

Rozwiązanie drugiego zadania z trzeciej listy z Mechaniki Kwantowej

Piotr Polesiuk, Bartłomiej Pytko

29 lutego 2012

Niech $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ będzie operatorem hermitowskim. Udowodnić następujące twierdzenia

1. Jeżeli podprzestrzeń $W \subseteq \mathbb{C}^n$ jest podprzestrzenią niezmienniczą operatora A to jej ortogonalne dopełnienie W^\perp jest również podprzestrzenią niezmienniczą A .

Dowód. Operator A jest hermitowski, tzn. dla dowolnych wektorów $x, y \in \mathbb{C}^n$ zachodzi $\langle Ax|y \rangle = \langle x|Ay \rangle$. Weźmy dowolny wektor $u \in W^\perp$. Z definicji ortogonalnego dopełnienia spełnia on $\forall w \in W. \langle u|w \rangle = 0$. Pokażę, że własność ta zachodzi również dla Au . W tym celu weźmy dowolne $w \in W$. Wtedy

$$\langle Au|w \rangle = \langle u|Aw \rangle = 0$$

Pierwsza równość wynika z hermitowskości operatora A , zaś równość druga wynika z niezmienniczości podprzestrzeni W ($Aw \in W$) oraz z definicji ortogonalnego dopełnienia. \square

2. Istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych operatora A .

Dowód. Przez indukcję po n .

- Dla $n = 0$ zbiór pusty w sposób trywialny jest bazą ortonormalną.
- Załóżmy, że teza twierdzenia zachodzi dla każdego operatora hermitowskiego działającego nad \mathbb{C}^n . Weźmy operator $A: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$. Jego wielomian charakterystyczny jest wielomianem stopnia $n + 1$ nad ciałem liczb zespolonych, więc z zasadniczego twierdzenia algebry operator A ma co najmniej jedną wartość własną λ oraz wektor własny w . Oczywiście wektor ten można wybrać tak by $\|w\| = 1$.

Przestrzeń \mathbb{C}^{n+1} można przedstawić jako

$$\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}w \oplus (\mathbb{C}w)^\perp$$

(gdzie zapis $\mathbb{C}w$ oznacza $\{\alpha w | \alpha \in \mathbb{C}\}$), a każdy wektor v przedstawić w sposób jednoznaczny jako sumę $v = \alpha w + v'$, gdzie $v' \in (\mathbb{C}w)^\perp$. Zauważmy jeszcze, że podprzestrzeń $\mathbb{C}w$ jest niezmiennicza (bo w jest wektorem własnym), a na mocy poprzednio udowodnionego twierdzenia, podprzestrzeń $(\mathbb{C}w)^\perp$ również jest niezmiennicza.

Rozważmy działanie operatora A na dowolnym wektorze v :

$$Av = A(\alpha w + v') = A(\alpha w) + Av' = \alpha \lambda w + A'v'$$

gdzie operator A' to operator A obcięty do podprzestrzeni niezmienniczej $(\mathbb{C}w)^\perp$, a zatem wartości A' również są z tego zbioru.

Ale $\dim (\mathbb{C}w)^\perp = n$, czyli przestrzeń $(\mathbb{C}w)^\perp$ jest izomorficzna z przestrzenią \mathbb{C}^n , więc na mocy założenia indukcyjnego ma bazę ortonormalną E , złożoną z wektorów własnych operatora A' , które również są wektorami własnymi operatora A .

Wektor w jest prostopadły do wszystkich wektorów z $(\mathbb{C}w)^\perp$, w szczególności do wektorów z E , więc układ $E \cup \{w\}$ tworzy bazę ortonormalną przestrzeni \mathbb{C}^{n+1} złożoną z wektorów własnych operatora A .

□

3. Przestrzeń \mathbb{C}^n jest ortogonalną sumą prostą podprzestrzeni własnych operatora A .