

Matemática Discreta II

Mauro Polenta Mora

Ejercicio 9

Consigna

Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

1. $99 \mid 10^{2n} + 197$
2. $9 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1}$
3. $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$
4. $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$

Resolución

La estrategia para este tipo de ejercicios es usar inducción completa.

Parte 1

- $P(k) : 10^{2k} + 197$

Paso base

- $n = 0 : 99 \mid 10^0 + 197$

Ese caso es trivial pues:

$$\begin{aligned} &10^0 + 197 \\ &= \\ &198 \\ &= \\ &99 \cdot 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto la propiedad es válida para $n = 0$

Paso inductivo

- (HI): $P(k) : 10^{2k} + 197$
- (TI): $P(k+1) : 10^{2(k+1)} + 197$

De la hipótesis, podemos llegar a que:

- $10^{2k} + 197 = 99m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$, y por tanto:
- $10^{2k} = 99m - 197 \quad (*_1)$

Expandamos la tesis inductiva para ver si podemos utilizar la hipótesis inductiva:

$$\begin{aligned}
 &10^{2(k+1)} + 197 \\
 &= (\text{operando}) \\
 &10^{2k+2} + 197 \\
 &= (\text{operando}) \\
 &10^{2k} 10^2 + 197 \\
 &= (\text{usando la observación } (*_1)) \\
 &(99m - 197) 100 + 197 \\
 &= (\text{operando}) \\
 &100 \cdot 99m - 100 \cdot 197 + 197 \\
 &= (\text{operando}) \\
 &100 \cdot 99m - 99 \cdot 197 \\
 &= (\text{sacando factor común}) \\
 &99(100m - 197)
 \end{aligned}$$

Y considerando que $100m - 197 \in \mathbb{Z}$, concluimos que $10^{2(k+1)} + 197$ es múltiplo de 99, lo cual demuestra la propiedad por inducción. \square

Parte 2

- $P(k) : 9 \mid 7 \cdot 5^{2k} + 2^{4k+1}$

Paso base

- $n = 0 : 9 \mid 7 \cdot 5^0 + 2^{0+1}$

Ese caso es trivial pues:

$$\begin{aligned}
 &7 \cdot 5^0 + 2^{0+1} \\
 &= \\
 &7 + 2 \\
 &= \\
 &9 \cdot 1
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la propiedad es válida para $n = 0$

Paso inductivo

- (HI): $P(k) : 9 \mid 7 \cdot 5^{2k} + 2^{4k+1}$
- (TI): $P(k+1) : 9 \mid 7 \cdot 5^{2(k+1)} + 2^{4(k+1)+1}$

De la hipótesis, podemos llegar a que:

- $7 \cdot 5^{2k} + 2^{4k+1} = 9m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$, y por tanto:
- $2^{4k+1} = 9m - 7 \cdot 5^{2k} \quad (*_1)$

Expandamos la tesis inductiva para ver si podemos utilizar la hipótesis inductiva:

$$\begin{aligned}
& 7 \cdot 5^{2(k+1)} + 2^{4(k+1)+1} \\
& \quad = (\text{operando}) \\
& 7 \cdot 5^{2k+2} + 2^{4k+5} \\
& \quad = (\text{operando}) \\
& 7 \cdot 5^{2k} 5^2 + 2^{4k+1} 2^4 \\
& \quad = (\text{usando la observación } (*_1)) \\
& 7 \cdot 5^{2k} 5^2 + (9m - 7 \cdot 5^{2k}) 2^4 \\
& \quad = (\text{operando}) \\
& 7 \cdot 5^{2k} 5^2 + 9m 2^4 - 7 \cdot 5^{2k} 2^4 \\
& \quad = (\text{operando}) \\
& 7 \cdot 5^{2k} (5^2 - 2^4) + 9m 2^4 \\
& \quad = (\text{operando}) \\
& 7 \cdot 5^{2k} (9) + 9m 2^4 \\
& \quad = (\text{sacando factor común}) \\
& 9(7 \cdot 5^{2k} + m 2^4)
\end{aligned}$$

Y considerando que $7 \cdot 5^{2k} + m 2^4 \in \mathbb{Z}$, concluimos que $7 \cdot 5^{2(k+1)} + 2^{4(k+1)+1}$ es múltiplo de 9, lo cual demuestra la propiedad por inducción. \square