Rozwiązania kilku zadań z pierwszej listy zadań z Mechaniki Kwantowej

Piotr Polesiuk

11 lutego 2012

Zadanie 2. Całkowite natężenie promieniowania (po wszystkich częstościach) można wyrazić całką:

$$\psi(T) = \int_0^\infty \psi(\nu, T)\mathbf{d}\nu$$

Wstawiając wyrażenie na $\psi(\nu, T)$ z prawa Plancka:

$$\psi(T) = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\mathbf{d}\nu$$

oraz całkując przez podstawienie:

$$x = \frac{h\nu}{kT} \quad \nu = \frac{kT}{h}x \quad \mathbf{d}\nu = \frac{kT}{h}\mathbf{d}x$$

otrzymujemy

$$\psi(T) = \int_0^\infty \frac{8\pi k^2 T^2}{c^2 h^2} x^2 \frac{kT}{h} \frac{hx}{e^x - 1} \frac{kT}{h}\mathbf{d}x = T^4 \frac{8\pi k^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty x^3 \frac{1}{e^x - 1}\mathbf{d}x$$

Ta ostania całka przyjjmuje stałą wartość, więc nie zależy od temperatury. Otrzymaliśmy więc prawo Stefana–Boltzmanna:

$$\psi(T) = \sigma T^4$$

gdzie

$$\sigma = \frac{8\pi k^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty x^3 \frac{1}{e^x - 1}\mathbf{d}x$$