos que:

- $c = aq_1$ con $q_1 \in \mathbb{Z}$

- $c = bq_2$ con $q_2 \in \mathbb{Z}$

Veamos el siguiente razonamiento entonces:

$$
\begin{aligned}
& c^2 = aq_1bq_2 \\
& \iff \\
& c^2 = ab(q_1q_2) \\
& \iff \text{(como } q_1q_2 \in \mathbb{Z}) \\
& c^2 = ab(q_1q_2) \\
& \iff \\
& ab \mid c^2 \\
& \iff \text{(por el lema de Euclides)} \\
& ab \mid c
\end{aligned}
$$

Por lo que esto prueba la propiedad.

Parte 3

- Valen las partes anteriores si $mcd(a, b) \neq 1$?

Parte 1

- Si $a \mid (bc)$ entonces $a \mid c$

Veamos un contraejemplo considerando:

- $a = 4$
- $b = 6$
- $c = 2$

Entonces la propiedad sería: "Si $4 \mid 12$ entonces $4 \mid 2$". Esto es claramente falso, pues $4 \nmid 2$.

Parte 2

- Si $a \mid c$ y $b \mid c$ entonces $ab \mid c$

Veamos un contraejemplo considerando:

- $a = 2$
- $b = 4$
- $c = 4$

Entonces la propiedad sería: "Si $2 \mid 4$ y $4 \mid 4$ entonces $8 \mid 4$" Esto es claramente falso, pues $8 \nmid 4$