Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Оптимальная борьба с эпидемией»

Студент 315 группы
П. В. Карпикова

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

Содержание

Часть I

Теоретическая часть

1 Постановка задачи

Рассматривается математическая модель, описывающая динамику численности трех групп людей: S - число индивидуумов, восприимчивых к инфекции, I - число инфицированных людей, R - количество переболевших и выздоровевших, либо невосприимчивых к инфекции индивидуумов. Указанные величины изменяются в соответствии со следующей системой ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS - u_1 S, \\ \dot{I} = \beta IS - (\gamma + u_2)I, \\ \dot{R} = u_1 S + u_2 I. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\beta > 0$ - коэффициент интенсивности контактов людей с последуюищим инфицированием, $\gamma > 0$ - коэффициент смертности. Управляющие параметры u_1 и u_2 имеют смысл интенсивности вакцинации и лечения уже заболевших соответственно. На допустимые значения этих величин наложены следующие ограничения:

$$u_1 \in [0, u_{1,max}],\ u_2 \in [0, u_{2,max}].$$

Указанная система рассматривается на отрезке времени $t \in [0, T]$. Начальные значения $S(0), I(0)$ и $R(0)$ считаются заданными.

Задача 1. Необходимо за счет выбора программных управлений $u_1(t), u_2(t)$ решить задачу минимизации следующего функционала:

$$J = \int_0^T (\alpha_1 u_1^2(t) + \alpha_2 u_2^2(t) + \alpha_3 \gamma I(t))dt - \alpha_4 R(T).$$

Задача 2. Необходимо за счет выбора программных управлений $u_1(t), u_2(t)$ решить задачу минимизации следующего функционала:

$$J = \int_0^T \gamma I(t))dt$$

при дополнительном ограничении на имеющиеся ресурсы: $\int_0^T (\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t))dt \leq M$.

2 Ограничения на входные параметры

Помимо явных ограничений на параметры ($\beta > 0,\ \gamma > 0$) в постановке задачи присутствуют неявные ограничения: и из вида функционала $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0, \alpha_4 > 0$, и $S > 0, I > 0, R > 0$, как количества людей, и равенство 0 не может достигаться, в силу единственности решения задачи Коши (а $S = I = R \equiv 0$ является решением), т.е. не будем рассматривать задачи, где одной из групп людей нет.

3 Теоретическое обоснование

Рассматривается задача оптимального управления автономной системой

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_1],\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m$$

с минимизацией функционала

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t))dt \to \inf_{u(\cdot)}$$

из множества $\mathcal{X}_0$ в множество $\mathcal{X}_1$, то есть $x(t_0) \in \mathcal{X}_0,\ x(t_1) \in \mathcal{X}_1$. В классе измеримых управлений требуется найти $u(\cdot)$ такое, что $u(t) \in \mathcal{P}(t)$ почти всюду на $[t_0, t_1]$, и $u(\cdot)$ является решением поставленной выше задачи. Здесь $\mathcal{P}(\cdot)$ — заданное измеримое многозначное отображение, $\mathcal{P}(t)$ является выпуклым компактом при любом $t \in [t_0, t_1]$.

Введем функционал Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathcal{H}(x, u, \tilde{\psi}) = \psi_0 f_0(x, u) + \langle \psi,\ f(x, u) \rangle,$$

где $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n,\ \psi_0 \in \mathbb{R}$.

Теорема 1 (Принцип максимума Понтрягина) *Пусть $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ — оптимальная пара. Тогда найдется $\tilde{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n),\ \tilde{\psi} \not\equiv 0$ такой, что*

1. $\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \tilde{\psi}(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in \mathcal{P}(t)} \mathcal{H}(x^*(t), u, \tilde{\psi}(t))$ *(УМ)*
2. $\psi_0 \equiv Const \leqslant 0$ *и $\psi(t)$ является решением сопряженной системы (СС):*

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \tilde{\psi}(t));$$

3. *выполнены условия трансверсальности (УТ): $\psi(0)$ и $\psi(T)$ ортогональны соответствующим касательным многообразиям $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{X}_1$ в точке x(0) и x(T) соответственно.*

4 Задача 1

Перепишем наш функицонал в виде:

$$J = \int_0^T (\alpha_1 u_1^2(t) + \alpha_2 u_2^2(t) + \alpha_3 \gamma I(t))dt - \alpha_4 R(T) = \int_0^T (\alpha_1 u_1^2(t) + \alpha_2 u_2^2(t) + \alpha_3 \gamma I(t) - \alpha_4 \dot{R})dt =$$

$$= \int_0^T (\alpha_1 u_1^2(t) + \alpha_2 u_2^2(t) + \alpha_3 \gamma I(t) - \alpha_4 (u_1 S + u_2 I))dt$$

Таким образом мы избавились от переменной R в функционале, также она не входит в уравнения для S и I и находится явно: $R = \int_0^T (u_1 S + u_2 I)dt + R(0)$. Данный интеграл берется от неотрицательной функции, поэтому будет выполняться неравенство $R \geq 0$, поэтому можно не включать эту переменную в систему уравнений.

Заметим также, что $\dot{S} = -\beta I S - u_1 S < 0$, значит, S - убывает, поэтому множество $\mathcal{X}_1$ выглядит следующим образом: $0 < S < S(0), 0 < I$.

То есть мы попадаем во внутреннюю точку прямогольника и из УТ $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$.

Для данной задачи функционал Гамильтона-Понтрягина принимает следующий вид:

$$\mathcal{H} = \psi_0(\alpha_1 u_1^2(t) + \alpha_2 u_2^2(t) + \alpha_3 \gamma I(t) - \alpha_4 (u_1 S + u_2 I)) + \psi_1(-\beta I S - u_1 S) + \psi_2(\beta I S - (\gamma + u_2) I).$$

4.1 Нормальный случай

Пусть $\psi_0 \neq 0$. Тогда в силу положительной однородности принципа максимума по $\tilde{\psi}$ можно считать, что $\psi_0 = -1$.

$$\mathcal{H} = -(\alpha_1 u_1^2(t) + \alpha_2 u_2^2(t) + \alpha_3 \gamma I(t) - \alpha_4 (u_1 S + u_2 I)) + \psi_1(-\beta I S - u_1 S) + \psi_2(\beta I S - (\gamma + u_2) I) =$$
$$= -\alpha_1 u_1^2(t) + (-\psi_1 + \alpha_4) S u_1 - \alpha_2 u_2^2(t) + (-\psi_2 + \alpha_4) I u_2 - (\alpha_3 \gamma I(t) - \alpha_4 R) + \psi_1(-\beta I S) + \psi_2(\beta I S - \gamma I).$$

Тогда сопряженная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = -\alpha_4 u_1 + \psi_1(\beta I + u_1) - \psi_2 \beta I, \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = -\alpha_4 u_2 + \alpha_3 \gamma + \psi_1 \beta S - \psi_2(\beta S - (\gamma + u_2)). \end{cases} \tag{2}$$

Введем функции $F(u_1) = -\alpha_1 u_1^2(t) + (-\psi_1 + \alpha_4) S u_1,\ G(u_2) = -\alpha_2 u_2^2(t) + (-\psi_2 + \alpha_4) I u_2$.
Т. к. $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0$, откуда соответствующие функции будут иметь максимумы при $u_1^{max} = \dfrac{(-\psi_1 + \alpha_4) S}{2\alpha_1},\ u_2^{max} = \dfrac{(-\psi_2 + \alpha_4) I}{2\alpha_2}$. Функции являются вогнутыми, следовательно если $u_1^{max},\ u_2^{max}$ не попадают внутрь соответствующих интервалов допустимых управлений, то максимум будет достигаться на границе. Таким образом из УМ (и $S > 0,\ I > 0$) управление будет иметь вид:

$$u_i(t) = \begin{cases} 0, & -\psi_i + \alpha_4 < 0, \\ \min(u_{i,max},\ u_i^{max}), & \text{иначе.} \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, переключения возможны на данных многообразиях (изображены красными линиями, стартуем всегда с $S = S(0),\ I = I(0)$) :

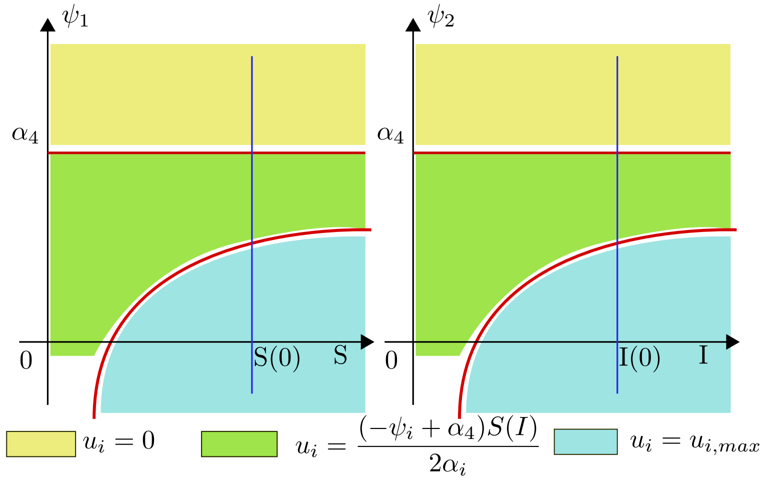


Рис. 1: Области возможных управлений

Найдем, куда мы можем поехать с гиперболы в осях $\psi_1(S)$, она задается уравнением:

$$\psi_1 = \alpha_4 - \frac{2\alpha_1 u_{1,max}}{S}$$

$$\dot{S} = \left(\frac{2\alpha_1 u_{1,max}}{-\psi_1 + \alpha_4}\right)^2 \dot{\psi}_1 < 0 \ \Rightarrow\ \dot{\psi}_1 < 0$$

Значит, на оптимальной траектории возможна только одна из 3 ситуаций:

1. траектория не имеет переключений;
2. траектория имеет ≥ 1 переключений, но только на прямой α_4;
3. траектория имеет ≥ 1 переключений, причем первое из них - на гиперболе, а далее возможны переключения только на α_4.

4.2 Анормальный случай

Пусть $\psi_0 = 0$:

$\mathcal{H} = \psi_1(-\beta IS - u_1 S) + \psi_2(\beta IS - (\gamma + u_2)I) = -\psi_1 S u_1 - \psi_2 I u_2 + \psi_1(-\beta IS) + \psi_2(\beta IS - \gamma I).$

Тогда сопряженная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = \psi_1(\beta I + u_1) - \psi_2 \beta I, \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \psi_1 \beta S - \psi_2(\beta S - (\gamma + u_2)). \end{cases} \tag{3}$$

Из УМ (и $S > 0,\ I > 0$) управление будет иметь вид:

$$u_i(t) = \begin{cases} [0, u_{i,max}], & -\psi_i = 0, \\ 0, & -\psi_i < 0, \quad i = 1, 2 \\ u_{i,max}, & -\psi_i > 0. \end{cases}$$

Так как $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$, то в силу единственности решения задачи Коши для сопряженной системы получаем $\psi_1(t) = \psi_2(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T]$. Получили тривиальный вектор $\tilde{\psi}$, что противоречит ПМП, поэтому анормального случая не может быть.

Вывод: анормального случая не может быть.

4.3 Алгоритм решения

Имеем 3 группы сценариев:

1. без переключений;
2. ровно 1 переключение;
3. ≥ 2 переключений.

Ниже будут приведены картинки для сценариев и описаны алгоритмы. Будет использована функция solve_bvp, которая решает краевую задачу с ограничениями на обоих концах. Далее будет проверка, что решение соответствует сценарию. Далее из всех траекторий, подозрительных на оптимальную, выберется та, которая минимизирует функционал.

1) 0 переключений

Идейно оптимальная траектория выглядит следующим образом: каждая начинается с $S = S(0)$, $I = I(0)$ и едет по линии (1) или (2).

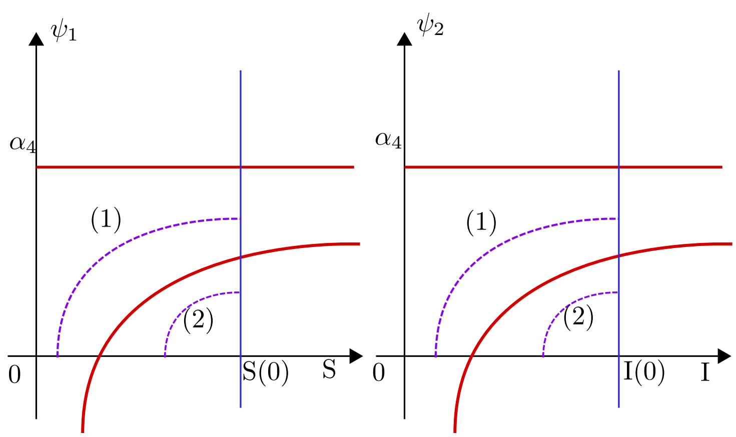


Рис. 2

В таком случае управление будет $u_{i,max}$ или $\dfrac{(-\psi_i + \alpha_4)K}{2\alpha_i}$, где $K = S, I$, оно подставляется в исходную систему и в сопряженную. Краевые условия на левом конце заданные $S(0), I(0)$, на правом конце $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$.

2) 1 переключение

В данном случае оптимальная траектория идейно имеет вид, как на одном из рисунков 3 - 6 (и симметричный вариант перестановки графиков $\psi_1(S)$ с $\psi_2(I)$ (заменим все ψ_1 на ψ_2, S на I и наоборот)), сначала система едет по траектории a, потом переключается и едет по b. Найдем решение на каждой части, состыковав границы.

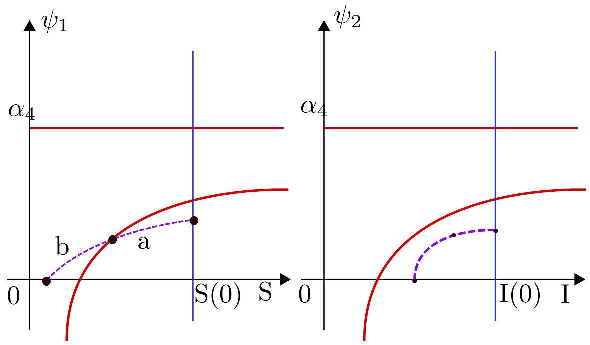


Рис. 3

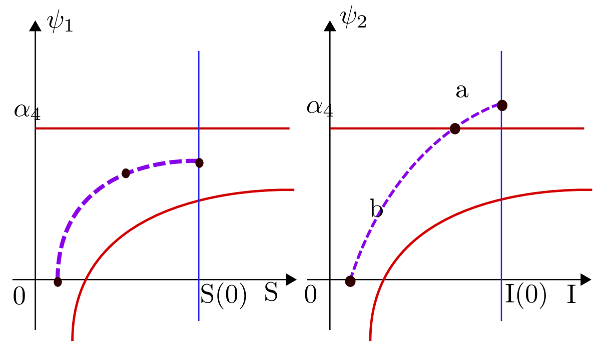


Рис. 4

В сценарии, изображенном на Рис. 3:

- на части a будем перебирать время переключения $t^1_{oc} \in [0, T]$ и решать з. Коши для SI-системы с $u_1 = u_{1,max},\ u_2 = u_{2,max}$ на отрезке $[0,\ t^1_{oc}]$ с начальными условиями $S(0), I(0),$. Переключение происходит на гиперболе, где $S = S(t^1_{oc})$, откуда найдем $\psi_1(t^1_{oc}) = \alpha_4 - \dfrac{2\alpha_1 u_{1,max}}{S(t^1_{oc})}$.
- На части b будем решать краевую задачу для SI- и сопряженной системы с граничными условиями $S(t^1_{oc}),\ I(t^1_{oc}),\ \psi_1(t^1_{oc}),\ \psi_2(T) = 0$ (некоторые получены из части a) на отрезке $[t^1_{oc},\ T]$. Проверка найденного решения: $\psi_1(T) = 0$.

В сценарии, изображенном на Рис. 4:

- на части a будем перебирать время переключения t^2_{oc} и решать з. Коши для SI-системы с $u_1 = u_{1,max},\ u_2 = 0$ на отрезке $[0,\ t^2_{oc}]$. Переключение происходит на прямой $\psi_2 = \alpha_4$, откуда $\psi_2(t^2_{oc}) = \alpha_4$.
- На части b будем решать краевую задачу для SI- и сопряженной системы с граничными условиями $S(t^2_{oc}),\ I(t^2_{oc}),\ \psi_1(T) = 0,\ \psi_2(t^2_{oc}) = \alpha_4$ на отрезке $[t^2_{oc},\ T]$. Проверка найденного решения: $\psi_2(T) = 0$.

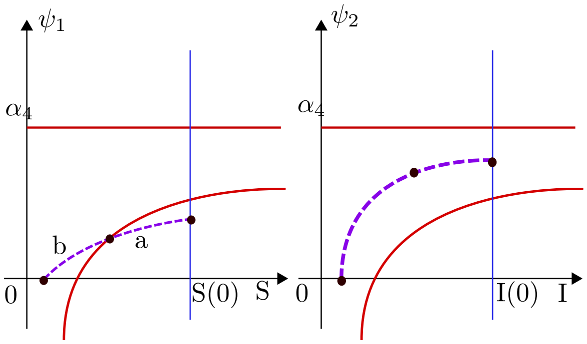


Рис. 5

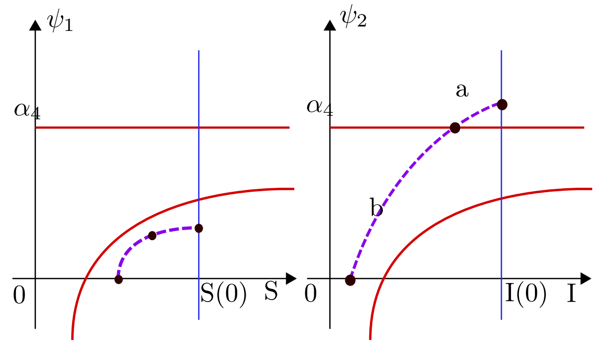


Рис. 6

В сценарии, изображенном на Рис. 5:

- на части a будем перебирать время переключения $t_{oc} \in [0, T]$ и $\psi_2(0) \in [\psi_2^0,\ \alpha_4]$, где $\psi_2^0 = \alpha_4 - \dfrac{2\alpha_2 u_{2,max}}{I(0)}$, и решать краевую задачу для SI- и сопряженной системы с граничными условиями $S(0),\ I(0),\ \psi_1(t_{oc}) = \alpha_4 - \dfrac{2\alpha_1 u_{1,max}}{S(t_{oc})},\ \psi_2(0)$ на отрезке $[0,\ t_{oc}]$ (переключение происходит на гиперболе).
- На части b будем решать краевую задачу для SI- и сопряженной системы с граничными условиями $S(t_{oc}),\ I(t_{oc}),\ \psi_1(t_{oc}),\ \psi_2(t_{oc})$ на отрезке $[t_{oc},\ T]$. Проверка найденного решения: $\psi_1(T) = 0,\ \psi_2(T) = 0$.

В сценарии, изображенном на Рис. 6:

- на части a будем перебирать время переключения $t_{oc} \in [0, T]$ и $\psi_1(0) \in [\psi_1^0,\ \alpha_4]$, где $\psi_1^0 = \alpha_4 - \dfrac{2\alpha_1 u_{1,max}}{S(0)}$, и решать краевую задачу для SI- и сопряженной системы с граничными условиями $S(0),\ I(0),\ \psi_1(0),\ \psi_2(t_{oc}) = \alpha_4 - \dfrac{2\alpha_2 u_{2,max}}{I(t_{oc})}$ на отрезке $[0,\ t_{oc}]$ (переключение происходит на прямой).
- На части b будем решать краевую задачу для SI- и сопряженной системы с граничными условиями $S(t_{oc}),\ I(t_{oc}),\ \psi_1(t_{oc}),\ \psi_2(t_{oc})$ на отрезке $[t_{oc},\ T]$. Проверка найденного решения: $\psi_1(T) = 0,\ \psi_2(T) = 0$.

Аналогично решаются ситуации, симметричные рис. 3 и 5. Симметричная ситуация для рис. 4 и 6 невозможны, т. к. в таких случаях $\psi_2 < \alpha_4$, а в момент переключения ψ_1 на прямой α_4 имеем $u_1 = 0$ и из СС $\dot{\psi}_1 = (\psi_1 - \psi_2)\beta I > 0$, а значит мы не могли ехать из верхней области в нижнюю, так как ψ_1 возрастает.

3) ≥ 2 переключений

Аналогично 1 переключению. В данных задачах наиболее типичные случаи, когда управление берется либо близким к 0, либо к максимуму. Это имеет интерпретацию в жизни, например, нужно мало лекарства (u_2) и много вакцины (u_1), когда что-то летальное и вакцина недорогая (например, прививки от кори и столбняка). Ситуацию наоборот можно рассмотреть на примере гриппа, где бывает, что скорее принимают таблетки (лекарство), чем делают прививки.

5 Задача 2

Избавимся от интегрального ограничения с помощью введения дополнительной переменной $P(t) = \int_0^t(\alpha_1 u_1(s) + \alpha_2 u_2(s))ds > 0,\ \dot{P} = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$. В итоге ограничение будет иметь вид $P(T) \leq M$.

Заметим, что при $(\alpha_1 u_{1,max} + \alpha_2 u_{2,max})T \leq M$ можно все время брать максимальные управления и задача решена, иначе будем пытаться попасть в точку $P(T) = M$.

Для данной задачи функционал Гамильтона-Понтрягина принимает следующий вид:

$$\mathcal{H} = \psi_0 \gamma I(t) + \psi_1(-\beta IS - u_1 S) + \psi_2(\beta IS - (\gamma + u_2)I) + \psi_3(\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)).$$

5.1 Нормальный случай

Пусть $\psi_0 \neq 0$. Из ПМП $\psi_0 \equiv Const = \psi_0^0 < 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \psi_0^0 \gamma I(t) + \psi_1(-\beta IS - u_1 S) + \psi_2(\beta IS - (\gamma + u_2)I) + \psi_3(\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)) = \\ = (-\psi_1 S + \psi_3 \alpha_1)u_1 + (-\psi_2 I + \psi_3 \alpha_2)u_2 + \psi_0^0 \gamma I(t) - \psi_1 \beta IS + \psi_2(\beta IS - \gamma I).\end{aligned}$$

Тогда сопряженная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = \psi_1 u_1 + (\psi_1 - \psi_2)\beta I, \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \psi_2 u_2 + \gamma(-\psi_0^0 + \psi_2) + (\psi_1 - \psi_2)\beta S, \\ \dot{\psi}_3 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Откуда можно сделать вывод, что $\psi_3 \equiv Const = \psi_3^0$.

Из УМ управление будет иметь вид:

$$u_1(t) = \begin{cases} [0, u_{1,max}], & -\psi_1 S + \psi_3^0 \alpha_1 = 0, \\ 0, & -\psi_1 S + \psi_3^0 \alpha_1 < 0 \\ u_{1,max}, & -\psi_1 S + \psi_3^0 \alpha_1 > 0. \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} [0, u_{2,max}], & -\psi_2 I + \psi_3^0 \alpha_2 = 0, \\ 0, & -\psi_2 I + \psi_3^0 \alpha_2 < 0 \\ u_{2,max}, & -\psi_2 I + \psi_3^0 \alpha_2 > 0. \end{cases}$$

Таким образом, при переключения возможны на данных многообразиях (изображены красными линиями, стартуем всегда с $S = S(0),\ I = I(0)$) :

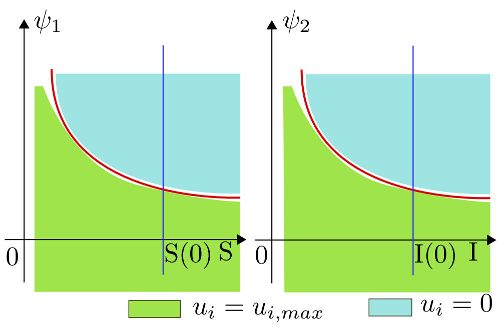


Рис. 7: Области управлений при $\psi_3^0 > 0$

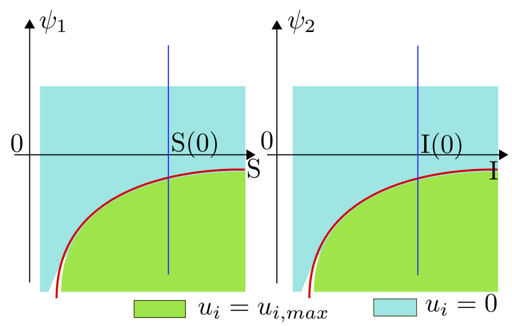


Рис. 8: Области управлений при $\psi_3^0 < 0$

Особый режим по u_1 наступает при $\psi_1 S = \psi_3^0 \alpha_1 = k_1$, то есть $S = \frac{k_1}{\psi_1}$ и $\dot{S} = -\frac{k_1}{\psi_1^2}\dot{\psi}_1$. Мы знаем, что $\dot{S} < 0$, значит при $k_1 > 0$ имеем $\psi_1 > 0$ и $\dot{\psi}_1 > 0$. Подставим это в 1 уравнение системы SIR, получим $\dot{\psi}_1 = -\beta I u_1 \psi_1 < 0$. Противоречие. Также видно, что гиперболу можно пересечь только в одном направлении, а значит по ψ_1 возможно только ≤ 1 переключения. Аналогично с $k_1 < 0$.

Особый режим по u_2 наступает при $\psi_2 I = \psi_3^0 \alpha_2 = k_2$, то есть $I = \frac{k_2}{\psi_2}$ и $\dot{I} = -\frac{k_2}{\psi_2^2}\dot{\psi}_2$. Подставим это во второе уравнение системы SIR: $-\dot{\psi}_2 = (\beta S - (\gamma + u_2))\psi_2$. Сложим это со 2м уравнением СС (4): $0 = \psi_1 \beta S + \psi_0^0$, значит $0 = \dot{\psi}_1 S + \dot{S}\psi_1 = (\psi_1 u_1 + (\psi_1 - \psi_2)\beta I)S - (\beta I + u_1)S\psi_1 = -\psi_2 \beta I S$, откуда $\psi_2 = 0$, а мы ехали по гиперболе. Противоречие.

Вывод: особого режима не может быть.

5.2 Анормальный случай

Пусть $\psi_0 = 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \psi_1(-\beta I S - u_1 S) + \psi_2(\beta I S - (\gamma + u_2)I) + \psi_3(\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)) = \\ = (-\psi_1 S + \psi_3 \alpha_1)u_1 + (-\psi_2 I + \psi_3 \alpha_2)u_2 - \psi_1 \beta I S + \psi_2(\beta I S - \gamma I).\end{aligned}$$

Тогда сопряженная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = \psi_1 u_1 + (\psi_1 - \psi_2)\beta I, \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \psi_2 u_2 + \gamma \psi_2 + (\psi_1 - \psi_2)\beta S, \\ \dot{\psi}_3 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Откуда можно сделать вывод, что $\psi_3 \equiv Const = \psi_3^0$.

Из УМ управление будет иметь вид как в нормальном случае.

Так как $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$, то в силу единственности решения задачи Коши для сопряженной системы получаем $\psi_1(t) = \psi_2(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T]$.

Так как это анормальный случай, то $\psi_3^0 \neq 0$, а значит, если $\psi_3^0 > 0$,то $u_1 = u_{1,max},\ u_2 = u_{2,max}$, и при $(\alpha_1 u_{1,max} + \alpha_2 u_{2,max})T \leq M$ задача решена (решаем з. Коши для SI-системы с $u_1 = u_{1,max},\ u_2 = u_{2,max}$ на отрезке $[0,\ T]$ и считаем значение функционала), а иначе решений нетю. Если $\psi_3^0 < 0$,то $u_1 \equiv 0,\ u_2 \equiv 0$, что не минимизирует функционал.

Вывод: При анормальном случае задача имеет решение только при $(\alpha_1 u_{1,max} + \alpha_2 u_{2,max})T \leq M$.

5.3 Алгоритм решения

Рассмотрим случай $\psi_3^0 > 0$. Аналогично задаче 1 здесь возможен один из 3-х сценариев:

1. без переключений;
2. ровно 1 переключение;
3. ≥ 1 переключений.

1) 0 переключений
Оба управления максимальны, а значит, нам подходит $\psi_1,\ \psi_2$ из анормального случая, задача разрешима при $(\alpha_1 u_{1,max} + \alpha_2 u_{2,max})T \leq M$.

2) 1 переключение
Идейно сценарий изображен на рис. 9:

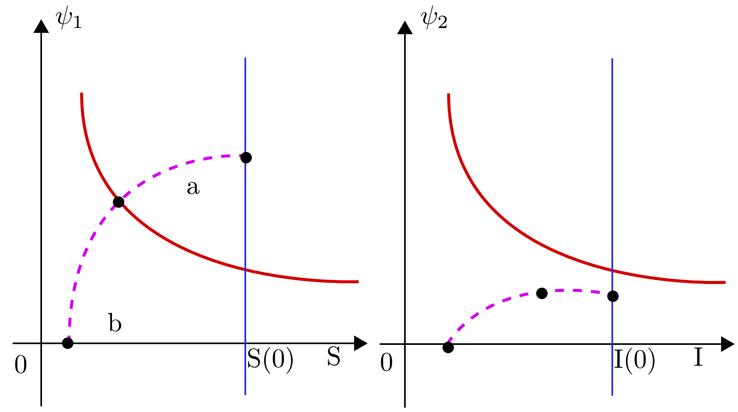


Рис. 9

В силу положительной однородности принципа максимума по $\tilde{\psi}$ отнормируем его на правом конце, а так как $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$, то получим $\left(\psi_0^0\right)^2 + \left(\psi_3^0\right)^2 = 1$. Будем перебирать эти значения по единичному кругу.

- на части a будем перебирать время переключения $t_{oc} \in [0, T]$ и решать з. Коши для SI-системы с $u_1 = 0,\ u_2 = u_{2,max}$ на отрезке $[0,\ t_{oc}]$ с начальными условиями $S(0), I(0),$. Переключение происходит на гиперболе, где $S = S(t_{oc})$, откуда найдем $\psi_1(t_{oc}) = \dfrac{k_1}{S(t_{oc})}$.
- На части b будем решать краевую задачу для SI- и сопряженной системы с граничными условиями $S(t_{oc}),\ I(t_{oc}),\ \psi_1(t_{oc}),\ \psi_2(T) = 0$ (некоторые получены из части a) на отрезке $[t_{oc},\ T]$. Проверка найденного решения: $\psi_1(T) = 0$.

3) ≥ 1 переключения
Пусть сначала мы переключились по ψ_1. Будем перебирать это время. Дополнительно будем перебирать начальные значения $\psi_0^0,\ \psi_2^0,\ \psi_3^0$ по единичной сфере. Тогда на первом этапе будем решать краевую задачу для SIR и CC с заданными $S(0),\ I(0),\ \psi_1(t_{oc}),\ \psi_2^0$ на отрезке $[0,\ t_{oc}]$ с управлениями $u_1 = u_{1,max}$, u_2 зависит от ψ_2^0 и $I(0)$. Далее имеем $S(t_{oc}),\ I(t_{oc}),\ \psi_1(t_oc),\ \psi_2(t_{oc})$ и решаем з. Коши на отрезке времени $[t_{oc},\ T]$.

Аналогично с первым переключением по ψ_2.

Проблема solve_bvp в том, что нужно достаточно точно указать начальное приближение, которое не угадаешь, поэтому так программа выполняется только в мечтах. В жизни пришлось писать еще одну программу и перебирать начальные значения $\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3$ и решать з. Коши функцией solve_ivp.

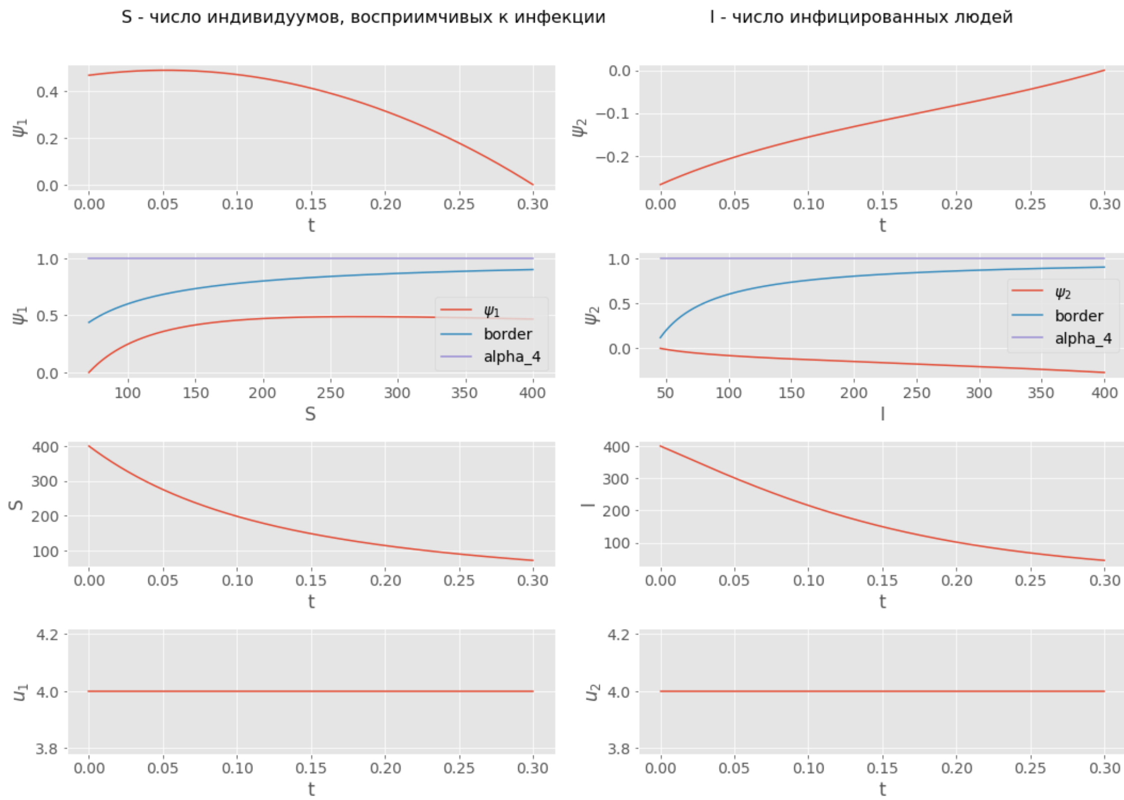
6 Примеры работы программы

6.1 Задача 1

$$T = 0.3,\ \beta = 0.01,\ \gamma = 5,\ S_0 = 400,\ I_0 = 400,\ u_{1,max} = u_{2,max} = 4,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 5,\ \alpha_3 = \alpha_4 = 1$$

Результаты:

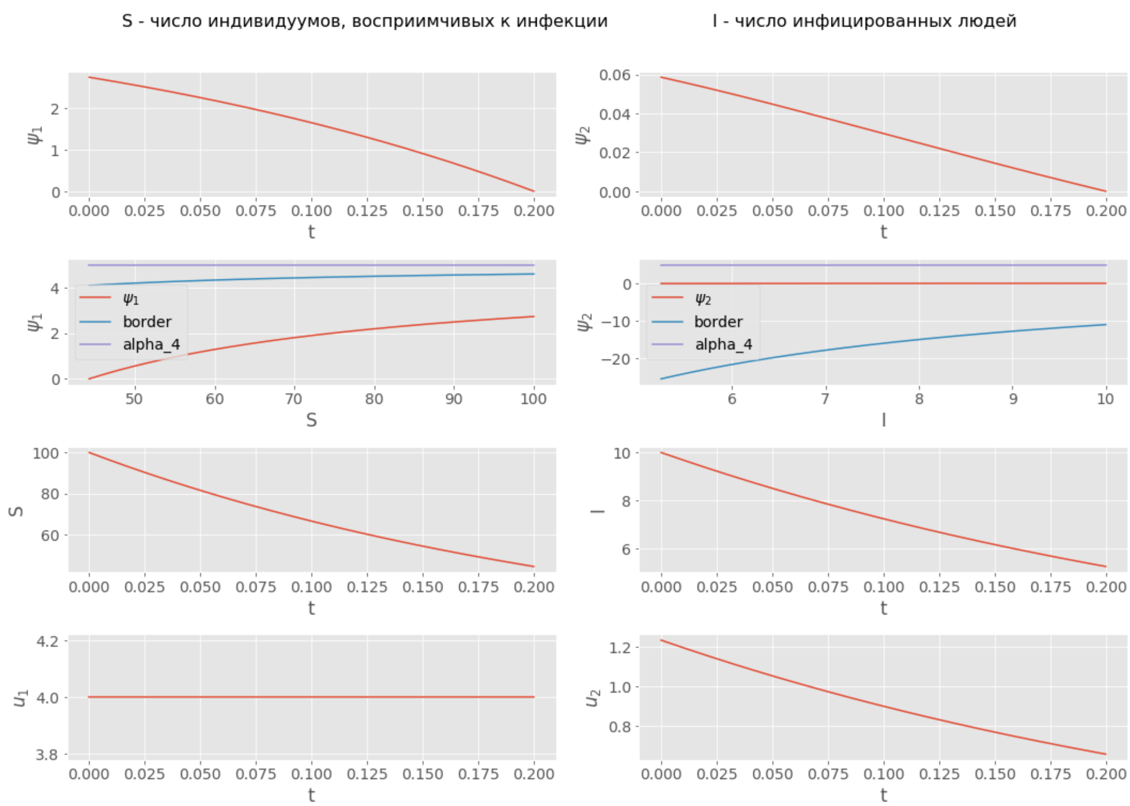
- умерло 263.27 у.е. людей
- количество переболевших и выздоровевших, либо невосприимчивых к инфекции 450.17 у.е. людей
- J = -108.89911



$T = 0.2,\ S_0 = 100,\ I_0 = 10, R_0 = 30, \beta = 0.01, \gamma = 3,\ u_{1,max} = u_{2,max} = 4,\ \alpha_1 = 5,\ \alpha_2 = 20, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 5$

Результаты:

- умерло 4.42 у.е. людей
- количество переболевших и выздоровевших, либо невосприимчивых к инфекции 86.07 у.е. людей
- J = -256.45626

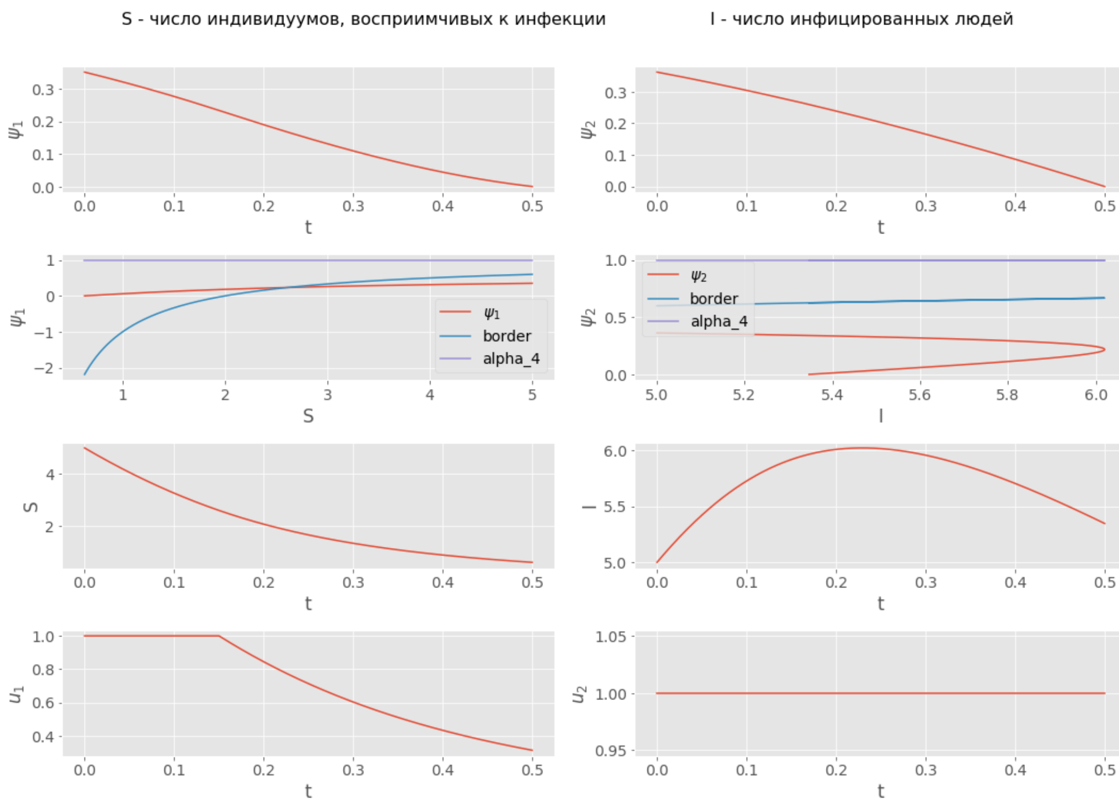


В данной задаче вакцина очень дорогая, поэтому она сразу начинается со среднего значения и потом убывает.

$T = 0.5,\ S_0 = 5,\ I_0 = 5,\ R_0 = 30, \beta = 0.6, \gamma = 0.1,\ u_{1,max} = u_{2,max} = 1,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1$

Результаты:

- умерло 0.29 у.е. людей
- количество переболевших и выздоровевших, либо невосприимчивых к инфекции 33.74 у.е. людей
- J = -2.66834



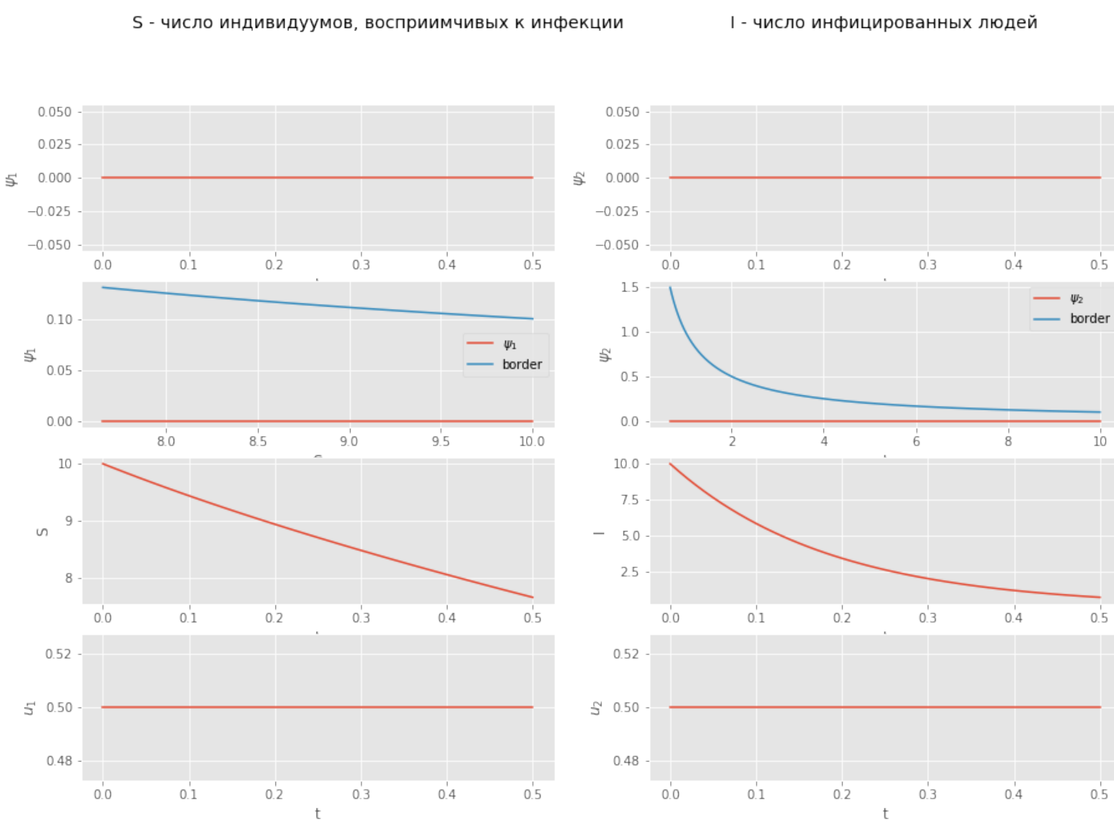
В данной задаче высокая заражаемость, поэтому достаточно много людей из восприимчивых стали инфицированными, поэтому вакцина максимальна, а лечение убывает.

6.2 Задача 2

$$T = 0.5,\ S_0 = 10,\ I_0 = 10,\ R_0 = 2, \beta = 0.01, \gamma = 5,\ u_{1,max} = u_{2,max} = 0.5,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,\ M = 2$$

Результаты:

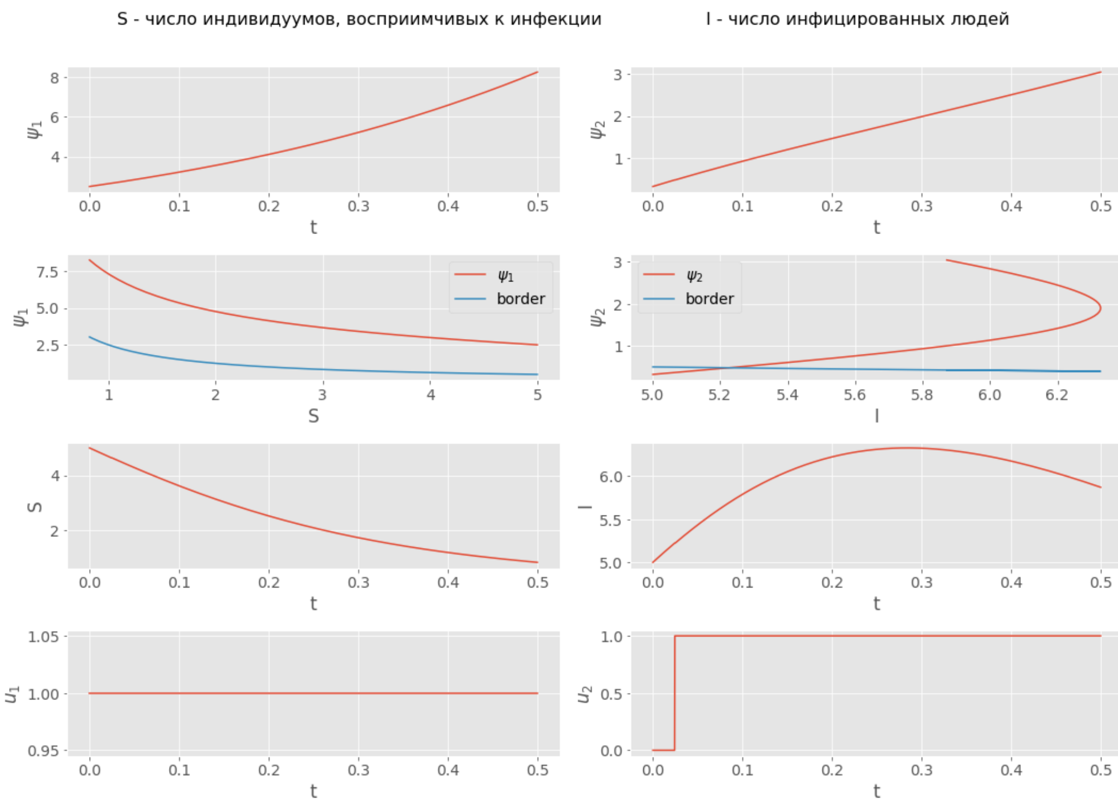
- умерло 8.63 у.е. людей
- количество переболевших и выздоровевших, либо невосприимчивых к инфекции 5.05 у.е. людей
- $J = 8.63055$



$T = 0.5,\ S_0 = 5,\ I_0 = 5,\ R_0 = 30, \beta = 0.6, \gamma = 0.1,\ u_{1,max} = u_{2,max} = 1,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,\ M = 2$

Результаты:

- умерло 0.30 у.е. людей
- количество переболевших и выздоровевших, либо невосприимчивых к инфекции 34.07 у.е. людей
- $J = 0.30056$

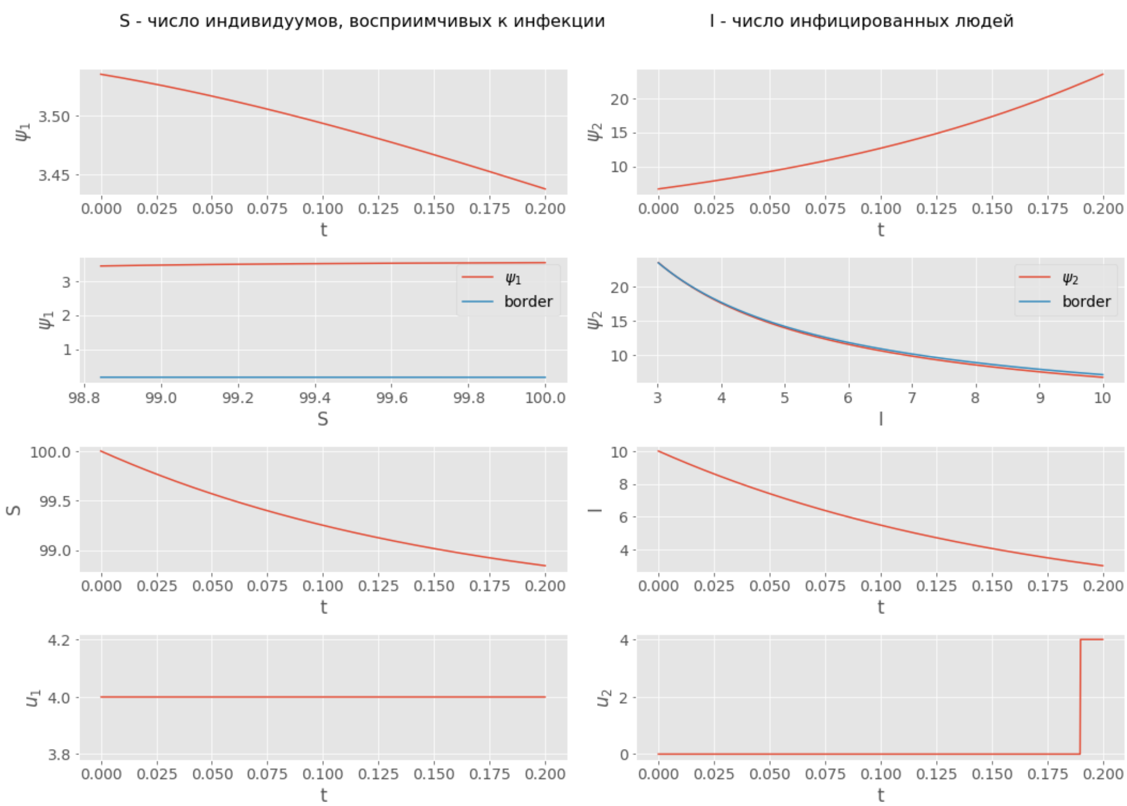


Как видно, число инфицированных людей растет, поэтому лечение переключилась с 0 на максимум.

$T = 0.2,\ S_0 = 100,\ I_0 = 10,\ R_0 = 30, \beta = 0.01, \gamma = 3,\ u_{1,max} = u_{2,max} = 4,\ \alpha_1 = 5,\ \alpha_2 = 20,\ M = 2$

Результаты:

- умерло 3.49 у.е. людей
- количество переболевших и выздоровевших, либо невосприимчивых к инфекции 109.57 у.е. людей
- $J = 3.49285$



Как видно, число инфицированных людей растет, а лекарство дорогое, поэтому лечение переключилась с 0 на максимум в конце.

Список литературы

[1] Комаров Ю.А. Лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, 2020.