Rozwiązania kilku zadań z pierwszej listy zadań z Mechaniki Kwantowej

Piotr Polesiuk, Bartłomiej Pytko

15 lutego 2012

Zadanie 2. Całkowite natężenie promieniowania (po wszystkich częstościach) można wyrazić całką:

$$\psi(T) = \int_0^\infty \psi(\nu, T)\mathbf{d}\nu$$

Wstawiając wyrażenie na $\psi(\nu, T)$ z prawa Plancka:

$$\psi(T) = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\mathbf{d}\nu$$

oraz całkując przez podstawienie:

$$x = \frac{h\nu}{kT} \quad \nu = \frac{kT}{h}x \quad \mathbf{d}\nu = \frac{kT}{h}\mathbf{d}x$$

otrzymujemy

$$\psi(T) = \int_0^\infty \frac{8\pi k^2T^2}{c^2h^2}x^2\frac{kT}{h}\frac{hx}{e^x - 1}\frac{kT}{h}\mathbf{d}x = T^4\frac{8\pi k^4}{c^2h^3}\int_0^\infty x^3\frac{1}{e^x - 1}\mathbf{d}x$$

Ta ostania całka przyjmuje stałą wartość, więc nie zależy od temperatury. Otrzymaliśmy więc prawo Stefana–Boltzmanna:

$$\psi(T) = \sigma T^4$$

gdzie

$$\sigma = \frac{8\pi k^4}{c^2h^3}\int_0^\infty x^3\frac{1}{e^x - 1}\mathbf{d}x$$

Zadanie 3. Korzystając z prawa Wiena, otrzymujemy długość fali, dla której moc promieniowania jest największa

$$\lambda_{max} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{T}\mathrm{m} = 500\mathrm{nm}$$

Moc promieniowania na jednostkę powierzchi dostaniemy dzięki prawu Stefana-Boltzmanna.

$$\psi(T) = \sigma T^4 = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 5800^4\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 6,41 \cdot 10^7\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$