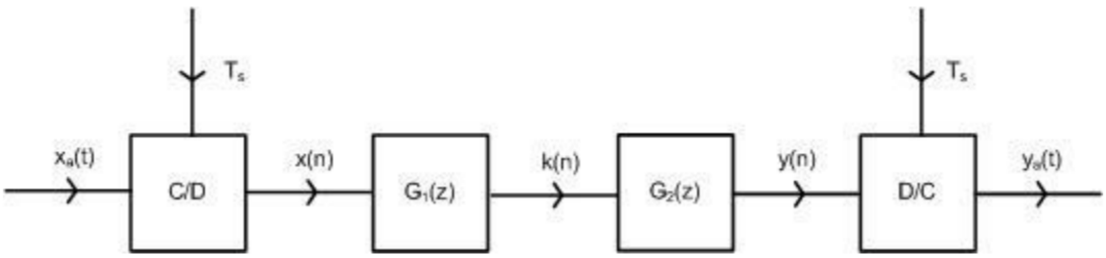
Δευτερη εργαστηριακη ασκηση

ΟΜΑΔΑ 51
Μέλη ομάδας.
Αντώνιος Μουτσόπουλος 2021030024
Εμμανουήλ Θωμάς Χατζάκης 2021030061
Πολυχρόνης Σταμούλης 2021030006

Ασκηση 1

A)



Με βάση το παραπάνω σύστημα παρατηρείται το παρακάτω για την συνάρτηση μεταφοράς :

$Y(z) = X(z) * G_1(z) * G_2(z) \leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = G_1(z) * G_2(z) \leftrightarrow H(z) = G_1(z) * G_2(z)$

Για το υπολογισμό της **H(z)** θα χρησιμοποιηθεί ο **μετασχηματισμός Z** στην εξίσωση διαφορών που περιγράφει την $G_1(z)$ η οποία είναι:

$k(n) = 0.9 * k(n - 1) + 0.2 * x(n)$

Με **μετασχηματισμό Z**(ιδιότητα γραμμικότητας, μετατόπισης στο χρόνο):

$K(z) = 0.9 * z^{-1} * K(z) + 0.2 * X(z) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow K(z) - 0.9 * z^{-1} * K(z) = 0.2 * X(z) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow K(z) * (1 - 0.9 * z^{-1}) = 0.2 * X(z) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \frac{K(z)}{X(z)} = \frac{0.2}{(1-0.9*z^{-1})} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow G_1(z) = \frac{0.2}{(1-0.9*z^{-1})}$

Γνωρίζοντας την $G_1(z)$ και $G_2(z)$ υπολογίζεται η **H(z)**

$H(z) = G_1(z) * G_2(z) \leftrightarrow$

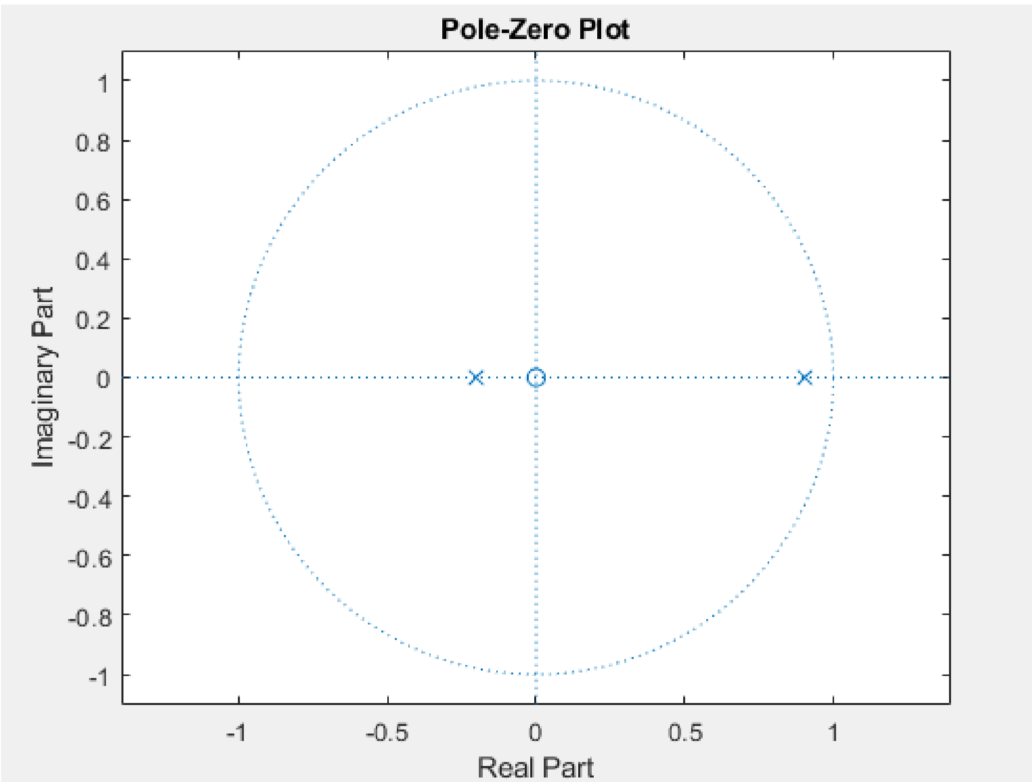
$\leftrightarrow H(z) = \frac{0.2}{(1-0.9*z^{-1})} * \frac{1}{z+0.2} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow H(z) = \frac{0.2z}{z^2-0.7z-0.18}$ **(σχέση 1)**

Για τη περιγραφή της συνάρτησης μεταφοράς εκτός από τον τύπο της χρειάζεται και η **περιοχή σύγκλισης(ROC)** της.
Αφού το σύστημα είναι αιτιατό ισχύει ότι **h[n]<0 για n<0**(δεξιόπλευρη ακολουθία).
Επιπλέον η ROC θα είναι το εξωτερικό μέρος του κύκλου $|z| > \rho_{max}$ όπου ρ_{max} ο μεγαλύτερος πόλος της **H(z)**
Από τον τύπο της **H(z) (σχέση 1)** βρίσκονται οι πόλοι (ρίζες παρονομαστή)
$\rho_1 = 0.9$ και $\rho_2 = -0.2$
Με βάση τα παραπάνω η πλήρης περιγραφή της συνάρτησης μεταφοράς είναι:
$H(z) = \frac{0.2z}{z^2 - 0.7z - 0.18}$ $ROC: |z| > 0.9$

Για τον υπολογισμό της γραμμικής εξίσωσης διαφορών εισόδου-εξόδου θα χρησιμοποιηθεί η σχέση εισόδου-εξόδου με τη συνάρτηση μεταφοράς.
$H(z) = \frac{0.2z}{z^2 - 0.7z - 0.18} = \frac{Y(z)}{X(z)} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow\ 0.2z * X(z) = z^2 * Y(z) - 0.7z * Y(z) - 0.18 * Y(z) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow 0.2z^{-1} * X(z) = Y(z) - 0.7z^{-1} * Y(z) - 0.18z^{-2} * Y(z)$
Εφαρμόζοντας **αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ** (ιδιότητα χρονικής μετατόπισης):
$0.2 * x[n-1] = y[n] - 0.7 * y[n-1] - 0.18 * y[n-2] \leftrightarrow$
$y[n] = 0.7 * y[n-1] + 0.18 * y[n-2] + 0.2 * x[n-1]$

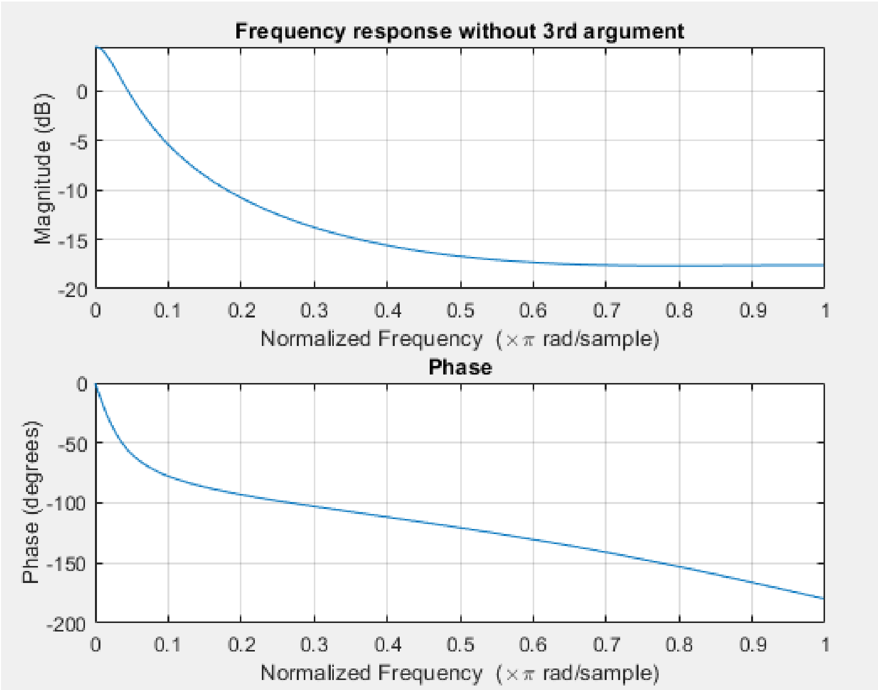
B)

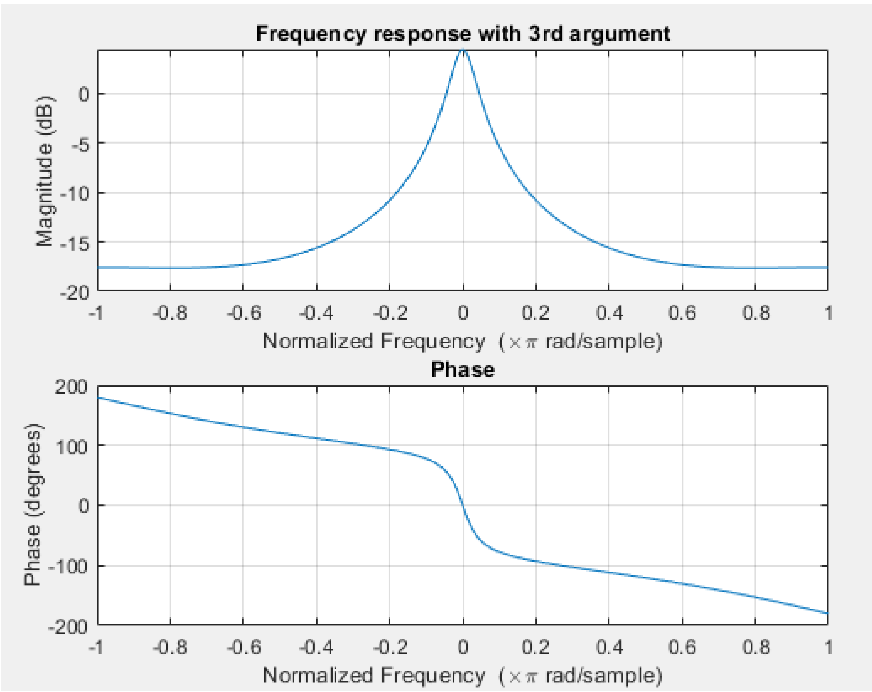


Γ)

Για να είναι το σύστημα **ευσταθές** θα πρέπει η **περιοχή σύγκλισης** της **H(z)** να περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο. Στο πρώτο ερώτημα βρέθηκε ότι η περιοχή σύγκλισης της **H(z)** είναι $|z| > 0.9$ που περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο ($|z| = 1$). Άρα το σύστημα είναι **ευσταθές**.

Δ)





Χωρίς την προσθήκη του τρίτου ορίσματος στη συνάρτηση **freqz()** η συνάρτηση επιλέγει αυθαίρετα το διάστημα απεικόνισης των διαγραμμάτων. Όπως φαίνεται στα παραπάνω διαγράμματα όταν δεν υπάρχει το τρίτο όρισμα τότε τα διαγράμματα πλάτους-φάσης απεικονίζονται στο δίαστημα [0 1] ενώ με το τρίτο όρισμα στο διάστημα [-1 1].

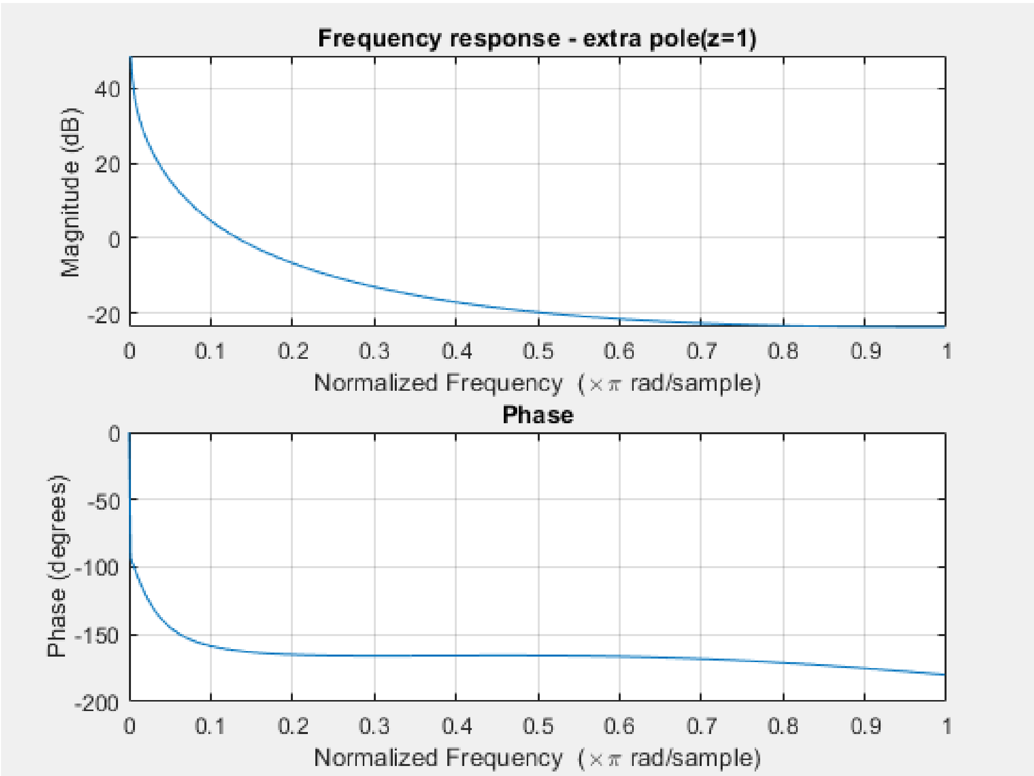
Στα διαγράμματα πλάτους και φάσης απόκρισης συχνότητας οι πόλοι αυξάνουν την απόκριση ενώ τα μηδενικά τη μειώνουν.

Ε)

Για να γίνει η προσθήκη του πόλου στο $z = 1$ θα πολλαπλασιαστεί ο παρανομαστής της **συνάρτησης μεταφοράς H(z)** με τον όρο $z - 1$:

$H(z) = \frac{0.2z}{z^2 - 0.7z - 0.18} * \frac{1}{(z-1)} = \frac{0.2z}{z^3 - 1.7z^2 + 0.52z + 0.18}$

Τα νέα διαγράμματα πλάτους-φάσης απόκρισης συχνότητας είναι:



Με τη προσθήκη του πόλου στο **z=1** φαίνεται η απόσβεση του συστήματος να είναι πολύ γρηγορότερη από πριν με αποτέλεσμα το σύστημα να σταθεροποιείται γρηγορότερα.

Ασκηση 2

$H(z) \;=\; \frac{4-3.5z^{-1}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}}$ με $|z| > 2$

A)

Θεωρητική Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Παραγονοποιόντας το **παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς** προκύπτει:

$H(z) \;=\; \frac{4-3.5z^{-1}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}} = \frac{4-3.5z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-0.5z^{-1}\right)} = \frac{A}{\left(1-2z^{-1}\right)} + \frac{B}{\left(1-0.5z^{-1}\right)} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \frac{4-3.5z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-0.5z^{-1}\right)} = \frac{A\left(1-0.5z^{-1}\right)}{\left(1-2z^{-1}\right)} + \frac{B\left(1-2z^{-1}\right)}{\left(1-0.5z^{-1}\right)} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \frac{4-3.5z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-0.5z^{-1}\right)} = \frac{A\left(1-0.5z^{-1}\right)+B\left(1-2z^{-1}\right)}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-0.5z^{-1}\right)} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 4 - 3.5z^{-1} = A\left(1 - 0.5z^{-1}\right) + B\left(1 - 2z^{-1}\right) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 4 - 3.5z^{-1} = A - 0.5Az^{-1} + B - 2Bz^{-1} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 4 - 3.5z^{-1} = A + B - z^{-1}(0.5A + 2B) \Rightarrow A + B = 4$ και $0.5A + 2B = 3.5$

Αρα $A = 3\,,\; B = 1$

Οπότε $H(z) = \frac{3}{\left(1-2z^{-1}\right)} + \frac{1}{\left(1-0.5z^{-1}\right)}$ με $|z| > 2$

Χρησιμοποιόντας τις κατάλληλες συναρτήσεις στη matlab επιβεβαιώνεται το παραπάνω αποτέλεσμα.

```
     3         1
- ----- - -------
   2          1
   - - 1    --- - 1
   z        2 z
```

B)

Για να υπολογιστεί ο **αντίστροφος μετασχηματισμός z** της **H(z)** θα χρησιμοποιηθούν τα απλά κλάσματα από το προηγούμενο ερώτημα.

$H(z) = \frac{3}{\left(1-2z^{-1}\right)} + \frac{1}{\left(1-0.5z^{-1}\right)}$

Χρησιμοποιόντας γνωστούς μετασχηματισμούς

$\frac{1}{1-pz^{-1}}$	$p^n u[n]$

υπολογίζεται η **h[n]**

$h[n] \;=\; 3 * 2^{n} * u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} * u[n]$

Με τη χρήση της συνάρτησης **iztrans** της **matlab** η παραπάνω σχέση επιβεβαιώνεται.

```
   n    / 1 \n
3 2  + | - |
        \ 2 /
```