Rozwiązanie drugiego zadania z drugiej listy z Mechaniki Kwantowej

Piotr Polesiuk, Bartłomiej Pytko

21 lutego 2012

Zadanie 2, podpunkt (a). Nawiasy Poissona definiujemy jako

$$\{F, G\} \equiv \sum_{i=0}^{s} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right)$$

gdzie s to liczba stopni swobody, a p_i oraz q_i to pędy i współrzędne uogólnione.

Jako, że przy rozwijaniu definicji zagnieżgdżonych nawiasów Poissona mogą pojawiać się bardzo długie wyrażenia ($\{F, \{G, H\}\}$ po rozwinięciu ma aż 8 składników postaci $\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y}$), wprowadzimy następującą notację:

$$x_i^0 \equiv p_i \qquad x_i^1 \equiv p_i$$

Wtedy nawiasy Poissona wyrażają się w następujący sposób:

$$\{F, G\} = \sum_{i=0}^{s} \sum_{a=0}^{1} (-1)^a \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial G}{\partial x_i^{1-a}}$$

a zatem

$$\{F, \{G, H\}\} = \sum_{i=0}^{s} \sum_{a=0}^{1} (-1)^a \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial}{\partial x_i^{1-b}} \sum_{j=0}^{s} \sum_{b=0}^{1} (-1)^b \frac{\partial G}{\partial x_j^b} \frac{\partial H}{\partial x_j^{b-1}}$$

$$= \sum_{i,j=0}^{s} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b} \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^{1-a} \partial x_j^b} \frac{\partial H}{\partial x_j^{1-b}} + \sum_{i,j=0}^{s} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b} \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial G}{\partial x_j^b} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^{1-a} \partial x_j^{1-b}}$$

Po przeindeksowaniu w drugiej sumie i zamianie kilku czynników miejscami mamy

$$\{F, \{G, H\}\} = \sum_{i,j=0}^{s} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b} \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^{1-a} \partial x_j^b} \frac{\partial H}{\partial x_j^{1-b}} - \sum_{i,j=0}^{s} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b} \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^{1-a} \partial x_j^b} \frac{\partial G}{\partial x_j^{1-b}} \tag{1}$$

Połóżmy

$$X_{FGH} \equiv \sum_{i,j=0}^{s} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b} \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^{1-a} \partial x_j^b} \frac{\partial H}{\partial x_j^{1-b}}$$

Taki obiekt ma następujące własności

$$\begin{array}{ll} (i) & X_{FGH} = X_{HGF} \\ (ii) & \{F, \{G, H\}\} = X_{FGH} - X_{GHF} \end{array}$$

Własność (i) otrzymujemy przez prostą zamianę indeksów, a własność (ii) natychmiast wynika z równania (1) oraz własności (i).

Teraz łatwo można udowodnić własność nawiasów Poissona z zadania:

$$\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = X_{FGH} - X_{GHF} + X_{HFG} - X_{FGH} + X_{GHF} - X_{HFG} = 0$$