Rozwiązanie drugiego zadania z trzeciej listy z Mechaniki Kwantowej

Piotr Polesiuk, Bartłomiej Pytko

29 lutego 2012

Niech $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie operatorem hermitowskim. Udowodnić następujące twierdzenia

1. Jeżeli podprzestrzeń $W \subseteq \mathbb{C}^n$ jest podprzestrzenią niezmienniczą operatora A to jej ortogonalne dopełnienie $W^\perp$ jest również podprzestrzenią niezmienniczą A.

   Dowód. Operator A jest hermitowski, tzn. dla dowolnych wektorów $x, y \in \mathbb{C}^n$ zachodzi $\langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle$. Weźmy dowolny wektor $u \in W^\perp$. Z definicji ortogonalnego dopełnienia spełnia on $\forall w \in W. \langle u|w\rangle = 0$. Pokażę, że własność ta zachodzi również dla Au. W tym celu weźmy dowolne $w \in W$. Wtedy

   $$\langle Au|w\rangle = \langle u|Aw\rangle = 0$$

   Pierwsza równość wynika z hermitowskości operatora A, zaś równość druga wynika z niezmienniczości podprzestrzeni W $(Aw \in W)$ oraz z definicji ortogonalnego dopełnienia. □

2. Istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych operatora A.

   Dowód. Przez indukcję po n.

   - Dla $n = 0$ zbiór pusty w sposób trywialny jest bazą ortonormalną.
   - Załóżmy, że teza twierdzenia zachodzi dla każdego operatora hermitowskiego działającego nad $\mathbb{C}^n$. Weźmy operator $A\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$. Jego wielomian charakterystyczny jest wielomianem stopnia $n+1$ nad ciałem liczb zespolonych, więc z zasadniczego twierdzenia algebry operator A ma conajmniej jedną wartość własną λ oraz wektor własny w. Oczywiście wektor ten można wybrać tak by $||w|| = 1$.
     Przestrzeń $\mathbb{C}^{n+1}$ można przedstawić jako

     $$\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}w \oplus (\mathbb{C}w)^\perp$$

     (gdzie zapis $\mathbb{C}w$ oznacza $\{\alpha w | \alpha \in \mathbb{C}\}$), a każdy wektor v przedstwić w sposób jednoznaczny jako sumę $v = \alpha w + v'$, gdzie $v' \in (\mathbb{C}w)^\perp$. Zauważmy jeszcze, że podprzestrzeń $\mathbb{C}w$ jest niezmiennicza (bo w jest wektorem własnym), a na mocy poprzednio udowodnionego twierdzenia, podprzestrzeń $(\mathbb{C}w)^\perp$ również jest niezmiennicza.
     Rozważmy działanie operatora A na dowolnym wektorze v:

     $$Av = A(\alpha w + v') = A(\alpha w) + Av' = \alpha\lambda w + A'v'$$

     gdzie operator A' to operator A obcięty do podprzestrzeni $(\mathbb{C}w)^\perp$, wartości A' również są z tego zbioru (z niezmienniczości dziedziny).

Ale $\dim(\mathbb{C}w)^{\perp} = n$, czyli przestrzeń $(\mathbb{C}w)^{\perp}$ jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbb{C}^n$, więc na mocy założenia indukcyjnego ma bazę ortonormalną E, złożoną z wektorów własnych operatora A', które również są wektorami własnymi operatora A.

Wektor w jest prostopadły do wszystkich wektorów z $(\mathbb{C}w)^{\perp}$, w szczególności do wektorów z E, więc układ $E \cup \{w\}$ tworzy bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{C}^{n+1}$ złożoną z wektorów własnych operatora A.

□

3. Przestrzeń $\mathbb{C}^n$ jest ortogonalną sumą prostą podprzestrzeni własnych operatora A.

Dowód. Natychmiast z poprzedniego twierdzenia. Niech $\{v_{\lambda i} | \lambda \in \mathrm{spec} A | i = 1, \ldots, m_\lambda\}$, gdzie m_λ oznacza krotność geometryczną wartości własnej λ, będzie wyżej wprowadzoną bazą ortonormalną. Zatem

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec} A} \bigoplus_{i=1}^{m_\lambda} \mathbb{C} v_{\lambda i} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec} A} V_\lambda$$

Ta ostatnia równość wynika z faktu, że wektory $\{v_{\lambda i}\}_{i=1}^{m_\lambda}$ rozpinają podprzestrzeń własną V_λ odpowiadającą wartości własnej λ.

Ortogonalność tej sumy zapewniona jest przez ortonormalność bazy. □