

System typów F_ω

Systemy Typów 2010/11
Prowadzący: dr Dariusz Biernacki

Piotr Polesiuk	Małgorzata Jurkiewicz
bassists@o2.pl	gosia.jurkiewicz@gmail.com

Wrocław, dnia 12 lutego 2011 r.

1. Wstęp

No to na razie taki bałagan

2. System F_ω

W rozdziale tym chcielibyśmy się skupić na systemie F_ω okrojonym do niezbędnego minimum. Przedstawimy, jak wyglądają termy, typy i wartości tego języka, a także pokażemy, jak przebiega typowanie, znajdowanie rodzaju, ewaluacja czy sprawdzanie równości typów. Postaramy się pisać jasno i pokażemy parę przykładów, aby nieobyty w temacie Czytelnik nie zgubił się. W następnych rozdziałach XXX-XXX do tak zdefiniowanego systemu będziemy wprowadzać rozszerzenia.

2.1. Termy i typy w F_ω

System F_ω to rachunek będący rozszerzeniem λ_ω oraz systemu F . Wszystkie trzy wywodzą się z rachunku lambda z typami prostymi. Termy oraz typy definiujemy w λ_\rightarrow następująco:

$t ::=$	<i>termy</i>
x	<i>zmienne</i>
$\lambda x : T. t$	<i>abstrakcja</i>
$t t$	<i>aplikacja</i>
$T ::=$	<i>typy</i>
X	<i>zmienna typowa</i>
$T \rightarrow T$	<i>typ funkcji</i>

2.1.1. System λ_ω

Główną cechą systemu λ_ω jest to, że oprócz termów zależnych od termów mamy typy zależne od typów, czyli możemy mówić o aplikacji i abstrakcji typowej, a tak powstałe 'typy' będziemy nazywać konstruktorami. By nam się nie pomyliło z abstrakcją na termach, zmienne konstruktorowe będziemy zaczynać dużą literą. Przykładowo $Tb = \lambda X. X \rightarrow Bool$ i $\lambda X. X$ są abstrakcjami konstruktorowymi, ale $\lambda x. x$ jest abstrakcją na termach. Do konstruktora Tb możemy zaaplikować $Bool$ i dostaniemy $(\lambda X. X \rightarrow Bool)Bool$ równoważne $Bool \rightarrow Bool$. Jak widać, użyliśmy słowa *równoważne*. W rachunku lambda z typami prostymi sposób konstrukcji typów gwarantował nam, że dwa typy T_1 i T_2 na pewno są różne (zakładając, że typy bazowe były sobie różne). W λ_ω jest inaczej – konstruktory tego systemu możemy podzielić na klasy równoważności. Do klasy $Bool \rightarrow Bool$ należą również $(Tb^n)Bool$ dla n naturalnego, a T^n oznacza aplikację n konstruktorów T . Zauważmy, że odpowiednikiem takiej relacji równoważności w λ_\rightarrow jest β -równoważność. W świecie typów nazwiemy taką relację \equiv^1 . Każdy konstruktor typu jest silnie normalizowalny i zachodzi własność Churcha-Rossera. Przez $nf(T)$ oznaczamy postać normalną konstruktora rodzaju T . Dodatkowo wprowadzimy następującą regułę: $\frac{\Gamma \vdash t : S \quad S \equiv T}{\Gamma \vdash t : T}$ mówiącą, że jeżeli S jest konstruktorem termu t , to dowolny konstruktor S równoważny z T również jest konstruktorem t .

¹formalnie zdefiniujemy tą relację w rozdziale XXX

Niestety, w tak zdefiniowanym systemie powstaje jeden problem. Nie chcielibyśmy, aby `Bool Bool` było dozwolone, tak samo, jak w świecie termów nie chcielibyśmy, by `true true` było dozwolone. W świecie termów, by rozwiązać ten problem, wprowadziliśmy typy na termach, w świecie typów wprowadzimy *rodzaje* na konstruktorach. Piszemy, że $T :: K$, czyli konstruktor T jest rodzaju K . Wprowadzimy też jeden rodzaj bazowy $*$.

Wszystkie typy, jakie pojawiły się w λ_{\rightarrow} , są rodzaju $*$. Np. $Bool :: *$, $Nat \rightarrow Nat$, $(Bool \rightarrow Nat) \rightarrow Nat :: *$, itd. Rodzaj $* \Rightarrow *$ będzie odpowiadał funkcjom z konstruktorów w konstruktory, np. $\lambda X.X \rightarrow Bool :: * \Rightarrow *$. $* \Rightarrow * \Rightarrow *$ bierze konstruktor i zwraca funkcję konstruktorową, np. $\lambda X.\lambda Y.X \rightarrow Y :: * \Rightarrow * \Rightarrow *$, itd.

Teraz możemy λ_{\rightarrow} rozszerzyć o następujące konstrukcje:

- rodzaje

$K ::=$	<i>rodzaje</i>
$*$	<i>rodzaj wszystkich typów</i>
$K \Rightarrow K$	<i>rodzaj funkcji typowej</i>

- abstrakcję i aplikację typową na typach

$T ::=$	<i>typy</i>
\dots	
$\lambda X :: K.T$	<i>abstrakcja konstruktorowa</i>
$T T$	<i>aplikacji konstruktorowa</i>

Powstaje pytanie, czy wszystkie konstruktory są typami? Otóż nie, typy to konstruktory rodzaju $*$.

2.1.2. System F

System F jest systemem, w którym dodatkowo, oprócz termów zależnych od termów, mamy termy zależne od typów. Wprowadzimy trzeci już rodzaj abstrakcji i aplikacji, poprzedni był w świecie typów, ten będzie w świecie termów. Znana jest nam funkcja identycznościowa $\lambda x.x$, w λ_{\rightarrow} możemy ją napisać na wiele sposobów: $\lambda x : Bool.x$, $\lambda x : Nat.x$, $\lambda x : Bool \rightarrow Nat.x$. W systemie F możemy wszystkie te funkcje zapisać jako: $\lambda X.\lambda x : X.x$. Zauważmy, że ten *term* przyjmuje jako pierwszy argument typ, następnie term tego typu i zwraca term. Przykładem użycia takiego termu mogą być: $(\lambda X.\lambda x : X.x) [Bool] true$, co daje `true`, albo $(\lambda X.\lambda x : X.x) [Nat] 1$, co daje `1`. W ten sposób powstała nam *uniwersalna* funkcja identycznościowa, której nadamy tzw. uniwersalny typ: $\lambda X.\lambda x : X.x : \forall X.X \rightarrow X$. Dodatkowo, jako że dodaliśmy już do systemu rodzaje, napiszemy $\lambda X :: *. \lambda x : X.x : \forall X :: *. X \rightarrow X :: *$.

Czy moglibyśmy napisać $\lambda X :: * \Rightarrow *. \lambda x : X.x : \forall X :: * \Rightarrow *. X \rightarrow X :: * \Rightarrow *$? Jak już mówiliśmy, tylko konstruktory rodzaju $*$ są typami, więc powyższy term nie jest dobry.

Po tym krótkim wstępie możemy już zdefiniować odziedziczone z systemu F własności takie, jak:

- abstrakcję i aplikację typową na termach

$t ::=$	<i>termy</i>
\dots	
$\lambda X :: K.t$	<i>abstrakcja typowa</i>
$t[T]$	<i>aplikacja typowa</i>

- typ uniwersalny

$T ::=$	\dots	<i>typy</i>
	$\forall X :: K.T$	<i>typ uniwersalny</i>

2.2. Typowanie

2.2.1. Kontekst

Kontekst typowania opisany jest następującą składnią abstrakcyjną:

$\Gamma ::=$		<i>kontekst</i>
	\emptyset	<i>pusty kontekst</i>
	$\Gamma, x : T$	<i>wiązanie typu</i>
	$\Gamma, X :: K$	<i>wiązanie rodzaju</i>

Konteksty typowania będziemy często traktować jako skończone zbiory wiązań i będziemy używać teoriomnogościowych symboli na nich. Np. przynależność do kontekstu formalnie definiujemy jako:

$$\frac{}{B \in \Gamma, B} \quad \frac{B \in \Gamma}{B \in \Gamma, B'}$$

Definicje pozostałych operacji teoriomnogościowych są na tyle naturalne, że zostawiamy je Czytelnikowi do uzupełnienia.

2.2.2. Podstawienia

Oprócz zwykłego podstawienia za zmienne, które pozostawiamy Czytelnikowi do uzupełnienia, powinniśmy zdefiniować podstawienie za zmienne konstruktorowe.

- $[Y \mapsto T]X = \begin{cases} T & Y = X \\ X & \text{w.p.p} \end{cases}$
- $[Y \mapsto T](X_1 X_2) = [Y \mapsto T]X_1 [Y \mapsto T]X_2$
- $[Y \mapsto T](S_1 \rightarrow S_2) = [Y \mapsto T]S_1 \rightarrow [Y \mapsto T]S_2$
- $[Y \mapsto T]\forall X.S = \begin{cases} \forall X.S & Y = X \text{ lub } Y \notin FV(S) \\ \forall X.[Y \mapsto T]S & X \notin FV(S) \text{ i } Y \in FV(S) \end{cases}$
- $[Y := T]\lambda X.S = \begin{cases} \lambda X.S & Y = X \text{ lub } Y \notin FV(S) \\ \lambda X.[Y \mapsto T]S & X \notin FV(S) \text{ i } Y \in FV(S) \end{cases}$

2.2.3. Relacja \equiv

Jak wspomnieliśmy w rozdziale XXX, definiujemy na typach relację równoważności. W poniższych wzorach S, S_1, S_2, T, T_1, T_2 to typy, K to rodzaj. Następujące trzy reguły:

$$\frac{}{T \equiv T} \quad \frac{S \equiv T}{T \equiv S} \quad \frac{S \equiv U \quad U \equiv T}{S \equiv T}$$

gwarantują nam równoważność relacji \equiv . Pozostałe reguły jak następuje:

$$\frac{S_1 \equiv T_1 \quad S_2 \equiv T_2}{S_1 \rightarrow S_2 \equiv T_1 \rightarrow T_2} \quad \frac{S_1 \equiv T_1 \quad S_2 \equiv T_2}{S_1 S_2 \equiv T_1 T_2}$$

$$\frac{S \equiv T}{\lambda X :: K.S \equiv \lambda X :: K.T} \quad (\lambda X :: K.S)T \equiv [X \mapsto T]S$$

definiują równoważność funkcji typowych, aplikacji i abstrakcji konstruktorowych oraz typów uniwersalnych.

2.2.4. Reguły rodzajowania

W systemie F_ω każdemu poprawnie zbudowanemu typowi przyporządkowujemy rodzaj. Przyporządkowanie to określa relacja $(\vdash \cdot :: \cdot)$ zdefiniowana następująco.

Jeżeli zachodzi $\Gamma \vdash T :: K$, to powiemy, że *typ* T *jest rodzaju* K *w kontekście* Γ , gdzie relacja określenia rodzaju $(\vdash \cdot :: \cdot) \subseteq \Gamma \times T \times K$ jest najmniejszą relacją zamkniętą na reguły:

$$\frac{X :: K \in \Gamma}{\Gamma \vdash X :: K} \quad \frac{\Gamma \vdash T_1 :: K_1 \Rightarrow K_2 \quad \Gamma \vdash T_2 :: K_1}{\Gamma \vdash T_1 T_2 :: K_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash X :: K_1 \quad \Gamma \vdash T :: K_2}{\Gamma \vdash \lambda X :: K_1.T :: K_1 \Rightarrow K_2} \quad \frac{\Gamma \vdash X :: K \quad \Gamma \vdash T :: *}{\Gamma \vdash \forall X :: K.T :: *}$$

$$\frac{\Gamma \vdash T_1 :: * \quad \Gamma \vdash T_2 :: *}{\Gamma \vdash T_1 \rightarrow T_2 :: *}$$

2.2.5. Reguły typowania

Jesteśmy już gotowi przedstawić reguły typowania zdefiniowanego wyżej systemu F_ω . Każdemu poprawnie zbudowanemu termowi przyporządkowujemy typ. Przyporządkowanie to określa relacja $(\vdash \cdot :: \cdot)$ zdefiniowana następująco.

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T} \quad \frac{\Gamma \vdash T_1 :: * \quad \Gamma, x : T_1 \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash \lambda x : T_1.t_2 : T_1 \rightarrow T_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \rightarrow T_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : T_1}{\Gamma \vdash t_1 t_2 : T_2} \quad \frac{\Gamma \vdash t : S \quad S \equiv T \quad \Gamma \vdash T :: *}{\Gamma \vdash t : T}$$

2.3. Ewaluacja

Wartości w F_ω zdefiniujemy dokładnie jak w λ_{\rightarrow} .

$v ::=$	<i>wartości</i>
$\lambda x : T.t$	<i>wartość abstrakcji</i>

Ewaluacja przebiega w sposób standardowy. W rozdziałach XXX-XXX skupimy się na rozszerzeniach minimalnej wersji F_ω i pojawiają się tam nowe rzeczy. Teraz, dla czytelności, przetoczmy reguły ewaluacji dla wersji minimalnej (t_1, t'_1, t_2, t'_2, t to termy, v to wartość, $x:T$ to zmienna x typu T):

$$\frac{t_1 \longrightarrow t'_1}{t_1 t_2 \longrightarrow t'_1 t_2} \quad \frac{t_2 \longrightarrow t'_2}{v_1 t_2 \longrightarrow v_1 t'_2}$$

$$(\lambda x : T.t)v \longrightarrow [x \mapsto v]t$$

3. Rozszerzenia F_ω

Ważne!!! Zaoszczędza dużo pisania i pozwala w zasanie na przepisanie reguł z innych systemów ;)

$$\frac{\Gamma \vdash t : T \quad S \equiv T \quad \Gamma \vdash S :: *}{\Gamma \vdash t : S}$$

3.1. wyrażenia arytmetyczne i logiczne

$t ::=$...	<i>termy</i>
	true	<i>prawda</i>
	false	<i>falsz</i>
	zero	<i>zero</i>
	succ t	<i>następnik</i>
	pred t	<i>poprzednik</i>
	iszero	<i>test na zero</i>
	if t then t else t	<i>warunek</i>
$T ::=$...	<i>typy</i>
	Nat	<i>typ liczbowy</i>
	Bool	<i>typ boolowski</i>
$v ::=$...	<i>typy</i>
	true	<i>wartość prawdy</i>
	false	<i>wartość fałszu</i>
	nv	<i>wartość liczbową</i>
$nv ::=$...	<i>wartość liczbową</i>
	zero	<i>wartość zera</i>
	succ nv	<i>wartość następnika</i>

Kinding:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{Bool} :: *} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{Nat} :: *}$$

Typowanie:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 : \text{Bool} \quad \Gamma \vdash t_2 : T \quad \Gamma \vdash t_3 : T \quad \Gamma \vdash T :: *}{\Gamma \vdash \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 : T}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{zero} : \text{Nat}} \quad \frac{\Gamma \vdash t : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{succ } t : \text{Nat}} \quad \frac{\Gamma \vdash t : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{pred } t : \text{Nat}} \quad \frac{\Gamma \vdash t : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{iszero } t : \text{Bool}}$$

Ewaluacja:

aaa

3.2. unit i sekwencje

W zasadzie unita można nie wprowadzać:

$\text{unit} = \lambda X :: *. \lambda x : X. x$

$\text{Unit} = \forall X :: *. X \rightarrow X$

zamiast:

$t ::=$	\dots	<i>termy</i>
	unit	
$T ::=$	\dots	<i>typy</i>
	Unit	
$v ::=$	\dots	<i>wartości</i>
	unit	

Kinding:

$$\overline{\Gamma \vdash \text{Unit} :: *}$$

Typowanie:

$$\overline{\Gamma \vdash \text{unit} : \text{Unit}}$$

$$t_1; t_2 = (\lambda x : \text{Unit}. t_2) t_1 \quad \text{gdzie } x \notin \text{FV}(t_2)$$

3.3. Definicje lokalne

$$\text{let } x = t_1 \text{ in } t_2 \longrightarrow (\lambda x : T. t_2) t_1 \quad \text{gdzie } t_1 : T$$

3.4. Rekordy

$t ::=$	\dots	<i>termy</i>
	$\{l_i = t_i^{i \in 1..n}\}$	<i>rekord</i>
	$t.l$	<i>projekcja</i>
$T ::=$	\dots	<i>typy</i>
	$\{l_i : T_i^{i \in 1..n}\}$	<i>typ rekordu</i>
$v ::=$	\dots	<i>wartości</i>
	$\{l_i = v_i^{i \in 1..n}\}$	<i>wartość rekordu</i>

Ewaluacja:

$$\{l_i = v_i^{i \in 1..n}\}.i \longrightarrow v_i \quad \frac{e \longrightarrow e'}{e.i \longrightarrow e'.i}$$

$$\overline{\{l_1 = v_1, \dots, l_{i-1} = v_{i-1}, l_i = t_i, \dots, l_n = t_n\} \longrightarrow \{l_1 = v_1, \dots, l_{i-1} = v_{i-1}, l_i = t'_i, \dots, l_n = t_n\}}$$

Rodzajowanie:

$$\frac{\Gamma \vdash T_1 :: * \dots \Gamma \vdash T_n :: *}{\Gamma \vdash \{l_i : T_i^{i \in 1..n}\} :: *}$$

Typowanie:

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \dots \Gamma \vdash t_n : T_n \quad \Gamma \vdash \{l_i : T_i^{i \in 1..n}\} :: *}{\Gamma \vdash \{l_i = t_i^{i \in 1..n}\} : \{l_i : T_i^{i \in 1..n}\}} \quad \frac{\Gamma \vdash t : \{l_i : T_i^{i \in 1..n}\} \quad \Gamma \vdash \{l_i : T_i^{i \in 1..n}\} :: *}{\Gamma \vdash t.i : T_i}$$

3.5. Warianty

$t ::=$	\dots	<i>termy</i>
	$\langle l = t \rangle \text{ as } T$	<i>tagowanie</i>
	$\text{case } t \text{ of } \langle l_i = x_i \rangle \Rightarrow t_i^{i \in 1..n}$	<i>case</i>
$T ::=$	\dots	<i>typy</i>
	$\langle l_i : T_i^{i \in 1..n} \rangle$	<i>typ wariantu</i>

Kinding:

$$\frac{\Gamma \vdash T_1 :: * \dots \Gamma \vdash T_n :: *}{\Gamma \vdash \langle l_i : T_i^{i \in 1..n} \rangle :: *}$$

Typowanie:

$$\frac{\Gamma \vdash t_0 : \langle l_i : T_i^{i \in 1..n} \rangle \quad \Gamma, x_1 : T_1 \vdash t_1 : T \dots \Gamma, x_n : T_n \vdash t_n : T}{\Gamma \vdash \text{case } t_0 \text{ of } \langle l_i = x_i \rangle \Rightarrow t_i^{i \in 1..n} : T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_j : T_j \quad \Gamma \vdash \langle l_i : T_i^{i \in 1..n} \rangle :: *}{\Gamma \vdash \langle l_j = t_j \rangle \text{ as } \langle l_i : T_i^{i \in 1..n} \rangle : \langle l_i : T_i^{i \in 1..n} \rangle}$$

Ewaluacja:

3.6. Punkt stały

$t ::=$	\dots	<i>termy</i>
	$\text{fix } t.v$	<i>punkt stały</i>

Ewaluacja

$$\text{fix } f.v \longrightarrow [f \mapsto \text{fix } f.v]v$$

Typowanie

$$\frac{\Gamma, f : T \vdash v : S \quad \Gamma \vdash T :: * \quad \Gamma \vdash S :: * \quad S \equiv T}{\Gamma \vdash \text{fix } f.v : T}$$

3.7. listy

$t ::=$	\dots	<i>termy</i>
	$\text{nil}[T]$	<i>lista pusta</i>
	$\text{cons}[T] \ t \ t$	<i>konstruktor listy</i>
	$\text{isnil}[T] \ t$	<i>test na pustość listy</i>
	$\text{head}[T] \ t \ t$	<i>głowa listy</i>
	$\text{tail}[T] \ t$	<i>ogon listy</i>
$T ::=$	$\text{List } T$	<i>typy</i> <i>typ listy</i>
$v ::=$	$\text{nil } [T]$	<i>typy</i> <i>wartość pustej listy</i>
	$\text{cons } [T] \ v \ v$	<i>wartość listy niepustej</i>

Kinding:

$$\frac{\Gamma \vdash T :: *}{\Gamma \vdash \text{List } T :: *}$$

Typowanie:

$$\frac{\Gamma \vdash \text{List } T :: *}{\Gamma \vdash \text{nil}[T] : \text{List } T} \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 : T \quad \Gamma \vdash t_2 : \text{List } T}{\Gamma \vdash \text{List}[T] t_1 t_2 : \text{List } T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \text{List } T}{\Gamma \vdash \text{head}[T] t : T} \quad \frac{\Gamma \vdash t : \text{List } T}{\Gamma \vdash \text{tail}[T] t : \text{List } T}$$

Ewaluacja:

aaa

3.8. Typy egzystencjalne

$t ::=$	\dots	<i>termy</i>
	$\{ *T, t \} \text{ as } T$	<i>pakowanie</i>
	$\text{let } \{ X, x \} = t \text{ in } t$	<i>odpakowanie</i>

Teraz możemy sobie zdefiniować te operacje w F_ω :

$$\{ \exists X :: K, T \} \stackrel{\text{def}}{=} \forall Y :: *. (\forall X :: K. X \rightarrow Y) \rightarrow Y$$

$$\{ *U :: K, t \} \text{ as } \{ \exists X :: K, T \} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda Y :: *. (\lambda f : \forall X :: K. T \rightarrow Y). f [U] t$$

$$\text{let } \{ X, x \} = t \text{ in } t' \stackrel{\text{def}}{=} t[T'](\lambda X :: K. \lambda x : T. t') \quad \text{gdzie } t' : T'$$

3.9. Typy rekurencyjne

Hmmm, no tu muszę się zastanowić, to na dole dla zwykłej wersji.

$t ::=$	\dots	<i>termy</i>
	$\text{fold}[T] t$	<i>folding</i>
	$\text{unfold}[T] t$	<i>unfolding</i>
$T ::=$	\dots	<i>typy</i>
	$\mu X. T$	<i>typ rekursywny</i>
$v ::=$	\dots	<i>wartości</i>
	$\text{fold}[T] v$	<i>folding</i>

Kinding:

$$\overline{\Gamma \vdash \mu X. T :: *}$$

Typowanie:

$$\frac{U = \mu X. T \quad \Gamma \vdash t : [X \mapsto U] U}{\Gamma \vdash \text{fold}[U] t : U}$$

Ewaluacja:

3.10. dopasowanie wzorca

4. Śladnia abstrakcyjna języka

5. Semantyka i typowanie

6. Rekonstrukcja typów

7. Własności i dowody

7.1. Inne własności F_ω

Definicja 1. Reguły przepisywania typów w systemie F_ω w wersji Curry'ego standardowe, oprócz:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall X \sigma}{\Gamma \vdash M : nf(\sigma[X := \tau])}$$

Nierozstrzygalne są problemy:

- sprawdzania typu: dane Γ, M, τ , Czy $\Gamma \vdash M : \tau$
- typowalność: dane M , Czy $\exists \Gamma \tau. \Gamma \vdash M : \tau$

7.2. pare słów o rozszerzeniach

8. Praktyczne zastosowanie

9. Podsumowanie

Literatura

[1] Pierce,