

Matemática Discreta II

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 6

Consigna

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Probar o refutar (dando contraejemplos) las siguientes afirmaciones:

1. Si $a \mid b$ y $c \mid d$ entonces $ac \mid bd$
2. Si $a \mid b$ entonces $ac \mid bc$
3. Si $a \nmid bc$ entonces $a \nmid b$ y $a \nmid c$
4. Si $ac \mid bc$ entonces $a \mid b$
5. Si $a \mid bc$ entonces $a \mid b$ o $a \mid c$
6. Si $a \mid c$ y $b \mid c$ entonces $ab \mid c$
7. Si $4 \mid a^2$ entonces $2 \mid a$
8. Si $9 \mid b + c$ entonces $9 \mid b$ o $9 \mid c$
9. Si $a + c \mid b + c$ entonces $a \mid b$

Resolución

Parte 1

- Si $a \mid b$ y $c \mid d$ entonces $ac \mid bd$

Por el teorema de la división entera, tenemos que:

1. $a \mid b \rightarrow b = aq$ con $q \in \mathbb{Z}$ $(*_1)$
2. $c \mid d \rightarrow d = cq'$ con $q' \in \mathbb{Z}$ $(*_2)$

Queremos probar que:

- $ac \mid bd$, que es equivalente a decir que:
- $bd = acq''$ con $q'' \in \mathbb{Z}$

Por las hipótesis $(*_1), (*_2)$

$$\begin{aligned}bd &= acq'' \\ \iff (\text{sustituyendo por las hipótesis}) \\ acq'q' &= acq'' \\ \iff (\text{operatoria}) \\ qq' &= q''\end{aligned}$$

Como $q'' \in \mathbb{Z}$ (pues es el producto de dos enteros), queda demostrado que $ac \mid bd$
Por lo tanto esta afirmación es VERDADERA.

Parte 2

- Si $a \mid b$ entonces $ac \mid bc$

Por el teorema de la división entera, tenemos que:

$$1. \ a \mid b \rightarrow b = aq \text{ con } q \in \mathbb{Z} \quad (*_1)$$

Queremos probar que:

- $ac \mid bc$, que es equivalente a decir que:
- $bc = acq'$ con $q' \in \mathbb{Z}$

Por la hipótesis $(*_1)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}bc &= acq' \\ \iff (\text{sustituyendo por la hipótesis}) \\ aqc &= acq' \\ \iff (\text{operatoria}) \\ q &= q'\end{aligned}$$

Como $q' \in \mathbb{Z}$, queda demostrado que $ac \mid bc$.

Por lo tanto esta afirmación es VERDADERA.

Parte 3

- Si $a \nmid bc$ entonces $a \nmid b$ y $a \nmid c$

Para esta parte, asumimos la hipótesis, y suponemos que $a \mid b$. Por el teorema de la división entera tenemos que:

$$\bullet \ a \mid b \rightarrow b = aq \text{ con } q \in \mathbb{Z}$$

A partir de esto tenemos que:

$$\begin{aligned}b &= aq \\ \iff \\ bc &= aqc\end{aligned}$$

Donde considerando $q' = qc \in \mathbb{Z}$, tenemos que $a \mid bc$, lo cual es ABSURDO.

Por lo tanto esta afirmación es VERDADERA.

Parte 4

- Si $ac \mid bc$ entonces $a \mid b$

Por el teorema de la división entera, tenemos que:

$$1. \quad ac \mid bc \rightarrow bc = acq \text{ con } q \in \mathbb{Z} \quad (*_1)$$

Queremos probar que:

- $a \mid b$, que es equivalente a decir que:
- $b = aq'$ con $q' \in \mathbb{Z}$

Por la hipótesis $(*_1)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} bc &= acq \\ &\iff (\text{considerando } c \neq 0) \\ b &= aq \end{aligned}$$

Entonces en este caso, considerando $q' = q \in \mathbb{Z}$, tenemos que la propiedad es verdadera.

Faltaría verificar el caso en el que $c = 0$, pero este es trivial, pues el antecedente sería falso:

- $a0 \nmid b0$ pues 0 no divide a ningún número.

Por lo tanto esta afirmación es VERDADERA.

Parte 5

- Si $a \mid bc$ entonces $a \mid b$ o $a \mid c$

Consideremos $a = 6, b = 3, c = 4$. Entonces:

- $6 \mid 12$, pero:
- $6 \nmid 3$ ni
- $6 \nmid 4$

Por lo que esta afirmación es FALSA.

Parte 6

- Si $a \mid c$ y $b \mid c$ entonces $ab \mid c$

Consideremos $a = 4, b = 2, c = 4$. Entonces:

- $4 \mid 4$ y $2 \mid 4$, pero
- $8 \nmid 4$

Por lo que esta afirmación es FALSA.