Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

# «Оптимальное управление. Задание 1»

*Студент 315 группы*
П. В. Карпикова

*Руководитель практикума*
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

# Содержание

# Часть I

# Теоретическая часть

## 1 Постановка задачи

Задана линейная система ОДУ:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ t \in [t_0, +\infty).$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^2$, $A(t) \in \mathbb{R}^{2\times2}$, $u \in \mathbb{R}^2$. На значения управляющих параметров $u$ наложено ограничение $u \in \mathcal{P}$, $u$ из класса измеримых функций. Пусть $\mathcal{X}_0$ - начальное множество значений фазового вектора, $\mathcal{X}_1$ - целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени $t_0$ из некоторой точки множества $\mathcal{X}_0$, может попасть в некоторую точку множества $\mathcal{X}_1$.

$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, ax_1^2 \le x_2 \le b - cx_1^2\},\ a, b, c > 0;$$

$$\mathcal{X}_0 \text{ - шар радиуса } r > 0 \text{ с центром в точке } x_0,$$

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, Gx + g \le 0\} \cap \mathbb{B}_R(0),\ G \in \mathbb{R}^{m\times2}, g \in \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N};$$

## 2 Решение

Чтобы понять, из какой точки множества $\mathcal{X}_0$ надо выпустить оптимальную траекторию, переберем все возможные направления $\psi(t_0)$ и воспользуемся принципом максимума Понтрягина (ПМП).

**Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина)** *Пусть $(x^*(t),\ u^*(t))$ — оптимальная пара, $t_1^*$ — соответствующее ей оптимальное время перемещения. Тогда существует дифференцируемая функция $\psi(\cdot) \not\equiv 0, \psi(t) \in \mathbb{R}^2$, для которой выполнено*

1. $\langle B(t)u^*(t),\ \psi(t)\rangle = \rho(\psi(t)\,|\,B(t)\mathcal{P}(t))\ \dot{\forall} t \in [t_0, t_1^*]$;
2. $\langle \psi(t_0),\ x^*(t_0)\rangle = \rho(\psi(t_0)\,|\,\mathcal{X}_0)$;
3. $\langle -\psi(t_1^*),\ x^*(t_1^*)\rangle = \rho(-\psi(t_1^*)\,|\,\mathcal{X}_1)$,

*где функция $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы $\dot{\psi}(t) = -A^T\psi(t)$.*

Заметим, что если $\psi(t)$ удовлетворяет ПМП, то $\forall\alpha > 0$ функция $\alpha\psi(t)$ тоже ему удовлетворяет (из-за линейности скалярного произведения и положительной однородности опорной функции). Поэтому будем рассматривать $\psi : \|\psi(t_0)\| = 1$.

Таким образом, перебирая по единичному кругу параметр $\psi(t_0)$, можно найти все возможные траектории и управления, удовлетворяющие ПМП. Среди них выберем ту оптимальную пару, которое минимизирует функционал $J = t_1 - t_0$.

# 3 Вычисление опорных функций

## 3.1 $\mathcal{X}_0$

Опорная функция шара $\mathcal{X}_0$ имеет вид:

$$\rho(l \,|\, \mathcal{X}_0) = \rho(l \,|\, \{x_0\}) + \rho(l \,|\, \mathbb{B}(0, r)) = \langle l,\ x_0 \rangle + r\|l\|.$$

Это значение достигается на опорном векторе

$$x^* = x_0 + \frac{l}{\|l\|} r.$$

## 3.2 $\mathcal{X}_1$

Множество $\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ Gx + g \leq 0\} \cap \mathbb{B}_R(0),\ G \in \mathbb{R}^{m \times 2}, g \in \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$ представляет собой пересечение полуплоскостей с кругом. Найдем граничные точки этого множества.
1) Найдем вершины многоугольника, задаваемые пересечением полуплоскостей, решая системы:

$$\begin{aligned} g_{i1}x_1 + g_{i2}x_2 + g_i = 0, \\ g_{j1}x_1 + g_{j2}x_2 + g_j = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$x = \frac{1}{g_{i1}g_{j2} - g_{j1}g_{i2}} \begin{pmatrix} g_{j2} & -g_{i2} \\ -g_{j1} & g_{i1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_i \\ g_j \end{pmatrix}$$

Далее проверим полученные точки $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ на попадание в наше множество:

$$Gx + g \leq 0 \text{ и } x_1^2 + x_2^2 = x^T x \leq R^2.$$

2) Найдем точки пересечения полуплоскостей с кругом:

$$\begin{aligned} g_{i1}x_1 + g_{i2}x_2 + g_i = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = R^2, \end{aligned} \tag{2}$$

$$x_2 = \frac{\frac{-bg}{a} \pm \sqrt{(\frac{bg}{a})^2 - ((\frac{g}{a})^2 - R^2)((\frac{b}{a})^2 + 1)}}{(\frac{b}{a})^2 + 1},\ x_1 = \frac{-g - bx_2}{a},$$

где $a = g_{i1} \neq 0,\ b = g_{i2}$, иначе: (при $a = 0$)

$$x_2 = \frac{-g}{b}, x_1 = \pm\sqrt{R^2 - x_2^2}.$$

Точки из этого пункта могут совпасть с точками из п.1, поэтому нужно будет оставить только уникальные.

Из этих двух пунктов у нас будет множество точек A, и опорным вектором будет либо вектор из A, либо $\frac{l}{\|l\|}R$ (либо целый отрезок, если направление перпендикулярно стороне). Соответствующий вектор, на котором будет достигаться максимум, и будет опорным.

## 3.3 $\mathcal{P}$

Множество $\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ ax_1^2 \leq x_2 \leq b - cx_1^2\}, a, b, c > 0$, представляет собой пересечение парабол. В силу симметрии достаточно найти опорную функцию в направлениях $l = (l_1, l_2)$ при $l_1 > 0$.
Составим функцию Лагранжа, когда опорный вектор лежит на верхней параболе (условие $l_2 > 0$): $L = l_1x_1 + l_2x_2 + \lambda(b - cx_1^2 - x_2)$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = l_1 - 2\lambda c x_1 = 0,\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = l_2 - \lambda = 0,\ b - cx_1^2 - x_2 = 0.$$

Откуда $x_1^* = \frac{l_1}{2cl_2},\ x_2^* = b - \frac{l_1^2}{4cl_2^2}$ при $x_1^* < \sqrt{\frac{b}{a+c}}$ $(ax_1^2 = b - cx_1^2)$.

Аналогично составим функцию Лагранжа, когда опорный вектор лежит на нижней параболе(условие $l_2 < 0$): $L = l_1x_1 + l_2x_2 + \lambda(ax_1^2 - x_2)$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = l_1 + 2\lambda a x_1 = 0,\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = l_2 - \lambda = 0,\ ax_1^2 - x_2 = 0.$$

Откуда $x_1^* = \frac{-l_1}{2al_2},\ x_2^* = \frac{l_1^2}{4al_2^2}$ при $x_1^* < \sqrt{\frac{b}{a+c}}$.
В остальных случаях опорный вектором будет точка пересечения $x_1^* = sign(l_2)\sqrt{\frac{b}{a+c}},\ x_2^* = \frac{ab}{a+c}$.
В итоге получаем

$$\rho(l\,|\,\mathcal{P}) = \begin{cases} l_2 b + \dfrac{l_1^2}{4cl_2},\ l_2 > 0 \text{ и } \dfrac{|l_1|}{2cl_2} < \sqrt{\dfrac{b}{a+c}}, \\ -\dfrac{l_1^2}{4al_2},\ l_2 < 0 \text{ и } \dfrac{-|l_1|}{2al_2} < \sqrt{\dfrac{b}{a+c}}, \\ \sqrt{\dfrac{b}{a+c}}|l_1| + \dfrac{ab}{a+c} l_2,\ \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

**Часть II**

# Практическая часть

## 4 Описание алгоритма

- Выбираем время $t_{1max}$, до которого решение задачи должно найтись, иначе будем считать, что задача не имеет решения. Зададим сетку по $t$.

- На сетке значений $\psi^0 = \psi(0)$ на единичной окружности (равномерно по всей окружности или в районе субоптимального $\psi^0$) получаем численное решение задачи Коши для сопряженной системы:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -A^T\psi(t),\ t \in [0,\ t_{1max}], \\ \psi(0) = \psi^0 \end{cases} \tag{4}$$

  с помощью функции solve ivp на сетке по $t$.

- Для каждого $\psi(t)$ вычислим значение управления, пользуясь пунктом *1.* принципа максимума: $u(t)$ является опорным вектором множества $\mathcal{P}$ в направлении $B^T\psi(t) \neq 0$ (см. п.3.3)
  Если матрица $B$ вырождена, то добавим к ней матрицу $\epsilon I$ с достаточно малым $\epsilon$. Рассмотрим многочлен $p(\epsilon) = det(B+\epsilon I) = \epsilon^n + \epsilon^{n-1}trB + ... + detB$ - у него будет $\leq n$ корней. Если $p(0) = 0$ - матрица вырождена, то мы найдем такое $\epsilon$ в окрестности 0, где не будет других корней, и матрица $B + \epsilon I$ не будет вырожденной.

- Из условия трансверсальности *2.* найдем начальную точку $x^0 = x(0)$, которая является опорным вектором к $\mathcal{P}_0$ в направлении $\psi^0$.

- Найдем траекторию $x[t]$ из решения з. Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t \in [0,\ t_{1max}], \\ x(0) = x^0 \end{cases} \tag{5}$$

  При этом вычисления останавливаются, если траектория оказывается внутри начального множества $\mathcal{X}_0 : ||x(t) - x_0|| < r^2$ (т.е. не может быть оптимальной) или попадает в терминальное множество $\mathcal{X}_1 : \max(\max(Gx(t) + g),\ x(t).T\ x(t) - R^2) <= 0$ (т.е. получили ответ).

  Получили, что каждому значению $\psi^0$ соответсвует единственная пара $(u(t),\ x(t))$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина.

## 5 Проверка точности работы программы

Оптимальное управление должно удовлетворять всем трем пунктам ПМП, поэтому для проверки точности найденного решения будем пользоваться условием трансверсальности (п. *3.* теоремы), которое не использовалось при построении решения.

Из геометрической интерпретации УТ для проверки данного условия необходимо найти единичную нормаль $norm$ к множеству $\mathcal{X}_1$ в точке $x^1 \equiv x^*(t_1^*)$, где $x^*(\cdot)$ — найденная субоптимальная траектория, и вектор $v \equiv \frac{-\psi(t_1^*)}{||(\psi(t_1^*)||}$, в направлении которого решение приходит в множество.

Т.к. $\partial\mathcal{X}_1$ состоит из отрезков и дуг окружности, то найдем ту строку k массива $Gx^1 + g$, которая будет близка к 0. Тогда нормаль в этой точке будет иметь координаты $(g_{k0},\ g_{k1})$, если такой строки нет, то значит $x^1$ лежит на границе круга, нормаль будет совпадать с $x^1$. Далее нормируем этот вектор.

Далее вычисляется косинус угла между ними по формуле $< v,\ norm >$. Чем ближе он к 1, тем точнее результат.

# 6 Улучшение результатов

При большой ошибке в условии трансверсальности (УТ) (ПМП п. *3.*) используется два типа улучшений:

1. глобальное улучшение: берем время, до которого ведутся вычисления, равным посчитанному времени быстродействия и измельчаем сетку по $\psi^0$,

2. локальное улучшение: измельчаем сетку по $\psi^0$ в районе оптимального.

Будем производить измельчение сетки, пока ошибка в УТ не станет мала.

# 7 Примеры работы программы

## 7.1 Пример 1

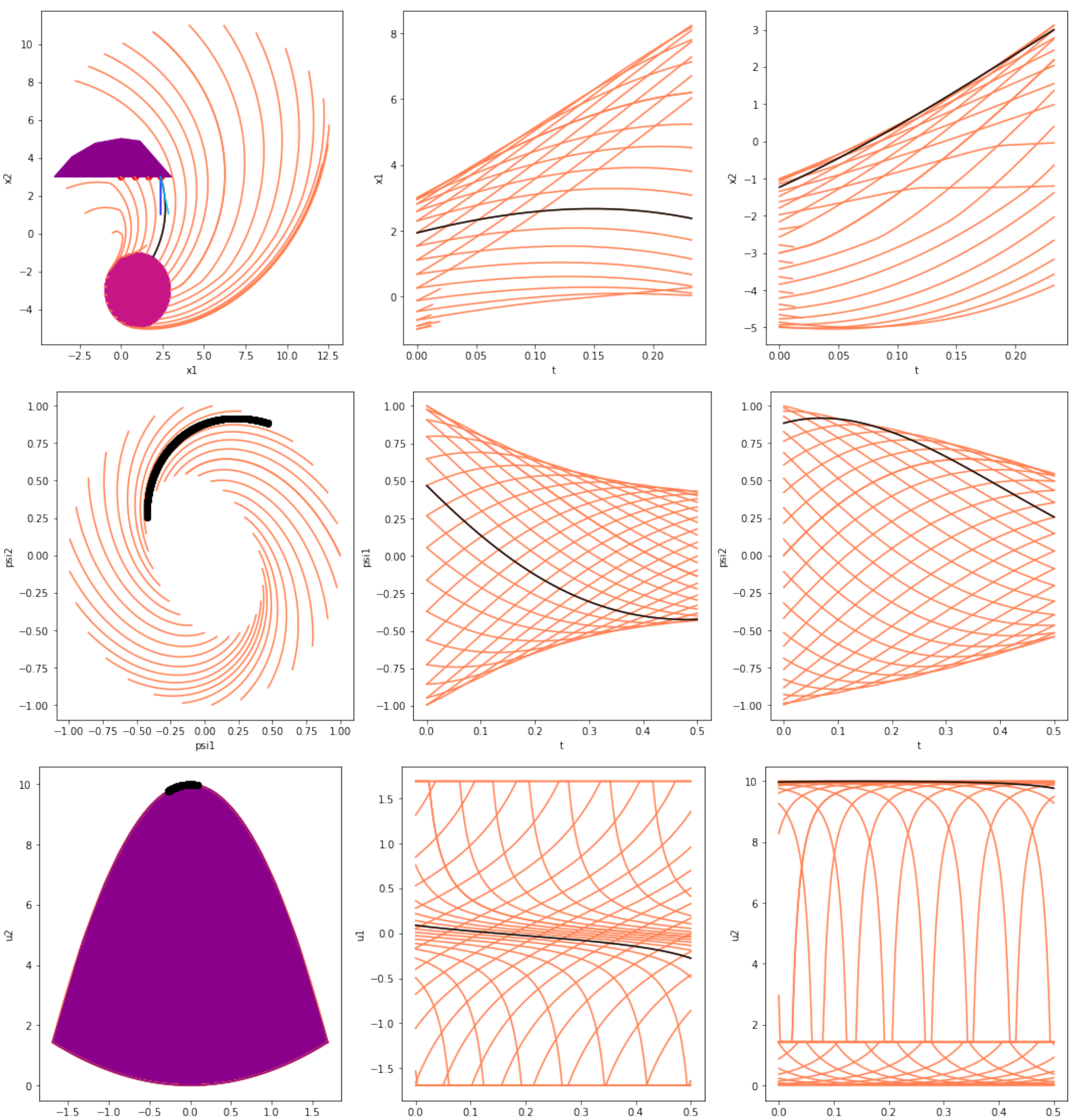
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0.5_1^2 \leq x_2 \leq 10 - 3x_1^2\},$$

$$\mathcal{X}_0 \text{ - шар радиуса 2 с центром в точке } x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, Gx + g \leq 0\} \cap \mathbb{B}_5(0),\ G = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ g = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

При одном запуске программы с заданием 30 точек равномерной сетки по $\psi_0$, выбором $t_{1max} = 0.5$ и количеством точек на сетке времени 1000 значение функционала $t_1^* = 0.23288$, а ошибка условия трансверсальности $1 - \cos = 0.0594$.



## 7.2 Пример 2

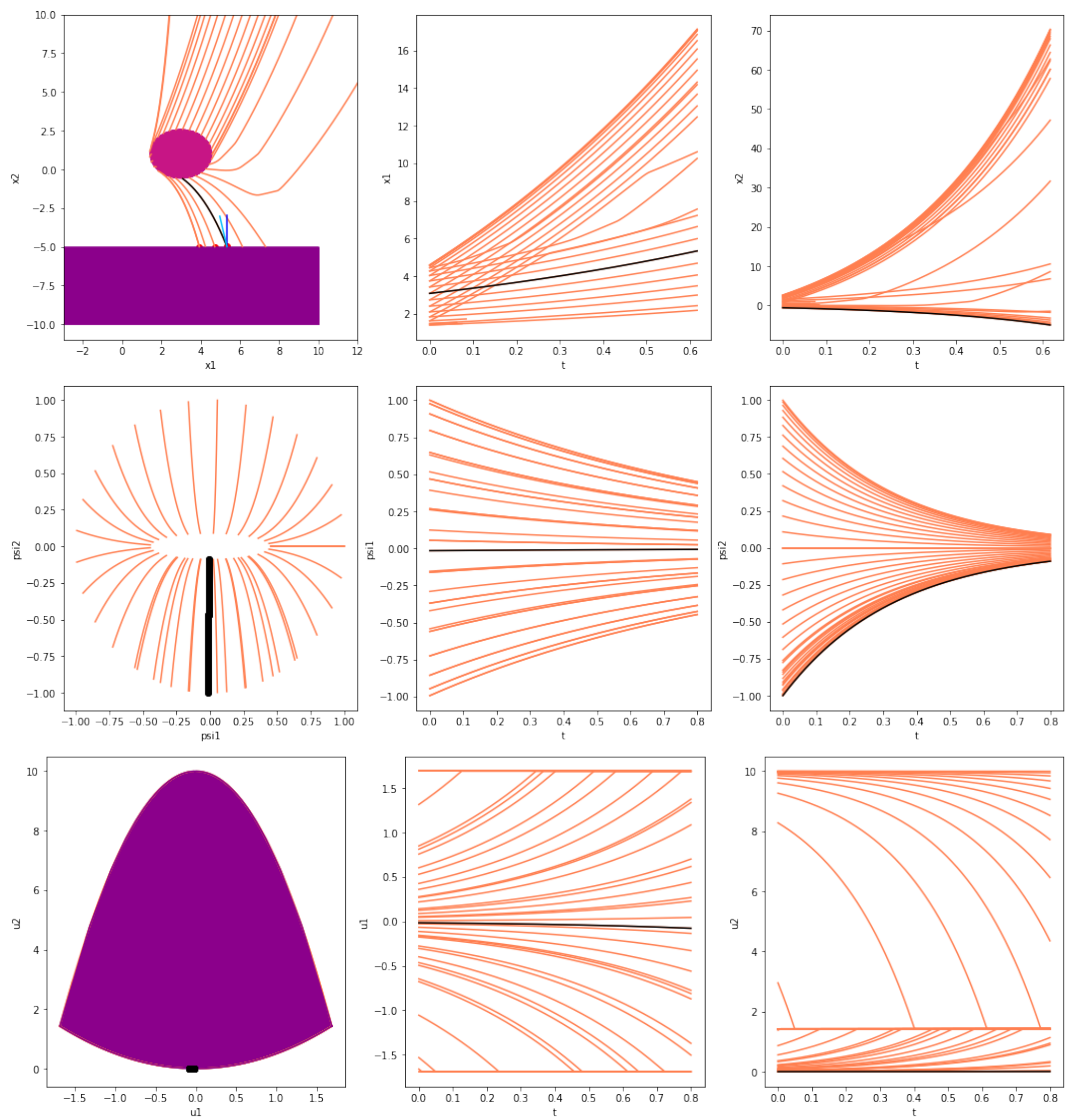
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0.5_1^2 \leq x_2 \leq 10 - 3x_1^2\},$$

$$\mathcal{X}_0 \text{ - шар радиуса 1.6 с центром в точке } x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, Gx + g \leq 0\} \cap \mathbb{B}_{30}(0),\ G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ g = \begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

При одном запуске программы с заданием 30 точек равномерной сетки по $\psi_0$ и локальным улучшением с 10 точками, выбором $t_{1max} = 0.8$ и количеством точек на сетке времени 1000 значение функционала $t_1^* = 0.6163$, а ошибка условия трансверсальности $1 - \cos = 0.042$.



## 7.3 Пример 3

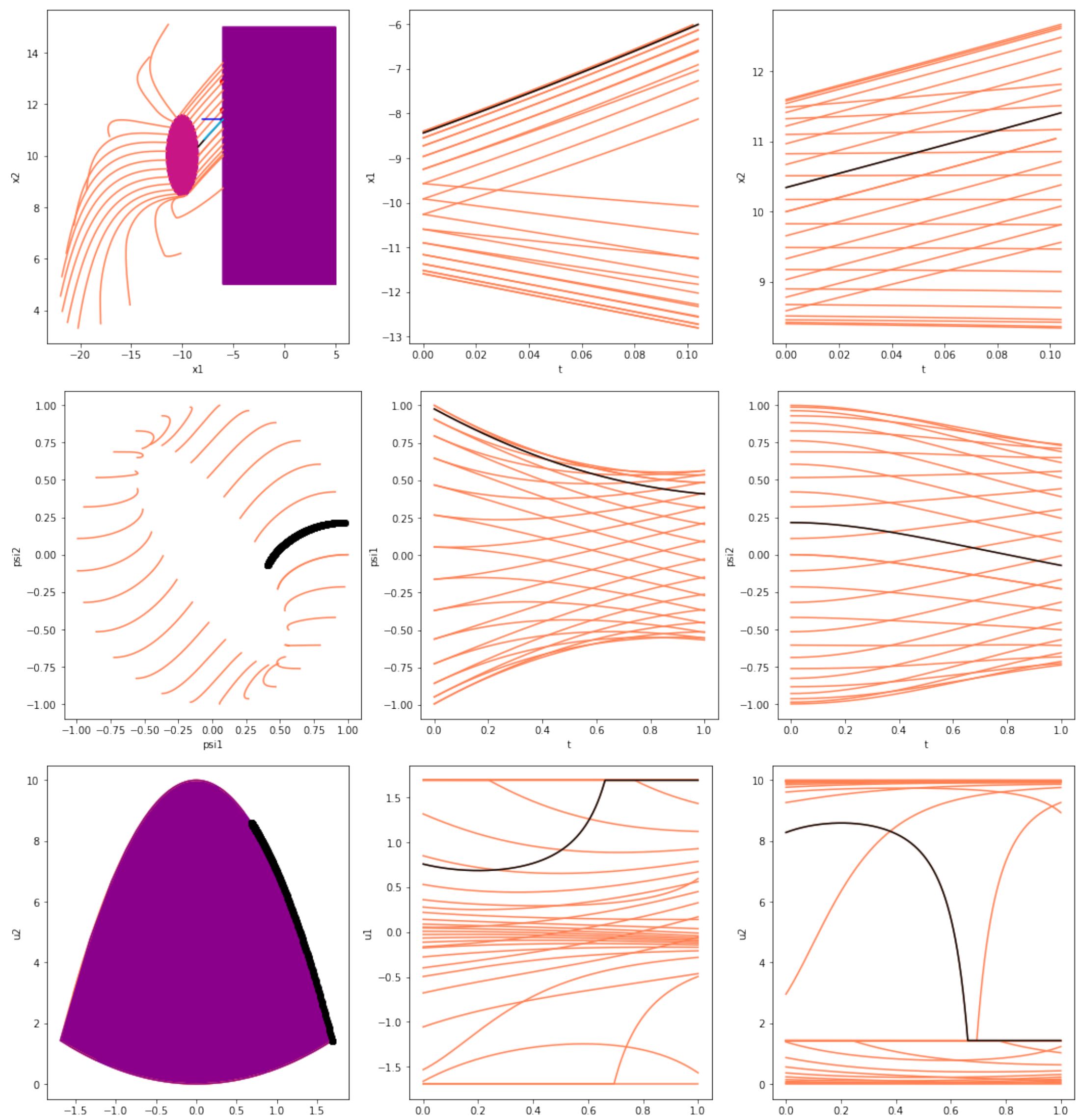
$$A = \begin{bmatrix} \cos(t) & t \\ \sin(t) & \sin(t) \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2\sin(t) & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0.5_1^2 \leq x_2 \leq 10 - 3x_1^2\},$$

$$\mathcal{X}_0 \text{ - шар радиуса 1.6 с центром в точке } x_0 = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, Gx + g \leq 0\} \cap \mathbb{B}_{30}(0), \; G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; g = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 5 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

При одном запуске программы с заданием 30 точек равномерной сетки по $\psi_0$, выбором $t_{1max} = 1$ и количеством точек на сетке времени 1000 значение функционала $t_1^* = 0.1044$, а ошибка условия трансверсальности $1 - \cos = 0.777$.



## 8 Исследование на непрерывность $t_1^*$ по начальному множеству фазовых переменных

Рассмотрим задачу:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

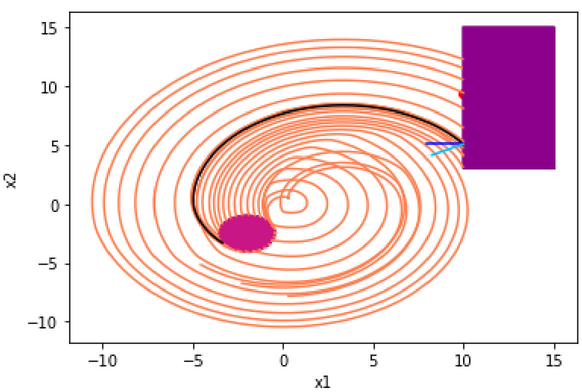
$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0.5_1^2 \le x_2 \le 10 - 3x_1^2\},$$

$$\mathcal{X}_0 \text{ - шар радиуса 1.6 с центром в точке } x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2.5 \end{bmatrix},$$

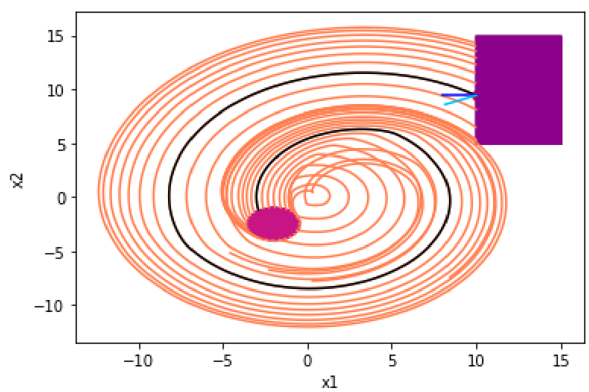
$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2\ :\ Gx + g \le 0\} \cap \mathbb{B}_{30}(0),\ G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ g = \begin{bmatrix} -15 \\ 10 \\ 3 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

Для матрицы $A$ центр координат является особой точкой типа неустойчивый фокус.

Терминальное множество достижимо за один оборот вокруг центра координат, но при малом перемещении прямоугольника вниз потребуется уже два оборота, и значение функционала $t_1^*$ изменится скачком, то есть зависимость не является непрерывной.




$t_1^* = 1.06$




$t_1^* = 2.67$

## Список литературы

[1] Рублев И.В. Лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, 2019.