Rozwiązanie drugiego zadania z szóstej listy z Mechaniki Kwantowej

BP PP RW RP

20 marca 2012

1. Na oscylatorze harmonicznym w stanie podstawowym wykonano po kolei dwa pomiary - najpierw energii kinetycznej, a następnie energii całkowitej. Zaniedbując czas pomiędzy pomiarami podać i uzasadnić wzór na prawdopodobieństwo uzyskania w wyniku drugiego pomiaru wartości $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ jeżeli w wyniku pierwszego pomiaru uzyskano wynik w przedziale $(0, \frac{3}{2}\hbar\omega)$.

   Rozwiązanie: Energia kinetyczna zależy tylko od pędu, więc mamy
$$E_k = \frac{p^2}{2m} < \frac{3}{2}\hbar\omega,$$
   co jest równoważne stwierdzeniu
$$p \in \left[-\sqrt{3\hbar\omega m}, \sqrt{3\hbar\omega m}\right].$$
   Zatem po pomiarze energii kinetycznej dla cząstki w stanie ψ jej nowy stan będzie równy
$$|\phi\rangle = \frac{|\phi_0\rangle}{\sqrt{\langle\phi_0|\phi_0\rangle}},$$
   gdzie
$$|\phi_0\rangle = \int\limits_{-\sqrt{3\hbar\omega m}}^{\sqrt{3\hbar\omega m}} dp|p\rangle\langle p|\psi\rangle.$$
   Zatem prawdopodobieństwo, że energia całkowita będzie równa $\frac{7}{2}\hbar\omega$ wynosi $\langle\psi_3|\phi\rangle$, gdzie ψ_3 oznacza funkcję własną operatora energii odpowiadającą wartości własnej $\frac{7}{2}\hbar\omega$.

2. Mierząc położenie cząstki kwantowej przy pomocy detektora idealnego umieszczonego na odcinku $[a, b]$, otrzymano wynik negatywny. Podać wzór na funkcję falową cząstki (w reprezentacji położeniowej) tuż po pomiarze, jeżeli tuż przed pomiarem jej stan opisany był unormowaną funkcją falową $\psi(x)$.

   Rozwiązanie: Jeżeli detektor idealny nie zarejestrował cząstki na przedziale $[a, b]$, to funkcja falowa po obserwacji na tym przedziale powinna znikać. Jest to sytuacja równoważna sytuacji w której cząstkę zarejestrował drugi detektor idealny badający istnienie cząstki na dopełnieniu przedziału $[a, b]$. Zatem, po obserwacji układ będzie w stanie:
$$|\phi\rangle = \frac{|\phi_0\rangle}{\sqrt{\langle\phi_0|\phi_0\rangle}}, \quad \text{gdzie} \quad |\phi_0\rangle = \int\limits_{-\infty}^{a} dx|x\rangle\langle x|\phi\rangle + \int\limits_{b}^{\infty} dx|x\rangle\langle x|\phi\rangle.$$
   Wiedząc, że funkcje własne operatora położenia wyrażają się przez deltę Diraca, otrzymujemy:
$$\phi_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} \delta(x-y)\psi(y)dy + \int\limits_{b}^{\infty} \delta(x-y)\psi(y)dy = \begin{cases} 0 & x \in [a, b] \\ \psi(x) & x \notin [a, b] \end{cases}.$$
   Widać, że zgodnie z naszymi intuicjami funkcja ta znika na przedziale $[a, b]$.

3. Rozważmy dwa pomiary położenia cząstki, jeden na odcinku $[a_1, a_2]$, drugi na odcinku $[b_1, b_2]$. Zakładając pozytywny wynik obu pomiarów, zbadać czy kolejność ich wykonywania ma wpływ na stan końcowy układu.

Rozwiązanie: Jak już zauważyliśmy, tuż po pozytywnym pomiarze położenia cząstki będącej w stanie ψ na przedziale $[a, b]$, nowy stan ma postać:

$$\phi(x) = \begin{cases} A\psi(x) & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases},$$

gdzie A to pewna rzeczywista dodatnia stała normująca.

Zatem zaczynając od stanu ψ,po wykonaniu pierwszego pomiaru na przedziale $[a_1, a_2]$ mamy stan

$$\phi_1 = \begin{cases} A_1\psi(x) & x \in [a_1, a_2] \\ 0 & x \notin [a_1, a_2] \end{cases},$$

a następnie po wykonaniu drugiego pomiaru na przedziale $[b_1, b_2]$ otrzymujemy stan

$$\phi_2 = \begin{cases} B_1\phi_1(x) & x \in [b_1, b_2] \\ 0 & x \notin [b_1, b_2] \end{cases} = \begin{cases} A_1B_1\psi(x) & x \in [a_1, a_2] \cap [b_1, b_2] \\ 0 & x \notin [a_1, a_2] \cap [b_1, b_2] \end{cases}.$$

Wykonując te same pomiary, ale w odwrotnej kolejności otrzymamy kolejno stany

$$\phi_1' = \begin{cases} B_2\psi(x) & x \in [b_1, b_2] \\ 0 & x \notin [b_1, b_2] \end{cases}$$

$$\phi_2' = \begin{cases} A_2\phi_1'(x) & x \in [a_1, a_2] \\ 0 & x \notin [a_1, a_2] \end{cases} = \begin{cases} A_2B_2\psi(x) & x \in [a_1, a_2] \cap [b_1, b_2] \\ 0 & x \notin [a_1, a_2] \cap [b_1, b_2] \end{cases}.$$

Widać, że stałe A_1B_1 i A_2B_2 są rzeczywiste dodatnie, oraz normują tą samą funkcję, więc muszą być równe. Zatem stan końcowy nie zależy od kolejności pomiarów położenia.