Rozwiązanie drugiego zadania z drugiej listy z Mechaniki Kwantowej

Piotr Polesiuk, Bartłomiej Pytko

21 lutego 2012

Zadanie 2, podpunkt (a). Nawiasy Poissona definiujemy jako

$$\{F, G\} \equiv \sum_{i=0}^{s} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right)$$

gdzie s to liczba stopni swobody, a p_i oraz q_i to pędy i współrzędne uogólnione.

Jako, że przy rozwijaniu definicji zagnieżgdżonych nawiasów Poissona mogą pojawiać się bardzo długie wyrażenia ($\{F, \{G, H\}\}$ po rozwinięciu ma aż 8 składników postaci $\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y}$), wprowadzimy następującą notację:

$$x_i^0 \equiv p_i \qquad x_i^1 \equiv p_i$$

Wtedy nawiasy Poissona wyrażają się w następujący sposób:

$$\{F, G\} = \sum_{i=0}^{s} \sum_{a=0}^{1} (-1)^a \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial G}{\partial x_i^{1-a}}$$

a zatem

$$\{F, \{G, H\}\} = \sum_{i=0}^{s} \sum_{a=0}^{1} (-1)^a \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial}{\partial x_i^{1-b}} \sum_{j=0}^{s} \sum_{b=0}^{1} (-1)^b \frac{\partial G}{\partial x_j^b} \frac{\partial H}{\partial x_j^{b-1}}$$

$$= \sum_{i,j=0}^{s} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b} \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^{1-a} \partial x_j^b} \frac{\partial H}{\partial x_j^{1-b}} + \sum_{i,j=0}^{s} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b} \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial G}{\partial x_j^b} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^{1-a} \partial x_j^{1-b}}$$

Po przeindeksowaniu w drugiej sumie i zamianie kilku czynników miejscami mamy

$$\{F, \{G, H\}\} = \sum_{i,j=0}^{s} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b} \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^{1-a} \partial x_j^b} \frac{\partial H}{\partial x_j^{1-b}} - \sum_{i,j=0}^{s} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b} \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^{1-a} \partial x_j^b} \frac{\partial G}{\partial x_j^{1-b}} \tag{1}$$

Połóżmy

$$X_{FGH} \equiv \sum_{i,j=0}^{s} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b} \frac{\partial F}{\partial x_i^a} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^{1-a} \partial x_j^b} \frac{\partial H}{\partial x_j^{1-b}}$$

Taki obiekt ma następujące własności

$$(i) \qquad X_{FGH} = X_{HGF}$$
$$(ii) \qquad \{F, \{G, H\}\} = X_{FGH} - X_{GHF}$$

Własność (i) otrzymujemy przez prostą zamianę indeksów, a własność (ii) natychmiast wynika z rówania (1) oraz własności (i).

Teraz łatwo można udowodnić własność nawiasów Poissona z zadania:

$$\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = X_{FGH} - X_{GHF} + X_{HFG} - X_{FGH} + X_{GHF} - X_{HFG} = 0$$

Zadanie 2, podpunkt (b). Hamiltonian dla oscylatora harmonicznego (w jednym wymiarze) ma postać

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

A więc równania Hamiltona wyglądają następująco

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \tag{2}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \tag{3}$$

Różniczkując pierwsze równanie (i zakładając masę stałą w czasie) otrzymujemy

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{kx}{m}$$

Jest to równanie różniczkowe jednorodne rzędu drugiego

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

dla którego wielomian charakterystyczny ma postać

$$W(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m}$$

zaś jego zera wypadają w punktach $i\sqrt{\frac{k}{m}}$ oraz $-i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Interesują nas tylko rozwiązania rzeczywiste, więc ogólne rozwiązanie będzie postaci

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{\omega m} \sin(\omega t)$$

gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a x_0 oraz p_0 to pewne stałe.

Różniczkując powyższe równanie i wstawiając do (2) otrzymujemy

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t) - \omega m x_0 \sin(\omega t)$$

Łatwo teraz zauważyć, że dla $t = 0$ mamy $x = x_0$ i $p = p_0$, a więc mamy rozwiązanie dla dowolnych warunków początkowych.