МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

факультет инноваций и высоких технологий

Кафедра дискретной математики

Задача упаковки по корзинам

Индивидуальный проект

Поляков Григорий 799

Contents

Содержание

1 Введение

Постановка задачи

Рассмотрим некоторое множество элементов под номерами $I = \{1, ..., n\}$. Каждый элемент $i \in I$ имеет "размер" $a_i \in (0, 1]$. Пусть также дано множество так называемых корзин $B = 1, ..., n$.

Требуется распределить в все элементы по наименьшему числу корзин так, чтобы сумма размеров всех элементов в каждой корзине не превосходила 1.

Более формально, построить такую функцию $\xi : I \to B$, что:

$$\forall b \in B \sum_{i \in I\ : \xi(i) = b} s_i \le 1$$

2 Задача о $o(\frac{3}{2} - \varepsilon)$ - приближении

Утверждение: *Задача* **NP**-*трудна*

Доказательство: Сведение задачи PARTITION.

Для начала сформулируем задачу PARTITION. Дан конечный набор целых чисел A. Определить существует ли подмножество $B \subset A$, что $\sum_{a \in B} a = \sum_{a \in A \setminus B} a$

Из курса знаем, что PARTITION является **NP** -полной.

Построим полиномиально-вычислимую функцию сведения. Пусть задан набор чисел $a_1, ..., a_n$, для которых нужно решить задачу PARTITION. Пусть $S_a = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Тогда $s_i = f(a_i) = \frac{2a_i}{S_a}$. Покажем, что существует подмножество для PARTITION $\Leftrightarrow$ минимальное количество корзин для разбиения $i_1, ..., i_n$ с весами $s_1, ..., s_n$ равно 2.

Обозначим OPT - решение задачи разбиения на корзины.

- $\Rightarrow$ Заметим, что $OPT > 1$, т.к. $\sum_{i=1}^{n} s_i = 2$. Если существуют подмножества B и $B \backslash A$ - решения задачи PARTITION, то существует разбиение набора $s_1, ..., s_n$ на две корзины, сумма в каждой равна единице.
- $\Leftarrow$ Пусть $OPT = 2$. Тогда сумма весов в каждой корзине равна 1. Следовательно, подмножества исходного набора $a_1, ..., a_n$, соответствующие разбиению на корзины, и будут решением задачи PARTITION.

В данном сведении приближение не играет роли, т.к. если решение задачи разбиения на корзины равно 2. То алгоритм, решающий задачу о $o(\frac{3}{2} - \varepsilon)$ - приближении всегда его найдёт, ведь $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$, следовательно ответ 3 - уже будет худше, чем $(\frac{3}{2} - \varepsilon)$ - приближение.

3 Алгоритм, дающий $(1+\varepsilon)OPT+1$ корзин

Теорема: *Пусть OPT оптимальное число корзин. Тогда, для любого $\varepsilon \in (0,1]$ существует полиномиальный по n алгоритм, дающий разбиение на $(1+\varepsilon)\cdot OPT+1$ корзин в худшем случае.*

Лемма 1: *Пусть $\varepsilon > 0$ и $d > 0$ - некоторые константы. Пусть также $\forall i \in I$: $s_i \geq \varepsilon$ и количество различных среди всех s_i не превосходит d. Тогда, существует полиномиальный по n алгоритм, дающий в точности оптимальное значение для задачи упаковки по корзинам*

Доказательство: Проведём полный перебор всех возможных упаковок. Максимальное число элементов в одной корзине равно $\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$. Обозначиим это число за m.

Тогда, макимальное количество способов заполнить одну корзину C^m_{m+d-1}(в соответствии с формулой количества сочетаний с повторениями). Тогда, количество способов заполнить все n корзин не превосходит $n \cdot C^m_{n+m-1}$. Последнее выражение полиномиально зависит от n.

Таким образом, алгоритм просто будет перебирать все возможные варианты расстановки. □

Лемма 2: *Пусть $\forall i \in I : s_i \geq \varepsilon$. Тогда, существует полиномиальный по n алгоритм, дающий разбиение на $(1+\varepsilon)OPT$ корзин , где OPT - оптимальное число корзин*

Доказательство: (Во всех случаях мы сравниваем элементы по их рамеру)

Отсортируем элементы для разбинениия по увеличению размера s_i. Полученный набор назовём Q. Затем разделим их на $P+1$ группу. Тогда в каждой группе будет не более $\lfloor n/P \rfloor$ элементов. Проведём разбиение так, чтобы во всех группах, кроме последней элементтов было поровну. Из полученного отсортированного набора элементов построим два новых набора H и J следующим образом:

- L : набор Q, в котором размер $s_{(i)}$ каждого элемента заменён на размер наименьшего по размеру элемента в соответствующей ему группе.
- G : набор Q, в котором размер $s_{(i)}$ каждого элемента заменён на размер наибольшего по размеру элемента в соответствующей ему группе.

Тогда обозначим $OPT(L)$, $OPT(Q)$, $OPT(G)$ - оптимальные решения задачи упаковки по корзинам для наборов Q, H и P соответственно.

Очевидно, что:

$$OPT(L) \leq OPT(Q) \leq OPT(G)$$

Покажем также, что $OPT(G) \le OPT(L) + \lfloor n/P \rfloor$. Пусть мы решили задачу упаковки для L, получив некоторую функцию соответствия ξ. Построим новую функцию ψ. Заметим, что все элементы в группе $i+1$ набора L не меньше элементов из группы i набора G(по построению). Тогда $\psi((i,l)) = \xi((i+1,l))$, где i - номер группы, l - номер элемента в группе. Элементы последней группы положим в ещё не заполненные корзины(каждый элемент в отдельную корзину). Всего элементов в последней группе $\le \lfloor n/P \rfloor$, откуда и следует, что $OPT(G) \le OPT(L) + \lfloor n/P \rfloor$.

Тогда:

$$OPT(G) \le OPT(L) + \lfloor n/P \rfloor \le OPT(Q) + \lfloor n/P \rfloor$$

Подберём такое P, что $\lfloor n/P \rfloor \le \varepsilon \cdot OPT(Q)$. Тогда, $OPT(G) \le (1+\varepsilon) \cdot OPT(Q)$.

Из *леммы 1* следует, что существует алгоритм для точного решения задачи упаковки для набора G. Заметим, что по построению набора G (все элементы в нём не меньше элементов из исходного набора Q), полученное данным алогритмом соответствие подойдёт и для набора Q. $\square$

Доказательство Теоремы: Разобьём исходный набор элементов I на два непересекающихся поднабора:

- набор I', в котором для любого $i \in I'$ размер $s_i \ge \varepsilon$
- набор I'', в котором для любого $i \in I''$ размер $s_i < \varepsilon$

Рассмотрим $\delta = \varepsilon/2 < 1/2$

Для набора I' и δ применима *Лемма 2*. Запустим алгоритм, полученный в *Лемме 2* на наборе элементов I'. Получим некоторую упаковку(соответствие).

Затем, для оставшихся элементов из I'' и полученной упаковки применим жадный алгоритм. Отсортируем из по убыванию размера s_i, затем для каждого элемента в порядке сортировки будем класть его в первую корзину, для которой сумма размеров уже лежащих элементов вместе с его размером не превзойдёт 1.

Обозначим полученное количество корзин за B.

Если после приминения жадного алгоритма новых корзин не добавилось, то из *Леммы 2* получаем, что

$$B \le (1+\delta)OPT \le (1+\epsilon)OPT + 1$$

Иначе, получим некоторую упаковку по корзинам, где для каждой (кроме может быть одной) заполненной нами корзины её остаточная вместимость $(1 - \sum_{i:\xi(i)=b_j} s_i)$ не превосходит δ.

Тогда,

$$OPT \geq \sum_{i \in I} s_i \geq (B-1)(1-\delta)$$

Используя неравенство $\frac{1}{1-x} \leq 1 + 2x$ ($\forall x \in [0, 1/2]$), получаем:

$$B \leq \frac{OPT}{1-\delta} + 1 \leq (1+2\delta) \cdot OPT + 1 = (1+\varepsilon) \cdot OPT + 1$$

$\square$

Список литературы