



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа 1

«Динамические системы с дискретным временем»

Студент 315 группы
П. В. Карпикова

Руководитель практикума
Д. А. Алимов

Москва, 2020

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Задача 1	2
2.1	Неподвижные точки	2
2.2	Устойчивость	2
2.3	Исследование существования циклов длины 2 и 3	4
2.4	Показатель Ляпунова	7
3	Задача 2	8
3.1	Неподвижные точки	8
3.2	Бифуркация Неймара-Саккера	8

1 Постановка задачи

1. Найти неподвижные точки
2. Исследовать устойчивость неподвижных точек в зависимости от значений параметров
3. Проверить существование циклов длиной 2 и 3
4. В случае существования цикла длиной 3 построить бифуркационную диаграмму
5. Построить график показателя Ляпунова в зависимости от значений параметра
6. В случае системы с запаздыванием проверить возможность возникновения бифуркации Неймарка-Саккера

Все значения параметров и переменных неотрицательные.

Задача 1. $u_{t+1} = u_t^3 e^{z(1-u_t)}$

Задача 2. $u_{t+1} = u_t^3 e^{z(1-u_{t-1})}$

2 Задача 1

2.1 Неподвижные точки

Неподвижные точки определяются как решения уравнения $N = f(N)$. Пусть мы имеем неподвижную точку N . Тогда $N = u_{t+1} = u_t$ является решением уравнения

$$\begin{cases} N = N^3 e^{z(1-N)} \\ 1 = N^2 e^{z(1-N)} \end{cases}$$

Решим второе уравнение. Рассмотрим функцию $F(u) = u^2 e^{z(1-u)} - 1$. Найдем, области возрастания, чтобы понять, где она может пересечь 0.

$$F'(u) = u e^{z(1-u)} (2 - zu) > 0 \text{ при } u < \frac{2}{z}.$$

При этом $F(0) = -1$, $F(1) = 0$, $F\left(\frac{2}{z}\right) = \left(\frac{2}{z}\right)^2 e^{z-2} - 1$.

$$F\left(\frac{2}{z}\right) > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{z}\right)^2 e^{z-2} > 1 \Leftrightarrow 2 \ln \frac{2}{z} + z - 2 > 0$$

$$\left(2 \ln \frac{2}{z} + z - 2\right)' = -\frac{2}{z} + 1 = \frac{z-2}{z} > 0 \text{ при } z > 2. \text{ А так как при } z = 2 \quad F\left(\frac{2}{z}\right) = 0, \text{ то } F\left(\frac{2}{z}\right) \geq 0 \quad \forall z$$

Поэтому при $z = 2$ будет 2 неподвижные точки $N = 0$ и $N = 1$. При $z \neq 2$ добавится 3 неподвижная точка u^* : при $z < 2$ $u^* > \frac{2}{z}$, при $z > 2$ $u^* \in (0, \frac{2}{z})$, ее нельзя получить аналитически, поэтому она будет получена численно.

2.2 Устойчивость

Для проверки на устойчивость будем пользоваться производной $f_u(\tilde{u}) = (\tilde{u})^2 e^{z(1-\tilde{u})} (3 - z\tilde{u})$.

1. Для неподвижной точки $\tilde{u} = 0$: $|f_u(0)| = 0 < 1 \Rightarrow$ асимптотически устойчива,
2. Для неподвижной точки $\tilde{u} = 1$:

- неустойчива при $|f_u(1)| = |3 - z| > 1 \Rightarrow z \in (0, 2) \cup (4, +\infty)$,
- при $z = 2$ или $z = 4$ про ее устойчивость ничего сказать нельзя,
- при $z \in (2, 4)$ асимптотически устойчива ,

3. Для неподвижной точки $\tilde{u} = u^*$ численно найдем параметры, при которых теряется устойчивость:

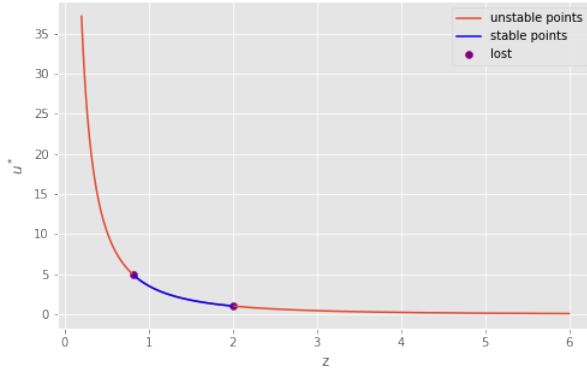


Рис. 1: Зависимость особой точки от параметра

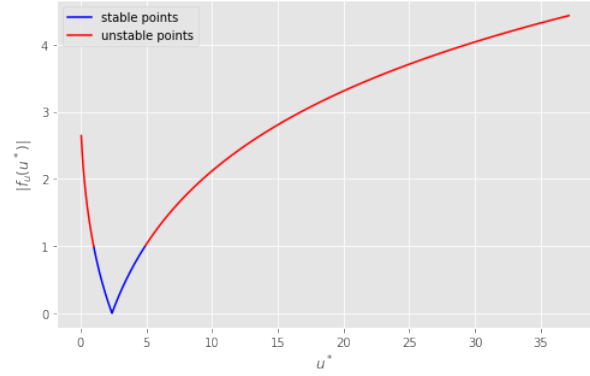
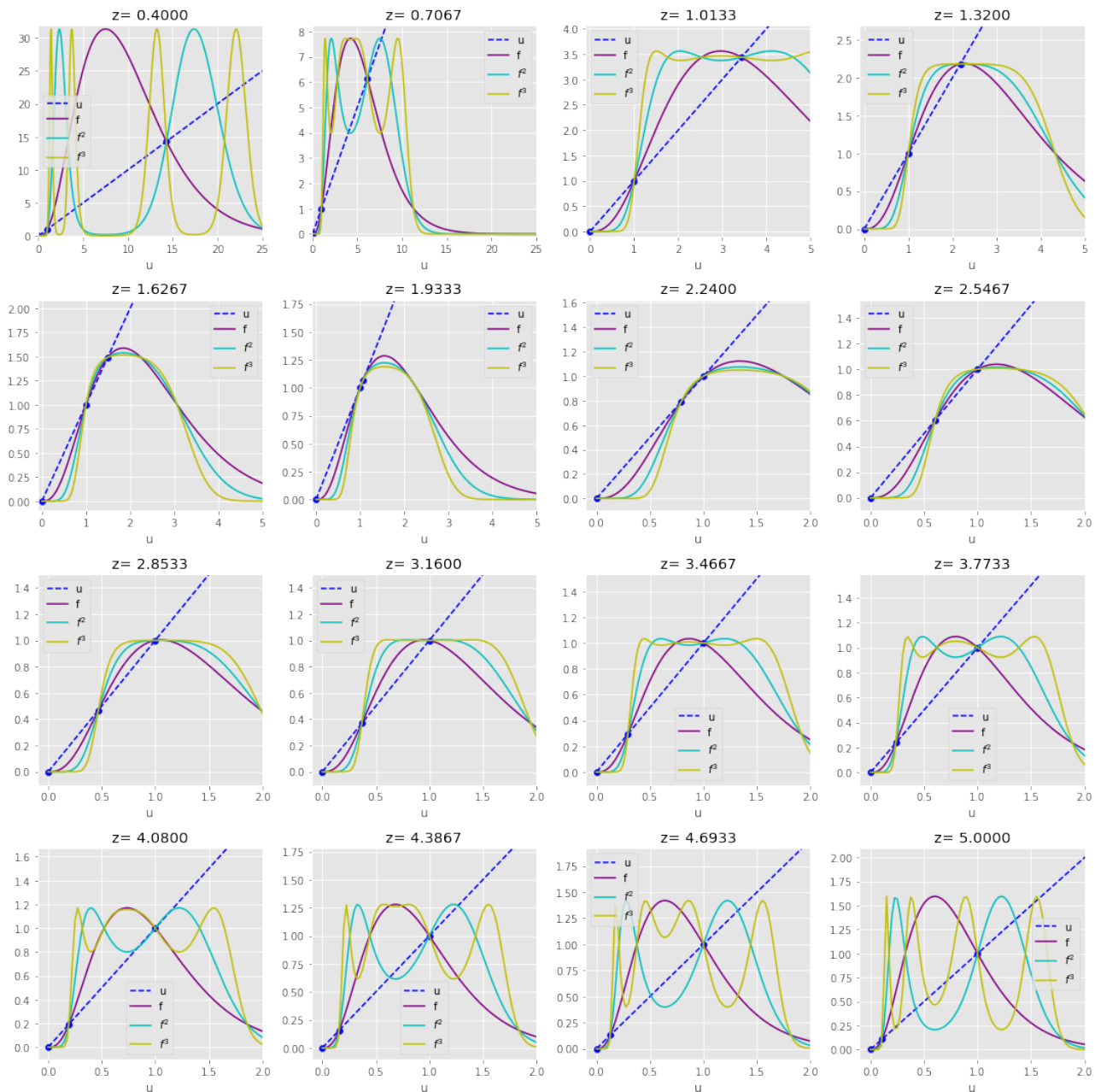


Рис. 2: Модуль производной особой точки

Значения z , при которых происходит потеря устойчивости: $z_0 = 0.8154$, $z_1 = 2$. При $z \in (z_0, z_1)$ асимптотически устойчива.

2.3 Исследование существования циклов длины 2 и 3

Ниже приведены графики функций f , $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, пересечения которых с прямой $y = u$ являются неподвижными точками (отмечены синим), и точками, составляющими циклы длины 2 и 3 соответственно.



Видно, что при увеличении параметра z сначала имеются циклы длины 2 и 3, потом остаются только циклы длины 2, потом их нет, затем снова появляются циклы длины 2 и 3.

Построим бифуркационную диаграмму. Для каждого значения параметра сначала высчитывалось 200 точек для стабилизации, а затем считались следующие 150 точек системы, которые отображались на диаграмме.

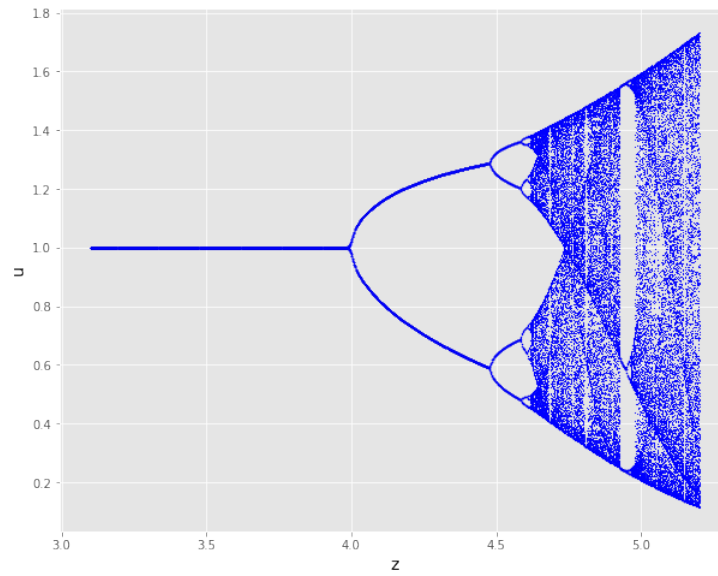
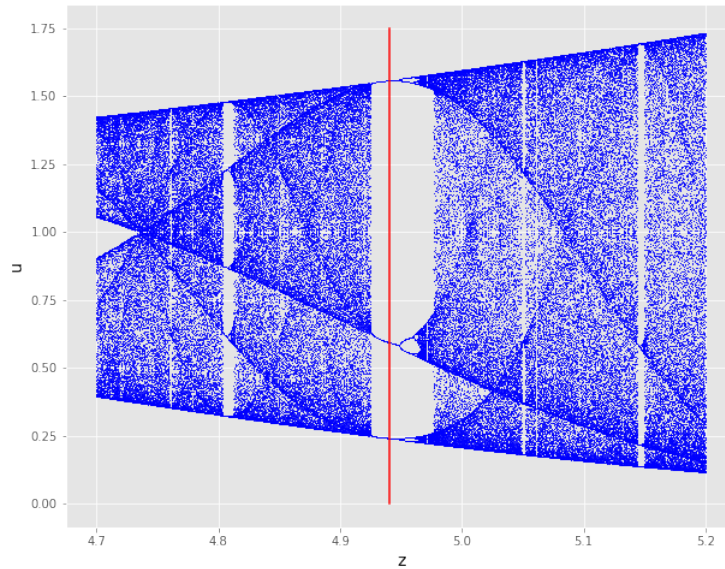


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма

Видно, что сначала появляется устойчивый цикл длины 2, затем при увеличении параметра появляется устойчивый цикл длины 3.

Рассмотрим подробнее диаграмму при $z \in [4.7, 5.2]$. При значении $z_0 = 4.94$ появляется цикл длины 3. По теореме Шарковского из этого следует, что в ней имеется цикл любой длины.



Приведем примеры этих устойчивых циклов:

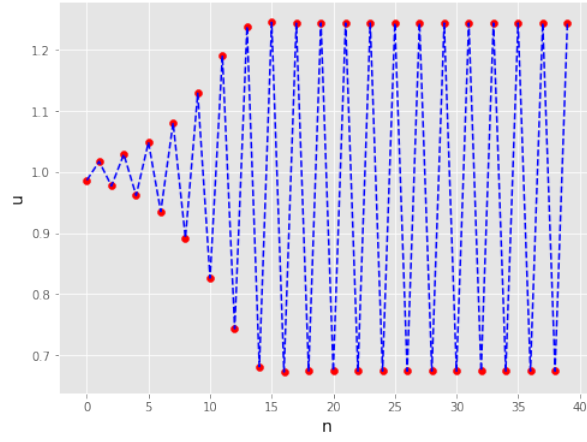


Рис. 4: Устойчивый цикл длины 2, $z_0 = 4.3$, $u_1 \approx 1.2439$, $u_2 \approx 0.6743$

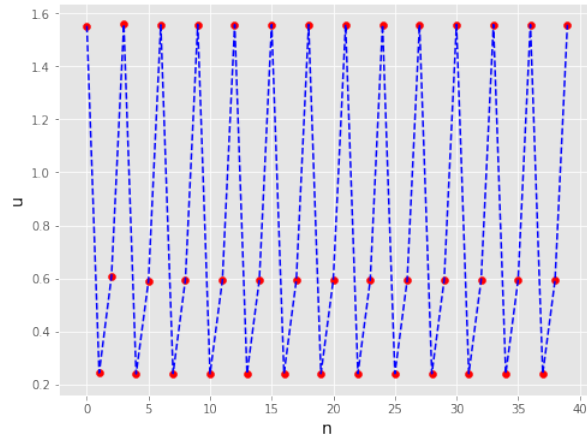


Рис. 5: Устойчивый цикл длины 3, $z_1 = 4.94$, $u_1 \approx 1.5573$, $u_2 \approx 0.2407$, $u_3 \approx 0.5935$

2.4 Показатель Ляпунова

Показателем Ляпунова для траектории u_1, u_2, \dots, u_n называется величина,

$$h(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f'(u_1)| + \ln |f'(u_2)| + \dots + \ln |f'(u_n)|}{n},$$

если этот предел существует.

Он показывает, насколько хаотична система: при малом отклонении траекторий в начальный момент при $h < 0$ они будут приближаться друг другу, при $h > 0$ — разбегаться.

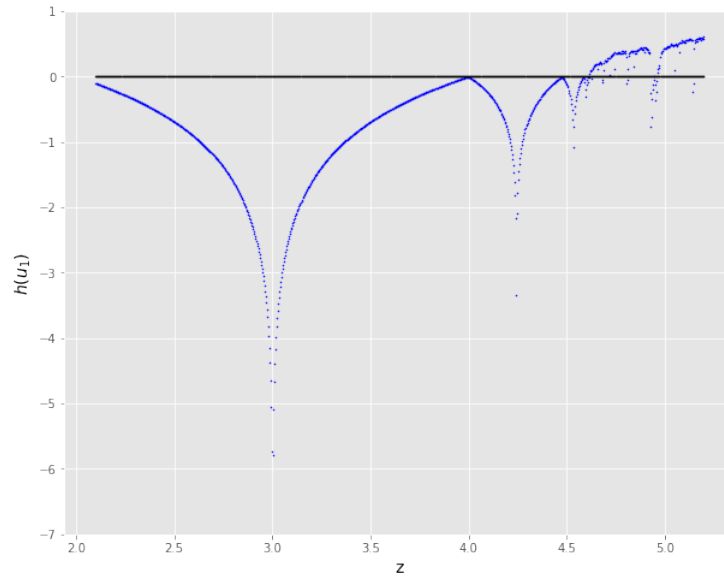


Рис. 6: График показателя Ляпунова, начальное значение $u_1 = \frac{2}{z}$

3 Задача 2

$u_{t+1} = u_t^3 e^{z(1-u_t)}$ — система с запаздыванием, перепишем ее в более удобном виде:

$$\begin{cases} u_{t+1} = u_t^3 e^{z(1-v_t)}, \\ v_{t+1} = u_t. \end{cases} \quad (1)$$

3.1 Неподвижные точки

Неподвижные точки этой системой совпадают с точками из задачи 1.

Чтобы определить их устойчивость, найдем матрицу Якоби для системы:

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} 3u^2 e^{z(1-v)} & -zu^3 e^{z(1-v)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Так как точки неподвижные, то для нетривиальной точки $u^2 e^{z(1-v)} = 1$, $u^3 e^{z(1-v)} = u$, поэтому матрица принимает вид:

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} 3 & -zu \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Характеристический многочлен $\det(J - \lambda I) = \lambda(\lambda - 3) + zu$. Его корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4zu}}{2}$$

1. Для точки $(0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Собственные значения матрицы $\lambda_{1,2} = 0$, $|\lambda_{1,2}| < 1$, значит точка асимптотически устойчива при любом z ,

2. Для точки $(1, 1)$

$$J(1, 1) = \begin{bmatrix} 3 & -z \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4z}}{2}$$

Как видно, $\lambda = \frac{3 + \sqrt{9 - 4z}}{2} > 1$, значит, она неустойчива.

3. Для точки (u^*, u^*)

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4zu^*}}{2}$$

Аналогично $\lambda = \frac{3 + \sqrt{9 - 4zu^*}}{2} > 1$, и точка неустойчива.

3.2 Бифуркация Неймара-Саккера

Ни при каком значении параметра z не появились собственные значения $\lambda_{1,2}$ такие, что $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, значит, такой бифуркации не будет.

Список литературы

- [1] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.