Rozwiązanie drugiego zadania z trzeciej listy z Mechaniki Kwantowej

Piotr Polesiuk, Bartłomiej Pytko

28 lutego 2012

Niech $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie operatorem hermitowskim. Udowodnić następujące twierdzenia

1. Jeżeli podprzestrzeń $W \subseteq \mathbb{C}^n$ jest podprzestrzenią niezmienniczą operatora A to jej ortogonalne dopełnienie $W^\perp$ jest również podprzestrzenią niezmienniczą A.

   Dowód. Operator A jest hermitowski, tzn. dla dowolnych wektorów $x, y \in \mathbb{C}^n$ zachodzi $\langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle$. Weźmy dowolny wektor $u \in W^\perp$. Z definicji ortogonalnego dopełnienia spełnia on $\forall w \in W. \langle u|w\rangle = 0$. Pokażę, że własność ta zachodzi również dla Au. W tym celu weźmy dowolne $w \in W$. Wtedy

   $$\langle Au|w\rangle = \langle u|Aw\rangle = 0$$

   Pierwsza równość wynika z hermitowskości operatora A, zaś równość druga wynika z niezmienniczości podprzestrzeni W ($Aw \in W$) oraz z definicji ortogonalnego dopełnienia. □

2. Istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych operatora A.

3. Przestrzeń $\mathbb{C}^n$ jest ortogonalną sumą prostą podprzestrzeni własnych operatora A.