Rozwiązanie drugiego zadania z piątej listy z Mechaniki Kwantowej

BP PP RW RP

14 marca 2012

(a) Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w miejscu x będącej w stanie ψ zgodnie z postulatem wyraża się wzorem:

$$f(x) = |\langle\psi_x|\psi\rangle|^2$$

gdzie ψ_x jest zewnętrznym wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej x, tzn. $\psi_x(y) = \delta(y - x)$.

A zatem:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\delta(y-x)} \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}y^2} dy \right|^2 = \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \\
f_1(x) &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\delta(y-x)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{-\frac{1}{4}} 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}y^2} dy \right|^2 = \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{-\frac{1}{2}} 2\frac{m\omega}{\hbar} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \\
f_2(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right)^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}
\end{aligned}$$

Przechodząc do bezwymiarowej zmiennej $\xi = \alpha x$, gdzie $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
f_0(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \\
f_1(\xi) &= \frac{2\xi^2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \\
f_2(\xi) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(2\xi^2 - 1\right)^2 e^{-\xi^2}
\end{aligned}$$

W mechanice klasycznej mamy

$$\hbar\omega(n + \frac{1}{2}) = E_n = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

gdzie $k = \omega^2 m$. Przechodząc do zmiennej ξ otrzymujemy:

$$\xi_{max} = \sqrt{2n+1}$$

co daje dla $n = 0, 1, 2$ następujące wartości:

$$\xi_{max0} = 1 \quad \xi_{max1} = \sqrt{3} \approx 1,7 \quad \xi_{max2} = \sqrt{5} \approx 2,2$$

Patrząc na wykres 1 widzimy, że z dużym prawdopodobieństwem znajdziemy cząstkę właśnie w tym przedziale, ale całkiem prawdopodobne jest też odnalezienie cząstki tuż poza nim.

(b) Dla operatora pędu sytuacja jest podobna, z tą różnicą, że mamy inne wektory własne, tzn.

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px}$$

Jednak wiemy, że:

$$\begin{aligned} \langle\psi_p|\psi\rangle &= \hbar^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}\left(\frac{p}{\hbar}\right) && (1) \\ \widetilde{cf} &= c\widetilde{f} \quad c \in \mathbb{C} && (2) \\ H_n\widetilde{(\alpha x)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}} &= \frac{(-i)^n}{\alpha} H_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} && (3) \end{aligned}$$

Gdzie H_n oznacza n-ty wielomian Hermite'a.

Warto zaznaczyć, że transformata Fouriera przekształca funkcje w funkcje, więc równanie (3) powinienem formalnie zapisać jako

$$\lambda x.H_n\widetilde{(\alpha x)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}} = \lambda x.\frac{(-i)^n}{\alpha} H_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$$

jednak notacja funkcji anonimowych przy pomocy symbolu λ nie jest używana w fizyce, więc mógłbym zostać niezrozumianym.

Teraz można szybko wyliczyć gęstości prawdopodobieństwa

$$\begin{aligned} g_0(p) &= |\langle\psi_p|\phi_0\rangle|^2 = \left|\hbar^{-\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\alpha\pi^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{p^2}{2\hbar^2\alpha^2}}\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\hbar\alpha}e^{-\frac{p^2}{\hbar^2\alpha^2}} \\ g_1(p) &= |\langle\psi_p|\phi_0\rangle|^2 = \left|\frac{2}{\sqrt{2\hbar}}\alpha^{\frac{1}{2}}\frac{-i}{\alpha\pi^{\frac{1}{4}}}\frac{p}{\hbar\alpha}e^{-\frac{p^2}{2\hbar^2\alpha^2}}\right|^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}\hbar\alpha}\frac{p^2}{\hbar^2\alpha^2}e^{-\frac{p^2}{\hbar^2\alpha^2}} \\ g_2(p) &= |\langle\psi_p|\phi_0\rangle|^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}\hbar\alpha}\left(2\frac{p^2}{\hbar^2\alpha^2}-1\right)^2 e^{-\frac{p^2}{\hbar^2\alpha^2}} \end{aligned}$$

Przechodząc do zmiennej bezwymiarowej $\rho = \frac{p}{\hbar\alpha} = p\sqrt{m\omega\hbar}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} g_0(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2} \\ g_1(\rho) &= \frac{2\rho^2}{\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2} \\ g_2(\rho) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(2\rho^2-1\right)^2 e^{-\rho^2} \end{aligned}$$

Czyli dokładnie te same gęstości, co dla bezwymiarowego położenia!

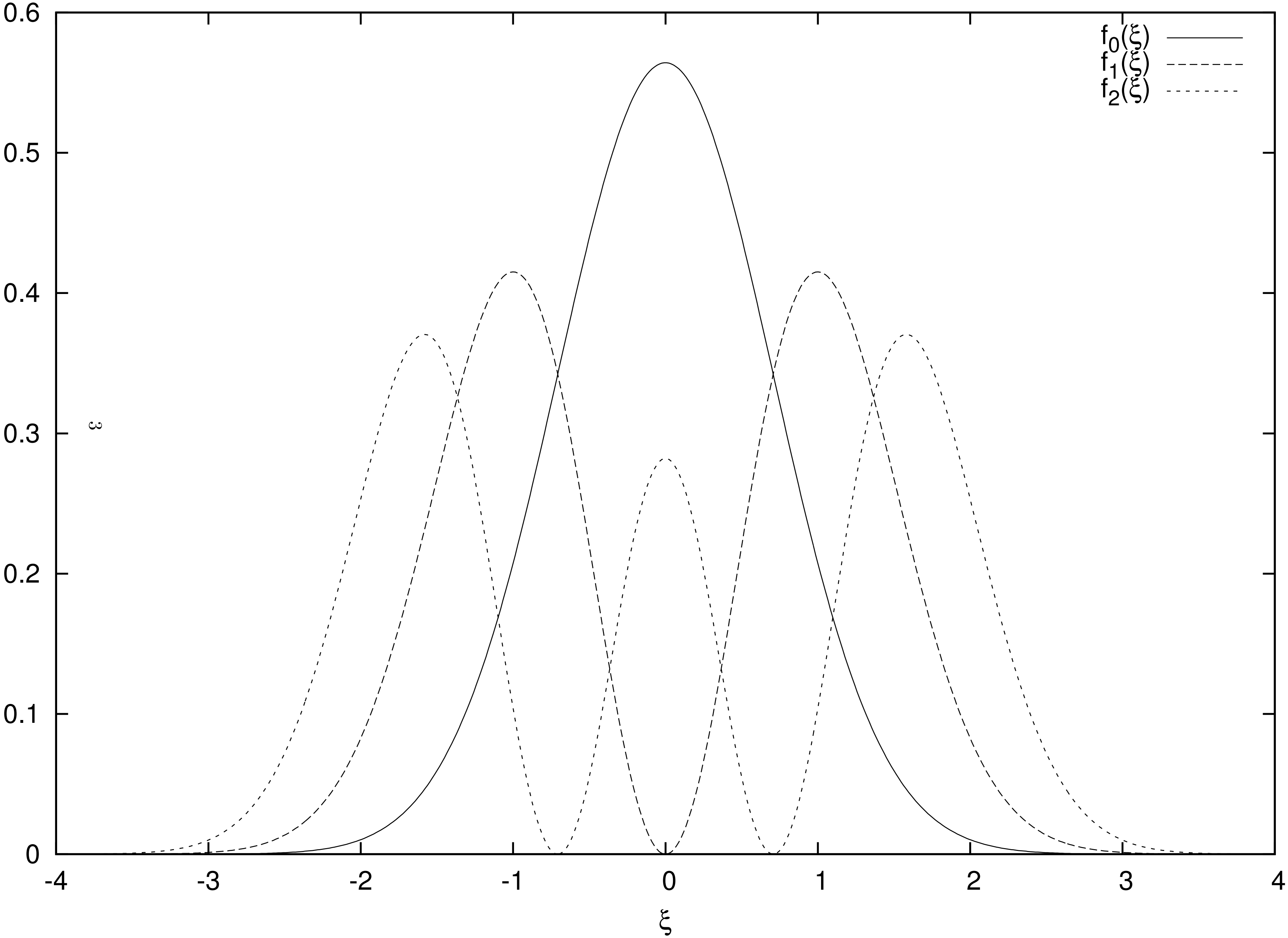
W mechanice klasycznej mamy

$$\hbar\omega(n+\frac{1}{2}) = E_n = \frac{p_{max}^2}{2m}$$

co po prostych przeształceniach daje

$$\rho_{max} = \sqrt{2n+1}$$

Dalsza analiza jest identyczna jak w przypadku operatora położenia.


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
ξ
f0(ξ)
f1(ξ)
f2(ξ)