

**Análise das distribuições
do número de operações
de resolvedores SAT**

Poliana Magalhães Reis

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Programa: Ciência da Computação

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Finger

São Paulo, Abril de 2012

Análise das distribuições do número de operações de resolvedores SAT

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 28/02/2012. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Marcelo Finger (orientador) - IME-USP
Prof. Dr. Flavio Soares Correa da Silva - IME-USP
Prof. Dr. Fabio Gagliardi Cozman EP-USP

*"Transportai um punhado de terra todos os dias
e fareis uma montanha."*

Confúcio

*"Depois de termos conseguido subir a uma grande montanha,
só descobrimos que existem ainda mais
grandes montanhas para subir."*

Nelson Mandela

*"Não tentes ser bem sucedido,
tenta antes ser um homem de valor."*

Albert Einstein

Agradecimentos

Deus, muito obrigada pela minha vida, minha familia e por ter me dado grandes oportunidades como esta, de fazer coisas que valem a pena.

Um agradecimento muito especial à grande mulher Maria Aparecida de Magalhães Reis, minha mãe, e ao meu honroso pai Waldir Reis, por me ajudar a ser a pessoa que sou e conseguir tudo que tenho em minha vida.

Por certo este trabalho não seria possível sem as contribuições do meu querido orientador Marcelo Finger, grande profissional e ser humano, que me orientou do começo ao fim ensinando, corrigindo e dando sugestões sempre que necessário.

Agradeço à Isany e ao Fernando pelo carinho e palavras de incentivo.

Gostaria que soubessem que tudo isso foi essencial para que eu pudesse concluir este trabalho.

Agradeço também a todos que compartilharam comigo momentos tão importantes e que fizeram parte das minhas lutas diárias me dando força e carinho essenciais para a conquista dos meus objetivos .

Resumo

No estudo da complexidade de problemas computacionais destacam-se duas classes conhecidas como P e NP. A questão P=NP é um dos maiores problemas não resolvidos em Ciência da Computação teórica e Matemática contemporânea. O problema SAT foi o primeiro problema reconhecido como NP-completo e consiste em verificar se uma determinada fórmula da lógica proposicional clássica é ou não satisfazível. As implementações de algoritmos para resolver problemas SAT são conhecidas como resolvedores SAT (SAT Solvers). Existem diversas aplicações em Ciência da Computação que podem ser realizadas com SAT Solvers e com outros resolvedores de problemas NP-completos que podem ser reduzidos ao SAT como por exemplo problemas de coloração de gráficos, problemas de agendamento e problemas de planejamento. Dentre os mais eficientes algoritmos para resolvedores de SAT estão Sato, Grasp, Chaff, MiniSat e Berkmin. O Algoritmo Chaff é baseado no Algoritmo DPLL o qual existe a mais de 40 anos e é a estratégia mais utilizada para os Sat Solvers. Essa dissertação apresenta um estudo aprofundado do comportamento do zChaff (uma implementação muito eficiente do Chaff) para saber o que esperar de suas execuções em geral .

Palavras-chave: P=NP, NP-completo, SAT, SAT Solvers, Chaff, zChaff.

Abstract

In the study of computational complexity two classes stand out known as P and NP. The question P = NP is one of the greatest unsolved problems in theoretical computer science and contemporary mathematics. The SAT problem was first problem recognized as NP-complete and consists of checking whether a certain formula of classical propositional logic is satisfiable or not. The implementations of algorithms to solve SAT problems are known as SAT solvers. There are several applications in computer science that can be performed with SAT solvers and other NP-complete problems can be reduced to SAT problems such as graph coloring, scheduling problems and planning problems. Among the most efficient algorithms for SAT solvers are Sato, Grasp, Chaf, MiniSat and Berkmin. The Chaff algorithm is based on the DPLL algorithm which there is more than 40 years and is the most used strategy for Sat Solvers. This dissertation presents a detailed study of the behavior of zChaff (a very efficient implementation of the Chaff) to know what to expect from their performance in general.

Keywords: P=NP, NP-complete, SAT, SAT Solvers, Chaff, zChaff.

Sumário

Lista de Figuras	vi
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Estrutura da dissertação	2
2 O Problema SAT	3
2.1 Definição	3
2.2 Complexidade Computacional	4
2.2.1 O formato CNF	7
2.3 Resolvedores SAT	8
2.3.1 Método DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland)	8
2.3.2 ZChaff	11
2.4 Transição de fase	12
3 Arcabouço Estatístico	13
3.1 Distribuições de Probabilidade	13
3.2 Testes de Hipótese	13
3.2.1 Nível de significância, Região Crítica e P-valor	14
3.2.2 Etapas para realização de um teste de hipótese	15
3.2.3 Testes de Aderência	15
3.2.4 Teste Kolmogorov-Smirnov	16
3.2.5 Teste de Anderson-Darling	17
4 Experimentos e Resultados	19
4.1 Experimentos realizados	19
4.1.1 Síntese dos experimentos	21
4.2 Resultados e Análises	26
5 Conclusões	34
5.1 Considerações Finais	34
5.2 Conclusões	34
5.3 Sugestões para Pesquisas Futuras	35

Listas de Figuras

2.1	Uso de um algoritmo de redução de tempo polinomial para resolver um problema de decisão A em tempo polinomial, dado um algoritmo de decisão de tempo polinomial para outro problema B.	5
2.2	Modo como a maioria dos cientistas vê o relacionamento entre as classes P, NP e NPC.	6
2.3	Exemplo de execução do DPLL, Fux [2004].	10
2.4	Resultado de execução de problemas 4-SAT Aleatórios, testados usando ASAT. Média (sólido) e mediana (tracejada) , Gent e Walsh [1994].	12
2.5	Percentual de SAT para cada ponto $\frac{M}{N}$.	12
3.1	Região de rejeição da hipótese nula. Pasquali [2000]	14
4.1	Dados de saída do zChaff	20
4.2	Distribuição para os valores de N=50 e M=50	22
4.3	Distribuição para os valores de N=50 e M=100	22
4.4	Distribuição para os valores de N=50 e M=150	23
4.5	Distribuição para os valores de N=50 e M=200	23
4.6	Distribuição para os valores de N=50 e M=215	24
4.7	Distribuição para os valores de N=50 e M=250	24
4.8	Distribuição para os valores de N=50 e M=300	25
4.9	Distribuição para os valores de N=50 e M=350	25
4.10	Distribuição para os valores de N=50 e M=400	26
4.11	Distribuição encontrada na saída do zChaff executando problemas com N=50 e M=50	27
4.12	Distribuição encontrada na saída do zChaff executando problemas com N=50 e M=150	28
4.13	Distribuição encontrada na saída do zChaff executando problemas com N=50 e M=200	28
4.14	Distribuição encontrada para N=100 e M=700	29
4.15	Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros	29
4.16	Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros	30
4.17	Distribuição encontrada para N=50 e M=215	30
4.18	Comportamento instável no ponto de mudança de fase ($\frac{M}{N} = 4.3$)	31
4.19	Comportamento instável no ponto de mudança de fase ($\frac{M}{N} = 5$)	32
4.20	Comportamento instável no ponto de mudança de fase ($\frac{M}{N} = 5$)	33
A.1	Distribuição encontrada para N=50 e M=50	36
A.2	Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=50	37
A.3	Distribuição encontrada para N=50 e M=100	38

A.4 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=100	39
A.5 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=100	40
A.6 Distribuição encontrada para N=50 e M=150	41
A.7 Teste de aderência com a distribuição Loglogistic com 3 parâmetros	41
A.8 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=150	42
A.9 Distribuição encontrada para N=50 e M=200	43
A.10 Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros	43
A.11 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=200	44
A.12 Distribuição encontrada para N=50 e M=215	45
A.13 Teste de aderência com a distribuição Normal	45
A.14 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=215	46
A.15 Distribuição encontrada para N=50 e M=250	47
A.16 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=250	48
A.17 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=250	49
A.18 Distribuição encontrada para N=50 e M=300	50
A.19 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=300	51
A.20 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=300	52
A.21 Distribuição encontrada para N=50 e M=350	53
A.22 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=350	54
A.23 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=350	55
A.24 Distribuição encontrada para N=50 e M=400	56
A.25 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=50 e M=400	56
A.26 Distribuição encontrada para N=100 e M=100	57
A.27 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=100	57
A.28 Distribuição encontrada para N=100 e M=200	58
A.29 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=200	59
A.30 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=200	60
A.31 Distribuição encontrada para N=100 e M=300	61
A.32 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=300	62
A.33 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=300	63
A.34 Distribuição encontrada para N=100 e M=400	64
A.35 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=400	65
A.36 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=400	66
A.37 Distribuição encontrada para N=100 e M=430	67
A.38 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=430	68
A.39 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=400	69
A.40 Distribuição encontrada para N=100 e M=500	70
A.41 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=500	71
A.42 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=500	72
A.43 Distribuição encontrada para N=100 e M=600	73
A.44 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=600	74
A.45 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=600	75
A.46 Distribuição encontrada para N=100 e M=700	76

A.47 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=700	77
A.48 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=700	78
A.49 Distribuição encontrada para N=100 e M=800	79
A.50 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=800	80
A.51 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=800	81
A.52 Distribuição encontrada para N=200 e M=200	82
A.53 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=200	83
A.54 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=200	84
A.55 Distribuição encontrada para N=200 e M=400	85
A.56 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=400	86
A.57 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=400	87
A.58 Distribuição encontrada para N=200 e M=600	88
A.59 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=600	89
A.60 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=600	90
A.61 Distribuição encontrada para N=200 e M=800	91
A.62 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=800	92
A.63 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=800	93
A.64 Distribuição encontrada para N=200 e M=860	94
A.65 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=860	95
A.66 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=860	96
A.67 Distribuição encontrada para N=200 e M=1000	97
A.68 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=1000	98
A.69 Distribuição encontrada para N=200 e M=1200	99
A.70 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=1200	100
A.71 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=1200	101
A.72 Distribuição encontrada para N=200 e M=1400	102
A.73 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=1400	103
A.74 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=1400	104
A.75 Distribuição encontrada para N=200 e M=1600	105
A.76 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=1600	106
A.77 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=200 e M=1600	107
A.78 Distribuição encontrada para N=300 e M=300	108
A.79 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=300	109
A.80 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=300	110
A.81 Distribuição encontrada para N=300 e M=600	111
A.82 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=600	112
A.83 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=600	113
A.84 Distribuição encontrada para N=300 e M=900	114
A.85 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=900	115
A.86 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=900	116
A.87 Distribuição encontrada para N=300 e M=1200	117
A.88 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=1200	118
A.89 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=1290	118

A.90 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=1500	118
A.91 Distribuição encontrada para N=300 e M=1800	119
A.92 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=1800	120
A.93 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=1800	121
A.94 Distribuição encontrada para N=300 e M=2100	122
A.95 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=2100	123
A.96 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=2100	124
A.97 Distribuição encontrada para N=300 e M=2400	125
A.98 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=2400	126
A.99 Distribuição e testes de aderência para os valores de N=300 e M=2400	127

Capítulo 1

Introdução

Na ciência da computação deparamos muitas vezes com problemas que podem ser resolvidos em um tempo razoável, são aqueles com um número de passos limitado por um polinômio no tamanho da entrada. Estes problemas podem ser resolvidos, com entradas de tamanho n , em um tempo $O(n^k)$ onde k é o grau do polinômio.

Com os grandes avanços na tecnologia, pode-se esperar que todos os problemas da área da ciência da computação possam ser resolvidos de uma maneira satisfatória mas infelizmente não é a realidade, Harry R. Lewis [1995]. Por exemplo, existem problemas, como o famoso *Problema da Parada* de Turing que não podem ser resolvidos por qualquer computador, não importa quanto tempo seja fornecido. Também existem problemas que podem ser resolvidos, mas não no tempo $O(n^k)$ para qualquer constante k . Em geral, imaginamos problemas que podem ser resolvidos por algoritmo de tempo polinomial como sendo *tratáveis*, e os problemas que exigem tempo superpolinomial como *intratáveis*, ou *difíceis*, Cormen et al. [1990].

A classe P de problemas é o conjunto de todos os problemas polinomiais, e a classe NP a classe que engloba os problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial por máquinas de Turing não-determinísticas.

Atualmente acreditamos que P seja diferente de NP já que vários pesquisadores tentaram incessantemente elaborar algoritmos eficientes para inúmeros problemas da classe NP e não conseguiram a formulação de algoritmos polinomiais para qualquer um deles.

O avanço mais importante na questão P versus NP veio no inicio dos anos 1970 com os trabalhos de Stephen Cook¹ e Leonid Levin² onde demonstraram a existência de problemas completos em NP que formam a classe de problemas *NP-completos*. Não sabe-se até hoje se os problemas completos em NP podem ser resolvidos utilizando um algoritmo polinomial, pois ainda não foi descoberto nenhum algoritmo de tempo polinomial para nenhum problema NP -completo, nem ninguém ainda foi capaz de provar que não pode existir nenhum algoritmo de tempo polinomial para qualquer deles.

Uma vez que temos um problema NP -completo, podemos obter outros por redução de tempo polinomial a partir dele. Entretanto, estabelecer o primeiro problema NP -completo é mais difícil. O teorema de Cook-Levin prova que o problema SAT (Problema de Satisfatibilidade Booleana) é NP -completo, Levin [1973].

O problema SAT foi o primeiro problema reconhecido como NP -completo e consiste em verificar se uma determinada fórmula da lógica proposicional clássica é ou não satisfazível.

1.1 Motivação

Existem diversas aplicações em Ciência da Computação que podem ser realizadas com SAT solvers e com outros resolvedores de problemas NP -completos que podem ser reduzidos ao SAT.

¹ Cook [1971]

² Levin [1973]

O Problema SAT é utilizado em diversas linhas de pesquisa, como matemática, redes de computadores, robótica, engenharia elétrica e por isso é grande o interesse no desenvolvimento de métodos capazes de resolver de maneira eficiente instâncias complexas do SAT. Além disso, diversas linhas de estudo, como por exemplo teoria dos grafos, também lidam com outros problemas NP-completos, que podem ser reduzidos ao SAT por um algoritmo polinomial. Como exemplos concretos de uso do SAT podemos citar verificação de hardware, inteligência artificial, visão computacional, diagnóstico, o problema do caixeiro viajante, N-rainhas, jogos entre outros. Assim, é evidente que avanços no estudo do SAT podem gerar avanços nas pesquisas de outros problemas NP-completos, e consideramos essa a característica mais impressionante desta classe de problemas, [Lima \[2007\]](#).

Pelo fato do SAT ser tão importante em diversas áreas, tivemos como uma grande motivação conhecer o comportamento dos resolvedores SAT para saber o que esperar de suas execuções em geral.

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é estudo das distribuições de probabilidade das saídas dos resolvedores SAT, em especial do zChaff.

1.3 Estrutura da dissertação

O restante da dissertação está dividida em 4 capítulos. O Capítulo [2](#) apresenta uma ligeira abordagem sobre o Problema SAT, juntamente com aspectos importantes da NP-completude como Redutibilidade, e Satisfabilidade de 3-CNF-SAT. Neste Capítulo é apresentado também o detalhamento do método DPLL e uma breve explicação sobre seu algoritmo. O Capítulo [3](#) apresenta um arcabouço estatístico sobre as distribuições de probabilidades e as técnicas utilizadas para verificar-las. O Capítulo [4](#) descreve os experimentos que foram realizados e apresenta uma análise sobre os resultados encontrados. No Capítulo [5](#) descrevemos a conclusão obtida na realização deste projeto de pesquisa bem como algumas idéias para trabalhos futuros. E finalmente no Apêndice A apresentamos todos gráficos e testes de aderência realizados para cada tipo de problema.

Capítulo 2

O Problema SAT

2.1 Definição

O Problema de Satisfazibilidade Booleana (SAT) foi o primeiro NP-completo da literatura, da Silva *et al.* [2006], e consiste em verificar se uma dada fórmula booleana é ou não satisfazível.

Uma instância de SAT é uma fórmula booleana F composta de:

1. n variáveis booleanas: x_1, x_2, \dots, x_n
2. m conectivos booleanos : qualquer função booleana como uma ou duas entradas e uma saída, como \wedge (AND), \vee (OR), \neg (NOT), \rightarrow (*implicação*), \leftrightarrow (*se e somente se*); e
3. parênteses, Cormen *et al.* [1990] .

Ou seja, a instância de SAT é uma fórmula booleana que pode ser escrita como:

$$F := F \mid \neg F \mid (F_1 \vee F_2) \mid (F_1 \wedge F_2) \mid (F_1 \rightarrow F_2) \mid (F_1 \leftrightarrow F_2)$$

Podendo ser escrita de acordo com a *Forma Normal Conjutiva* ou *Formato CNF*¹, sendo constituída por uma conjunção de cláusulas:

$$F = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$$

Cada cláusula é a disjunção de literais:

$$C_k = L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k$$

Onde k é o tamanho da cláusula e L são os literais que constituem a cláusula, da Silva *et al.* [2006].

Podemos chamar de *literal* uma fórmula atômica x ou a negação de uma fórmula atômica $\neg x$, onde definimos *fórmula atômica* ou *átomo* uma fórmula que não pode ser dividida em subfórmulas, ou seja, uma fórmula sem conectivos que representa uma Proposição.

Para que uma fórmula booleana seja *satisfazível* é necessário que exista uma *valoração* que satisfaça a fórmula.

Chamamos de *valoração* uma função $V : P \rightarrow \{True, False\}$. Dizemos que uma valoração é parcial se alguns de seus átomos não tem valor definido.

Chamamos uma fórmula F de tautologia se é sempre verdadeira, ou seja, $V(F) = True$ para toda valoração V , Lima [2007].

Tendo como exemplo a fórmula $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3)$, verificamos a existência de valores para seus átomos (Por exemplo, $x_1 = 0, x_2 = 1$ e $x_3 = 0$, onde $0 = False$ e $1 = True$) que a torna verdadeira,

¹A Forma Normal Conjuntiva ou formato CNF é a forma padrão recomendada para entrada e saída de problemas de satisfazibilidade e está detalhada na seção 2.2.1 deste documento.

portanto é uma fórmula satisfazível. As fórmulas para quais não existem nenhuma valoração que as satisfaça, são denominadas *insatisfazíveis*.

Os algoritmos para determinar se uma fórmula booleana é satisfazível (Algoritmo DPLL e seus variantes como o algoritmo Chaff, e algoritmos estocásticos de busca local, tais como WalkSAT) não são executados em tempo polinomial. Existem 2^n atribuições possíveis em uma fórmula com n variáveis. Se o comprimento uma fórmula booleana F denotado por $|F|$ for polinomial, então a verificação de cada atribuição exige tempo $O(2^n)$, que é superpolinomial no comprimento $|F|$.

Segundo *Lewis e Papadimitriou* não há algoritmo de tempo polinomial conhecido até o presente para esse problema fundamental e muito bem estudado e acredita-se que tal algoritmo não exista.

2.2 Complexidade Computacional

Em 1936, Alan Turing propôs um modelo muito poderoso chamado *máquina de Turing*. Uma máquina de Turing é um modelo teórico de um computador de propósito geral e pode fazer tudo que um computador real pode fazer. Entretanto, mesmo uma máquina de Turing não pode resolver certos problemas. Em um sentido muito real, esses problemas estão além dos limites teóricos da computação, *Sipser [2007]*.

O modelo da máquina de Turing usa uma fita infinita como sua memória ilimitada. Ela tem uma cabeça de fita que pode ler e escrever símbolos e se mover sobre a fita. Inicialmente, a fita contém apenas a cadeia de entrada e está em branco todo o restante. Se a máquina precisa armazenar informações ela pode escrevê-la sobre a fita. Para ler a informação escrita, a máquina pode mover sua cabeça de volta para a posição onde a informação foi escrita. A máquina continua a computar até que ela decida produzir uma saída. As saídas *aceite* e *rejeite* são obtidas entrando em estados designados de aceitação e de rejeição. Se não entrar num estado de aceitação ou de rejeição, ela continuará para sempre nunca parando, *Sipser [2007]*.

Quando iniciamos uma máquina de Turing sobre uma entrada, três resultados são possíveis. A máquina pode *aceitar*, *rejeitar* ou *entrar em loop*. Por *entrar em loop* queremos dizer que a máquina simplesmente não pára. Entrar em loop pode acarretar qualquer comportamento simples ou complexo que nunca leva a um estado de parada. Uma máquina de Turing pode falhar em aceitar uma entrada, passando para o estado de rejeição ou entrando em loop. Às vezes, distinguir uma máquina que está em loop de uma que está meramente levando um tempo longo é difícil. Por essa razão, preferimos máquinas de Turing que param sobre todas as entradas; tais máquinas nunca entram em loop. Essas máquinas são chamadas *decisores*, porque elas sempre tomam uma decisão de aceitar ou rejeitar. Um decisão que reconhece uma linguagem também é dito *decidir* essa linguagem, *Sipser [2007]*.

Nesse ponto, chegamos em uma importante definição em teoria da complexidade:

P é a classe de linguagens que são decidíveis em tempo polinomial sobre uma máquina de Turing determinística de uma única fita. *Sipser [2007]*

Isto significa que podemos resolver qualquer problema que esteja em P sobre entradas de tamanho n em um tempo $O(n^k)$, onde k é o grau do polinômio. Podemos notar que um polinômio $10^{1000} n^2$ não é viável na prática embora tenha um tempo polinomial, porém temos como argumento de que tais limites extremos de tempo, embora teoricamente possíveis, raramente surgem na prática; algoritmos polinomiais, que surgem em práticas computacionais, geralmente têm pequenos expoentes e coeficientes constantes viáveis, enquanto algoritmos não polinomiais são geralmente exponenciais e, portanto, de utilização bastante limitada na prática. *Harry R. Lewis [1995]*

Não obstante, chamar de *tempo polinomial* o limiar da solubilidade na prática tem provado ser útil, *Sipser [2007]*.

A classe P tem um papel central e é importante porque:

1. P é a classe de linguagens que são decidíveis em tempo polinomial sobre uma máquina de Turing determinística de uma única fita; e
2. P corresponde aproximadamente à classe de problemas que são realisticamente solúveis em um computador, Sipser [2007].

Existem também variantes da máquina de Turing como por exemplo a máquina de Turing não-determinística. Em uma máquina de Turing não-determinística sua computação é uma árvore cujos ramos respondem a diferentes possibilidades para a máquina. Se algum ramo da computação leva ao estado de aceitação, a máquina aceita sua entrada, Sipser [2007].

É importante lembrar que para uma máquina não-determinística decidir uma linguagem L todas as computações devem rejeitar cada entrada não em L; e para cada entrada em L, deve haver no mínimo uma computação que a aceite, Harry R. Lewis [1995] .

Conhecemos como *NP* a classe que engloba os problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial por máquinas de Turing não-determinísticas.

Diante da dificuldade de decidir se um dado problema está em P, é interessante estudar a complexidade relativa dos problemas da classe NP. Dados dois problemas A e B em NP, gostaríamos de poder dizer algo como "*A é tão difícil quanto B*", Feofiloff [2009]. Para isso precisamos saber que:

Um problema de decisão B é *redutível* a um problema de decisão A se existe um algoritmo que transforma qualquer instância β de B em uma instância α de A tal que β é positiva se e somente se α é positiva, Feofiloff [2009] .

Pode-se dizer, muito informalmente, que B é redutível a A se B for um "subproblema", ou "caso particular", de A, Feofiloff [2009].

Uma explicação mais detalhada sobre redutibilidade pode ser encontrada no trabalho Cormen *et al.* [1990] que apresenta a seguinte explicação :

"Vamos considerar um problema de decisão A que gostaríamos de resolver em tempo polinomial. Chamamos a entrada para um determinado problema de instância desse problema. Agora suponha que exista um problema de decisão diferente, digamos B, que já sabemos como resolver em tempo polinomial. Finalmente, suponha que temos um procedimento que transforma qualquer instância α de A em alguma instância β de B com as seguintes características:

1. A transformação demora tempo polinomial.
2. As respostas são as mesmas. Isto é, a resposta para α é "sim" somente se a resposta para β também for "sim".

Chamamos tal procedimento de *algoritmo de redução de tempo polinomial* e, como mostra a figura 2.1, esse algoritmo nos oferece um meio para resolver o problema A em tempo polinomial.

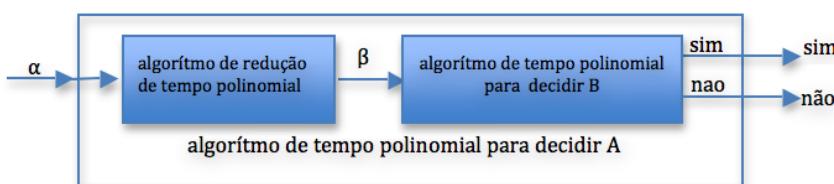


Figura 2.1: Uso de um algoritmo de redução de tempo polinomial para resolver um problema de decisão A em tempo polinomial, dado um algoritmo de decisão de tempo polinomial para outro problema B.

Cada uma dessas etapas demora tempo polinomial, logo, as três juntas também demoram um tempo polinomial, e assim temos um modo de decidir sobre α em tempo polinomial."

Como a técnica de redução se baseia em ter um problema já reconhecido como NP-completo para provar que um problema diferente é NP-completo, foi necessário encontrar um primeiro problema NP-completo ,Cormen et al. [1990], que foi o caso do Problema de Satisfazibilidade Booleana (SAT).

O trabalho Harry R. Lewis [1995] afirma que existem diversos problemas de grande interesse que parecem não pertencer a P como, por exemplo, o problema do caixeiro viajante, do circuito de Hamilton, do conjunto independente, entre outros, que apesar de intensos e prolongados esforços de matemáticos e cientistas da computação para descobrir um algoritmo de tempo polinomial para cada um desses problemas, nenhum algoritmo desse tipo foi encontrado. Também há uma sutil dificuldade de provar que tais algoritmos de tempo polinomial não são possíveis. A razão é que todos esses problemas são problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial por máquinas de Turing não-determinísticas, e separar o determinismo do não determinismo no nível do tempo polinomial é um dos mais importantes e profundos problemas não resolvidos na Ciência da Computação. Nota-se então que saber se $P=NP$ é uma questão de central importância para a teoria da complexidade que atualmente não está resolvida, Feofiloff [2009] .

A maioria dos pesquisadores acredita que P é apenas uma pequena parte de NP. Talvez a razão mais forte pela qual os cientistas da computação teórica acreditam que $P \neq NP$ seja a existência da classe de problemas *NP-completos*. Essa classe tem a surpreendente propriedade de que, se qualquer problema NP-completo puder ser resolvido em tempo polinomial, então todo problema em NP tem uma solução em tempo polinomial, isto é $P=NP$, Cormen et al. [1990] Podemos dizer que um problema é NP-completo se ele está em NP e é tão “difícil” quanto qualquer problema em NP, Cormen et al. [1990].

Segundo Sipser [2007], podemos afirmar que uma linguagem A é NP-completa se satisfaz duas condições:

1. A está em NP, e
2. Toda linguagem B em NP é redutível em tempo polinomial a A.

Se uma linguagem L satisfaz à propriedade 2, mas não necessariamente à propriedade 1, dizemos que L é *NP-difícil*, Cormen et al. [1990].

Definimos NPC como a classe de linguagens NP-completas.

Existem problemas para os quais não existem *algoritmos eficientes* ou seja algoritmos corretos de tempo $O(p^n)$, onde p^n é um polinômio de ordem n, Camponogara [2002]. Ou seja, há (grandes) instâncias desses problemas que não poderão ser resolvidas por programas reais, executando em computadores reais. Problemas deste tipo são ditos *intratáveis*, Dahab [2002].

A maioria dos teóricos da ciência da computação acredita que os problemas NP-completos são intratáveis pois, dada a ampla faixa de problemas NP-completos que foram estudados até hoje, sem qualquer progresso em direção a uma solução de tempo polinomial, seria verdadeiramente espantoso se todos eles pudesse ser resolvidos em tempo polinomial. Ainda assim, dado o esforço dedicado há tanto tempo para provar que os problemas NP-completos são intratáveis – sem um resultado conclusivo – não podemos eliminar a possibilidade de que os problemas NP-completos possam de fato ser resolvidos em tempo polinomial, Cormen et al. [1990] .

A Figura 2.2 representa o modo como a maioria dos cientistas da computação teórica vê o relacionamento entre P, NP e NPC. Tanto P quanto NPC estão inteiramente contidas dentro de NP, e $P \cap NPC = \emptyset$, Cormen et al. [1990].

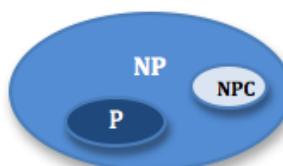


Figura 2.2: Modo como a maioria dos cientistas vê o relacionamento entre as classes P, NP e NPC.

A maioria dos cientistas da computação teórica acredita que $P \neq NP$, o que conduz aos relacionamentos entre P, NP e NPC mostrados na figura acima. Porém, por tudo que sabemos, alguém poderia apresentar um algoritmo de tempo polinomial para qualquer problema NP-completo, [Cormen et al. \[1990\]](#).

2.2.1 O formato CNF

Conforme descrito em [DIMACS \[1993\]](#) a forma padrão recomendada para entrada e saída de problemas de satisfazibilidade é chamada de *Forma Normal Conjuntiva* ou *Formato CNF*.

Um problema de satisfazibilidade na Forma Normal Conjuntiva consiste de conjunções de diversas cláusulas, onde cada cláusula é a disjunção de vários literais ou suas negações. Por exemplo, a fórmula $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$ está no formato CNF.

Neste trabalho, é utilizado como entrada para os resolvidores SAT, arquivos contendo fórmulas na Forma Normal Conjuntiva. Para gerar esses arquivos foi implementado um gerador aleatório de problemas no formato padrão CNF, com N átomos e M cláusulas, onde cada cláusula possuí K-literals. K, N e M são parâmetros a serem passados ao gerador, o qual denominamos de GeradorCNF.

Este gerador foi implementado utilizando a linguagem JAVA 6 e o código fonte está disponível em <https://sourceforge.net/projects/geradorcnf>.

Os arquivos com as fórmulas lógicas na Forma Normal Conjuntiva gerados pelo GeradorCNF possuem o seguinte formato :

```
c ArquivoCNF21.cnf - Gerado automaticamente pelo GeradorCNF
c Universidade de Sao Paulo - IME
c Disciplina: Laboratorio de Inteligencia Artificial
c Professor: Marcelo Finger
c Desenvolvido por: Poliana Magalhaes Reis / 2009
p cnf 2 3
-1 -2 2 0
-2 -1 -2 0
-1 1 1 0
```

Onde :

- O caractere *c* no início da linha, significa comentário, ou seja o programa ignora tudo que vier depois do *c*.
- O caractere *p* indica o tipo do arquivo, no caso *cnf*, o número de literais e o número de cláusulas, no caso anterior, temos 2 literais e 5 cláusulas.
- Se a linha iniciar com um número (positivo ou negativo) é uma linha referente à uma cláusula, por exemplo a linha $-1 -2 2 0$, é interpretada por $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_2$.
- O caractere *0* indica que a cláusula chegou ao fim.

A fórmula resultante do exemplo apresentado acima seria: $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_2) \wedge (\vee x_2 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_1 \vee x_1)$

Muitos problemas podem ser provados como NP-completos por redução da satisfazibilidade de fórmulas. Entretanto o algoritmo de redução deve tratar qualquer fórmula de entrada, levando assim a um grande número de casos a ser considerado. Assim, é interessante efetuar a redução a partir de uma linguagem restrita de fórmulas booleanas, de forma que menos casos precisem ser considerados. Uma linguagem conveniente é a satisfazibilidade 3-CNF, ou 3-CNF-SAT.

Uma fórmula está no formato 3-CNF-SAT se ela está no formato CNF e cada cláusula possui exatamente três literais.

Utilizando a definição de NP-completude, podemos provar que 3-CNF-SAT é NP-completo. Para isso basta apenas reduzir o problema SAT para 3-SAT. Esta prova pode ser encontrada com

mais detalhes na página 297 do livro *Elementos de Teoria da Computação* escrito por *Lewis e Papadimitriou*, Harry R. Lewis [1995], ou na página 788 do livro *Algorítmos* escrito por *Cormen, Leiserson, Rivest e Stein*.

2.3 Resolvedores SAT

As implementações de algoritmos para resolver problemas SAT são conhecidas como resolvedores SAT (SAT Solvers). Os resolvedores SAT recebem como entrada uma fórmula lógica e entregam em sua saída a resposta se a fórmula é ou não satisfazível.

Os algoritmos para resolução de problemas SAT podem ser completos ou incompletos. SAT solvers incompletos são, em geral, estocásticos. Para uma instância SAT, um algoritmo completo é aquele que acha uma solução ou prova que tal solução não existe. Métodos estocásticos, como GSAT, WalkSAT e DLM, por outro lado, não provam que uma solução não existe, Fux [2004].

O método DPLL apresentado abaixo é chamado de SAT-completo, ou seja, ele sempre é capaz de decidir corretamente se um conjunto de cláusulas é ou não é satisfazível, da Silva *et al.* [2006] .

2.3.1 Método DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland)

A maneira mais simples e intuitiva de resolver o SAT é enumerar todas as valorações possíveis e verificar quais satisfazem a fórmula dada. Este algoritmo irá verificar 2^n valorações, onde n é o número de átomos presentes na fórmula, o que o torna inviável para valores grandes de n.

Ao contrário de procurar enumerar cada combinação possível de valores para as variáveis, Martin Davis e Hillary Putnam (1960 ~1962) propôs o algoritmo DPLL que utiliza técnicas de backtrack para reduzir o espaço de busca, Fux [2004]. O algoritmo DPLL vem sendo implementado com as mais diferentes heurísticas desde então, e já ganhou diversas competições de implementações na resolução de problemas como o SAT.

A idéia básica do algoritmo é a de construir uma valoração para uma fórmula fornecida como um conjunto de cláusulas: Inicialmente, todos os átomos recebem a valoração “ * ”, representando um valor indefinido. A cada iteração do algoritmo, um literal p é escolhido, e faz-se $v(p) = 1$; note que, se esse literal for negativo da forma $\neg q$, isso significa fazer $v(q) = 0$. Com essa nova valoração, procede-se à simplificação da fórmula. Se essa valoração satisfazer todas as cláusulas, o que significa que a simplificação levou a um conjunto vazio de cláusulas tem-se uma valoração que satisfaz a fórmula inicial. Se alguma cláusula for falsificada, nem todas as cláusulas foram satisfeitas, procede-se à próxima escolha de literal. O processo para quando uma valoração for encontrada, em cujo caso a fórmula é satisfazível, ou quando não há mais átomos para serem testados, em cujo caso a fórmula é insatisfazível, da Silva *et al.* [2006] .

Quando a seleção de um literal gera uma falha (alguma valoração falsifica alguma cláusula), ocorre um retrocesso ou backtracking e podemos adicionar essa informação aprendida ao problema. No contexto do algoritmo DPLL, aprender significa adicionar novas cláusulas ao problema, sem aumentar o número de átomos. Em termos de eficiência, é sempre melhor que esse retrocesso ocorra quando um menor número de átomos já foi selecionado, pois isso elimina uma parte maior do espaço de busca de valorações de variáveis, da Silva *et al.* [2006]. Esse procedimento conforme descrito em da Silva *et al.* [2006] está ilustrado no Algoritmo 1 a seguir:

Algorithm 1 Algoritmo DPPL(F), da Silva *et al.* [2006]

Entrada:Uma fórmula F no formato CNF
Saída: verdadeiro, se F é satisfazível ou falso, caso contrário.
 Fazer $v(p) = *$ para todo átomo p
 $F' = \text{Simplifica}(F)$ // (Algorithm 2 descrito a seguir.)
if Se $F' = \emptyset$ **then**
 retorne verdadeiro
else if F' contém uma cláusula vazia (falsa) **then**
 retorne false
end if
 Escolha um litera L com $v(L) = *$
if $DPPL(F' \cup L) = \text{verdadeiro}$ **then**
 retorne verdadeiro
else if $DPPL(F' \cup \neg L) = \text{verdadeiro}$ **then**
 retorne verdadeiro
else
 retorne falso
end if

Algorithm 2 Algoritmo Simplifica(F), da Silva *et al.* [2006]

Entrada:Uma fórmula F no formato CNF
Saída: Uma fórmula na forma clausal equivalente a F porém mais simples.
while F possui alguma cláusula unitária L **do**
 Apaga de F todas cláusulas que contém L
 Apaga $\neg L$ das cláusulas restantes
end while
 retorna F

A seguir apresentamos um exemplo de execução do DPPL retirado de Fux [2004] :

Seja a seguinte fórmula normal conjuntiva :

$$(\neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_1 \vee x_2)$$

Utilizando a regra de cláusulas unitárias, a heurística assume que $(\neg x_1)$ vale 1, chegando a fórmula:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_1 \vee x_2)$$

Ainda pela mesma regra, observamos que a cláusula $(x_3 \vee \neg x_1 \vee x_2)$ contém $(\neg x_1)$ e por isso, eliminamos a cláusula ficando com:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_4)$$

Sabendo que $\neg(\neg x_1) = x_1$, eliminamos x_1 de $(x_1 \vee x_2 \vee x_4)$ chegando a fórmula:

$$(x_2 \vee x_4)$$

Assumindo $x_2 = 1$ temos então

$$(x_2 \vee x_4) \wedge (x_2)$$

Recursivamente aplicando a regra da cláusula unitária, resolvemos o problema com o assinalamento $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. A fórmula é dita satisfeita, [Fux \[2004\]](#).

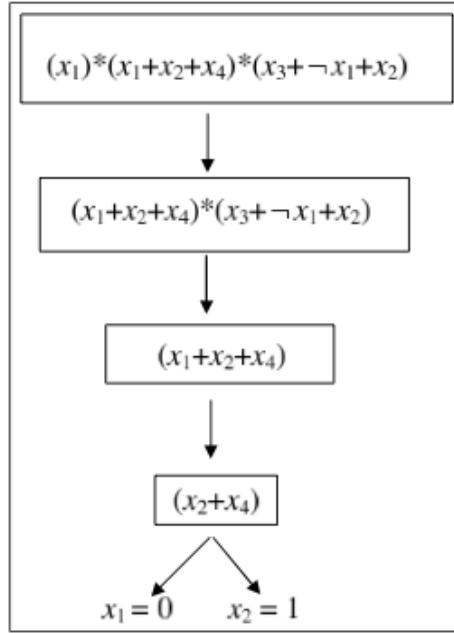


Figura 2.3: Exemplo de execução do DPLL, [Fux \[2004\]](#).

Na fase de simplificação da fórmula booleana do algoritmo, pode-se utilizar várias técnicas. As mais conhecidas e utilizadas são:

- **BCP (Boolean Constraint Propagation)**

É a simplificação feita pela propagação de literais unitários, o que pode ser visto como uma resolução unitária com o literal recém-instanciado,[da Silva et al. \[2006\]](#), e seu algoritmo está descrito no Algoritmo 3 :

Algorithm 3 Simplificação BCP (F), [da Silva et al. \[2006\]](#).

if a fórmula F possuir cláusulas com apenas um literal **then**

Seleciona as cláusulas unitárias (do tipo p e do tipo -q)

Apague as cláusulas que contenham p e -q

Propague as cláusulas unitárias, apagando literais do tipo -p e q

Novas cláusulas unitárias aparecem

end if

Repetir 1 a 3 até que nenhuma nova propagação ocorra

Retorne F

- **Eliminação de Literais Puros**

Um literal é dito puro se ocorre em todas as cláusulas sempre na mesma polaridade. Nesse caso basta fazer o literal verdadeiro e apagar todas as cláusulas que o contém,[da Silva et al. \[2006\]](#).

- **Resolução de literais simples**

Um literal é simples se ocorre na forma positiva em uma única cláusula ou na forma negativa em uma única cláusula. Nesse caso, o literal é eliminado, resolvendo-se todas as cláusulas que o contêm, diminuindo a complexidade do problema, [da Silva et al. \[2006\]](#)

- **Eliminação de cláusulas duplicadas**

Cláusulas duplicadas trazem informações redundantes, portanto eliminando uma delas não fará qualquer diferença na fórmula.

- **Eliminação de literais opositos**

Podemos eliminar as cláusulas que possuem dois literais opositos na mesma cláusula, ou seja, p e $\neg p$, pois não trazem nenhuma informação

2.3.2 ZChaff

O método Chaff foi desenvolvido por pesquisadores em Princeton University, USA e trouxe melhorias de desempenho ao método DPLL, [Cormen et al. \[1990\]](#).

O zChaff é uma implementação livre, disponível na internet, do método Chaff que ganhou diversos concursos de resolvedores de SAT, [da Silva et al. \[2006\]](#).

Na prática, para a maioria dos problemas SAT, o processo BCP é responsável por mais que 90% no tempo de execução de um resolvedor. Logo um eficiente BCP é de fundamental importância, [Fux \[2004\]](#).

O resovedor zChaff utiliza uma estrutura de dados chamada *Watched Literals* ou em português, *Literais Vigiados*. Com Literais Vigiados não há ordem relacionando as duas referências. A falta de ordem tem a vantagem de que os literais não precisam ser atualizados quando são executados os backtrackings, [Fux \[2004\]](#).

Conforme descrito em [da Silva et al. \[2006\]](#), a técnica dos literais vigiados tem uma estrutura de dados tal que:

- A cada instante, toda cláusula c tem exatamente dois literais vigiados p, q .
- p, q são escolhidos dinamicamente e mudam com o tempo
- p, q são propriamente vigiados sob a valoração parcial V se :
 - Ambos são indefinidos
 - Ao menos um deles é 1

O comportamento dos literais vigiados é dinâmico. Se o par de literais vigiados de uma cláusula torna-se impróprio, ocorre o seguinte: Se há um ou mais literais vigiados falsificados, troca-se o par de literais vigiados, buscando entre outros literais da cláusula um outro par que restabeleça a vigia própria. Se nenhum par de literais vigiados próprios pode ser encontrados, então não há literais satisfeitos na fórmula, e duas situações podem ocorrer: Há um único literal indefinido na cláusula e neste caso fazemos esse literal verdadeiro ou todos os literais foram falsificados e neste caso procedemos ao retrocesso, [da Silva et al. \[2006\]](#).

Em zChaff adota-se o processo de aprendizagem de conflitos (Conflict Learning). A combinação dessa aprendizagem com o backtrack evita que o algoritmo no espaço futuro de busca encontre os mesmos conflitos já mapeados, [Fux \[2004\]](#).

Após abortar a execução devido ao excesso de algum parâmetro, reinicializações (restarts) estão presentes nesse algoritmo. Esse processo evita que o algoritmo SAT se perca em partes não-relevantes do espaço de busca, [Fux \[2004\]](#). Esse reinício aleatório pode trazer problemas de eficiência se a fórmula for insatisfazível, mas tal problema não ocorre se as fórmulas aprendidas forem mantidas ao se reiniciar. Ou seja, medidas empíricas garantem que os reinícios aleatórios tragam ganho de eficiência, [Fux \[2004\]](#).

A heurística de seleção de literais do Chaff é chamada VSIDS (Variable State Independent Decaying Sum). Esse método leva em consideração que novas cláusulas são aprendidas ao longo do processo e usa essa informação para privilegiar a escolha de literais em cláusulas recém-aprendidas.

2.4 Transição de fase

Segundo Gent e Walsh [1994] existe uma grande variação no tempo necessário para provar a propriedade de satisfatibilidade numa fórmula dependendo da relação $\frac{Cláusulas(M)}{Átomos(N)}$. Testes mostram que fórmulas com uma relação $\frac{M}{N}$ numa certa faixa são os mais difíceis de se resolver (Figura 2.4), ,de Moraes [2009] .

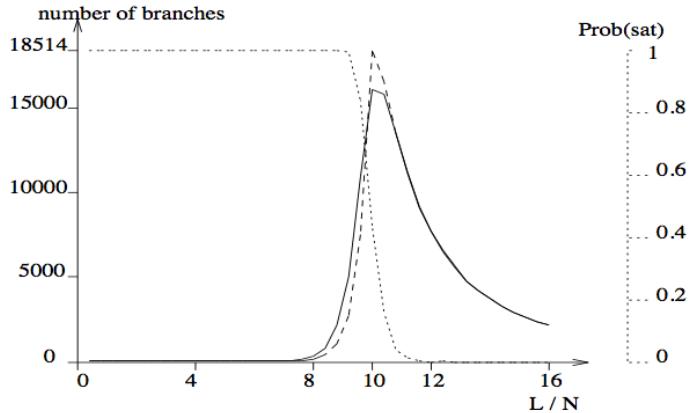


Figura 2.4: Resultado de execução de problemas 4-SAT Aleatórios, testados usando ASAT. Média (sólido) e mediana (tracejada) , Gent e Walsh [1994].

De acordo com essas informações, utilizaremos a relação $\frac{M}{N}$ para estudo do comportamento do zChaff.

Em da Silva *et al.* [2006] é visto que se tivermos um pequeno número de cláusulas (M) e número fixo de átomos (N) em problemas 3-SAT, é provável que a fórmula seja satisfazível, pois o número de restrições sobre os átomos é pequeno. Dessa forma, espera-se que a maioria dos problemas gerados para um pequeno valor de $\frac{M}{N}$ seja satisfazível. Por outro lado, se for gerado um número muito grande de cláusulas (M) a tendência é que a fórmula seja insatisfazível, visto que é grande a possibilidade de conflito entre as diversas restrições. O valor de $\frac{M}{N}$ em que 50% das fórmulas sejam satisfazíveis e 50% insatisfazíveis é chamado de *ponto de mudança de fase* e pode ser notado empiricamente que o tempo médio de solução de problemas é mais alto nas vizinhanças deste ponto. No caso de problemas 3-SAT , a experiência mostra que o ponto de mudança de fase ocorre pra $\frac{M}{N} = 4.3$.

Abaixo apresentamos um gráfico com o percentual de SAT para cada ponto $\frac{M}{N}$. Esse gráfico foi obtido através da execução do zChaff para problemas 3-SAT :

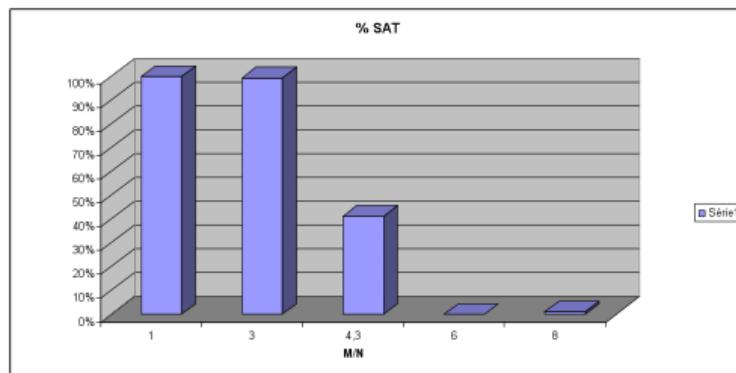


Figura 2.5: Percentual de SAT para cada ponto $\frac{M}{N}$.

Capítulo 3

Arcabouço Estatístico

Ao realizarmos alguns experimentos com o zChaff, obtivemos com resultado em sua saída, comportamentos similares a algumas distribuições de probabilidade, e portanto, para definir os modelos das distribuições foi necessário a realização de diversos testes. Neste capítulo iremos apresentar uma breve introdução sobre as distribuições de probabilidade e o procedimento necessário para verificar a qual modelo um grupo de dados se adere.

3.1 Distribuições de Probabilidade

Chamamos de *distribuição de probabilidade* modelos que procuram representar o comportamento de determinado evento em função da freqüência de sua ocorrência. No caso das variáveis contínuas, esse evento será um intervalo de valores. As distribuições de freqüências são distribuições de probabilidade, onde para um evento teremos uma probabilidade de ocorrência associada. Em outras palavras, podemos inferir com que probabilidade determinado evento pode ocorrer novamente, [Vanessa Bielefeldt Leotti e Riboldi \[2005\]](#). Conforme [Dantas \[2004\]](#) a função de distribuição nos dá uma maneira de descrever como as probabilidades são associadas aos valores ou aos intervalos de valores de uma variável aleatória.

3.2 Testes de Hipótese

Hipótese, em estatística, é uma suposição formulada a respeito dos parâmetros de uma distribuição de probabilidade de uma ou mais populações, [Kato \[2009\]](#). A maioria dos métodos estatísticos assume uma distribuição subjacente na derivação de seus resultados. No entanto, quando assumimos que nossos dados seguem uma distribuição específica, tomamos um risco grave. Se nossa hipótese estiver errada, então os resultados obtidos podem ser inválidos. [Wyle Laboratories et al. \[2011\]](#) A hipótese será testada com base em resultados amostrais, sendo aceita ou rejeitada. Ela somente será rejeitada se o resultado da amostra for claramente improvável de ocorrer quando a hipótese for verdadeira.

Em um teste de hipóteses, são definidas duas hipóteses: Consideremos H_0 a hipótese nula, e H_a a hipótese alternativa a ser testada (complementar de H_0), [Kato \[2009\]](#). O objetivo do teste de hipótese é dizer, se a hipótese H_0 é ou não aceitável. O teste pode levar a aceitação ou rejeição de H_0 que corresponde, respectivamente à negação ou afirmação de H_a , [Kato \[2009\]](#).

Pelo fato de estarmos usando resultados amostrais para fazermos inferência sobre a população, estamos sujeito a erros. Digamos que existe uma probabilidade α de que mesmo sendo H_0 verdadeiro, X assuma um valor que leva à rejeição de H_0 . As probabilidades desses erros são chamadas α e β respectivamente, [Kato \[2009\]](#).

- Erro do tipo I : é o erro ao rejeitar H_0 quando, H_0 é verdadeira. $P(\text{erro tipo I}) = \alpha$, [Kato \[2009\]](#).

- Erro do tipo II : é o erro ao aceitar H_0 quando, na realidade, H_0 é falsa. $P(\text{erro tipo II}) = \beta$, Kato [2009].

3.2.1 Nível de significância, Região Crítica e P-valor

A probabilidade de comettermos um erro tipo I, ou seja, a probabilidade máxima de rejeitar H_0 , é chamada de *nível de significância* denotado pela letra grega α . O nível de significância é geralmente determinado pelo pesquisador antes da coleta dos dados. Em muitas aplicações da estatística, o nível de significância é tradicionalmente fixado em 0,05 ; Gauvreau K [1994] . Um valor de $\alpha=0,05$ implica que a hipótese nula é rejeitada a 5% do tempo em que ele é de fato verdadeiro. A escolha do α é um pouco arbitrária, embora na prática os valores de 0,1 ; 0,05 e 0,01 são comuns, NIST e SEMATECH [2011].

A região onde os valores da estatística dos testes levam à rejeição da hipótese nula é conhecida como *Região Crítica* ou *Região de Rejeição* que possui área igual ao nível de significância e mesma direção da hipótese alternativa,Kato [2009]. Chamamos de *Valores Críticos* os valores de corte que definem as regiões críticas. Os valores Críticos para um teste de hipótese depende da estatística de teste, que é específica para o tipo de teste e o nível de significância, α .

Se o parâmetro defendido pela hipótese nula cair dentro da região crítica, então a chance dele ser verdadeiro é pequena demais para ser aceita e, com isso, a hipótese nula perde credibilidade, isto é, ela é rejeitada em favor de alguma hipótese alternativa. No caso da curva normal, existem valores muito raros que se situam nas pontas das caudas dessa curva. Assim, as regiões de rejeição são definidas pelas pontas das caudas; essas pontas serão maiores ou menores dependendo do nível de significância que você escolher. Percebemos, também, que a região de rejeição pode estar localizada numa das caudas (*teste de unicaudal*) ou em ambas as caudas (*teste bilateral*) dependendo de como a hipótese alternativa tenha sido expressa. A vantagem do teste de uma cauda é que ele alarga a região de rejeição, possibilitando, assim, rejeitar com mais facilidade a H_0 . Por isso, os estatísticos chamam este teste de mais robusto, porque tem maior poder de rejeitar a hipótese nula.Na figura abaixo está destacada a região de rejeição da hipótese nula na curva normal, Pasquali [2000].

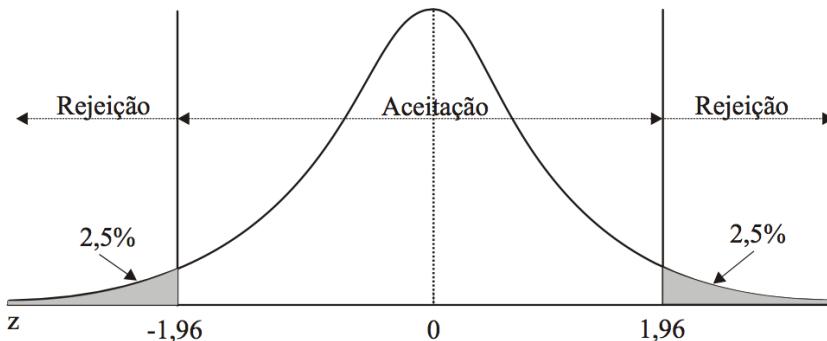


Figura 3.1: Região de rejeição da hipótese nula. Pasquali [2000]

Supondo que a hipótese nula seja verdadeira, a probabilidade de se obter estimativas mais desfavoráveis ou extremas do que está sendo fornecida pela amostra é conhecida como o *nível descritivo*, denotado por *p-valor*.

Valores pequenos de *p-valor* evidenciam que a hipótese nula é falsa pois, sendo a amostra a nossa ferramenta de inferência sobre a população, ela fornece uma estimativa que teria probabilidade muito pequena de acontecer, se H_0 fosse verdadeira, Dantas [2004].

Logo, podemos decidir ou rejeitar a hipótese nula se a estatística de teste excede o valor crítico (para $\alpha = 0,05$) ou analogamente rejeitar a hipótese nula se o p-valor for menor do que 0,05. É importante compreender a relação entre os dois conceitos, pois alguns softwares estatísticos apresentam p-valores, em vez de valores críticos, NIST e SEMATECH [2011].

É preciso muita cautela na interpretação de um p-valor, dado que esta medida é bastante

influenciada pelo tamanho da amostra. Amostras grandes tendem a produzir p-valores pequenos, ainda que o efeito observado não tenha grande importância prática, enquanto amostras pequenas tendem a produzir p-valores grandes, ainda que exista um importante efeito em um ponto de vista prático, Altman DG [1995]. Por isso, o uso dos p-valores nas pesquisas médicas tem sido bastante criticado por vários autores, Grimes DA [2002] e Gardner MJ [1986] .

3.2.2 Etapas para realização de um teste de hipótese

Apresentamos a seguir, de acordo com Magalhães e de Lima [2008] , um sumário das etapas para realização de um teste de hipótese:

1. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa
2. Definir a forma da região crítica, com base na hipótese alternativa
3. Identificar a distribuição do estimador e obter sua estimativa
4. Fixar *p*-valor e obter a região crítica
5. Concluir o teste com base na estimativa e na região crítica

3.2.3 Testes de Aderência

Assumir que determinado grupo de dados se distribui conforme um modelo nos permite realizar estimativas sem precisar da totalidade das informações. Invariavelmente, nos surge uma dúvida: Como estimar se a distribuição de um grupo de dados concorda com um particular modelo teórico, Vanessa Bielefeldt Leotti e Riboldi [2005] ?

Uma forma de tentar verificar se uma distribuição se ajusta bem ou não aos dados amostrais é através da comparação das freqüências amostrais com as freqüências teóricas esperadas pelo modelo probabilístico que se está julgando válido para descrever os dados observados, Bessegato [2011].

Existem duas abordagens principais para verificar os pressupostos de uma distribuição. Uma delas envolve procedimentos empíricos, que são fáceis de compreender e aplicar e são baseados em propriedades intuitiva e gráfica da distribuição que queremos avaliar. Há também procedimentos mais formais chamados *testes de aderência* , que servem para testar hipóteses mais gerais sobre a distribuição dos dados. Eles são numericamente complicados e normalmente requerem um software específico para executar os cálculos demorados mas seus resultados são quantificáveis e mais confiáveis do que os do procedimento empírico, Wyle Laboratories *et al.* [2011].

Em geral, as hipóteses dos testes de aderência podem ser enunciadas da seguinte maneira:

- H_0 : Os dados da amostra são provenientes da distribuição especificada (Hipótese nula)
- H_1 : Os dados da amostra não são provenientes da distribuição especificada

Esses testes são tidos como testes amplos pois não dependem de uma distribuição específica, Leichsenring [2010] .

A metodologia baseia-se na construção de uma função com os dados amostrais, comparando-a com a distribuição teórica de acordo com alguma métrica. Os métodos variam de acordo com a função amostral construída e da métrica utilizada para comparação, Bessegato [2011] .

Os testes de aderência são essencialmente baseados em qualquer um dos dois elementos de distribuição: A função de distribuição cumulativa (CDF) ou a função densidade de probabilidade (PDF). O teste do qui-quadrado é baseado no PDF e tanto o teste Kolmogorov-Smirnov(KS) quanto o Anderson-Darling (AD) usam a função cumulativa de distribuição (CDF), Wyle Laboratories *et al.* [2011].

Nós iremos apresentar os testes de KS e de AD por duas razões. Primeiro, eles estão entre os melhores testes de aderência para pequenas amostras (e eles também podem ser usados para grandes amostras). Em segundo lugar, porque vários programas estatísticos estão disponíveis tanto

para KS como para AD, pois eles são amplamente utilizados na prática, *Wyle Laboratories et al.* [2011].

OBS: Para a execução das amostras dos dados utilizados nos testes deste projeto em particular foi utilizado o teste AD com o software Minitab.

3.2.4 Teste Kolmogorov-Smirnov

O teste de Kolmogorov-Smirnov recebeu esse nome em homenagem aos matemáticos russos Andrey Kolmogorov e Vladimir Ivanovich Smirnov.

Em estatística, o teste Kolmogorov-Smirnov é usado para determinar se duas distribuições de probabilidade subjacentes diferem uma da outra ou se uma das distribuições de probabilidade subjacentes difere da distribuição em hipótese, em qualquer dos casos com base em amostras finitas.

De acordo com *Action* [2011] o teste de Kolmogorov-Smirnov pode ser utilizado para avaliar as hipóteses:

- H_0 : Os dados seguem uma distribuição.
- H_1 : Os dados não seguem uma distribuição.

Este teste observa a máxima diferença absoluta entre a função de distribuição acumulada assumida para os dados e a função de distribuição empírica dos dados. Como critério, comparamos esta diferença com um valor crítico, para um dado nível de significância.

O modelo de funcionamento do teste de Kolmogorov-Smirnov está apresentado abaixo conforme descrito em *Action* [2011] :

Considere uma amostra aleatória simples X_1, X_2, \dots, X_n de uma população com função de distribuição acumulada contínua F_X desconhecida. A estatística utilizada para o teste é:

$$D_n = \sup_x |F(x) - F_n(x)|$$

Esta função corresponde a distância máxima vertical entre os gráficos de $F(x)$ e $F_n(x)$ sobre a amplitude dos possíveis valores de x . Em D_n temos que

- $F(x)$ representa a função de distribuição acumulada assumida para os dados;
- $F_n(x)$ representa a função de distribuição acumulada empírica dos dados.

Neste caso, queremos testar a hipótese $H_0 : F_X = F$ contra a hipótese alternativa $H_1 : F_X \neq F$. Para isto, tomamos $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ as observações aleatórias ordenadas de forma crescente da população com função de distribuição contínua F_X . No caso de análise da normalidade dos dados, assumimos F a função de distribuição da normal.

A função de distribuição acumulada assumida para os dados é definida por $F(x(i)) = P(X \leq x(i))$ e a função de distribuição acumulada empírica é definida por:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{(-\infty, x]\}}(x_{(i)})$$

onde I_A é a função indicadora. A função indicadora é definida da seguinte forma:

$$I_A = \begin{cases} 1; & \text{se } x \in A \\ 0; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observe que a função da distribuição empírica $F_n(x)$ corresponde à proporção de valores menores ou iguais a x . Tal função também pode ser escrita da seguinte forma

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < x_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & \text{se } x_{(k)} \leq x < x_{(k+1)} \\ 1, & \text{se } x > x_{(n)} \end{cases} \quad (12)$$

Sob H_0 , a distribuição assintótica da estatística de Kolmogorov-Smirnov é dada por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\sqrt{n}D_n \leq x] = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \exp^{-2j^2x^2}$$

Como a função de distribuição empírica F_n é descontínua e a função de distribuição hipotética é contínua, vamos considerar duas outras estatísticas:

$$D^+ = \sup_{x_{(i)}} |F(x_{(i)}) - F_n(x_{(i)})|$$

$$D^- = \sup_{x_{(i)}} |F(x_{(i)}) - F_n(x_{(i-1)})|$$

para calcularmos a estatística de Kolmogorov-Smirnov. Essas estatísticas medem as distâncias (vertical) entre os gráficos das duas funções, teórica e empírica, nos pontos $x(i-1)$ e $x(i)$. Com isso, podemos utilizar como estatística de teste :

$$D_n = \max(D^+, D^-)$$

Se D_n é maior que o valor crítico, rejeitamos a hipótese de normalidade dos dados com $(1-\alpha)100\%$ de confiança. Caso contrário, não rejeitamos a hipótese de normalidade.

3.2.5 Teste de Anderson-Darling

Em estatística, o teste de Anderson-Darling criado em 1952, [Anderson e Darling \[1952\]](#), recebeu esse nome em homenagem a Theodore Wilbur Anderson e Donald A. Darling

Em [NIST e SEMATECH \[2011\]](#) podemos encontrar a seguinte explicação:

"O Teste de aderência de Anderson-Darling é uma modificação do teste Kolmogorov-Smirnov (KS) e também é usado para testar se uma amostra de dados provém de uma população com uma distribuição específica porém dá mais importância às caudas do que o teste KS."

Vemos que no teste KS os valores críticos não dependem da distribuição específica que está sendo testada e o teste de Anderson-Darling faz uso da distribuição específica para calcular os valores críticos. Isto tem como vantagem permitir um teste mais sensível e como desvantagens o fato de que os valores críticos devem ser calculados para cada distribuição.

Atualmente, as tabelas de valores críticos estão disponíveis para as distribuições normal, lognormal, exponencial, Weibull, tipo de valor extremo I e logística. Esses valores podem ser encontrados em [Stephens \[1974\]](#), [Stephens \[1976\]](#), [Stephens \[1977\]](#), [Stephens \[1979\]](#) e não iremos apresentar aqui uma vez que este teste é aplicado geralmente em programas de software estatístico que apresentam os valores críticos relevantes.

A definição do teste de Anderson-Darling é dada por :

- H_0 : Os dados seguem uma distribuição especificada.
- H_1 : Os dados não seguem a distribuição especificada.

Estatística de teste: A estatística de teste de Anderson-Darling é definida como:

$$A^2 = -N - S$$

onde

$$\mathcal{S} = \sum_i \frac{(2i - 1)}{N} [\ln F(Y_i) + \ln(1 - F(Y_N + 1 - i))] \quad (3.1)$$

F é a distribuição acumulada da distribuição específica e Y_i são os dados ordenados .

Os valores críticos do teste de Anderson-Darling são dependentes da distribuição para qual está sendo feito o teste. Os valores e as fórmulas também podem ser encontrados em Stephens [1974], Stephens [1976], Stephens [1977] e Stephens [1979]. Neste caso, o teste é unilateral e a hipótese de que a distribuição é de uma forma específica, é rejeitada caso a estatística de teste, A, for maior que o valor crítico. "

Nota: O teste de Anderson-Darling também é conhecido como um teste ECDF (função de distribuição cumulativa empírica), com base.

Capítulo 4

Experimentos e Resultados

4.1 Experimentos realizados

Na tentativa de estudar o comportamento das saídas dos resolvedores SAT realizamos diversos experimentos. Como parâmetros de entrada, utilizamos diversos *problemas* obedecendo o formato CNF como o exemplo abaixo :

```
c
c ArquivoCNF40497.cnf - Gerado automaticamente pelo GeradorCNF
c Universidade de Sao Paulo - IME
c Disciplina: Laboratorio de Inteligencia Artificial
c Professor: Marcelo Finger
c Desenvolvido por: Poliana Magalhaes Reis / 2009
c Arquivo gerado em 2011
c
p cnf 200 100 0
-6 28 157 0
136 61 175 0
12 197 -90 0
-59 -164 -166 0
-16 61 16 0
182 40 9 0
90 -36 23 0
83 50 -53 0
159 51 21 0
20 91 -11 0
-5 -27 -73 0
38 180 63 0
140 -144 120 0
-21 198 122 0
143 -67 -9 0
-181 26 77 0
78 124 -61 0
61 -176 62 0
10 127 169 0
-63 116 -155 0
-21 158 -195 0
38 -7 -43 0
....
```

Como resultado de execução do zChaff, obtemos o seguinte formato em sua saída:

```

Z-Chaff Version: zChaff 2007.3.12
Solving ArquivoCNF.cnf ......

c 196 Clauses are true, Verify Solution successful.
Instance Satisfiable
-1 2 -3 4 5 6 -7 -8 -9 10 11 12 13 -14 15 16 -17 -18 -19 -20 -21 -22 -23 -24 25 26 -27 -28 29
30 -31 32 33 -34 -35 -36 -37 38 -39 -40 -41 42 43 -44 45 -46 47 48 -49 -50 51 52 53 54 55
-56 57 -58 59 60 -61 -62 63 -64 65 -66 67 -68 69 -70 71 -72 73 -74 -75 76 -77 78 79 80 -81
-82 83 84 85 86 -87 -88 89 -90 -91 -92 93 -94 95 96 97 98 99 -100 Random Seed Used 0
Max Decision Level 73
Num. of Decisions 74
( Stack + vsids + Shrinking Decisions ) 0 + 73 + 0
Original Num Variables 100
Original Num Clauses 196
Original Num Literals 584
Added Conflict Clauses 0
Num of Shrinkings 0
Deleted Conflict Clauses 0
Deleted Clauses 0
Added Conflict Literals 0
Deleted (Total) Literals 0
Number of Implication 100
Total Run Time 0.000302
RESULT: SAT
real 0m0.308s
user 0m0.002s
sys 0m0.003s

```

$$\text{Total de operações} = \text{Num Decisões} + \text{Num Implicações}$$

Figura 4.1: Dados de saída do zChaff

O tempo de execução de um programa é relativo ao processador do computador utilizado, dos processos que estão sendo executados no momento e de diversos outros fatores. Por essa razão ao invés de utilizarmos como parâmetro medida o tempo gasto para execução do zChaff, utilizamos o Número de Operações realizadas.

Destacamos na Figura A.97 o *Número de Operações* que definimos como o resultado da soma do número de implicações com o número de decisões que um resolvedor executa para a resolução de um determinado problema.

Para realização deste projeto de pesquisa foi gerado um total de 910.000 problemas que foram utilizados como entrada no zChaff, e para geração desses problemas utilizamos o Gerador CNF apresentado no Capítulo 2.1.

Inicialmente foram gerados 360.000 problemas com as seguintes características:

- Todos problemas possuíam 3 literais(K),
- O número de átomos (N) variava em 50, 100, 200 e 300,
- Para cada valor de N, o número de cláusulas (M) variava de forma que $\frac{M}{N}$ resultaria em 1, 2, 3, 4, 4.3 (o ponto de mudança de fase), 5, 6, 7 e 8 .

Sendo assim, tínhamos:

$$360.000 \text{ problemas} = 10.000 \text{ problemas} \times 4 \text{ (Valores Possíveis de N)} \times 9 \text{ (Valores de N/M)}$$

O computador utilizado para esses testes possuía 2 Gb de memória RAM e processador Intel Core 2 Duo.

Por existirem casos em que o zChaff gastou muito tempo para encontrar uma solução, fez com que o processo de execução destes 360.000 problemas durasse 3 meses.

Após a execução de todos esses problemas, colhemos os dados da saída de cada caso e traçamos gráficos relativos ao *Número de exemplos x Número de operações*. Com isso foi possível verificar que grande parte dos gráficos se assemelhavam à uma distribuição.

Para verificar à qual distribuição pertencia cada conjuntos de dados foi necessário a realização de diversos testes de aderência. Como grande parte das distribuições possuia caudas cumpridas, escolhemos a utilização do teste de aderência de Anderson-Darling que dá mais ênfase as caldas conforme descrito no capítulo 3.

Os testes de aderência de Anderson-Darling foram realizado utilizando a ferramenta Minitab (<http://minitab.com>). Assim, conseguimos aproximar a distribuição para certos casos, porém alguns casos ficaram inconclusivos.

Para uma melhor análise dos casos inconclusivos foram gerados mais 550.000 problemas no formato CNF para serem executados pelo zChaff para tentar identificar à quais distribuições os dados pertenciam. Os casos inicialmente inconclusivos foram :

- $N=100 \frac{M}{N} = 4.3$,
- $N=200 \frac{M}{N} = 4.3, 5, 6,7$ e 8 e
- $N=300 \frac{M}{N} = 4.3, 5, 6,7$ e 8

Acarretando em um total de :

$$550.000 \text{ problemas} = 50.000(\text{problemas}) \times 11(\text{casos})$$

Para executar esses problemas no zChaff, foi utilizado um servidor disponibilizado pelo professor Marcelo Finger com 25 Gb de memória e processador Core Intel i7. A execução desses problemas levou 2 meses e meio para serem concluídas .

4.1.1 Síntese dos experimentos

O propósito geral deste projeto foi verificar a existência de um comportamento padrão do SAT de acordo com os parâmetros de entrada das fórmulas.

Inicialmente realizamos testes com 360.000 problemas. Desses problemas, 110.000 falharam, ou seja, o resultado da execução destes problemas resultaram em saídas totalmente inconclusivas.

Não sabíamos se a causa dos gráficos possuir um comportamento indefinido ocorreu por necessitar de um maior número de amostras, ou se era devido aos valores de seus parâmetros. Com isso foi necessário a geração de mais amostras atingindo o total de quase 1 milhão (910.000) de problemas. Assim foi possível identificar o comportamento do SAT de acordo com a variação dos parâmetros das fórmulas de entrada.

Para a maioria dos casos o comportamento do SAT comporta seguindo o padrão apresentado nas figuras(4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10) a seguir, independente do valor de N. (O Exemplo a seguir tem como número de átomos (N) = 50).

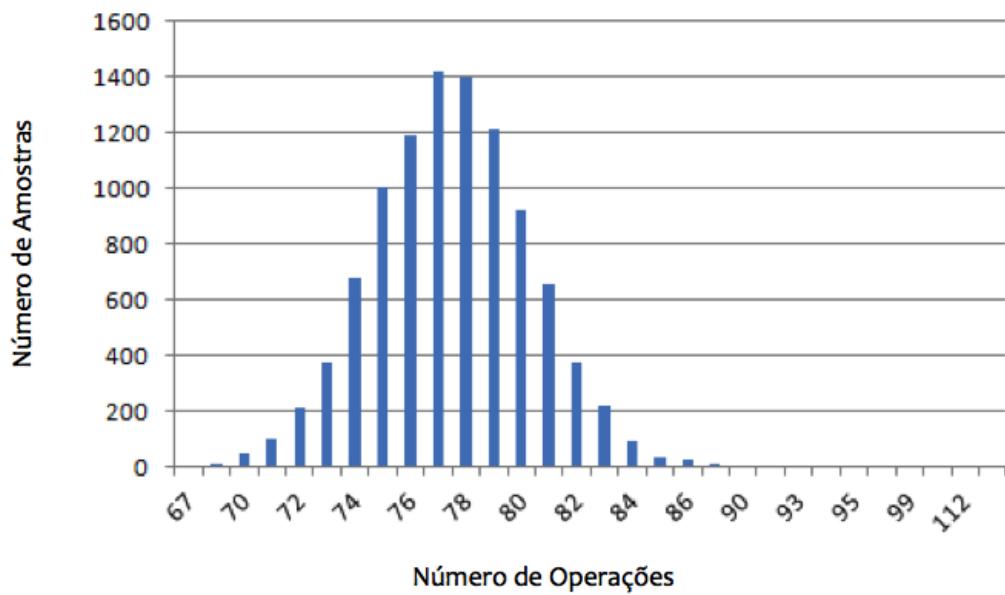


Figura 4.2: Distribuição para os valores de $N=50$ e $M=50$

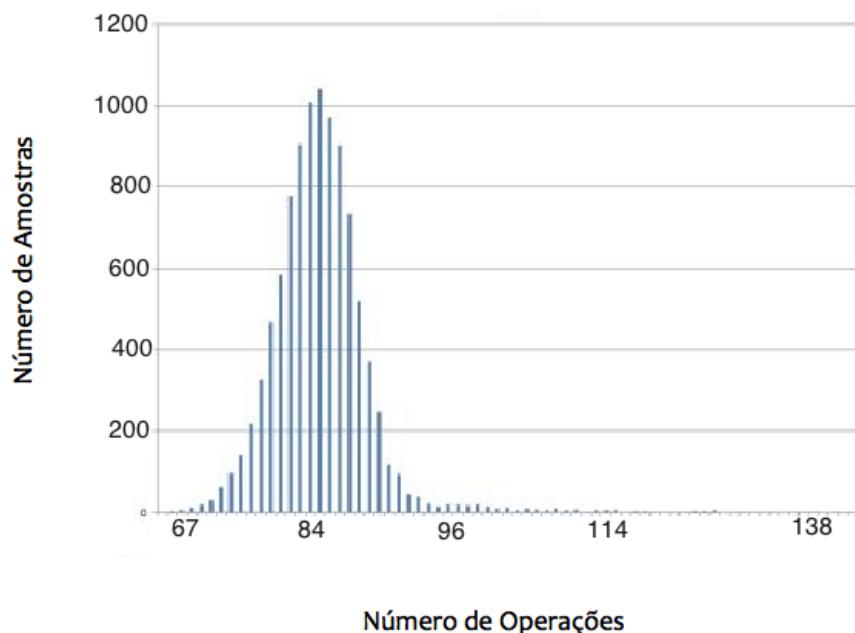


Figura 4.3: Distribuição para os valores de $N=50$ e $M=100$

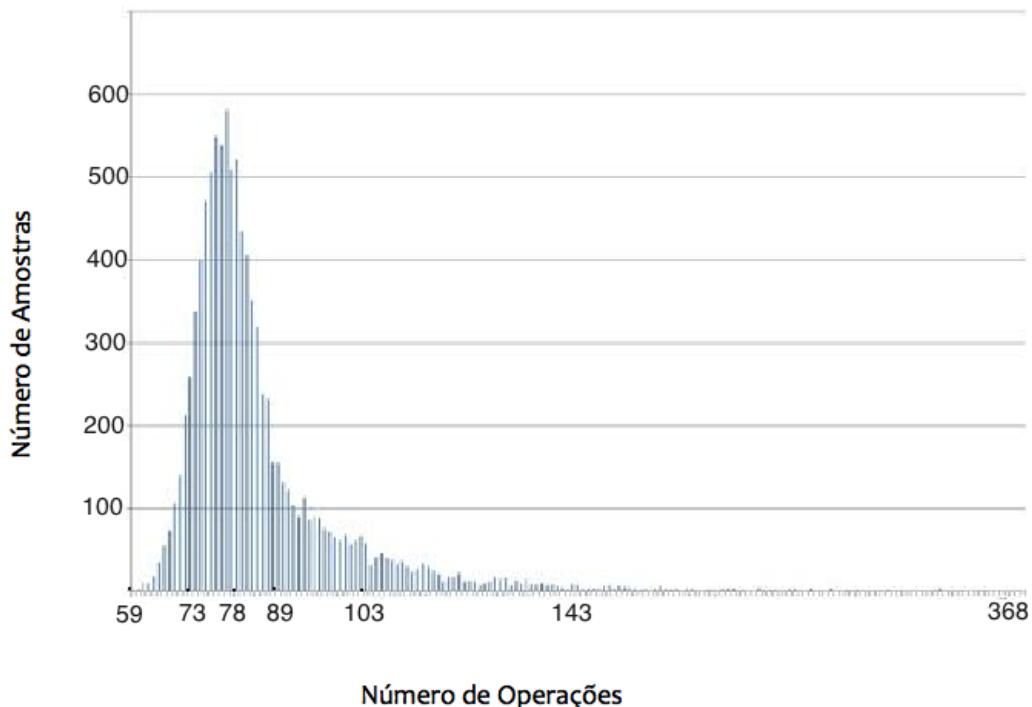


Figura 4.4: Distribuição para os valores de $N=50$ e $M=150$

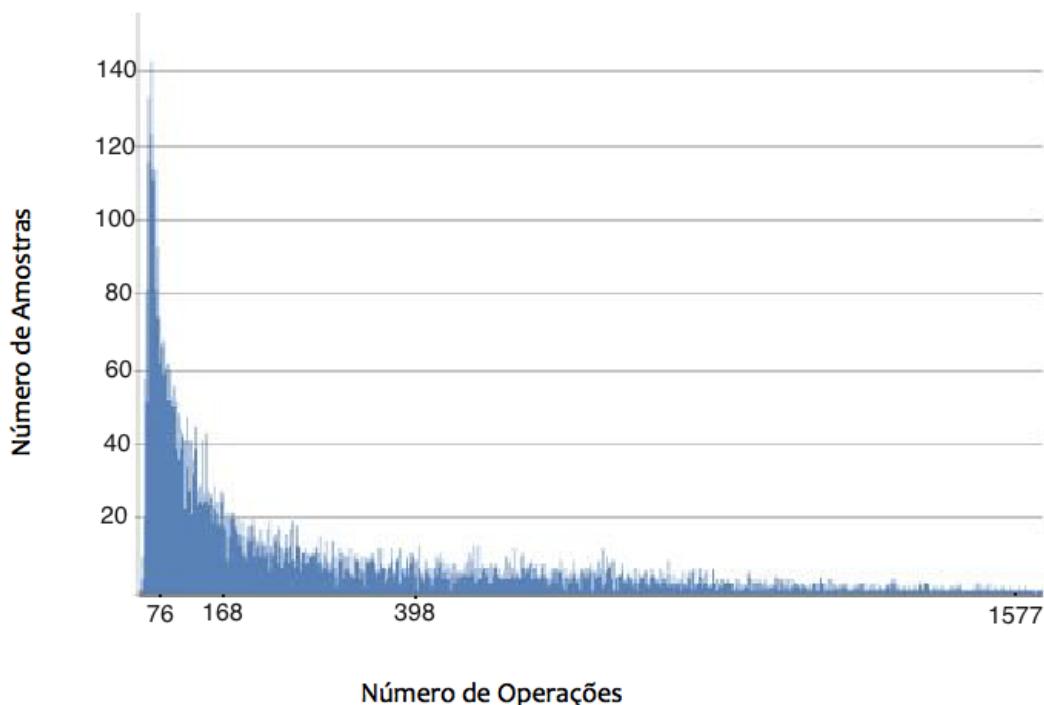


Figura 4.5: Distribuição para os valores de $N=50$ e $M=200$

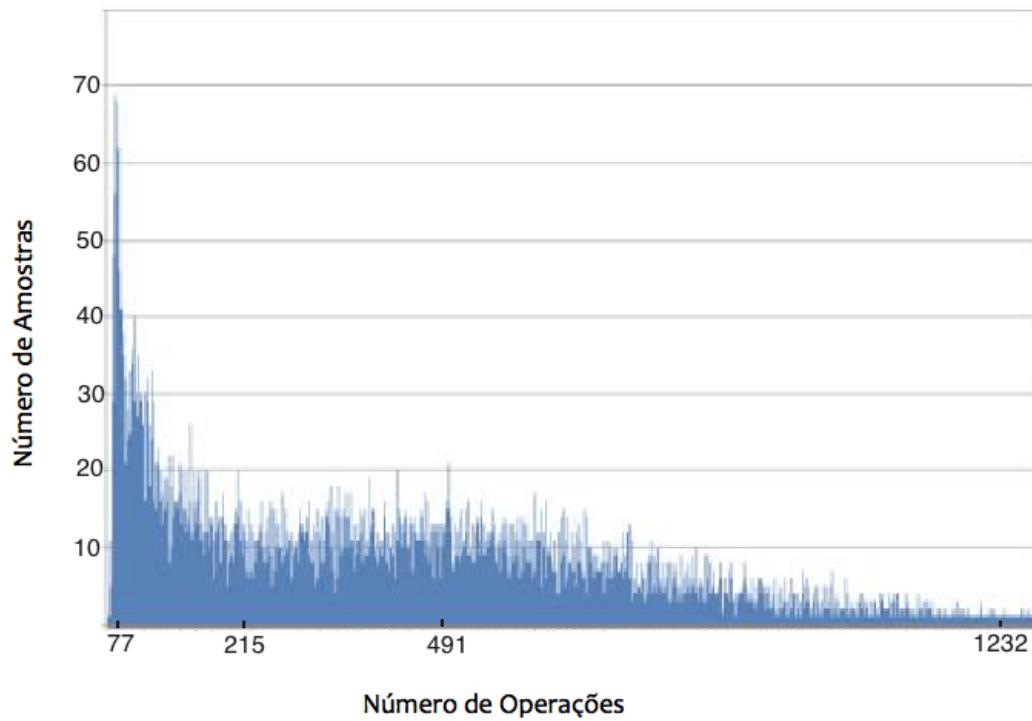


Figura 4.6: Distribuição para os valores de $N=50$ e $M=215$

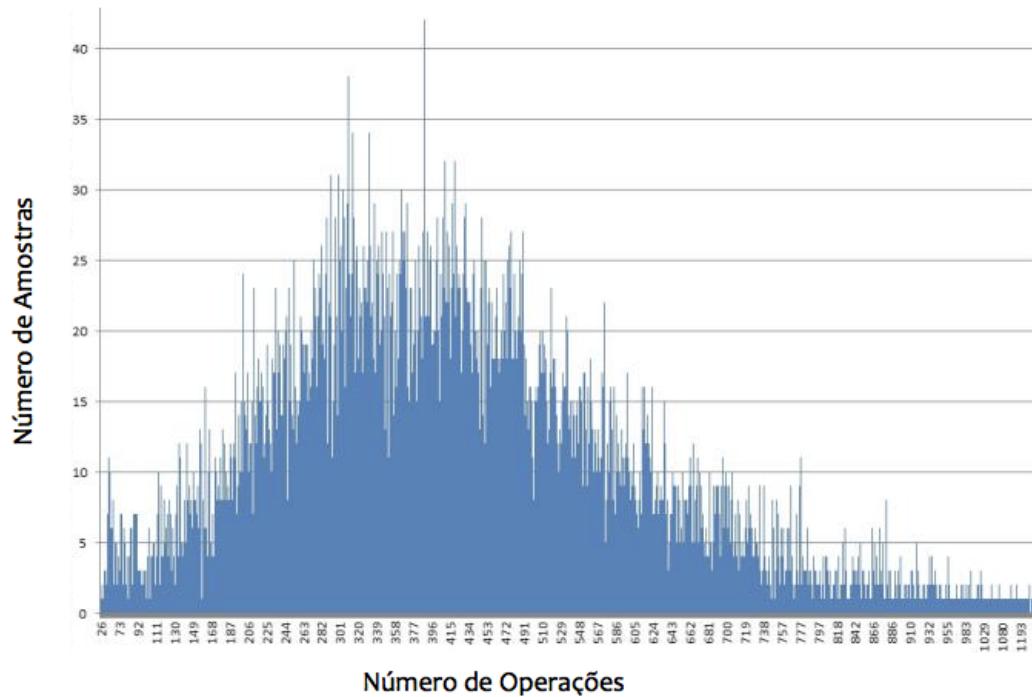


Figura 4.7: Distribuição para os valores de $N=50$ e $M=250$

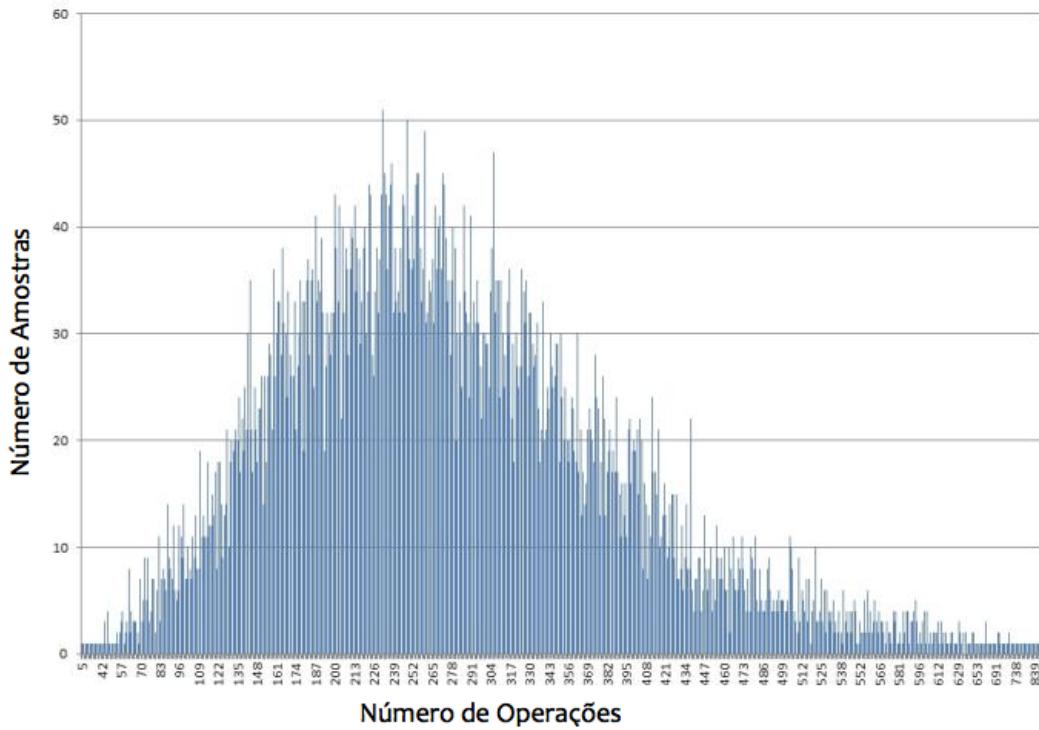


Figura 4.8: Distribuição para os valores de $N=50$ e $M=300$

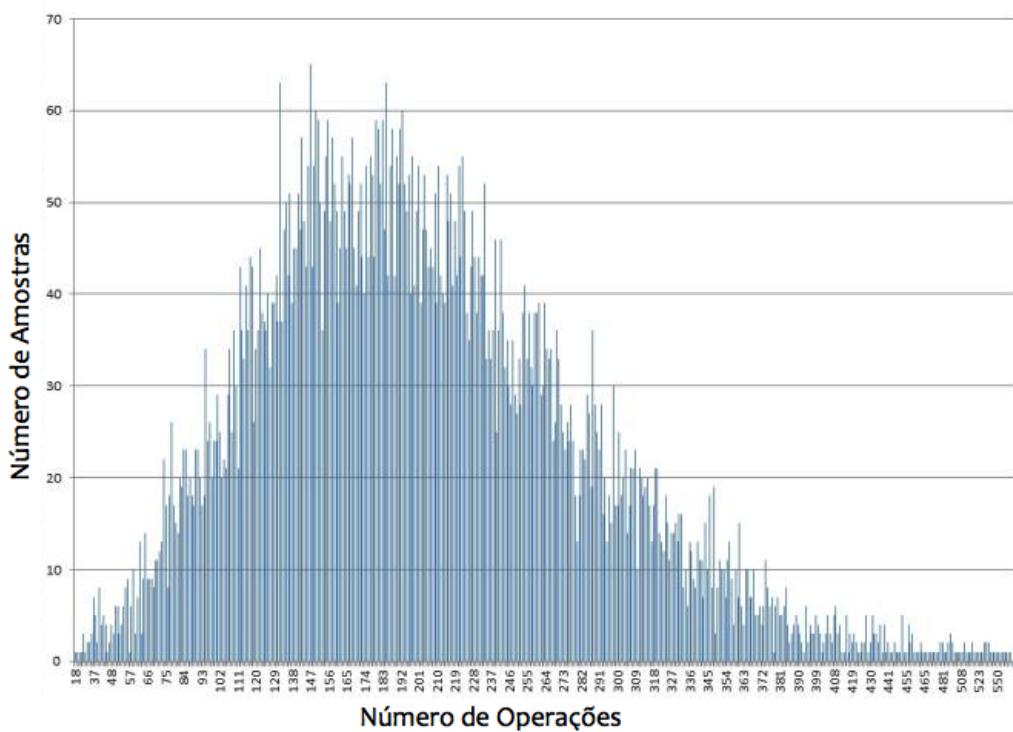


Figura 4.9: Distribuição para os valores de $N=50$ e $M=350$

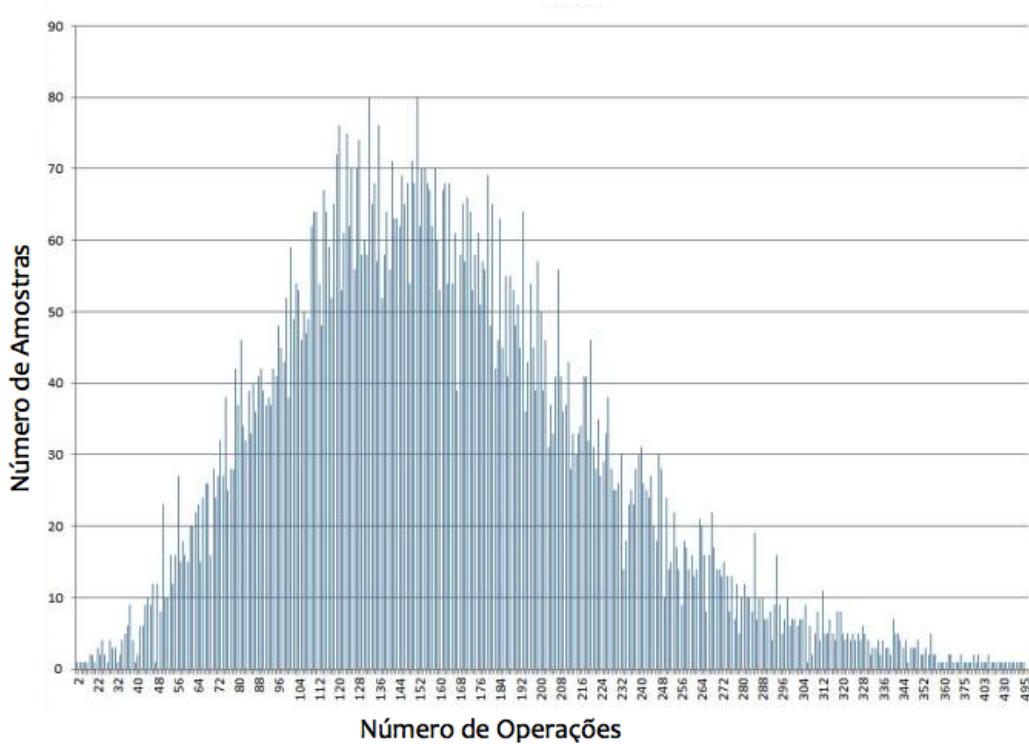


Figura 4.10: Distribuição para os valores de $N=50$ e $M=400$

4.2 Resultados e Análises

Como visto anteriormente, o problema SAT pode ser reduzido ao 3-SAT; portanto padronizamos para os problemas de entrada o número de literais (K) = 3. Chamaremos de N o Número de átomos e de M o número de cláusula.

De acordo com a documentação do Minitab a estatística de Anderson-Darling mede o quanto bem os dados seguem uma distribuição particular sendo o cálculo mais ponderado nas caudas da distribuição sendo avaliada da seguinte forma:

Para um determinado conjunto de dados e distribuição, menor será a estatística para a melhor distribuição que ajusta aos dados.

No Minitab os parâmetros dos testes de Anderson Darling são apresentados da seguinte forma:

AD - Indica a probabilidade de rejeitar a distribuição em questão

N - Número de amostras

P-value - Nível descritivo

Conforme descrito no Capítulo 4, as tabelas de valores críticos estão disponíveis para as distribuições normal, lognormal, exponencial, Weibull, tipo de valor extremo I, e logística. Esses valores podem ser encontrados em Stephens [1974] Stephens [1976] Stephens [1977] Stephens [1979]

A tabela abaixo apresenta o valor crítico do AD caso a distribuição hipotética seja Normal ou Log-Normal:

No Apêndice A estão dispostos todos os gráficos das distribuições resultante do número de operações dos testes de execução do zChaff bem como seus respectivos testes de aderência realizados.

Nível de Significância	AD crítico
0,1	0,631
0,05	0,752
0,025	0,873
0,01	1,035

Tabela 4.1: AD , se a distribuição hipotética é Normal ou Log-Normal (Fonte: D'Agostino e Stephens, 1986).

Através da análise gráfica de todas as distribuições disponibilizadas no Apêndice A, encontramos alguns padrões de comportamento relativos à proporção $\frac{M}{N}$. Os casos foram:

Valores pequenos de $\frac{M}{N}$ (1 e 2) - Nestes casos o zChaff se comporta conforme uma distribuição discreta de origem ainda desconhecida onde as caudas possuem comprimentos semelhantes. Como exemplo apresentamos a Figura 4.11 :

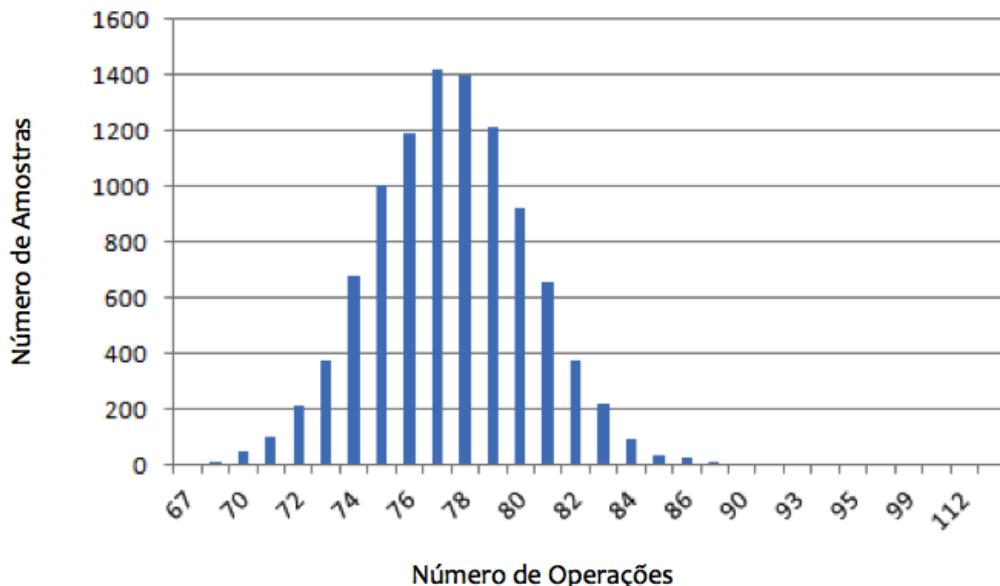


Figura 4.11: Distribuição encontrada na saída do zChaff executando problemas com $N=50$ e $M=50$

$\frac{M}{N} = 3$ - A medida em que a fração $\frac{M}{N}$ aumenta, a cauda das distribuições começam a se estender para a direita e a frequência dos eventos também aumenta. O aumento da frequência fica bastante visível ao verificarmos que os pontos das distribuições começam a se aproximar ficando mais próximos uns dos outros. Este fenômeno pode ser observado no Apêndice A . Segue um exemplo para $N=50$ e $M=150$:

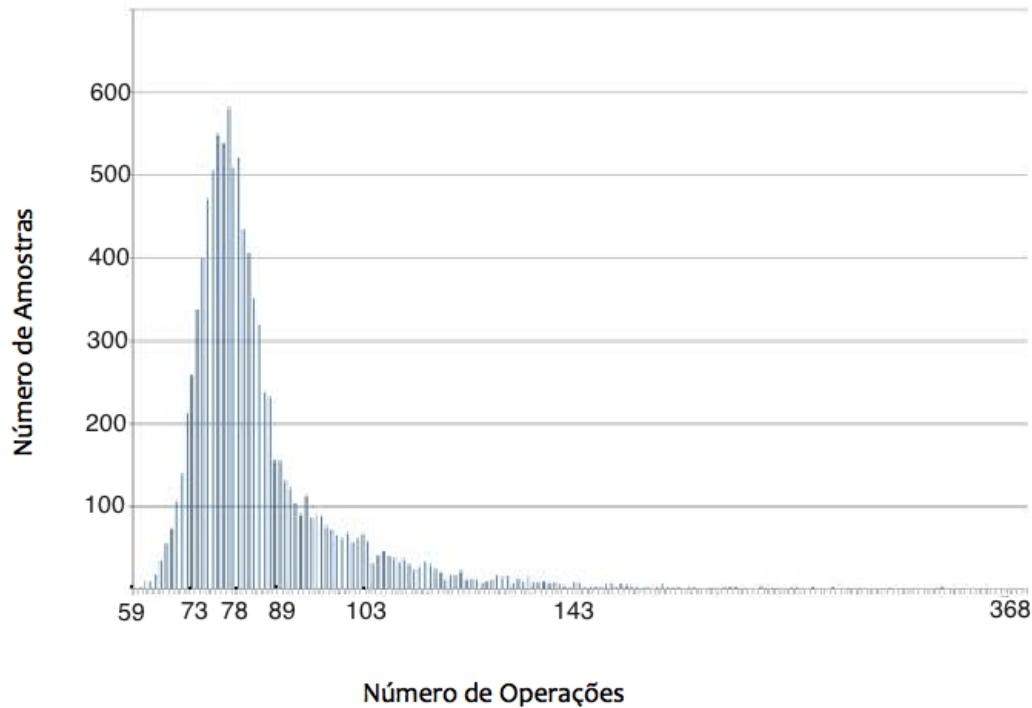


Figura 4.12: Distribuição encontrada na saída do zChaff executando problemas com $N=50$ e $M=150$

Valores inferiores próximo ao ponto de mudança de fase - Aproximando-se do ponto de mudança de fase, o comportamento começa a ter grandes mudanças. Em todos testes onde $\frac{M}{N}=4$ a distribuição gráfica se assemelha a uma exponencial logarítmica. Segue o exemplo para $N=50$ e $M=200$:

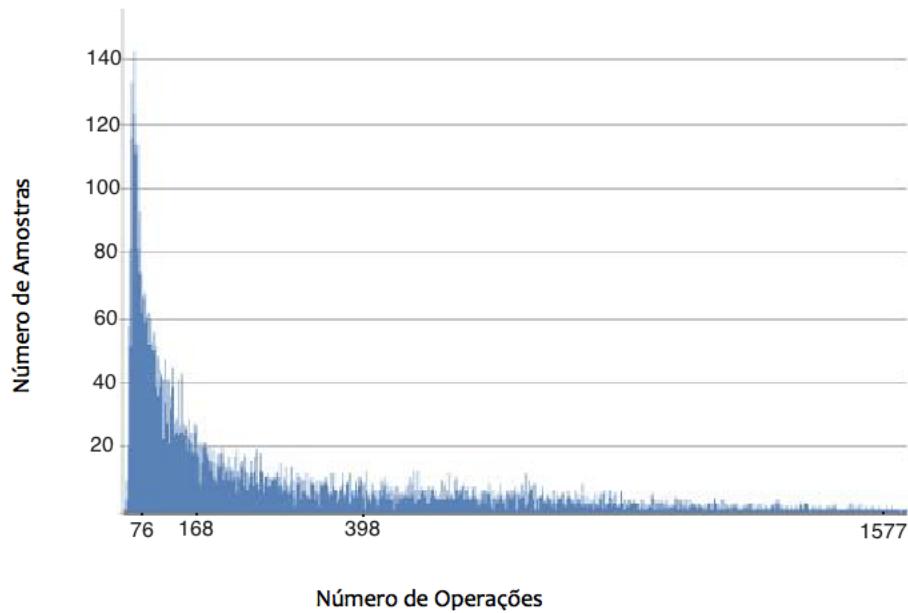


Figura 4.13: Distribuição encontrada na saída do zChaff executando problemas com $N=50$ e $M=200$

Valores elevados $\frac{M}{N}$ - Para os casos com elevados valores de $\frac{M}{N}$, ou seja, $\frac{M}{N} = 6, 7$ e 8 o comportamento do zChaff se aproxima de uma distribuição Lognormal, sendo confirmada através dos testes de aderência:

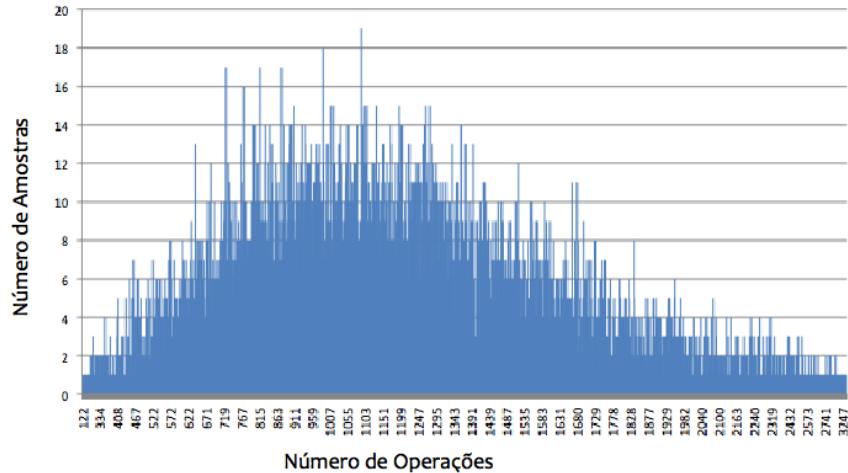


Figura 4.14: Distribuição encontrada para $N=100$ e $M=700$

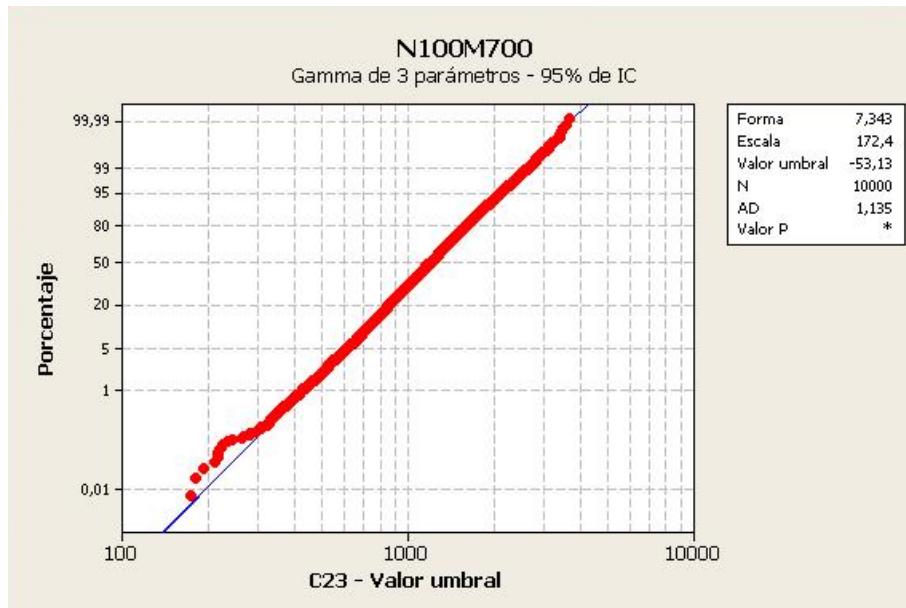


Figura 4.15: Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

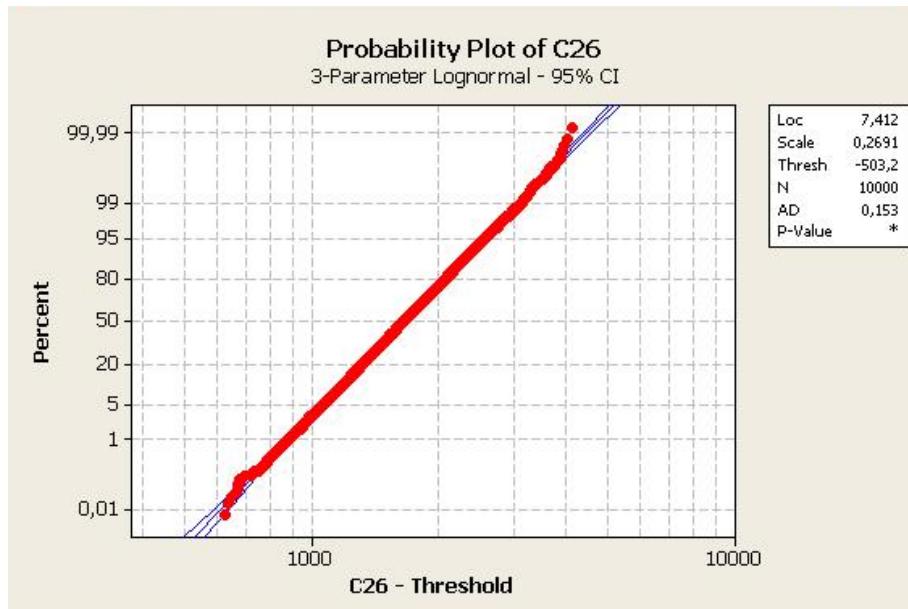


Figura 4.16: Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

No exemplo anterior podemos afirmar que a distribuição encontrada é uma a distribuição Log-normal, com os parâmetros definidos na imagem (c) da figura 4.5, pois obtivemos $AD=0,153$ ou seja $AD < (AD_{crtico} = 1,035)$

No Ponto de Mudança de Fase ($\frac{M}{N}=4,3$) e pontos com e valores de $\frac{M}{N}$ levemente superiores, como $\frac{M}{N}=5$, o comportamento não se encaixa a nenhum padrão acima. Neste caso o comportamento do zChaff se altera com a variação de N , o que não ocorre em nenhum dos padrões apresentados anteriormente, e também a saída do zChaff parece tender à distribuição uniforme a medida em que N aumenta. Ao visualizarmos as distribuições agrupadas abaixo podemos observar este comportamento:

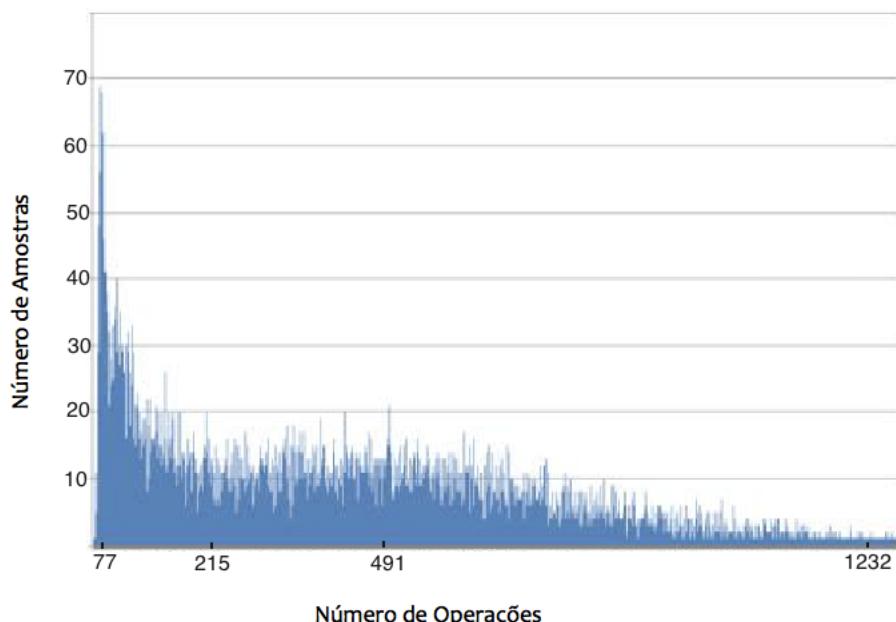
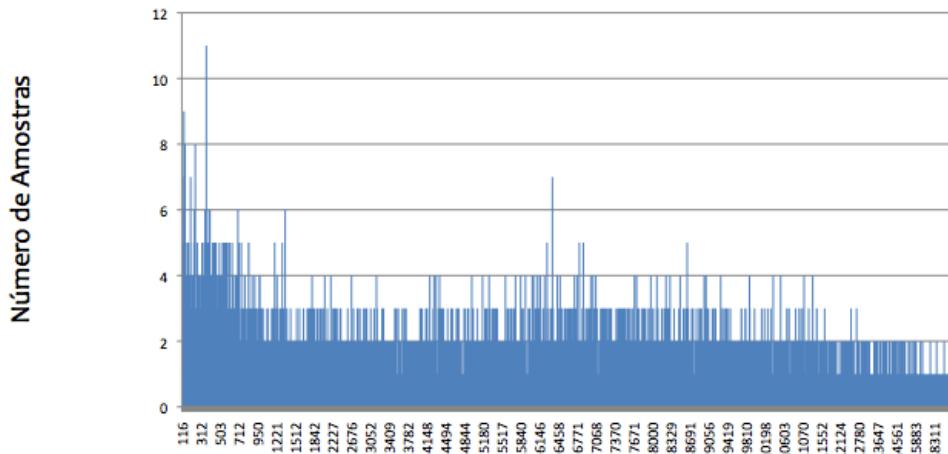
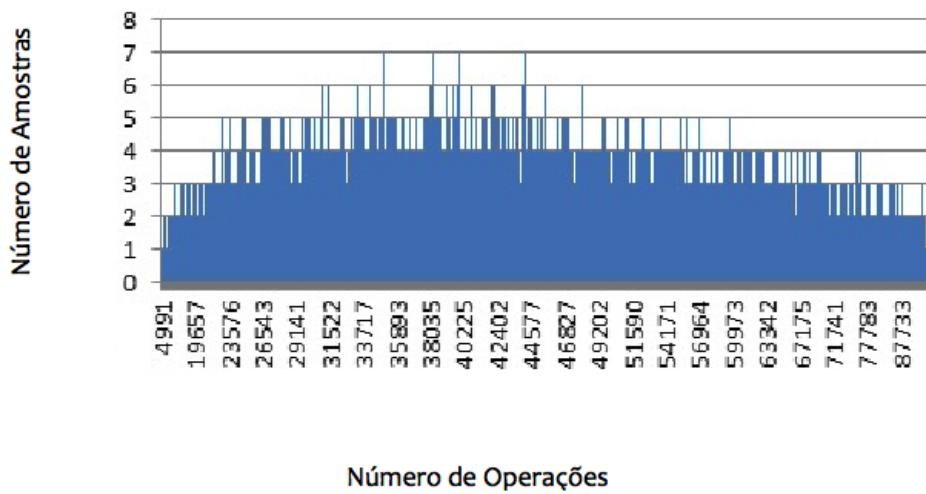


Figura 4.17: Distribuição encontrada para $N=50$ e $M=215$

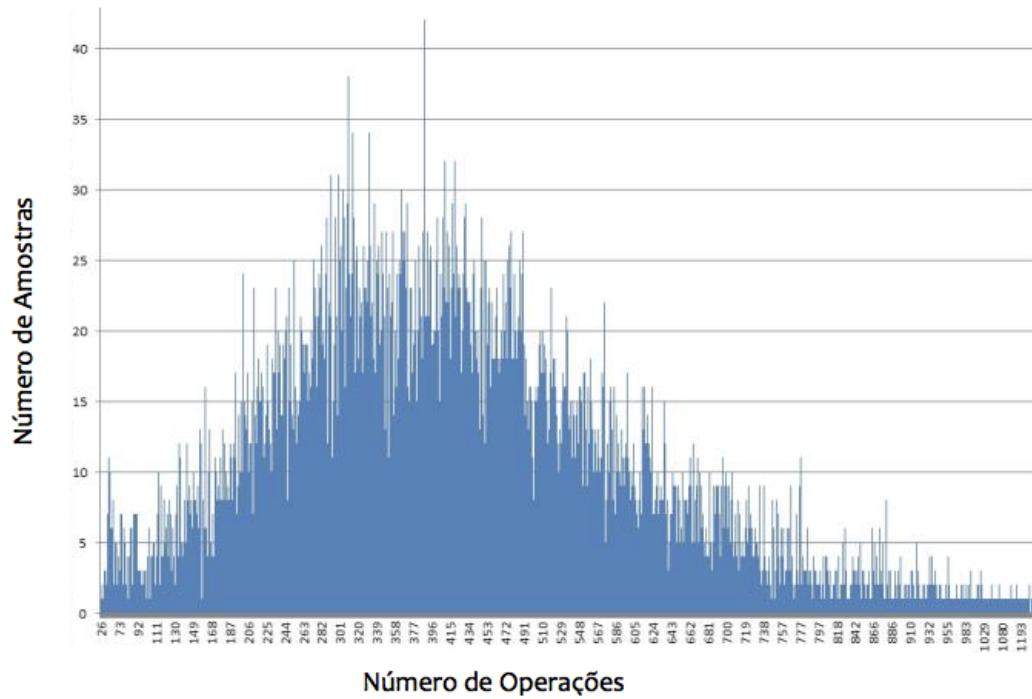
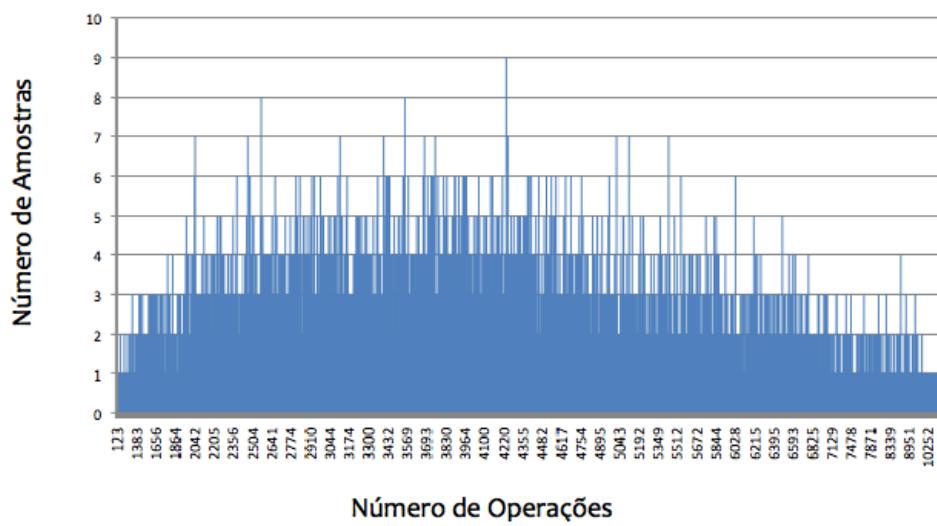


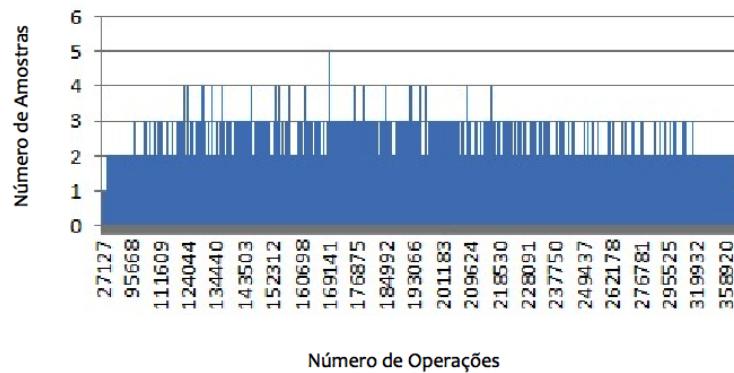
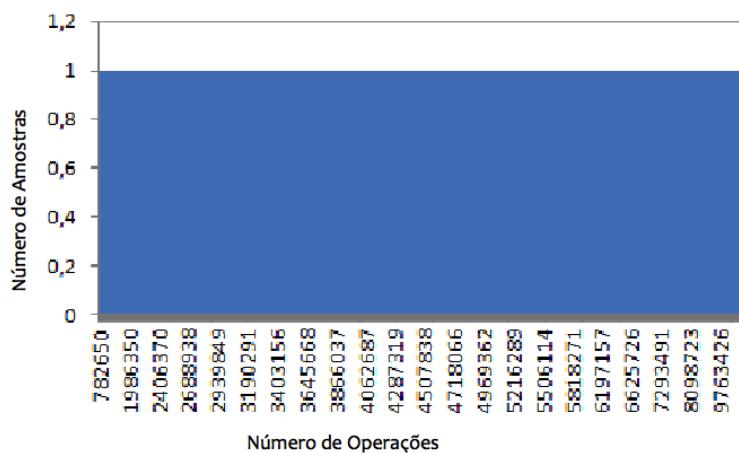
Número de Operações

(a) Distribuição encontrada para $N=100$ e $M=430$ 

Número de Operações

(b) Distribuição encontrada para $N=200$ e $M=860$ **Figura 4.18:** Comportamento instável no ponto de mudança de fase ($\frac{M}{N} = 4.3$)

(a) Distribuição encontrada para $N=50$ e $M=250$ (b) Distribuição encontrada para $N=100$ e $M=500$ **Figura 4.19:** Comportamento instável no ponto de mudança de fase ($\frac{M}{N} = 5$)

(a) Distribuição encontrada para $N=200$ e $M=1000$ (b) Distribuição encontrada para $N=300$ e $M=1500$ **Figura 4.20:** Comportamento instável no ponto de mudança de fase ($\frac{M}{N} = 5$)

No Apêndice A estão dispostos os gráficos e os testes de aderência para todos os casos de maneira mais detalhada e com uma breve análise para cada caso .

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Considerações Finais

Inicialmente não era claro o comportamento que podia-se esperar do zChaff. Alguns estudiosos imaginavam uma exponencial, outros uma função cumulativa dentre outras opções, pois na literatura não havia nenhum estudo neste sentido. Após muitos experimentos foram encontrados diversos gráficos semelhantes à distribuições de probabilidades deixando a pesquisa ainda mais interessante, o que estimulou a necessidade de verificar a existência de um padrão de comportamento para o zChaff. Para isso houve a necessidade de aumentar o número de problemas à serem testados e assim foi possível comprovar que para casos distantes da região de transição o zChaff tende a se comportar como distribuições de probabilidade, e, com isso, em casos práticos, já sabemos o que devemos esperar de suas execuções em geral.

5.2 Conclusões

Com os resultados obtidos podemos observar que independente do número de átomos (N) o comportamento do zChaff se mantém constante para os casos em que a razão M/N é a mesma e não está no ponto de mudança de fase ou em pontos levemente superiores.

A seguir definimos um breve manual de "como usar" o SAT:

1. O primeiro passo é transformar qualquer instância SAT para a Forma Normal 3-CNF.
2. Em seguida, deve-se ajustar o valor de $\frac{M}{N}$ para que o SAT tenha o comportamento de acordo com o desejado. Os comportamentos a serem esperados devem ser :

Distribuição discreta centralizada - Para obter este comportamento é necessário ajustar o valor de $\frac{M}{N} = 1$. Lembrando que esta distribuição possui caudas com comprimentos iguais, sendo uma distribuição bastante semelhante à distribuição Binomial com média diferente de 0).

Distribuição discreta deslocada - Para obter este comportamento é necessário ajustar o valor de $\frac{M}{N} = 3$. Sabendo que distribuição possui a cauda direita maior que a cauda esquerda se assemelhando bastante com à distribuição Binomial com média = 0 .

Exponencial Logarítmica - Deve-se ajustar o valor de $\frac{M}{N} = 4$.

Comportamento Aleatório - Com o ajuste de $\frac{M}{N} = 4,3$ ou $\frac{M}{N} = 5$ teremos um comportamento instável, o qual ainda não foi identificado e não sabemos se pertence à algum padrão.

Distribuição Lognormal = Ajustando $\frac{M}{N} = 6$, $\frac{M}{N} = 7$ ou $\frac{M}{N} = 8$ resultará em uma distribuição de probabilidade próxima e muitas vezes idêntica à distribuição Lognormal.

Podemos concluir que o resultado obtido é mais um passo no estudo de resolvedores SAT que pode/deve ser repetido para outros programas. Concluí-se também que o estudo do fenômeno que ocorre perto da transição de fase, necessita de outras técnicas e ferramentas de estudos e deve ficar como investigação futura.

5.3 Sugestões para Pesquisas Futuras

Através de resultados obtidos, identificamos como uma necessidade para pesquisas futuras a realização de um estudo aprofundado do comportamento do zChaff na região de mudança de fase.

Apêndice A

Resultados dos Testes

A.1 Distribuições e Testes de Aderência

A seguir estão dispostos os gráficos das distribuições relativas ao número de operações dos testes de execução do zChaff bem como os testes de aderência realizados.

A.1.1 N= 50 e M=50 ($\frac{M}{N} = 1$)

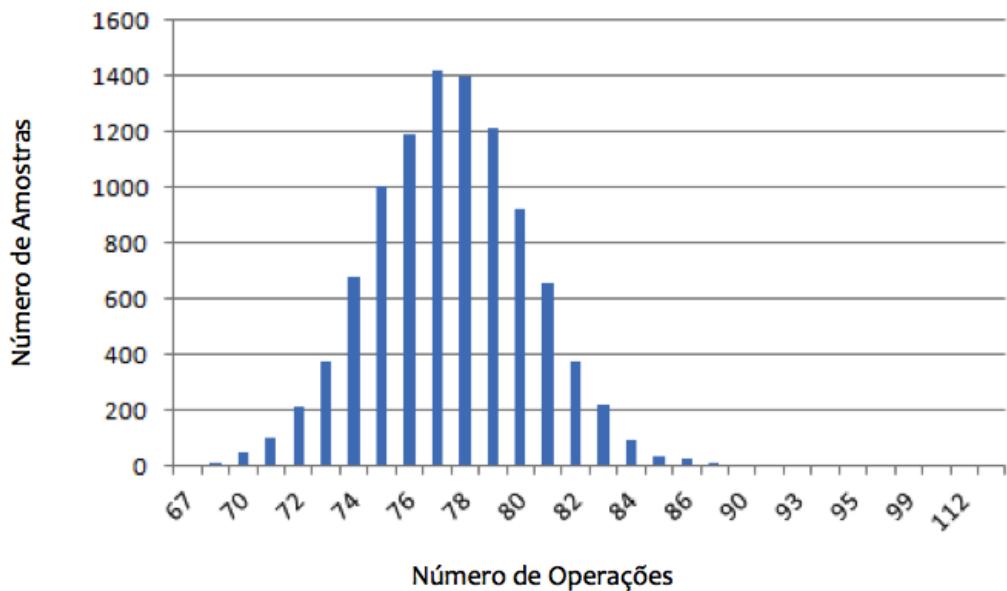
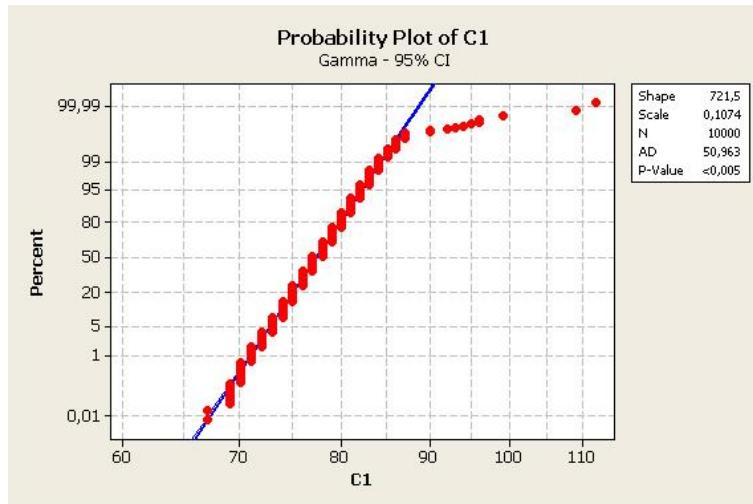


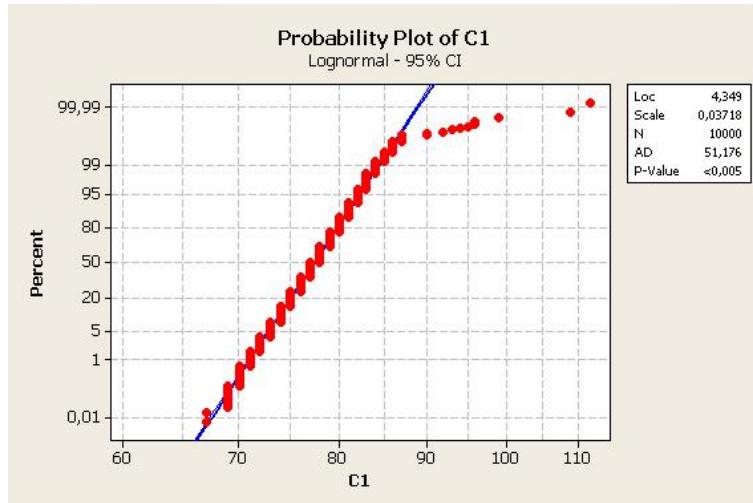
Figura A.1: Distribuição encontrada para N=50 e M=50

Conforme dito anteriormente, menor dever ser o valor da estatística de AD para a distribuição que melhor se ajusta aos dados. Com os testes de aderência apresentados a seguir, verificamos em todos os testes para o caso onde N=50 e M=50 que o valor de AD está em torno de 50, que é um valor muito alto, sendo que o valor crítico para o teste de Anderson-Darling é aproximadamente 1 dependendo da distribuição, do valor de significância escolhido e do número de amostras.

Assim, concluí-se que a distribuição encontrada não se ajusta as distribuições Gama e Lognormal. Podemos notar que a distribuição encontrada possui a mesma inclinação da reta do teste de aderência para distribuição normal, mas vemos que é uma distribuição discreta, logo concluímos que para $N=50$ e $M=50$, o número de operações realizadas pelo zchaff respeita uma distribuição discreta a qual ainda não identificamos sua origem porém com caudas que possuem comprimentos semelhantes .



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal

Figura A.2: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=50$

A.1.2 N= 50 e M=100 ($\frac{M}{N} = 2$)

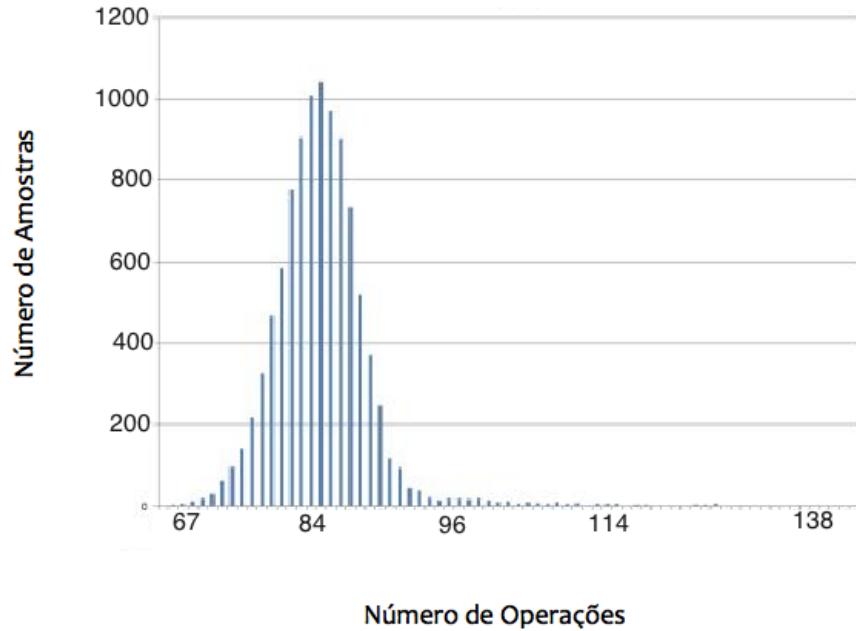


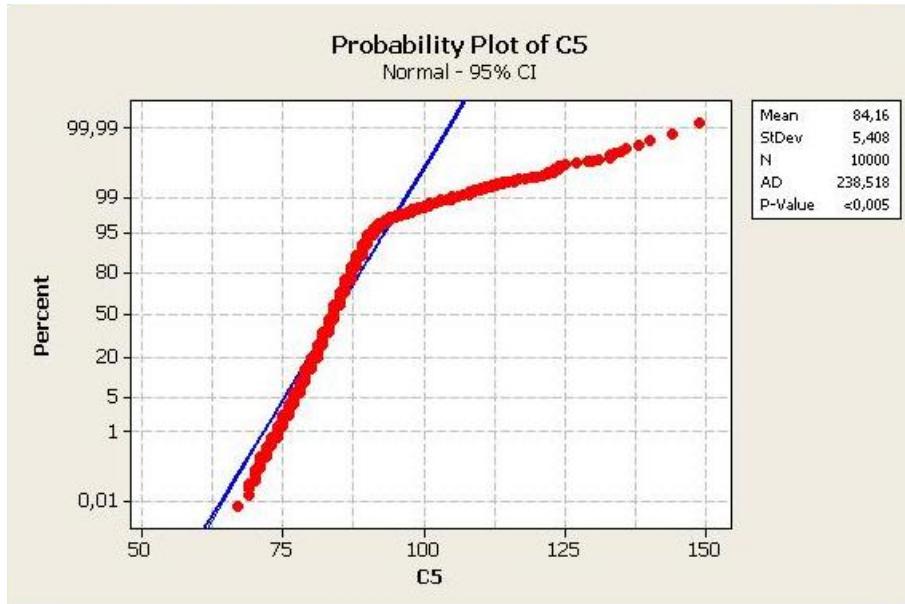
Figura A.3: Distribuição encontrada para $N=50$ e $M=100$

Neste caso, verificamos que para alguns testes o valor de AD é ainda maior que no caso anterior.

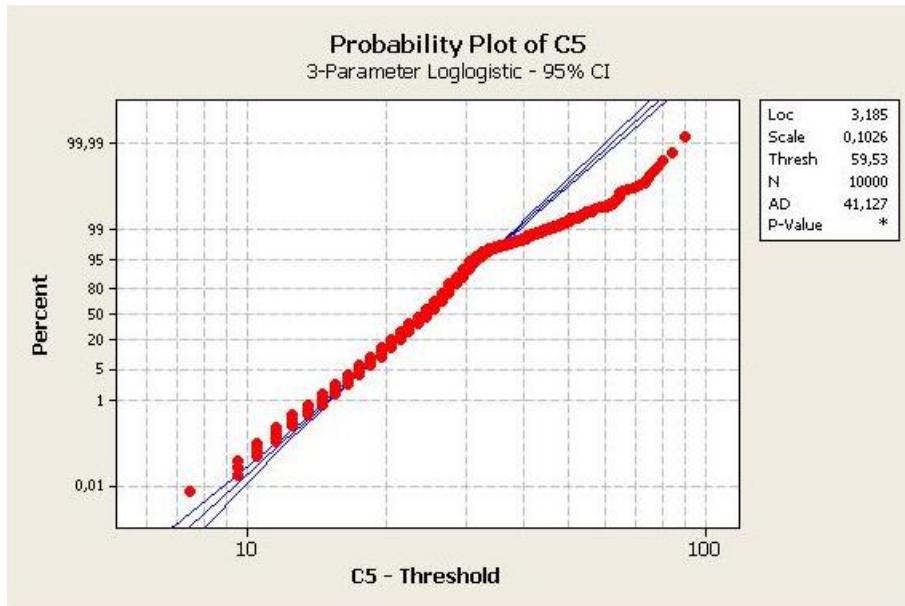
Podemos notar que a melhor aderência foi para o teste da distribuição Loglogistic, onde o valor de AD = 41,12. Porém, ainda sabemos que este é um valor muito alto.

Concluimos assim, que a distribuição encontrada não se ajusta as distribuições Gama, Normal, Lognormal e Loglogistic, mas apesar disto através da análise gráfica, verificamos que o zChaff para $N=50$, $M=100$ se comporta como uma distribuição discreta a qual ainda não identificamos sua origem porém com caudas que possuem comprimentos semelhantes .

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

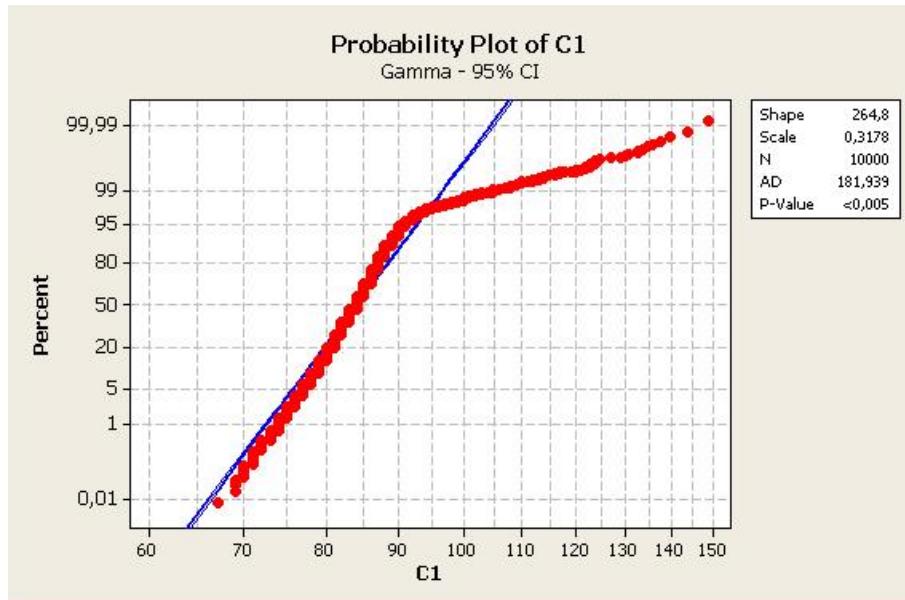


(a) Teste de aderência com a distribuição Normal

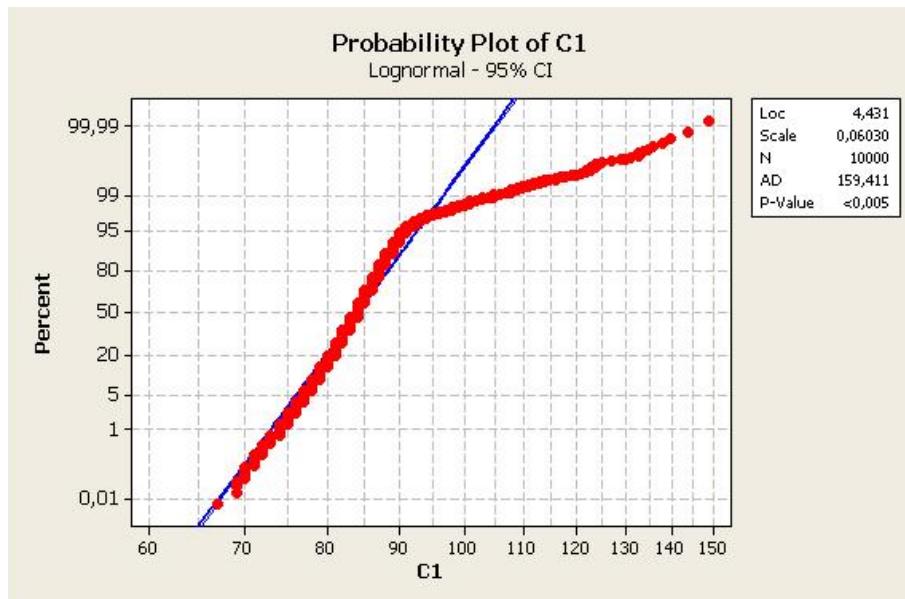


(b) Teste de aderência com a distribuição Loglogistic com 3 parâmetros

Figura A.4: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=100$



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal

Figura A.5: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=100$

A.1.3 N= 50 e M=150 ($\frac{M}{N} = 3$)

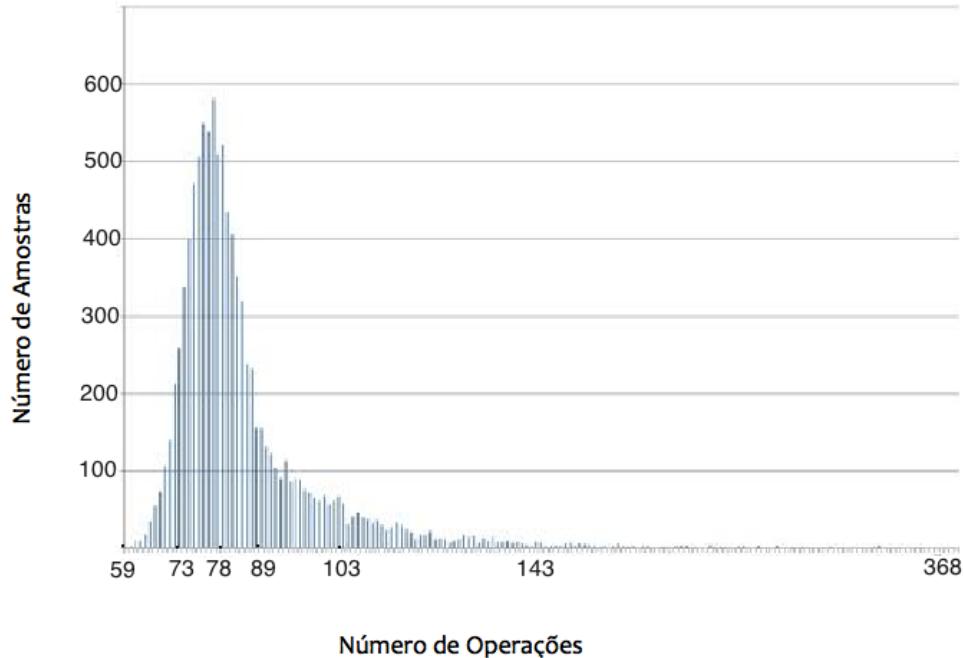


Figura A.6: Distribuição encontrada para $N=50$ e $M=150$

Este caso, se assemelha ao caso anterior, o qual o resultado de melhor aderência foi para o teste da distribuição Loglogistic, porém ao ajustar os parâmetros obtivemos o valor de $AD=59,862$. Este valor de AD também é um valor muito alto, portanto pode-se concluir que a distribuição encontrada não se ajusta as distribuições Gama, Lognormal e Loglogistic.

Através da análise gráfica, nota-se a medida em que a fração de $\frac{M}{N}$ aumenta, a cauda das distribuições começam a se estender para a direita e a frequência dos eventos também aumenta.

Conclui-se assim que o zChaff para $N=50$, $M=150$ ainda respeita uma distribuição discreta porém com caudas bastante distintas e não uniformes, quase contínua.

Os testes de aderência estão apresentados a seguir.

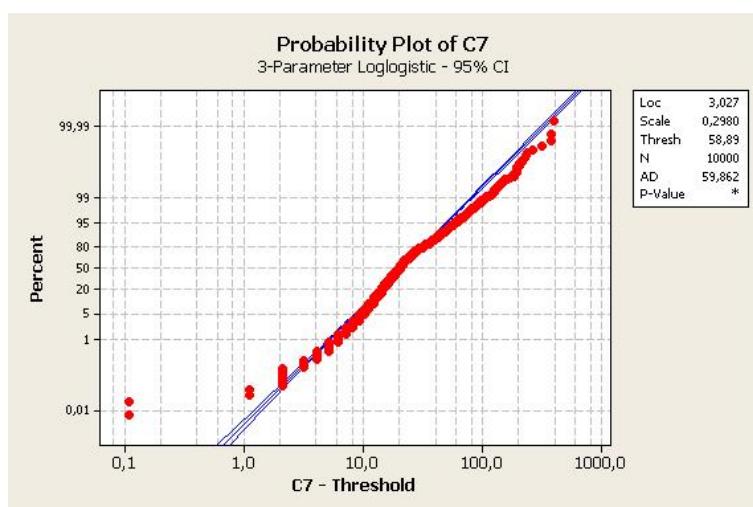
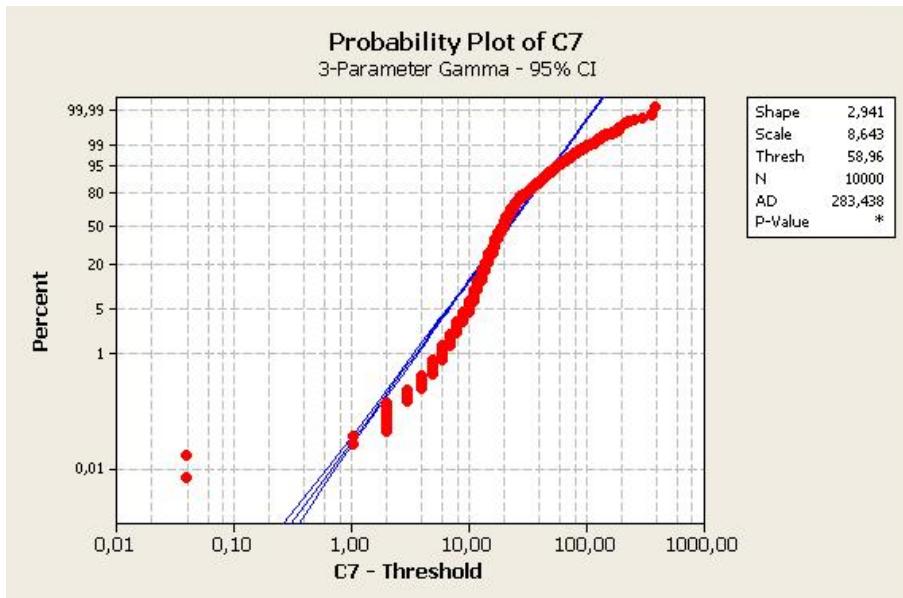
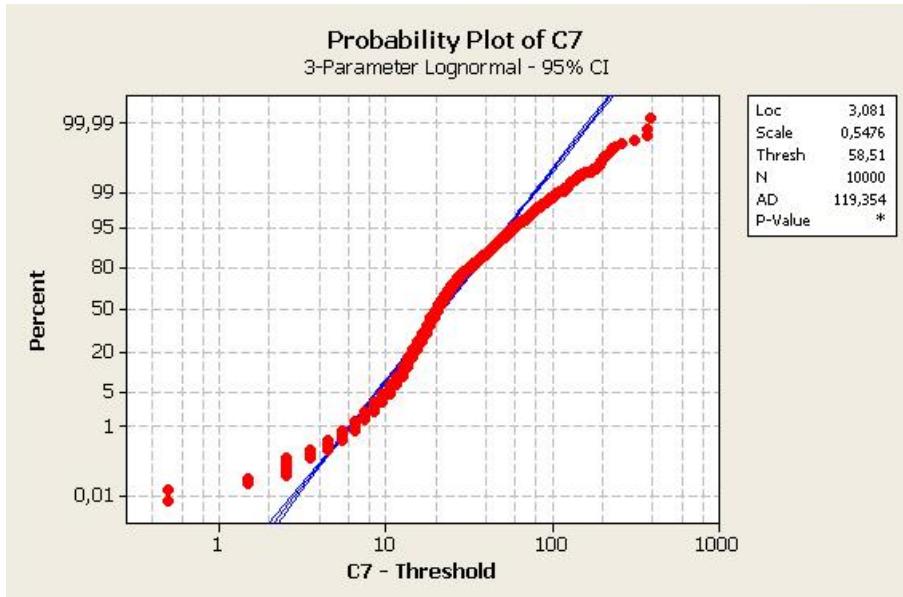


Figura A.7: Teste de aderência com a distribuição Loglogistic com 3 parâmetros



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.8: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=150$

A.1.4 N= 50 e M=200 ($\frac{M}{N} = 4$)

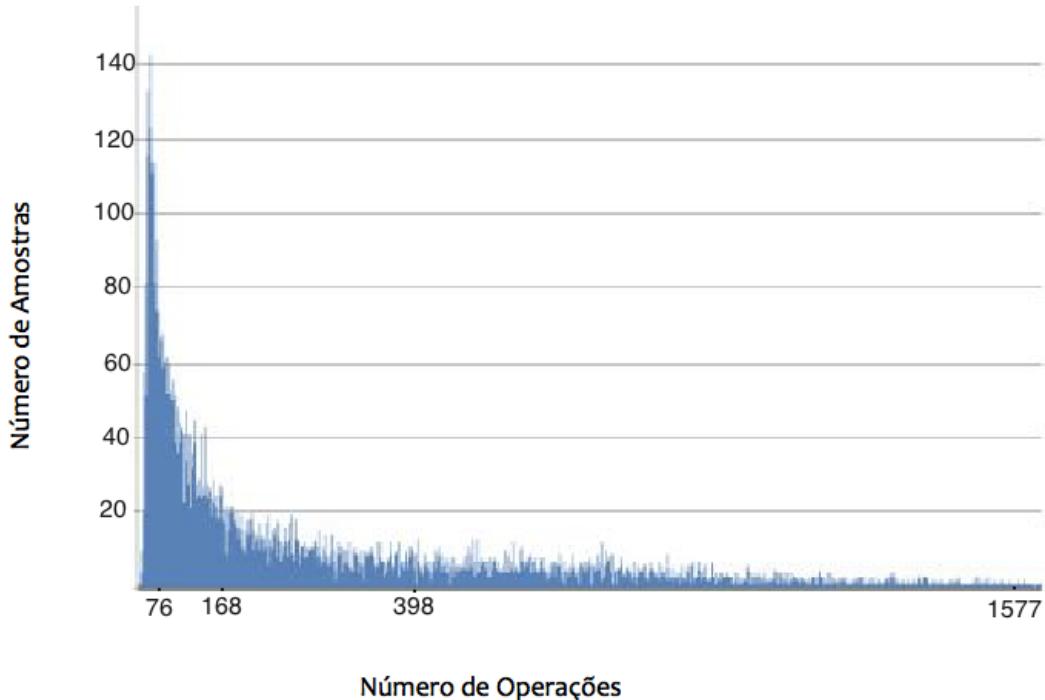


Figura A.9: Distribuição encontrada para $N=50$ e $M=200$

Este caso, se difere de todos os casos anteriores, pois através da análise gráfica podemos observar que a distribuição encontrada não apresenta uma distribuição discreta, se assemelhando a uma exponencial logarítmica. Porém como não se ajustou a nenhuma distribuição não foi possível descobrir seus parâmetros.

Os testes de aderência estão apresentados a seguir.

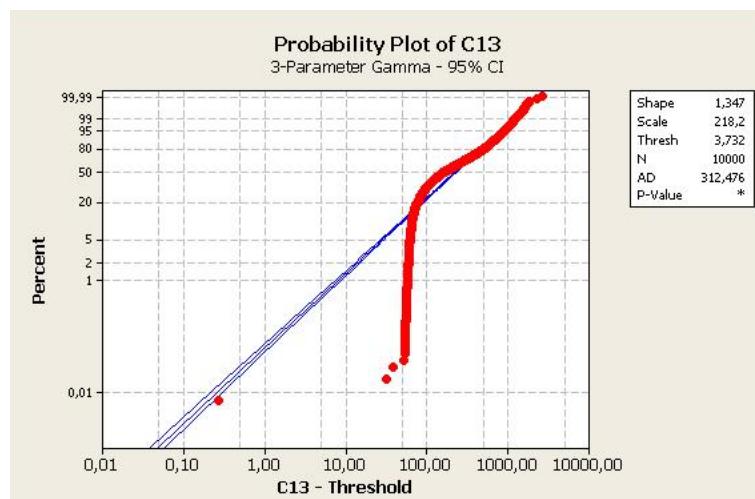
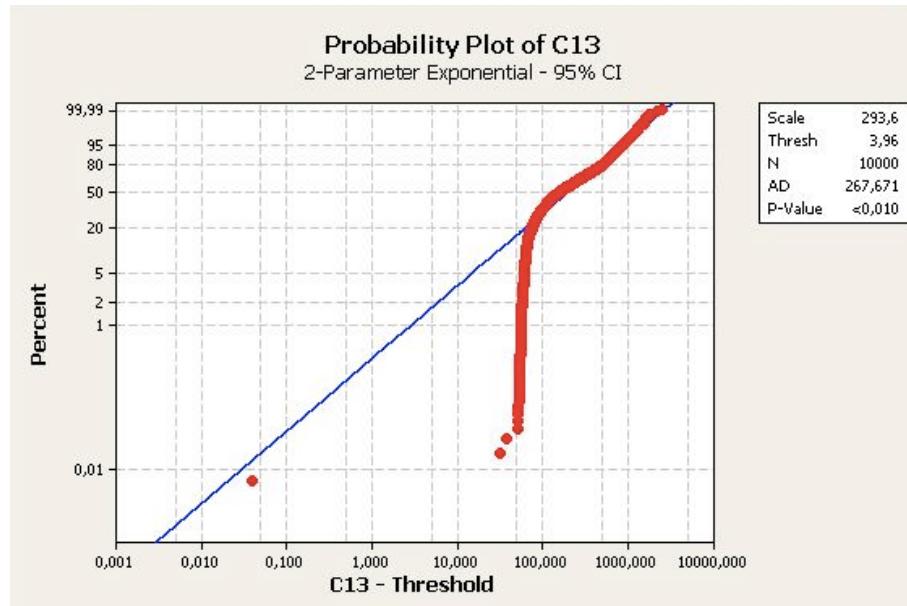
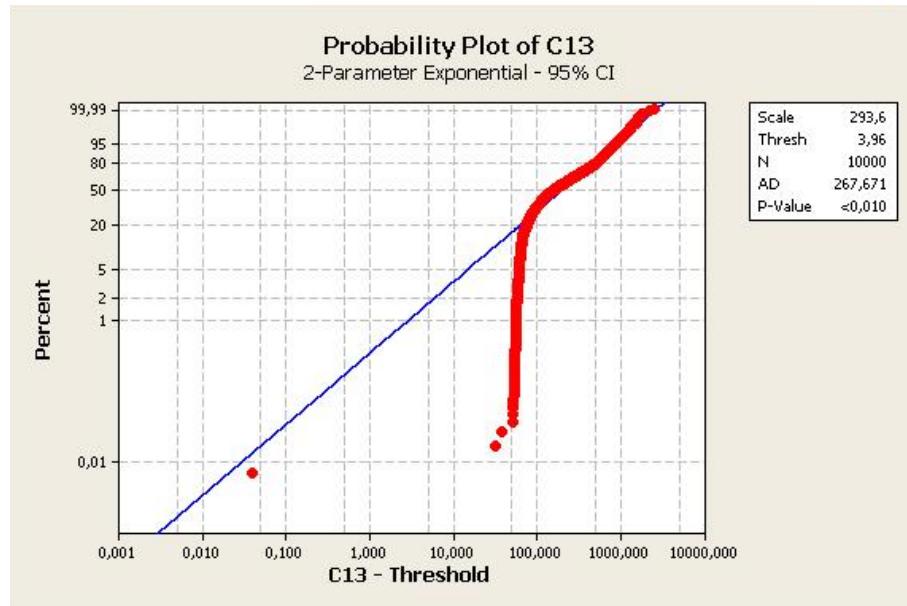


Figura A.10: Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros



(a) Teste de aderência com a distribuição Normal



(b) Teste de aderência com a distribuição Exponencial

Figura A.11: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=200$

A.1.5 $N= 50$ e $M=215$ ($\frac{M}{N} = 4.3$)

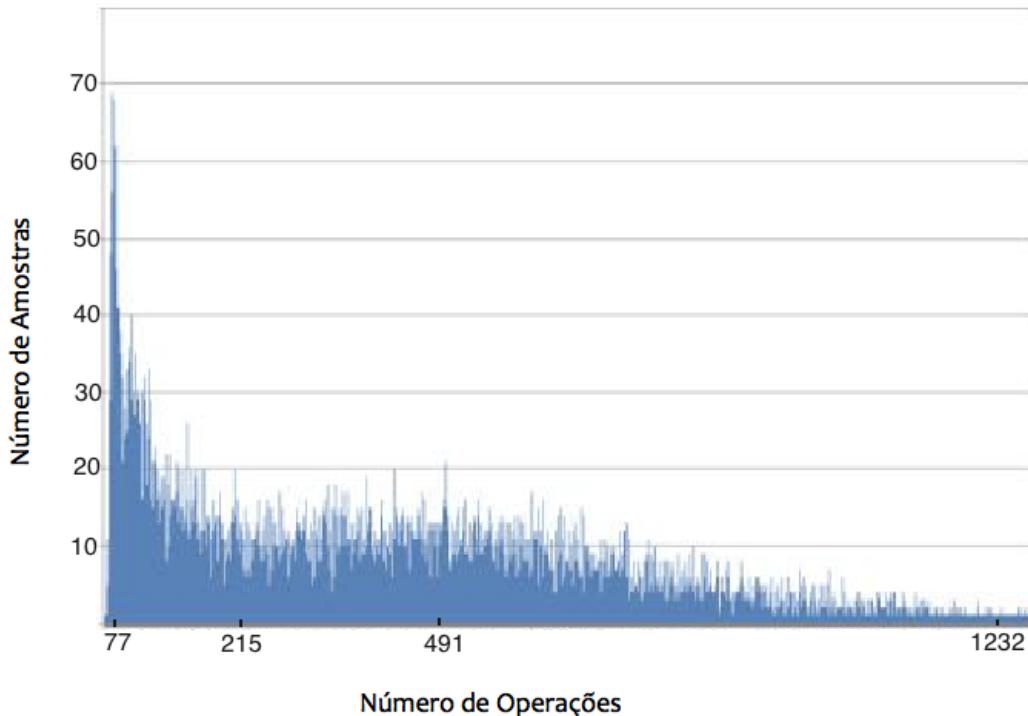


Figura A.12: Distribuição encontrada para $N=50$ e $M=215$

Este é o ponto de mudança de fase. Podemos verificar que neste ponto o zChaff não respeita nenhuma distribuição específica e temos um resultado inconclusivo. Nas próximas sessões iremos perceber que esse fenômeno ocorre para todos os pontos de mudança de fase.

Os testes de aderência estão apresentados a seguir.

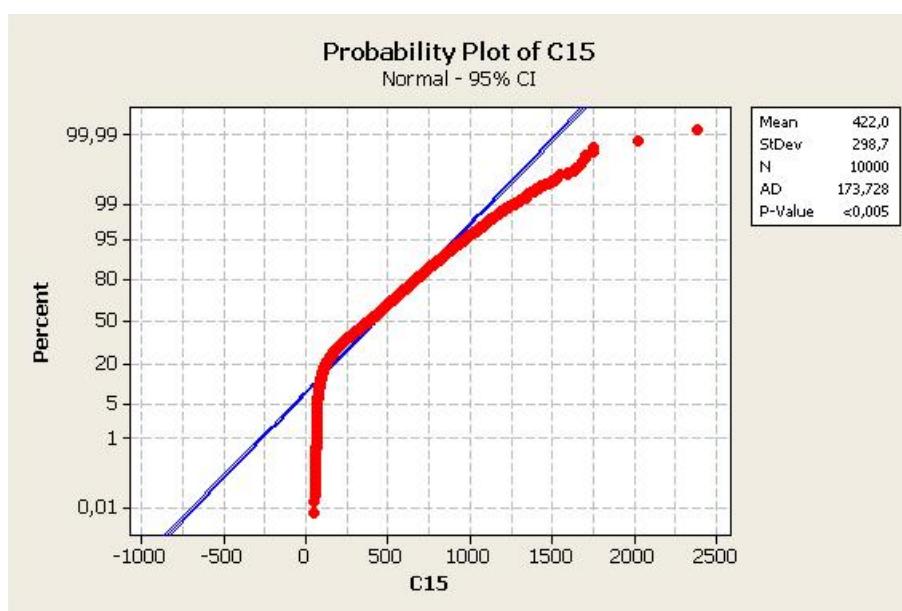
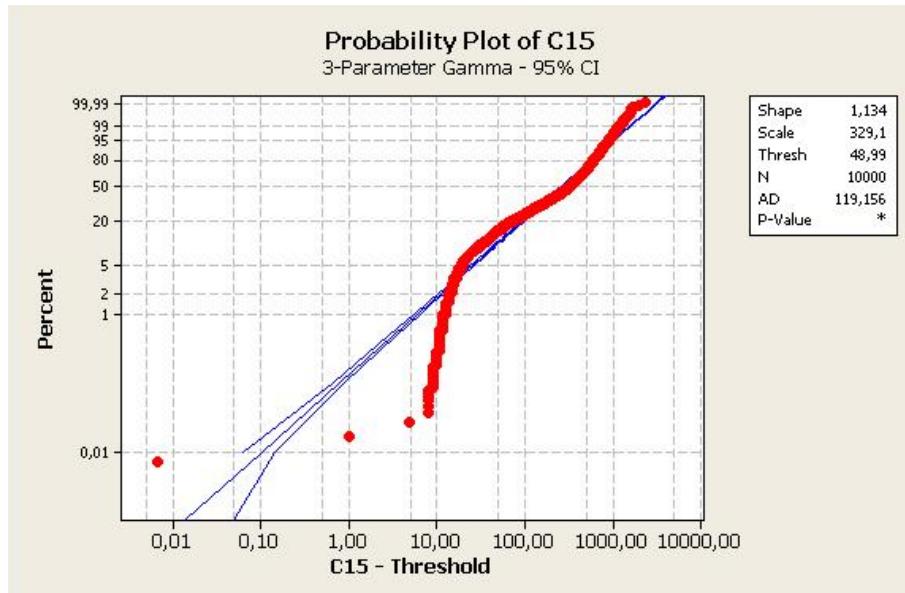
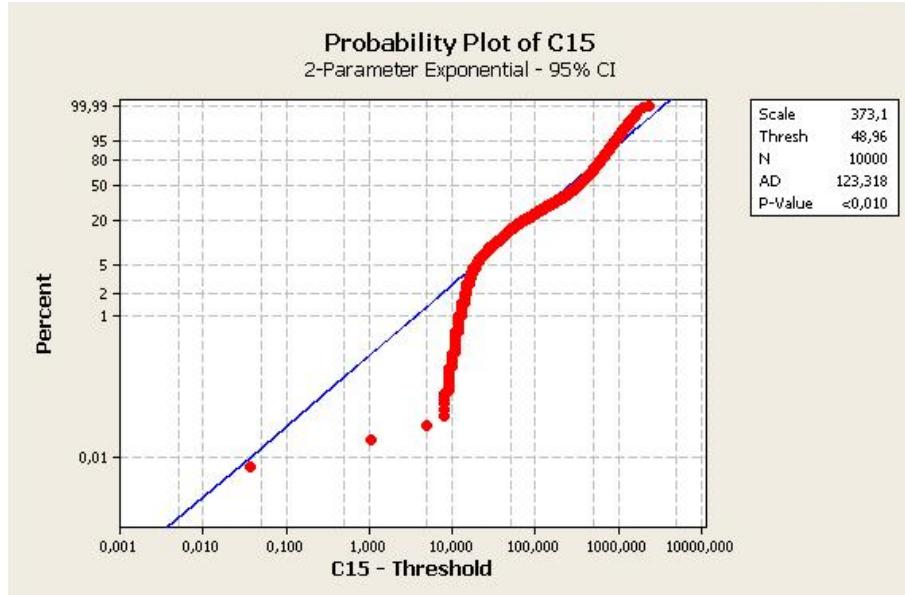


Figura A.13: Teste de aderência com a distribuição Normal



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros



(b) Teste de aderência com a distribuição Exponencial com 2 parâmetros

Figura A.14: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=215$

A.1.6 $N= 50$ e $M=250$ ($\frac{M}{N} = 5$)

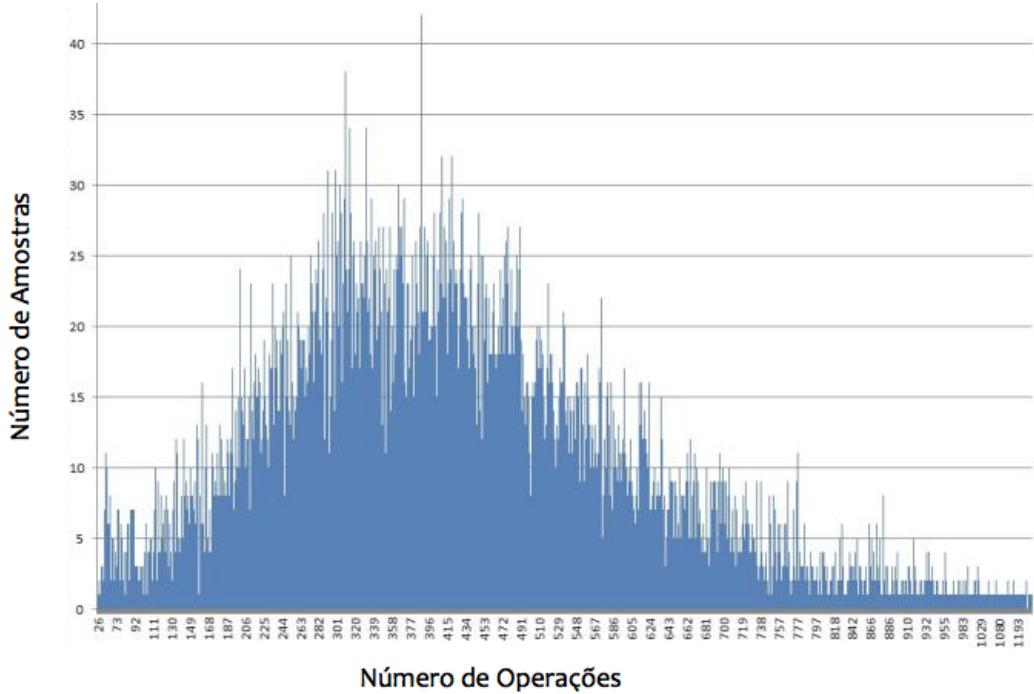
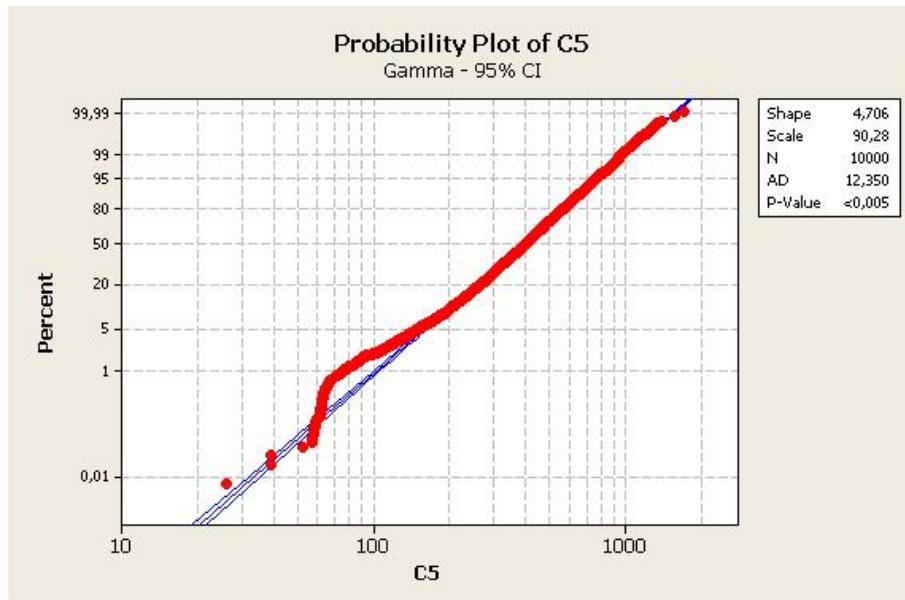


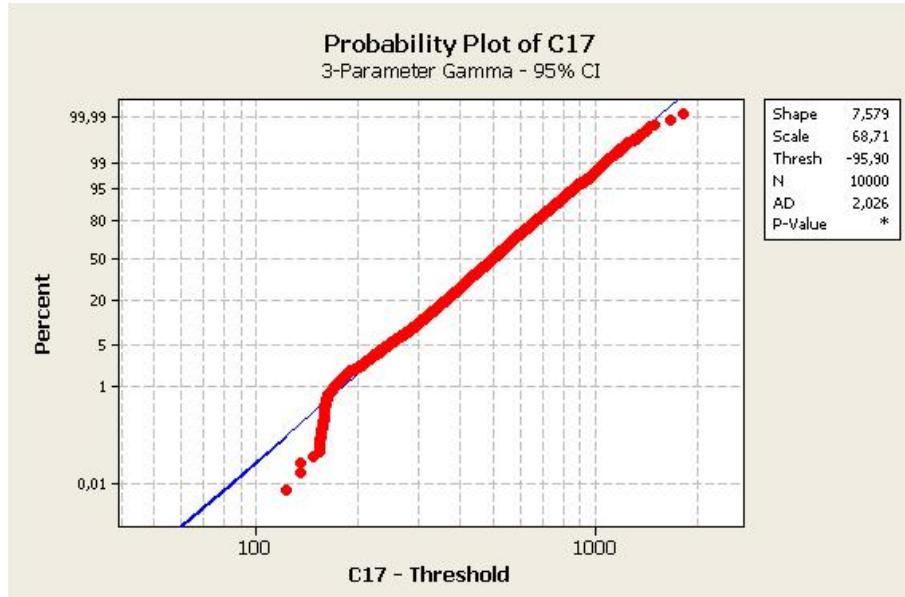
Figura A.15: Distribuição encontrada para $N=50$ e $M=250$

Para o caso acima, verificamos que a distribuição Lognormal é a distribuição que melhor se adere aos dados encontrado, através da qual obtemos o $AD=1.109$. De acordo com a tabela apresentada no início do capítulo, o valor crítico de AD para a distribuição Log-normal e um nível de significância de 0,01 é 1,035 . Logo essa distribuição está muito próxima de se ajustar a distribuição lognormal, porém não podemos ter certeza.

Os testes de aderência estão apresentados a seguir.

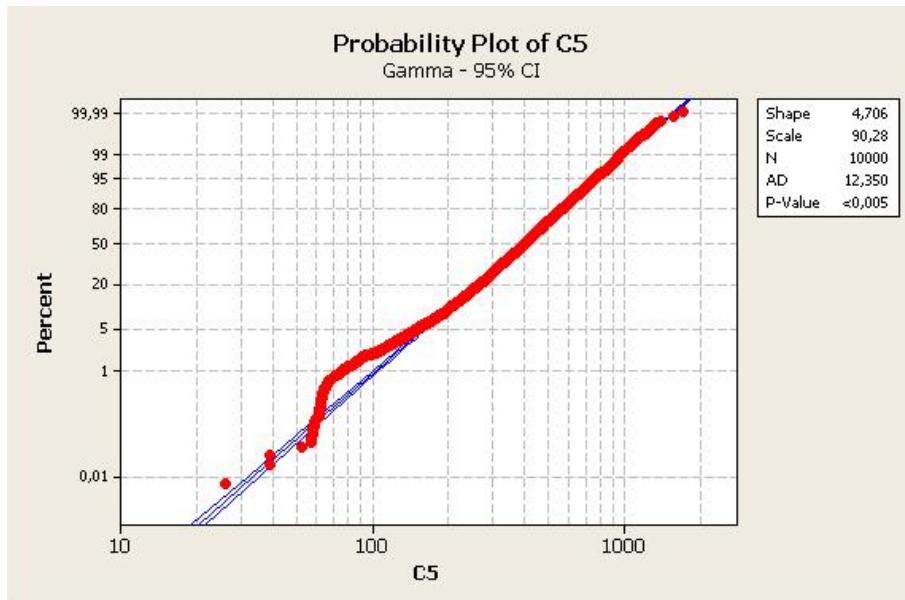


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

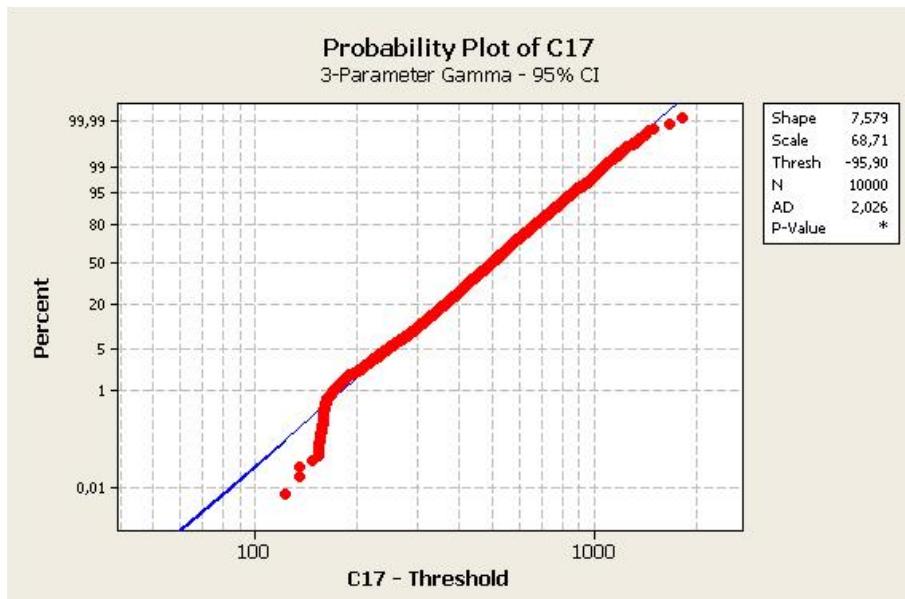


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.16: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=250$



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama



(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.17: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=250$

A.1.7 N= 50 e M=300 ($\frac{M}{N} = 6$)

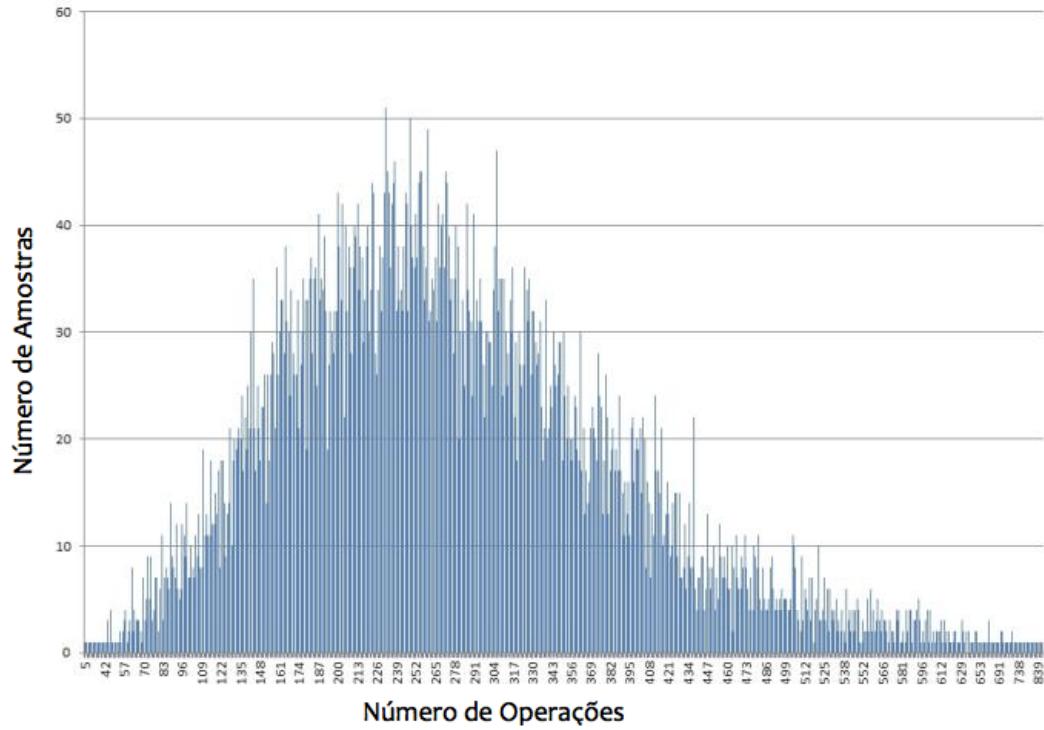
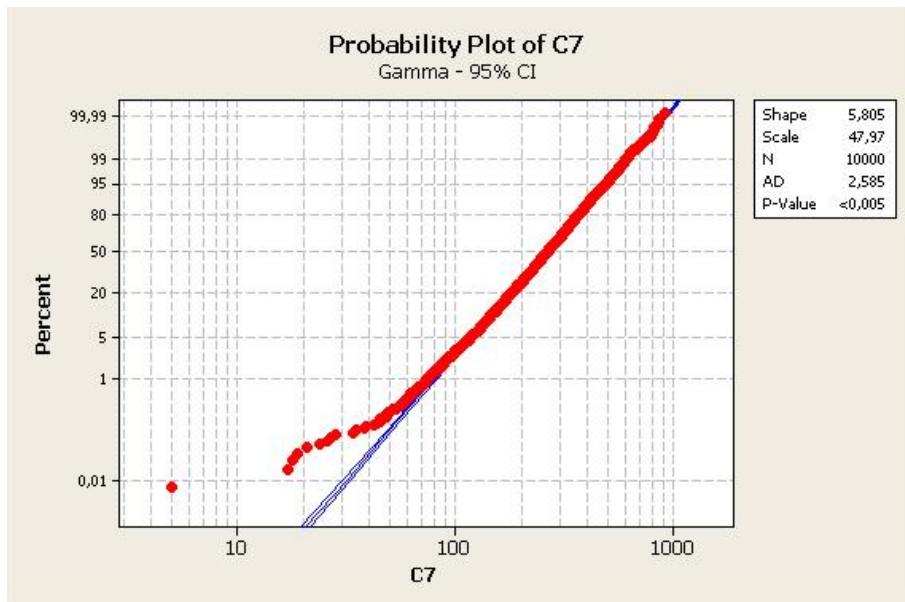


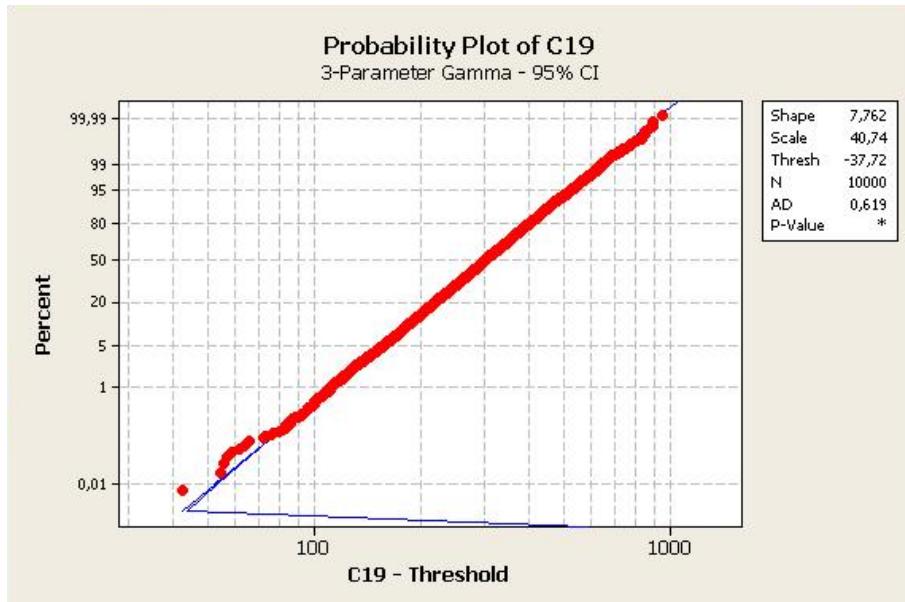
Figura A.18: Distribuição encontrada para $N=50$ e $M=300$

Neste caso podemos afirmar que a distribuição encontrada é uma a distribuição Lognormal, com os parâmetros definidos na imagem (e) da figura 5, pois obtivemos $AD=0,291$ ou seja $AD < (AD_{critico} = 1,035)$.

Os testes de aderência estão apresentados a seguir.



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama



(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.19: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=300$

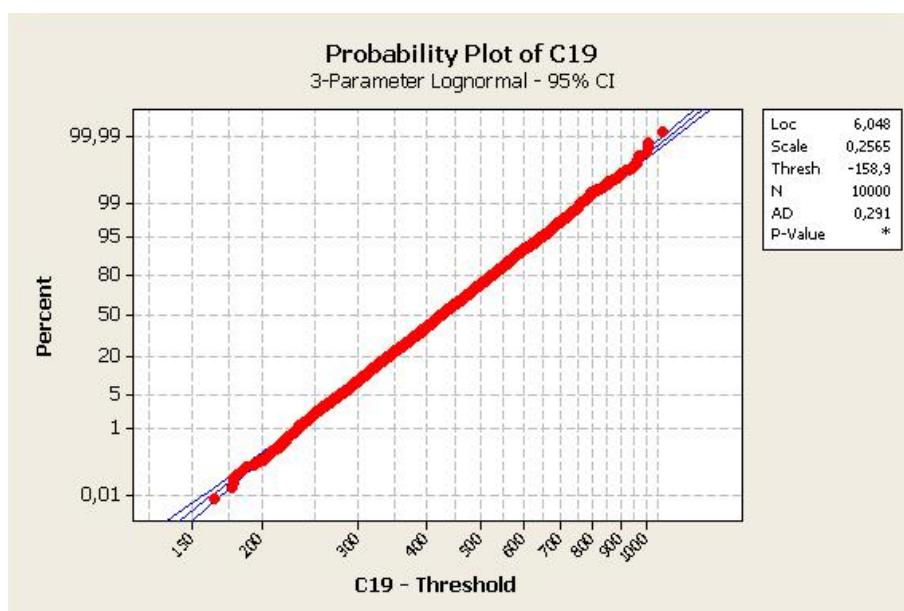
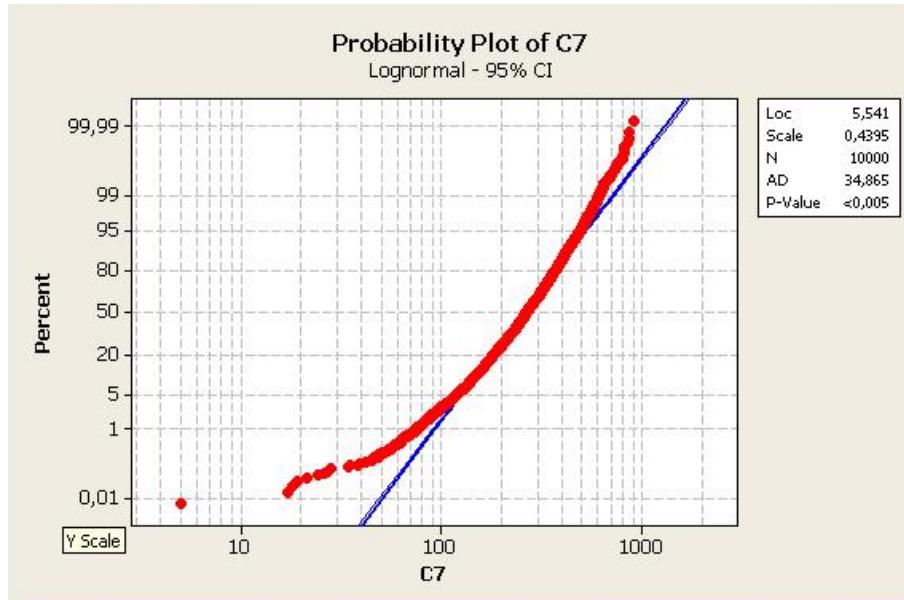


Figura A.20: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=300$

A.1.8 N= 50 e M=350 ($\frac{M}{N} = 7$)

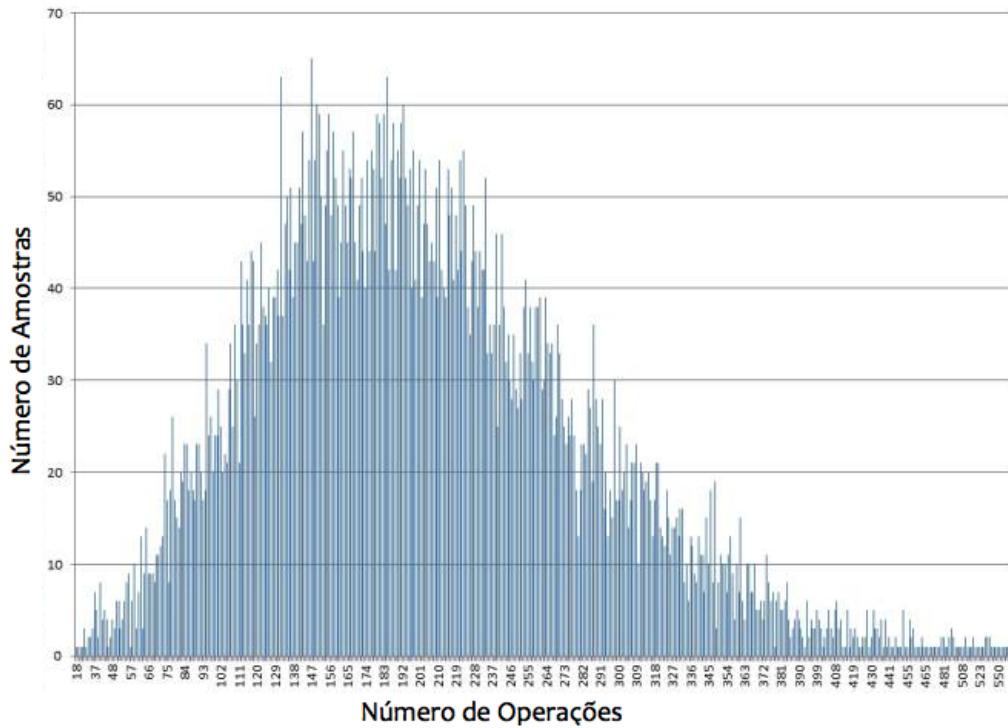
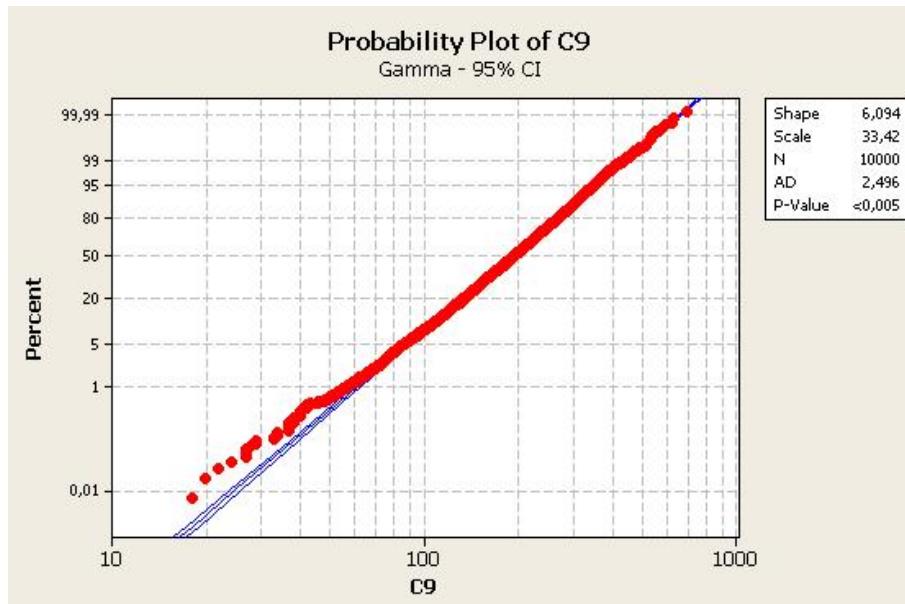


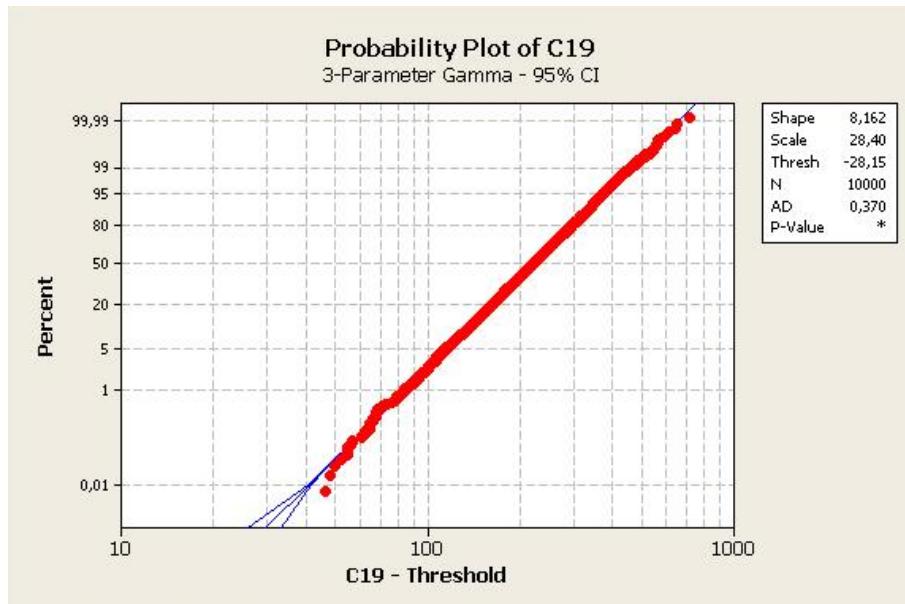
Figura A.21: Distribuição encontrada para $N=50$ e $M=350$

Para o caso acima, o teste se adere tanto a distribuição gama com $AD=0,370$ quanto para a distribuição Lognormal com $AD= 0.772$. No entanto precisaria de um estudo mais aprofundado para que a probabilidade de erro na decisão da escolha da distribuição seja minimizado.

Os testes de aderência estão apresentados a seguir.

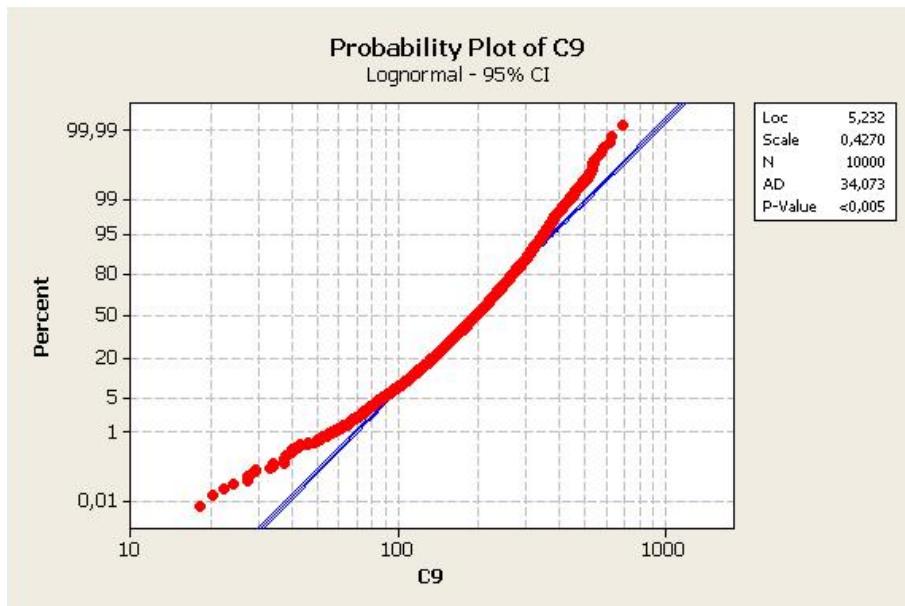


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

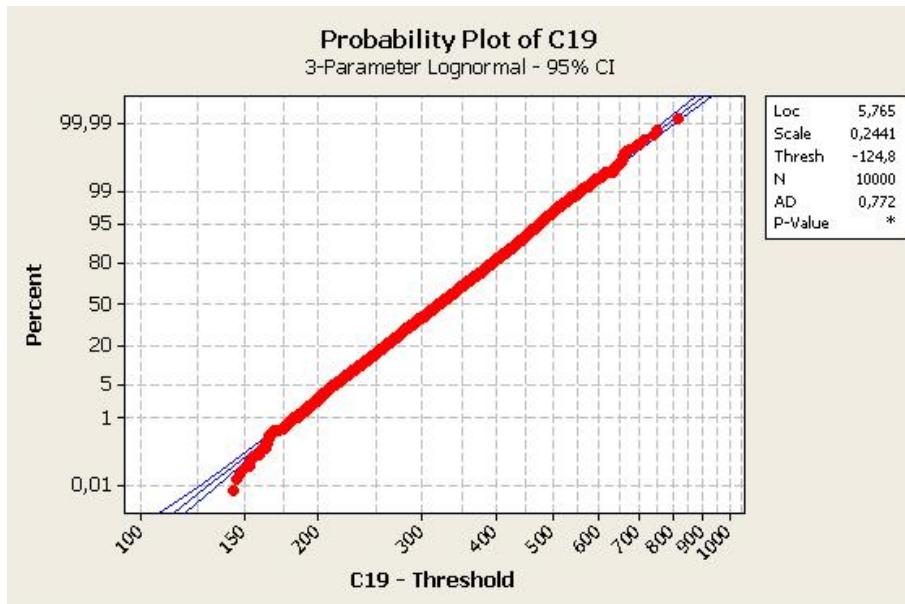


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.22: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=350$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.23: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=350$

A.1.9 $N= 50$ e $M=400$ ($\frac{M}{N} = 8$)

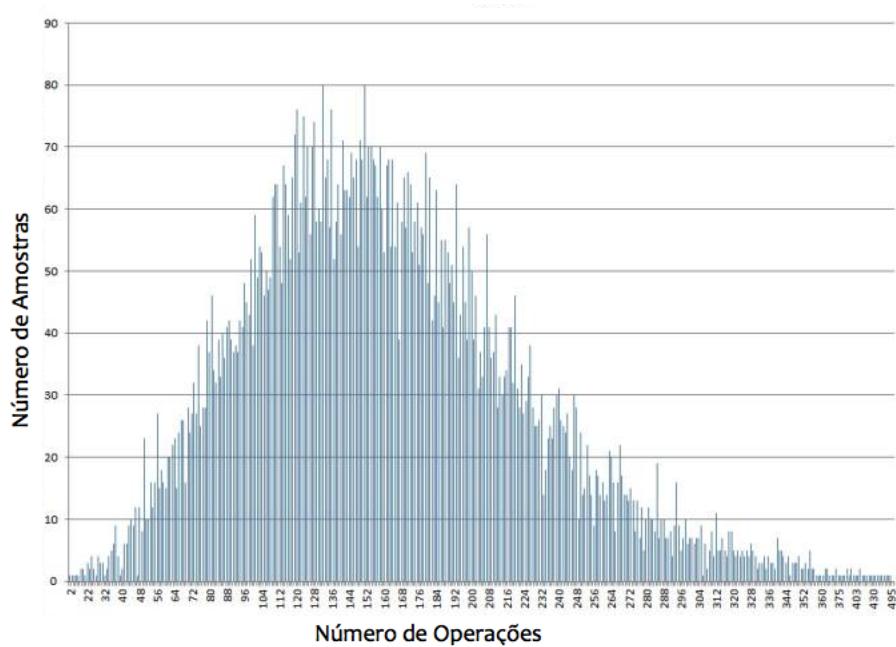
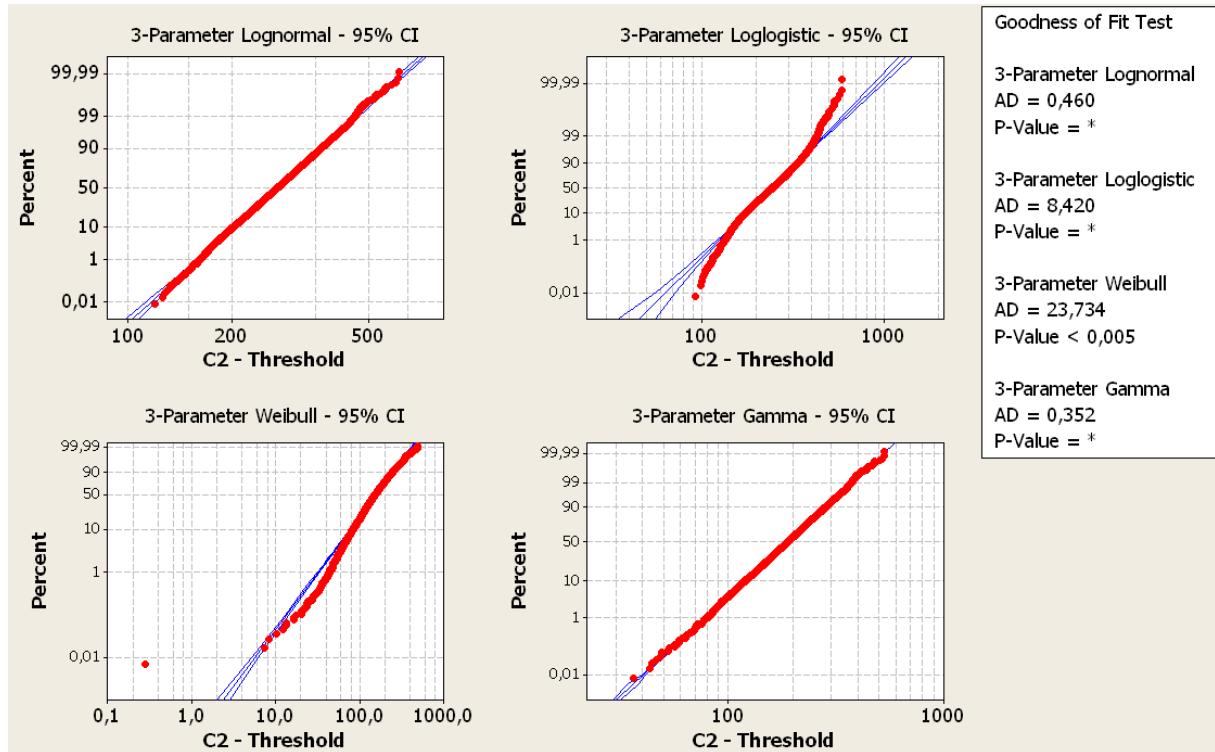


Figura A.24: Distribuição encontrada para $N=50$ e $M=400$



(a) Teste de aderência com as distribuições com 3 parâmetros : Lognormal , Loglogistic, Weibull e Gama.

Figura A.25: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=50$ e $M=400$

Este caso é bastante semelhante ao anterior onde o teste se adere tanto a distribuição gama com $AD=0,352$ quanto para a distribuição Lognormal com $AD= 0,460$.

A.1.10 N= 100 e M=100 ($\frac{M}{N} = 1$)

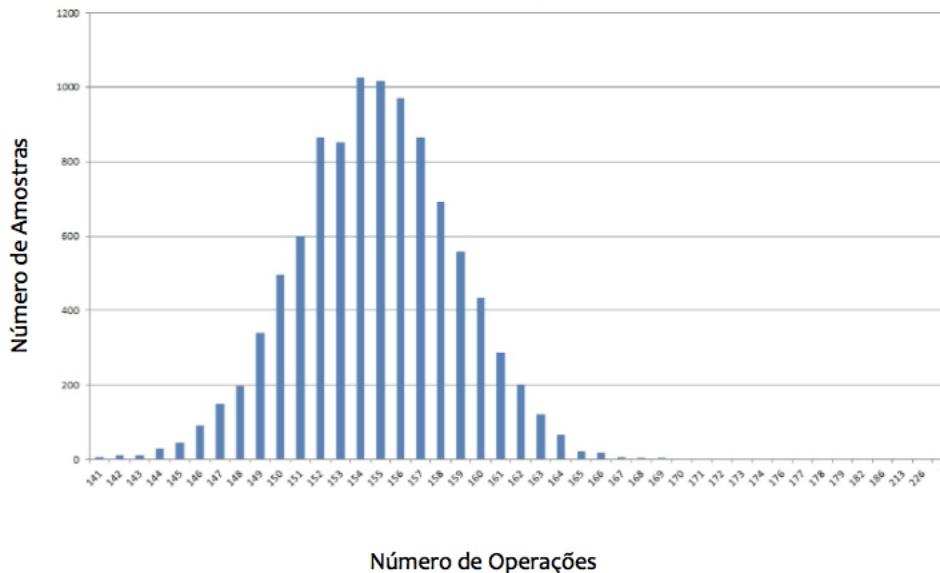
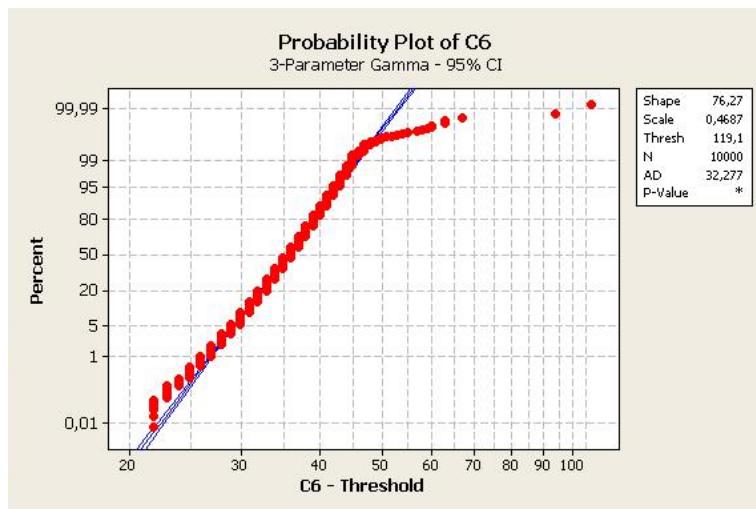


Figura A.26: Distribuição encontrada para N=100 e M=100

Este caso se assemelha aos casos anteriores que $\frac{M}{N} < 3$ onde os testes de aderência de Anderson-Darling não se aderem a nenhuma distribuição conhecida.

Assim podemos concluir que para N=100 e M=100, o número de operações realizadas pelo zChaff respeita uma distribuição discreta a qual ainda não identificamos sua origem porém com caudas que possuem comprimentos semelhantes .

Os testes de aderência estão apresentados a seguir.



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

Figura A.27: Distribuição e testes de aderência para os valores de N=100 e M=100

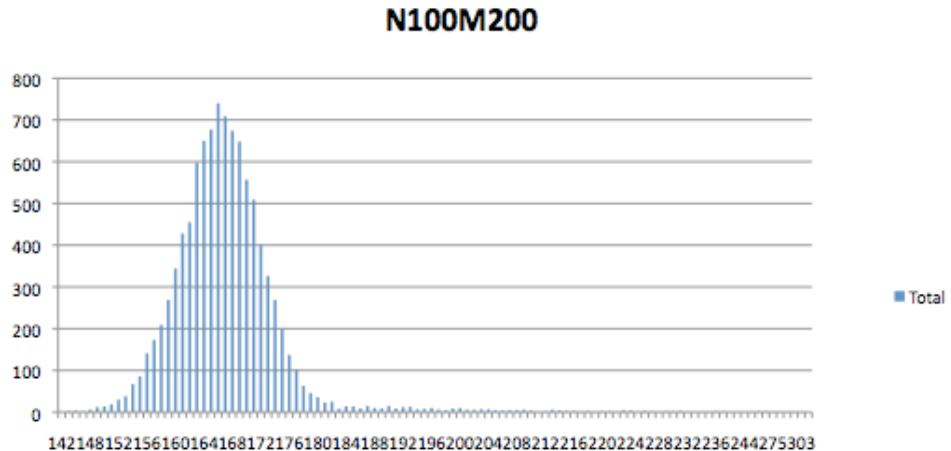
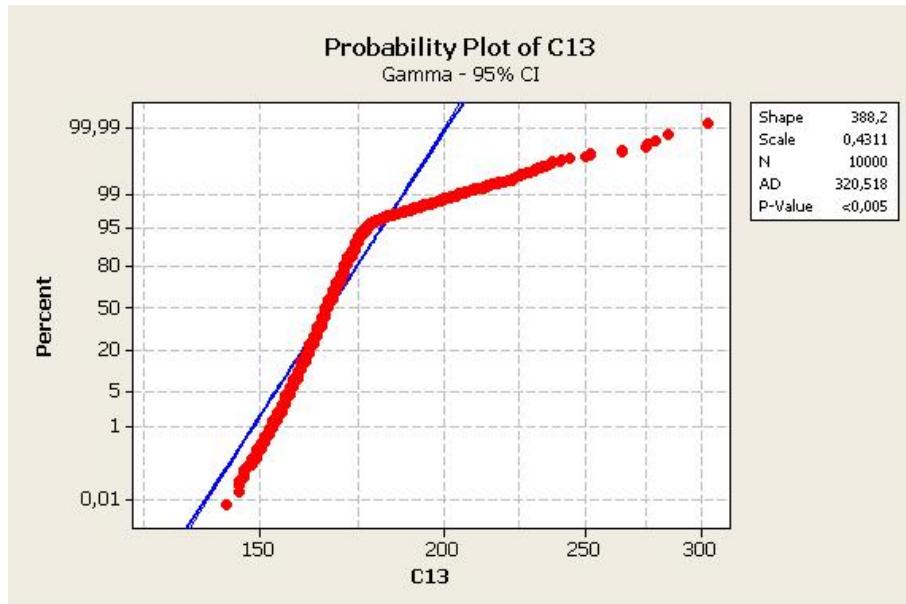
A.1.11 N= 100 e M=200 ($\frac{M}{N} = 2$)


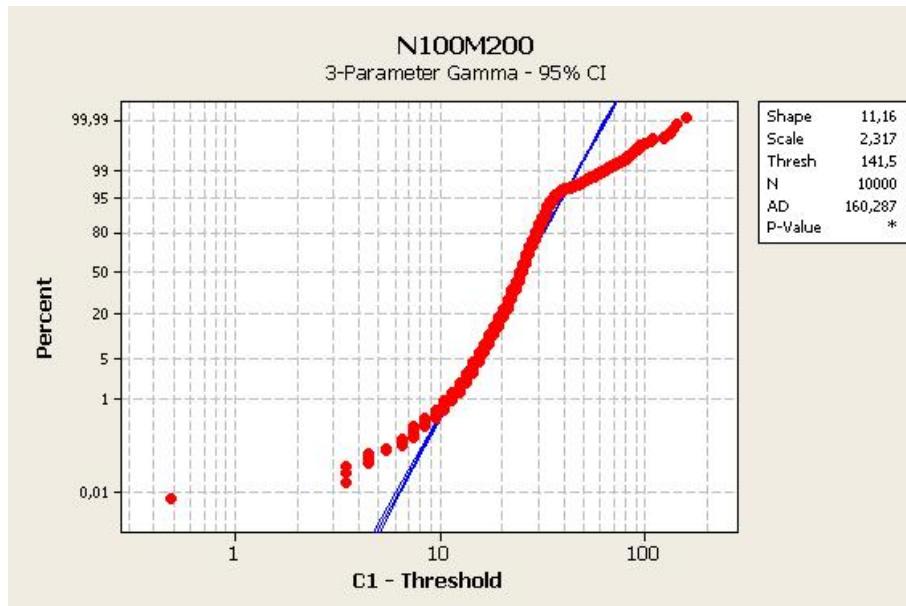
Figura A.28: Distribuição encontrada para $N=100$ e $M=200$

Para $N=100$ e $M=200$ os testes de aderência de Anderson-Darling não se adere a nenhuma distribuição conhecida e neste caso concluímos que o número de operações realizadas pelo zChaff respeita uma distribuição discreta a qual ainda não identificamos sua origem onde as caudas possuem comprimentos semelhantes exceto por poucos valores se estendem a cauda de direita .

Os testes de aderência estão apresentados a seguir.

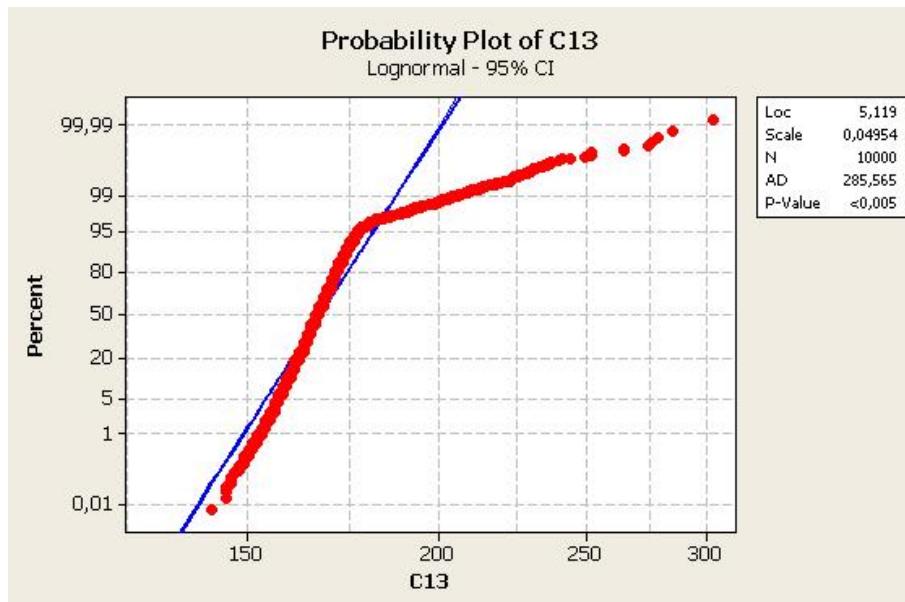


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

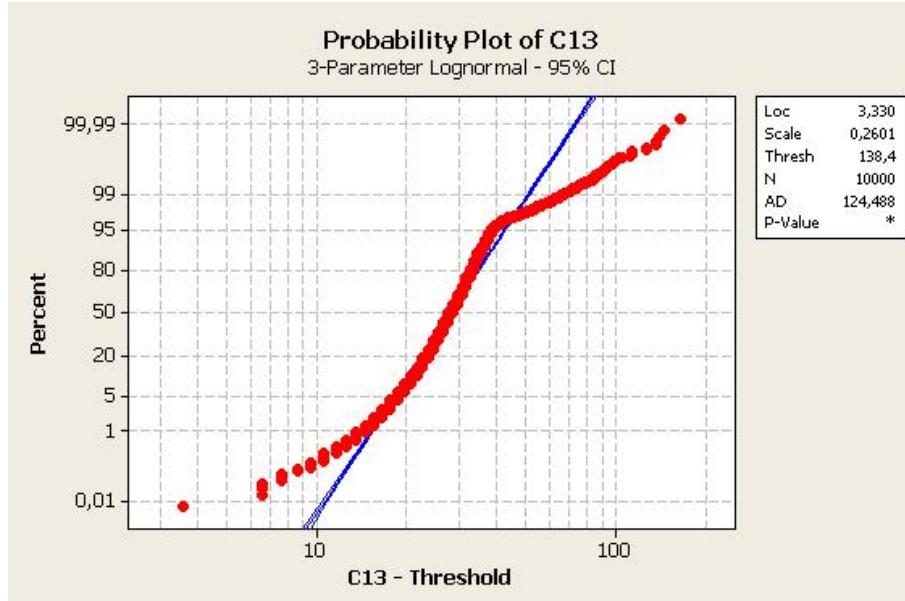


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.29: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=200$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.30: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=200$

A.1.12 $N= 100$ e $M=300$ ($\frac{M}{N} = 3$)

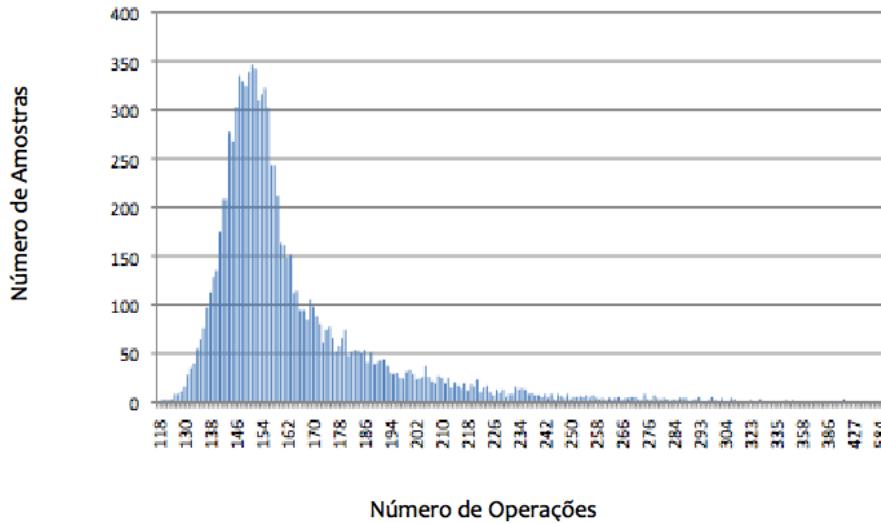
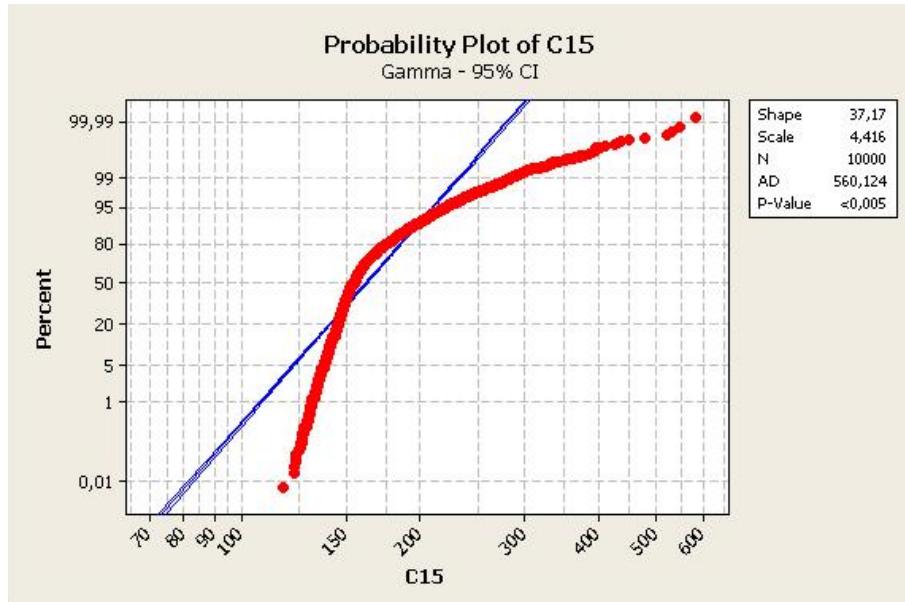


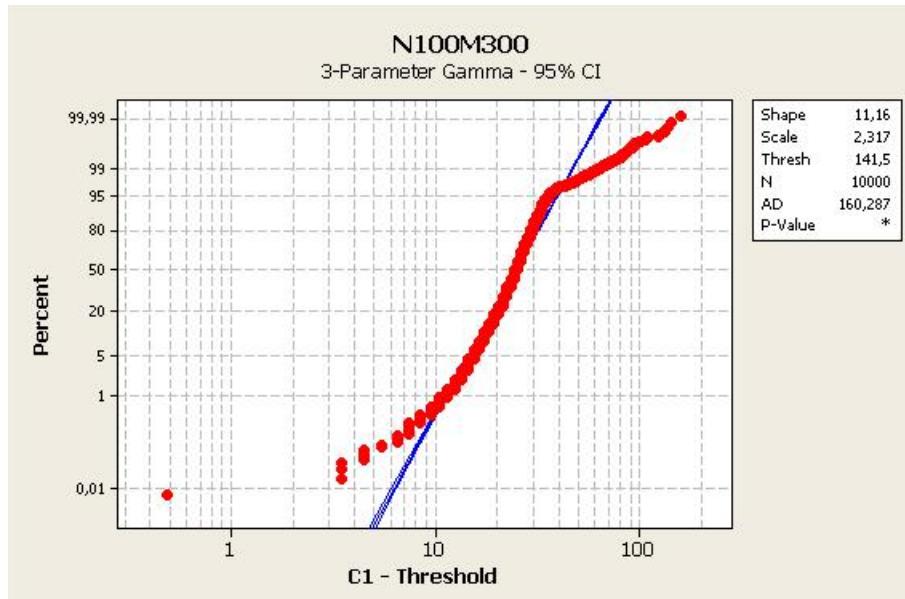
Figura A.31: Distribuição encontrada para $N=100$ e $M=300$

Verificamos neste caso a existência de uma distribuição discreta com caudas bastante distintas e não uniformes, quase contínua, a qual os testes de aderência de Anderson-Darling não se adere a nenhuma distribuição conhecida .

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

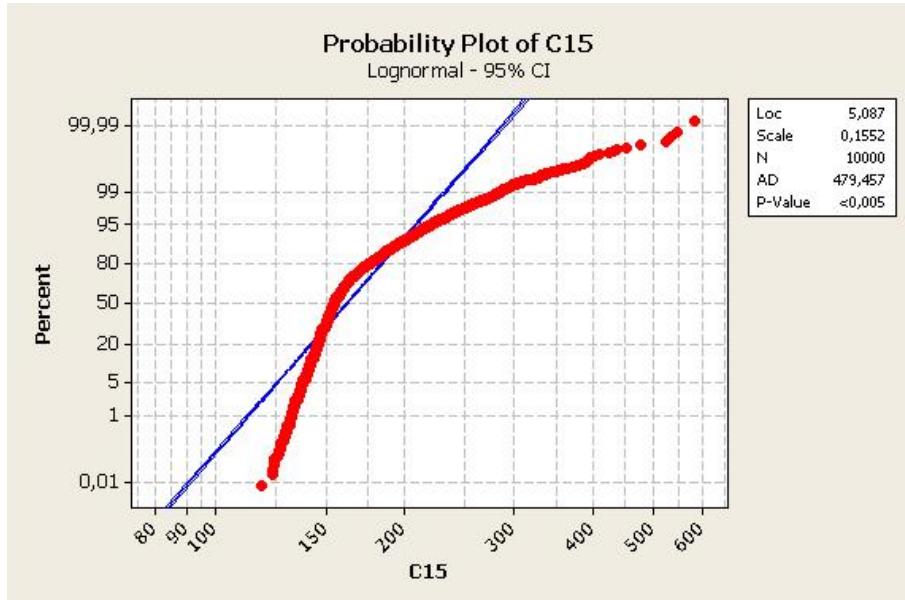


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

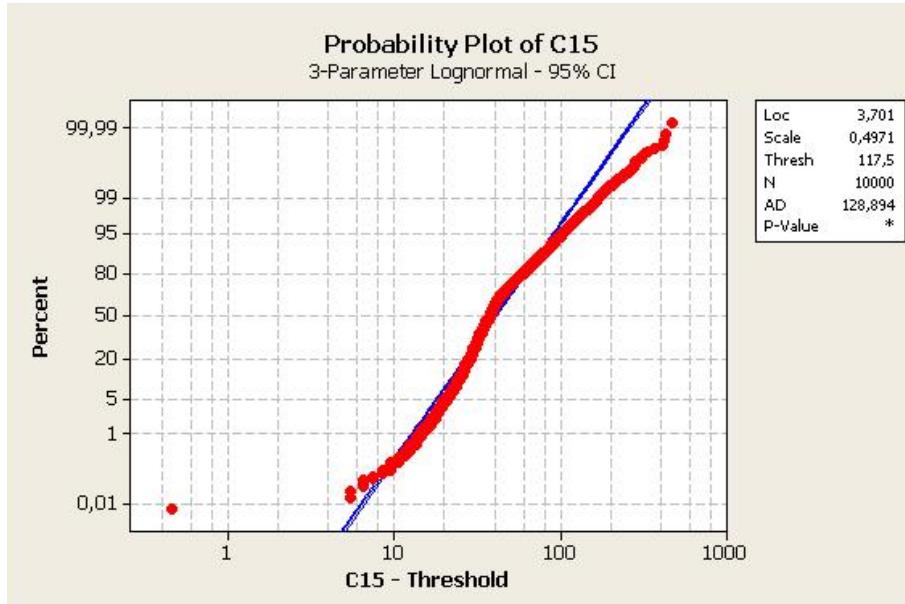


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.32: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=300$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.33: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=300$

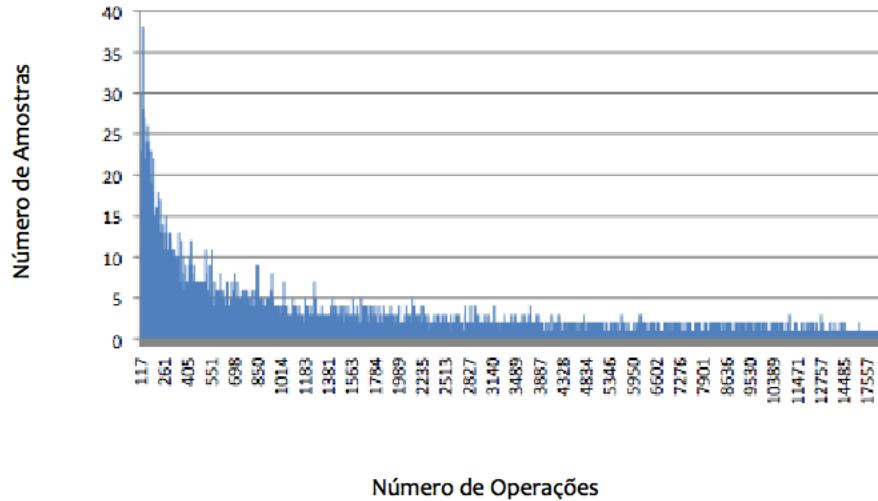
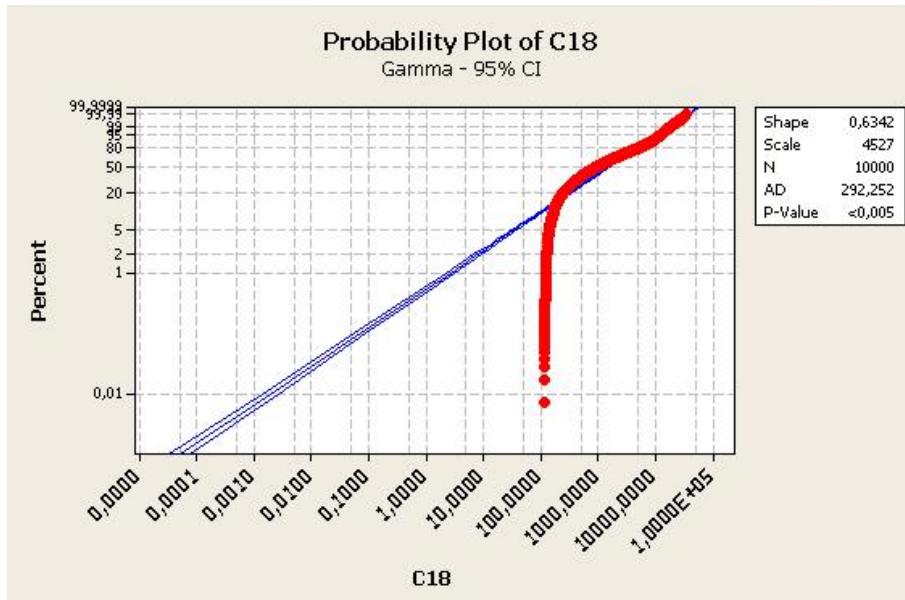
A.1.13 N= 100 e M=400 ($\frac{M}{N} = 4$)


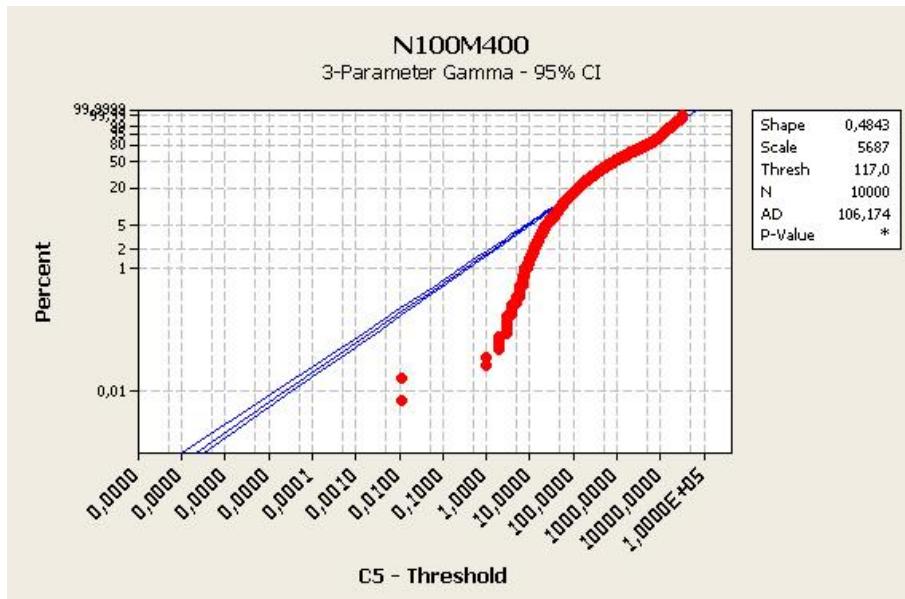
Figura A.34: Distribuição encontrada para $N=100$ e $M=400$

O comportamento para este caso é muito semelhante ao caso $\frac{M}{N}=4$ anterior onde da distribuição gráfica se assemelha a uma exponencial logarítmica, a qual não se ajustou a nenhuma distribuição e não conseguimos descobrir seus parâmetros.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

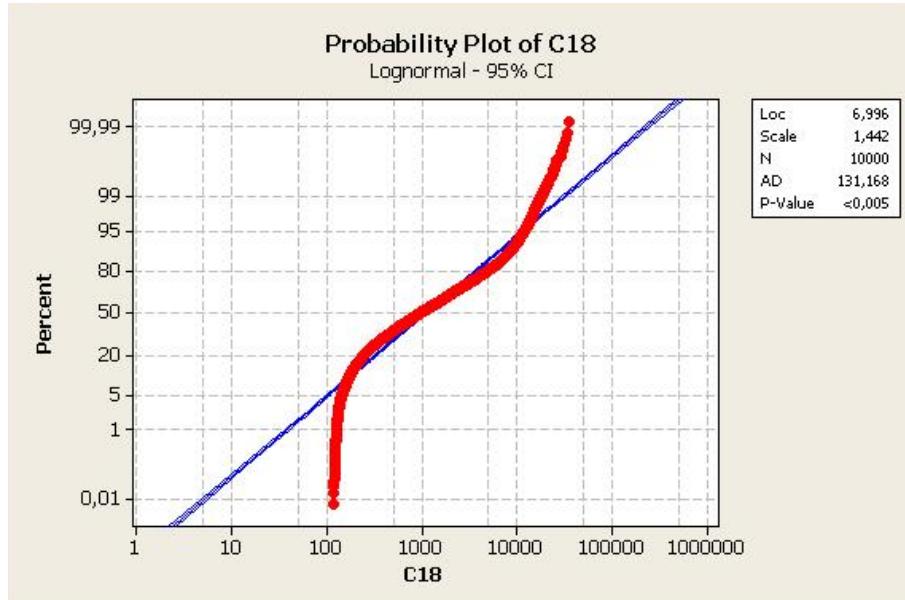


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

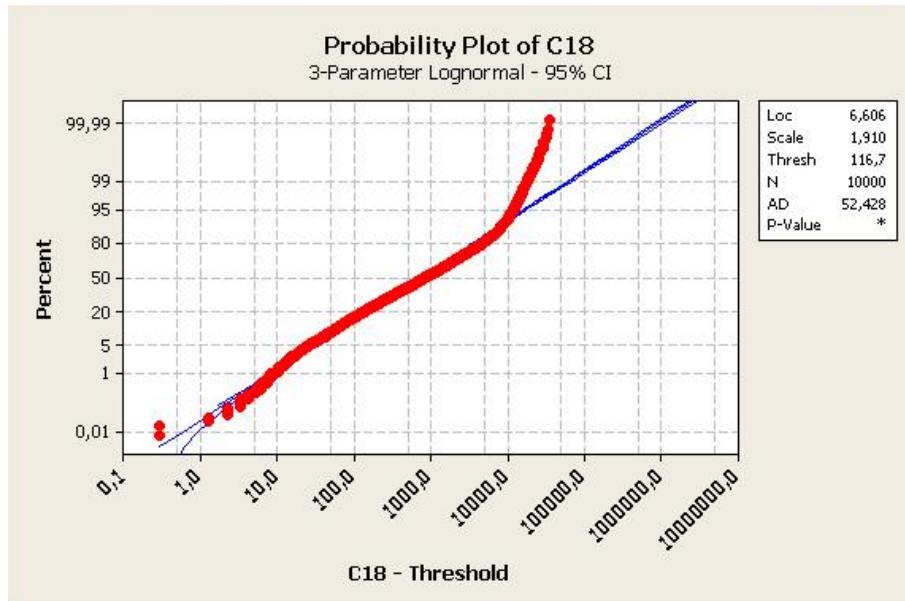


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.35: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=400$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.36: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=400$

A.1.14 N= 100 e M=430 ($\frac{M}{N} = 4.3$)

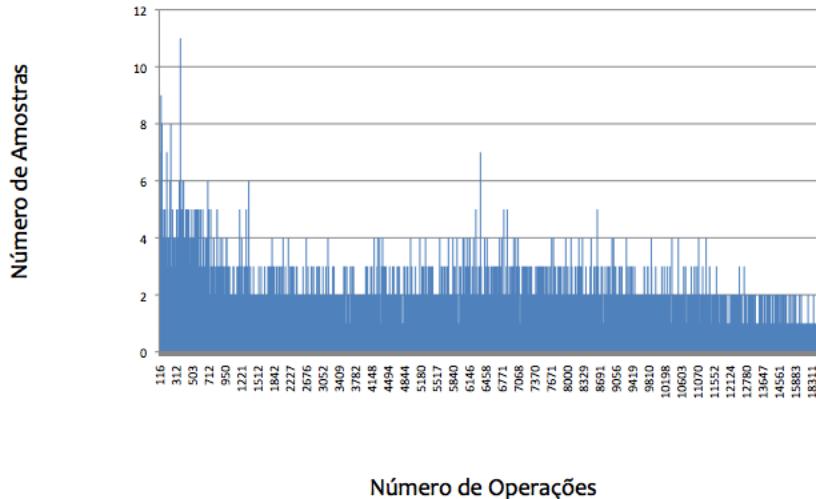
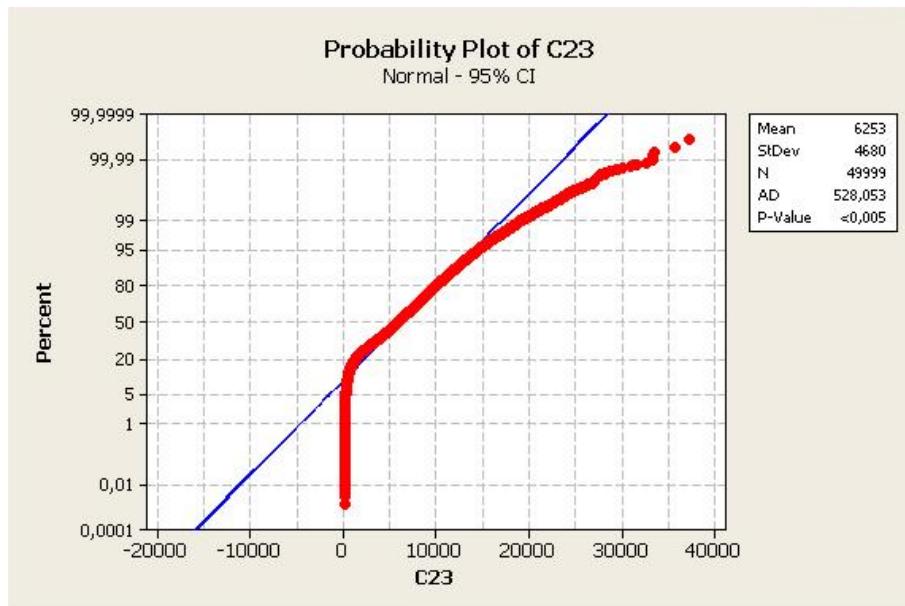


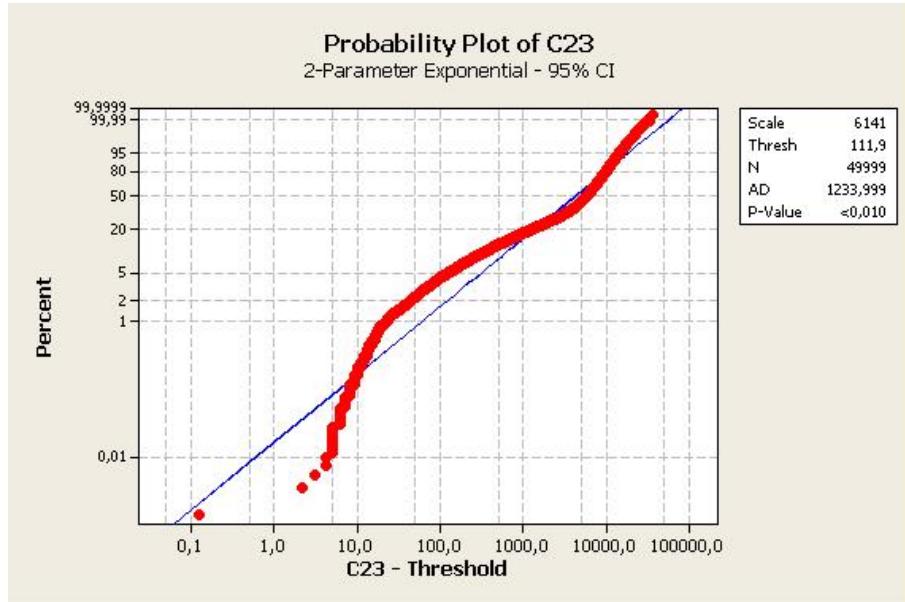
Figura A.37: Distribuição encontrada para N=100 e M=430

Quando executamos o zChaff com 10.000 problemas deste e de mais alguns casos, observamos uma curva totalmente indefinida da qual nada podemos afirmar. Logo, realizamos testes com mais amostras, inicialmente estimadas em 50.000, para estes casos indefinidos. Após executarmos os testes com um maior número de amostras, obtivemos o gráfico acima do qual ainda não foi possível afirmar se tende a distribuição uniforme ou à outro tipo de distribuição. Logo para o ponto de mudança de fase, novamente obtivemos um resultado inconclusivo.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

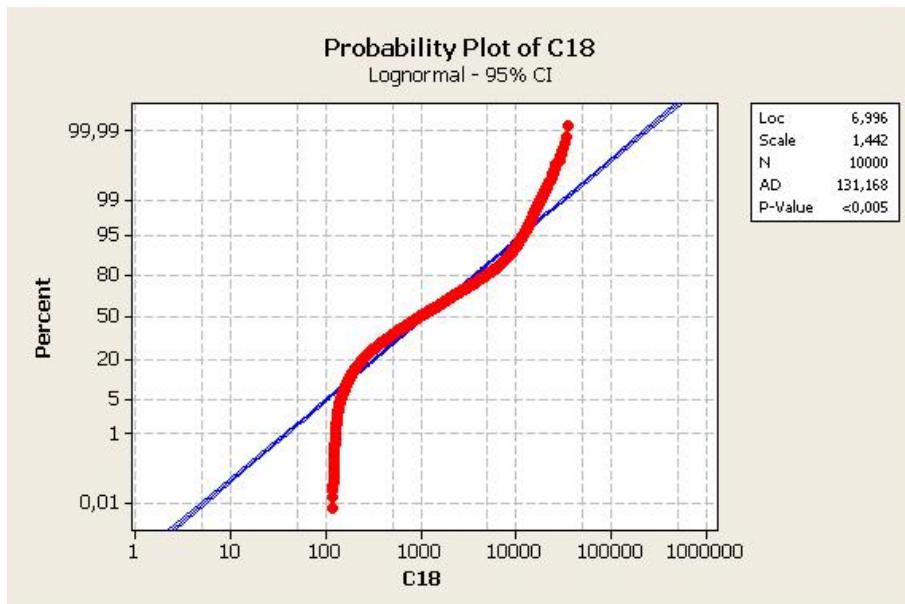


(a) Teste de aderência com a distribuição Normal

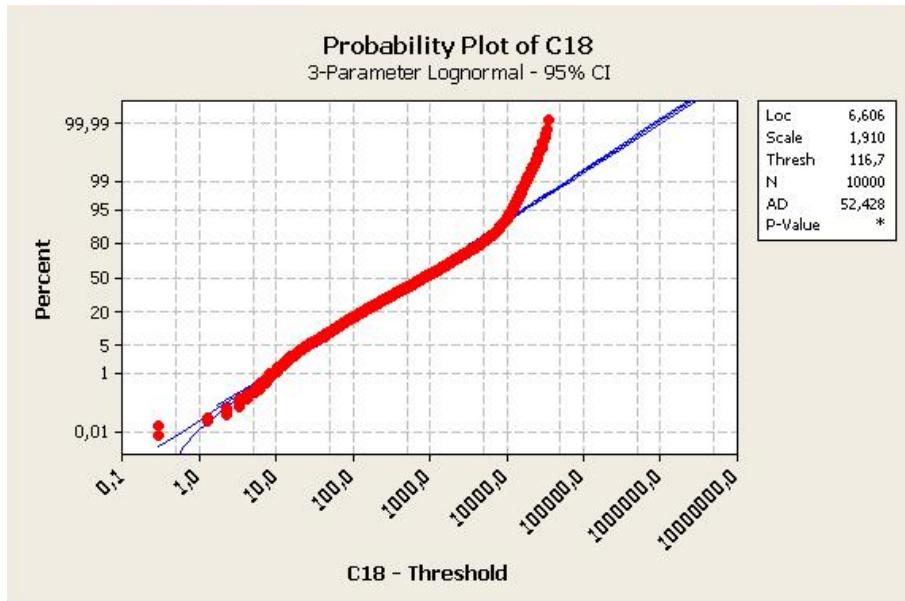


(b) Teste de aderência com a distribuição Exponencial com 2 parâmetros

Figura A.38: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=430$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.39: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=400$

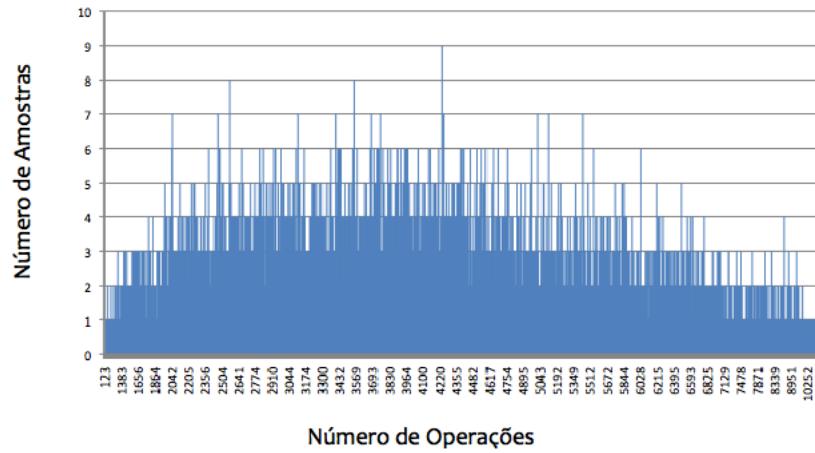
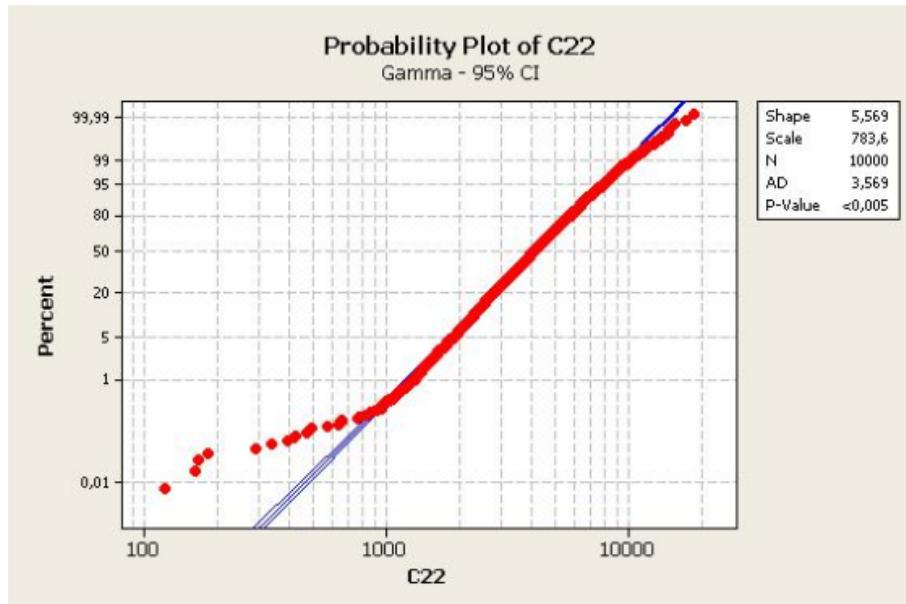
A.1.15 N= 100 e M=500 ($\frac{M}{N} = 5$)


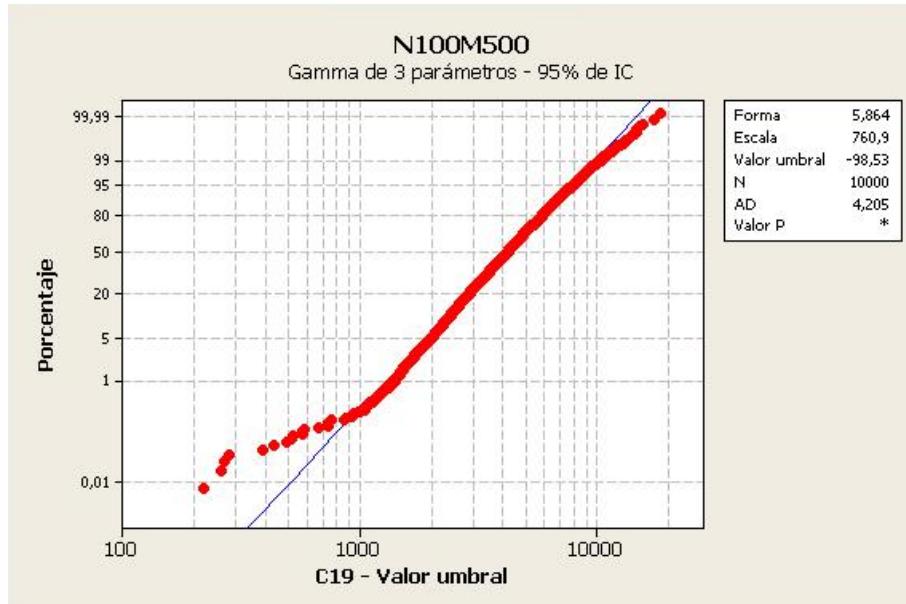
Figura A.40: Distribuição encontrada para $N=100$ e $M=500$

Neste caso podemos afirmar que a distribuição encontrada é uma distribuição Lognormal, com os parâmetros definidos na imagem (e) da figura 5.15, pois obtivemos $AD=0,462$ ou seja $AD < (AD_{critico} = 1,035)$.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

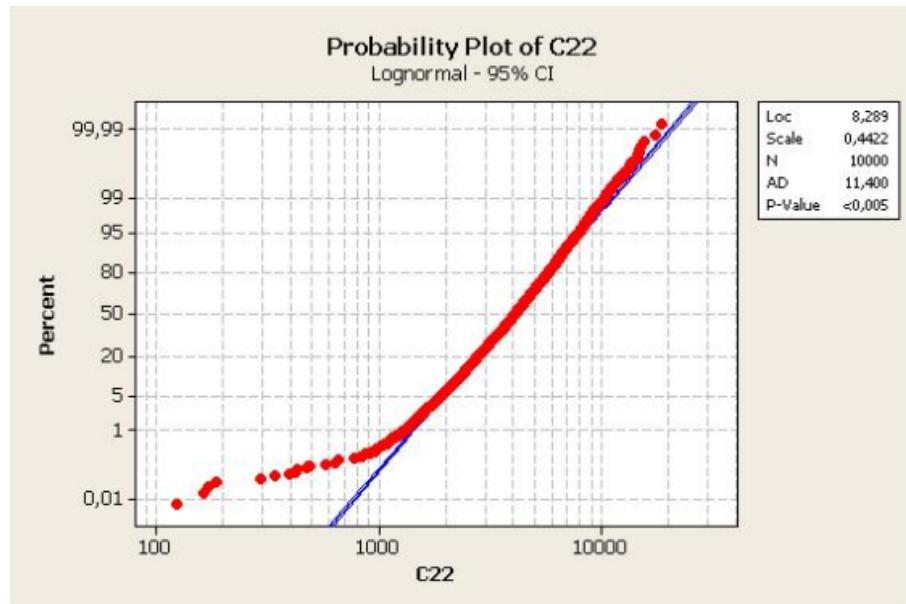


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

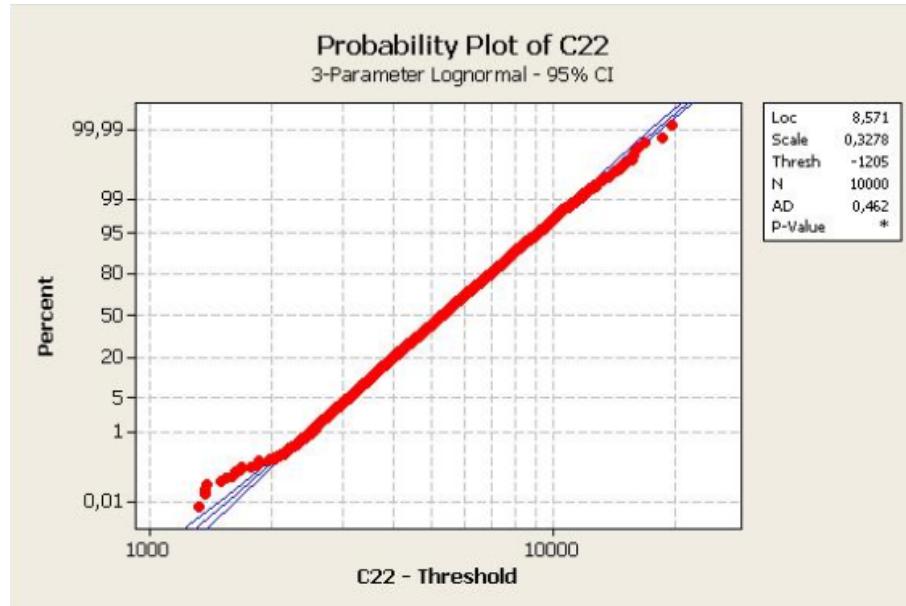


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.41: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=500$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.42: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=500$

A.1.16 N= 100 e M=600 ($\frac{M}{N} = 6$)

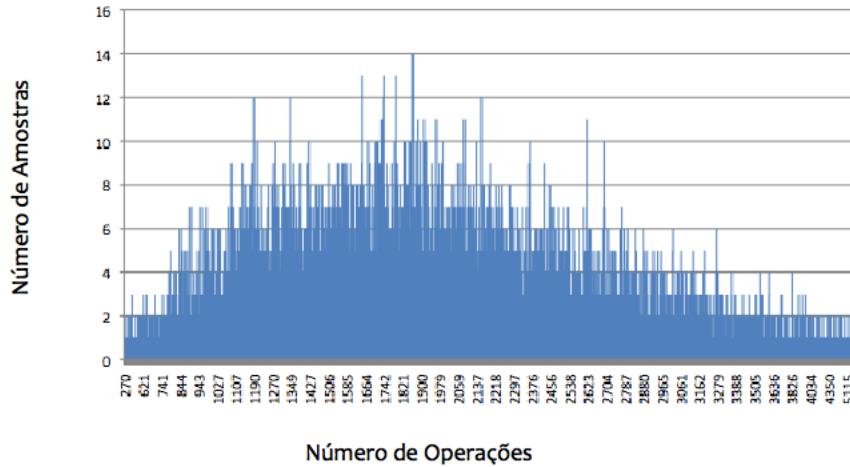
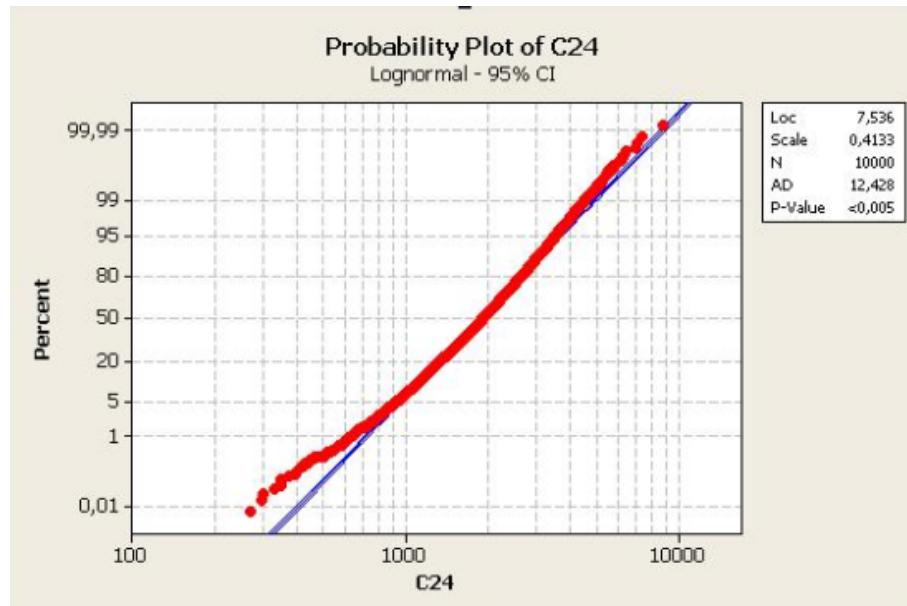


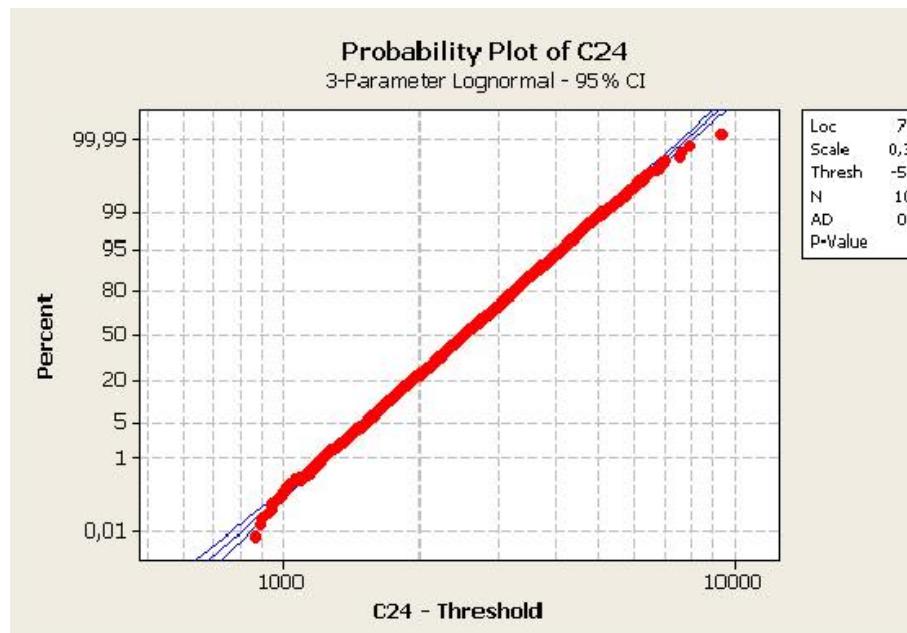
Figura A.43: Distribuição encontrada para $N=100$ e $M=600$

Neste caso podemos afirmar que a distribuição encontrada é uma a distribuição Lognormal, com os parâmetros definidos na imagem (e) da figura 5.16, pois obtivemos $AD=0,299$ ou seja $AD < (AD_{critico} = 1,035)$.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

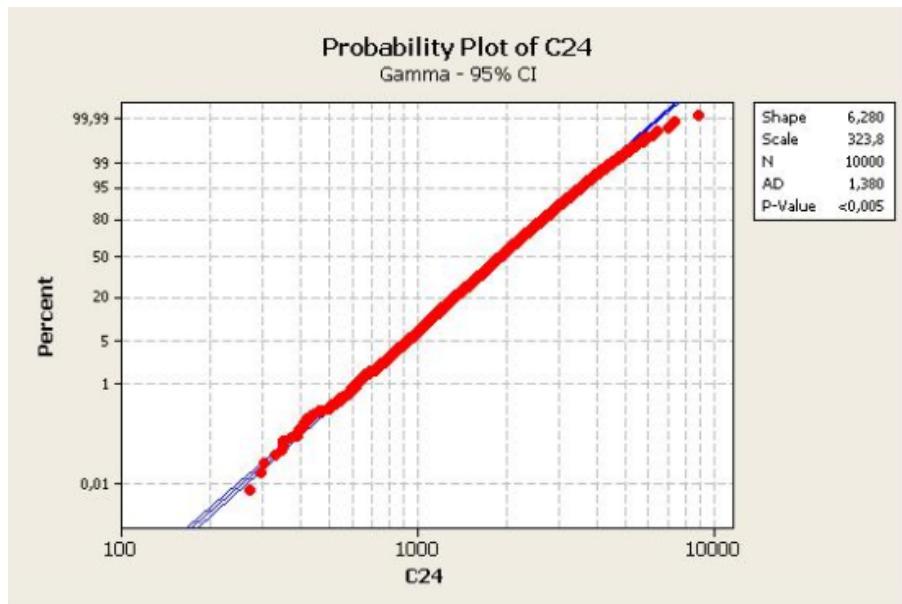


(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal

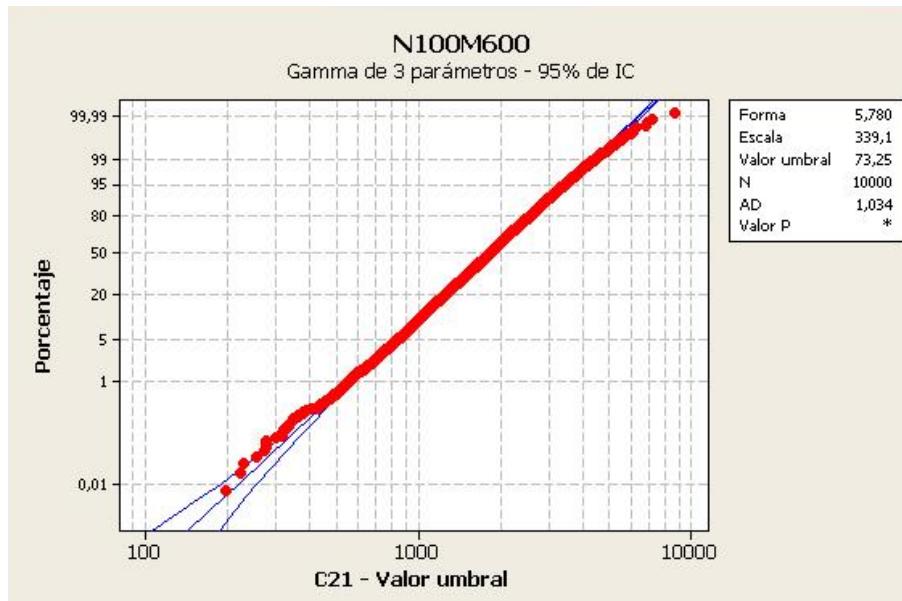


(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.44: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=600$



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama



(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.45: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=600$

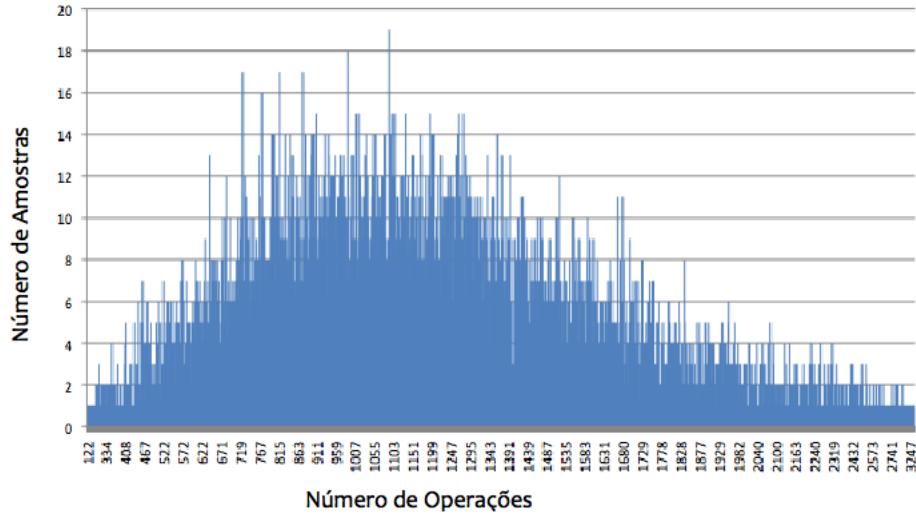
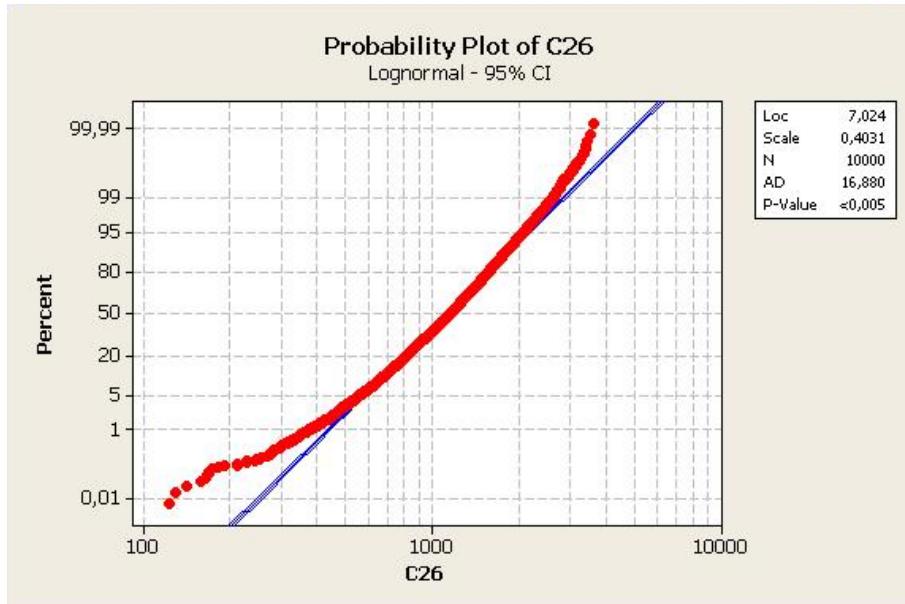
A.1.17 N= 100 e M=700 ($\frac{M}{N} = 7$)


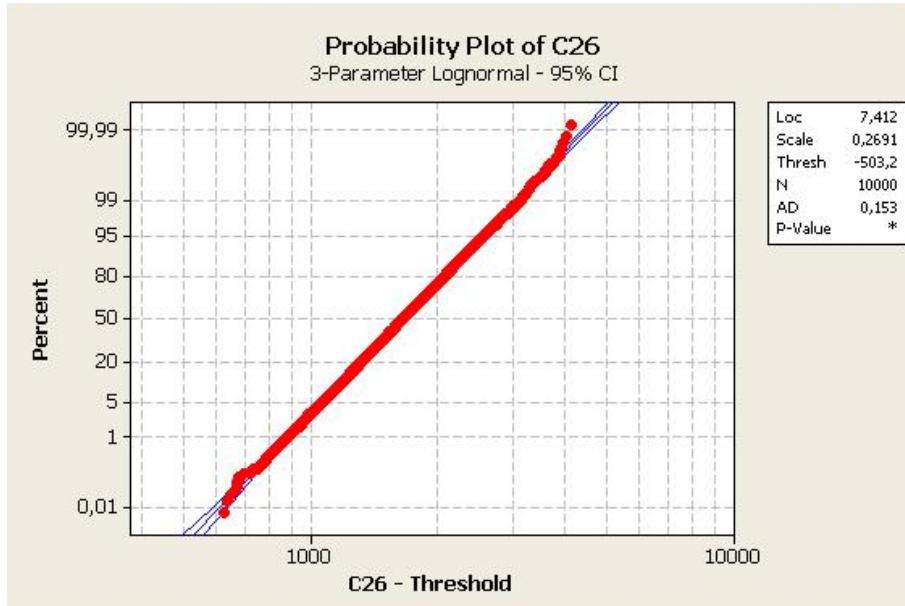
Figura A.46: Distribuição encontrada para $N=100$ e $M=700$

Neste caso podemos afirmar que a distribuição encontrada é uma a distribuição Lognormal, com os parâmetros definidos na imagem (e) da figura 5.17, pois obtivemos $AD=0,153$ ou seja $AD < (AD_{critico} = 1,035)$.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

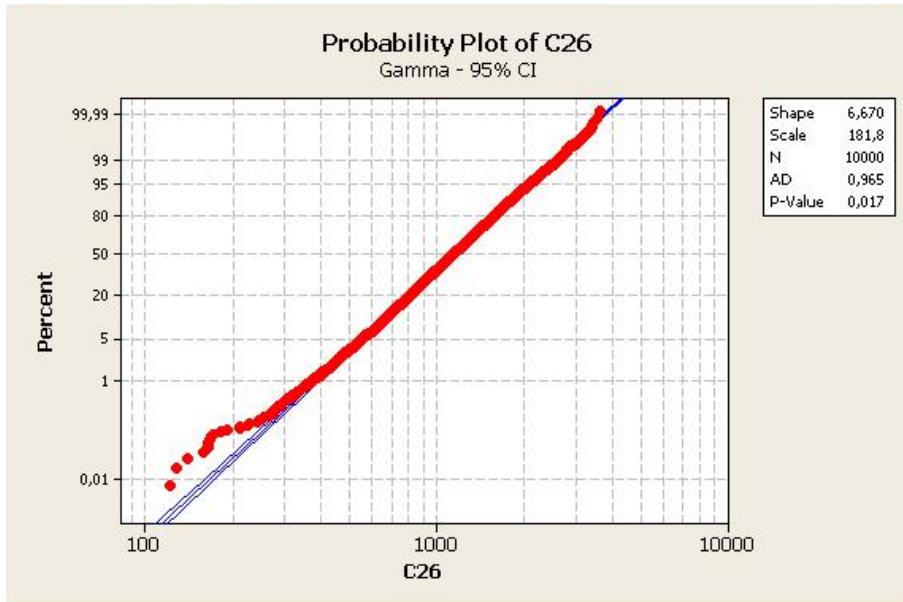


(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal

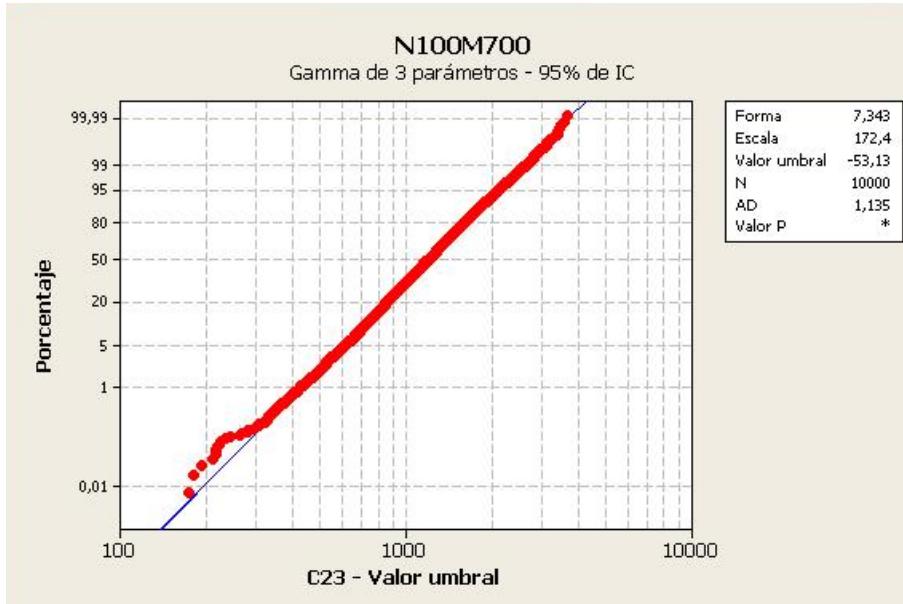


(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.47: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=700$



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama



(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.48: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=700$

A.1.18 N= 100 e M=800 ($\frac{M}{N} = 8$)

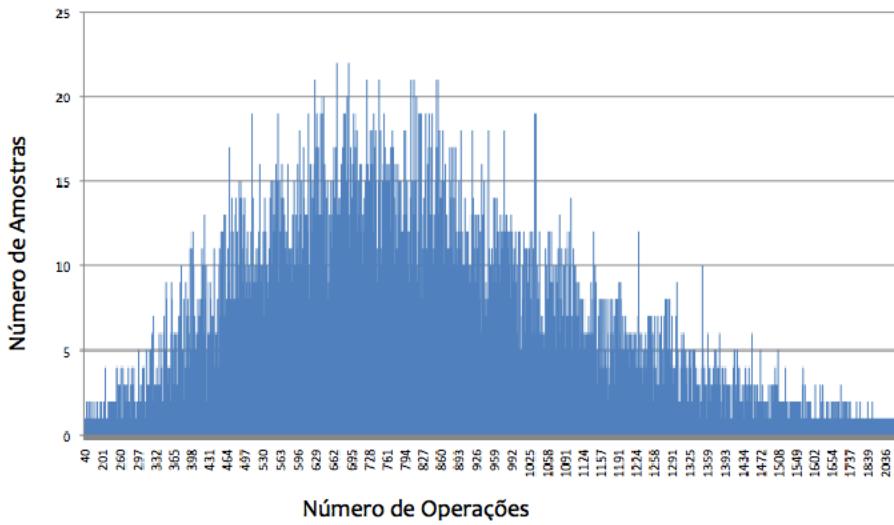
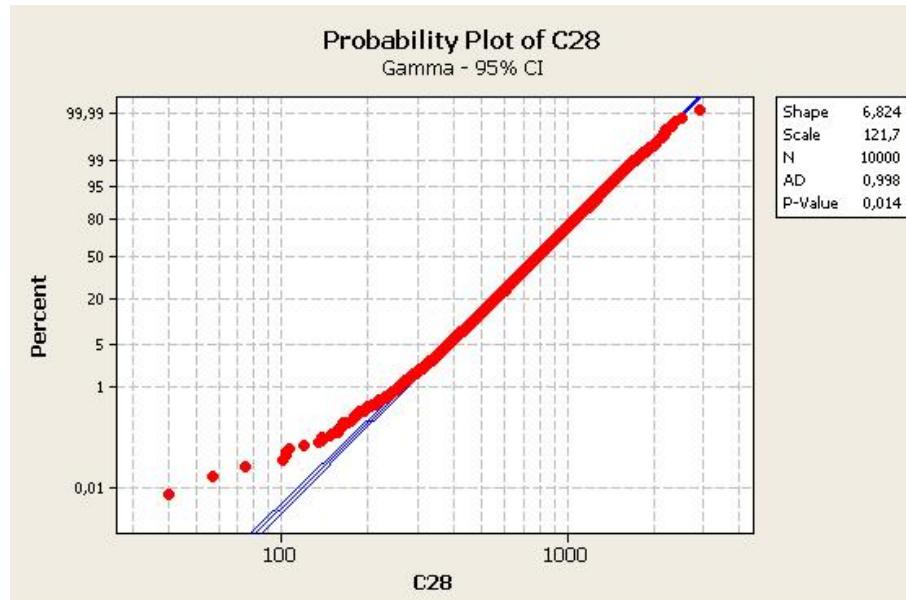


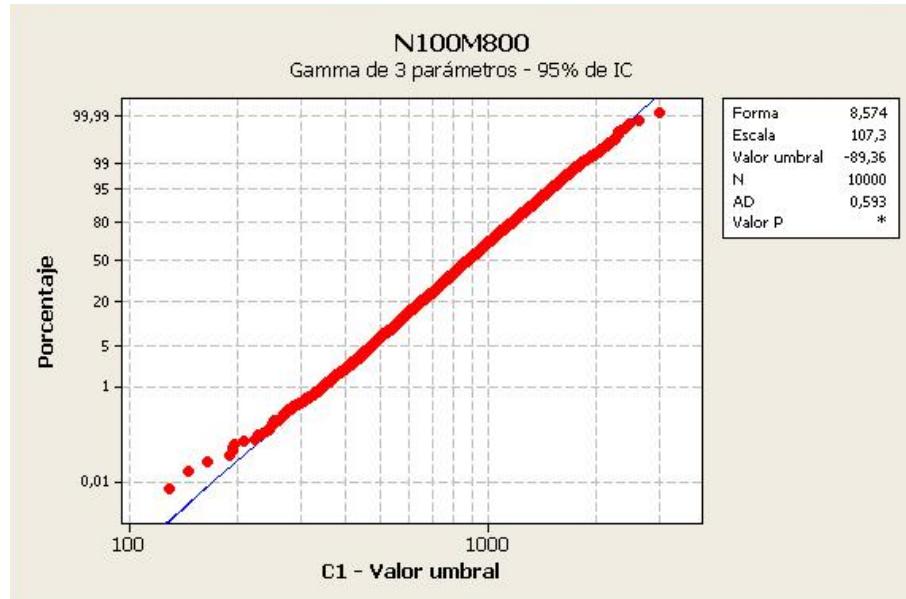
Figura A.49: Distribuição encontrada para $N=100$ e $M=800$

Neste caso podemos afirmar que a distribuição encontrada é uma a distribuição Lognormal, com os parâmetros definidos na imagem (e) da figura 5.18, pois obtivemos $AD=0,161$ ou seja $AD < (AD_{critico} = 1,035)$.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

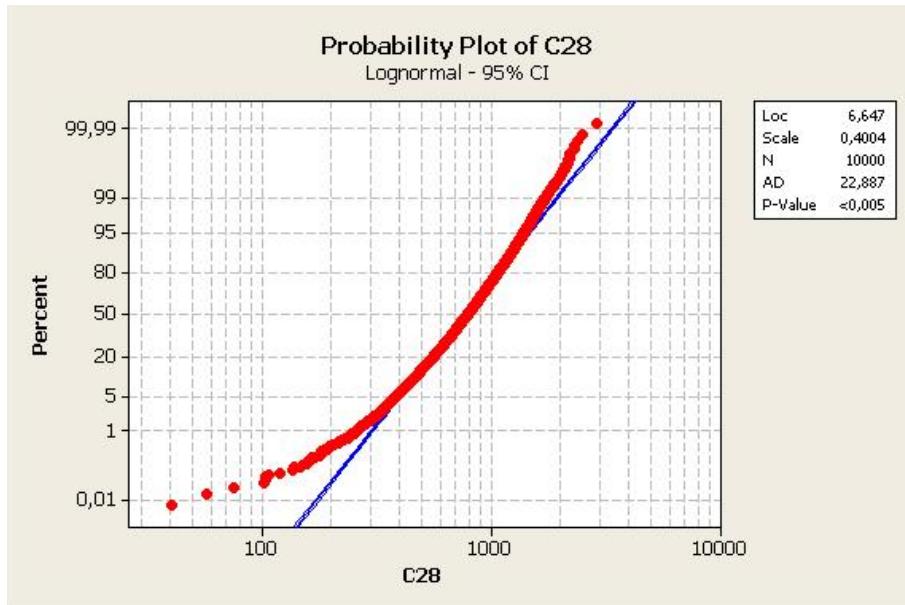


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

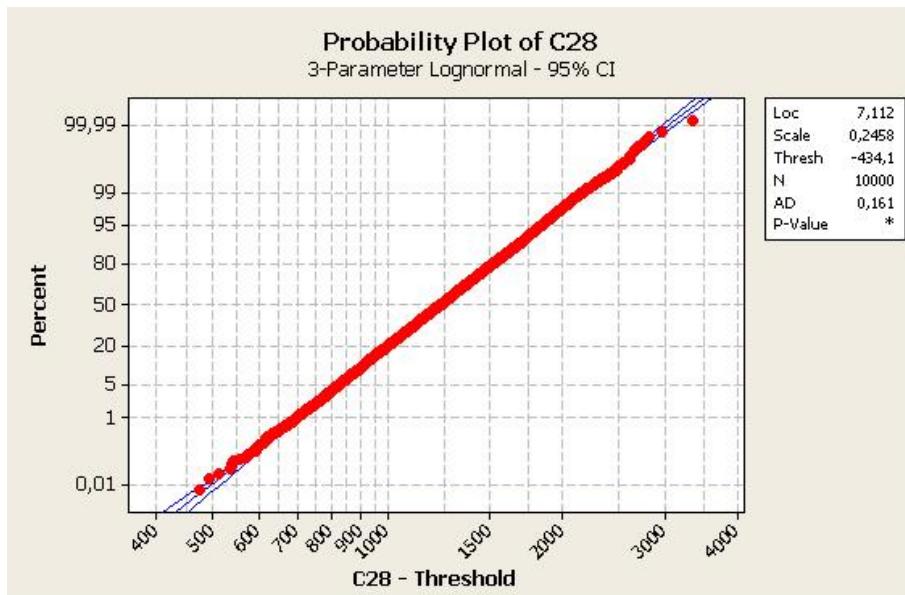


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.50: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=800$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.51: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=100$ e $M=800$

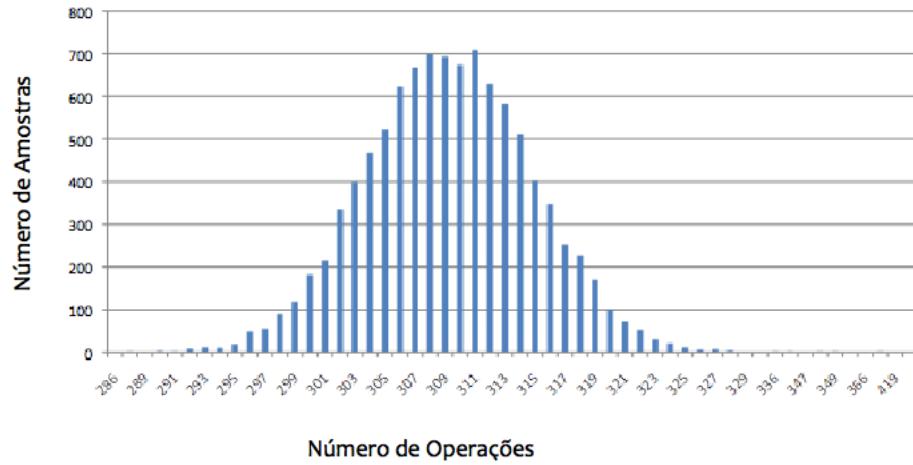
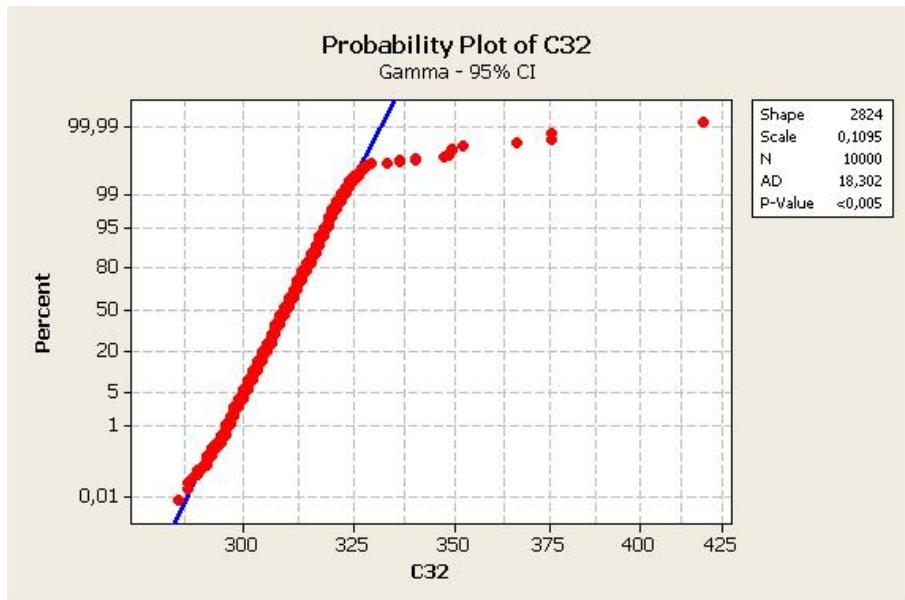
A.1.19 N= 200 e M=200 ($\frac{M}{N} = 1$)


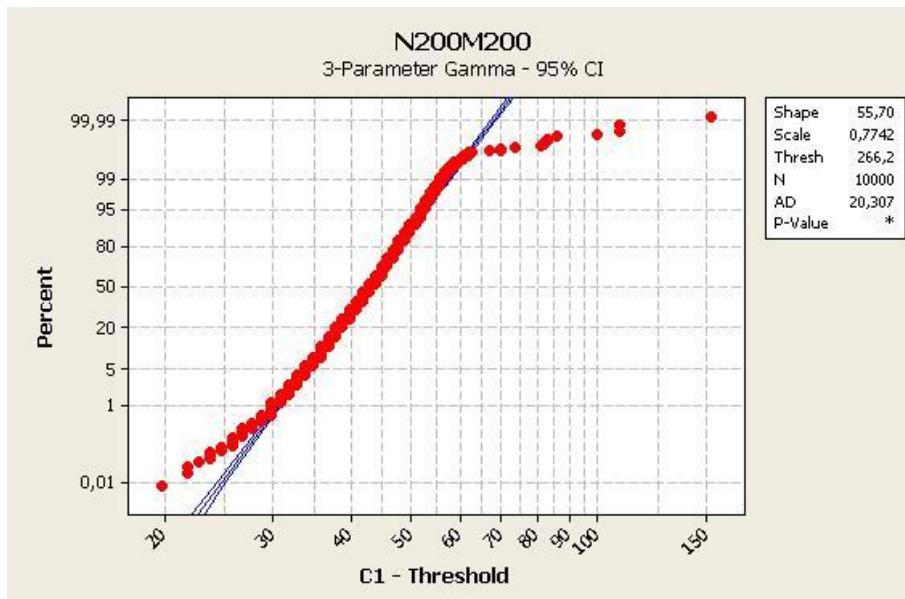
Figura A.52: Distribuição encontrada para $N=200$ e $M=200$

Para o caso acima, verificamos em todos os testes que o valor de AD está em torno de 20, o que é um valor alto. Porém podemos perceber que tanto para a distribuição Gama quanto para a Lognormal, a reta do teste se possui muitos pontos aderidos com exceção de alguns, mas mesmo assim não podemos afirmar a correspondência a alguma distribuição e concluímos que para $N=200$ e $M=200$, o número de operações realizadas pelo zChaff respeita uma distribuição discreta a qual ainda não descobrimos sua origem.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

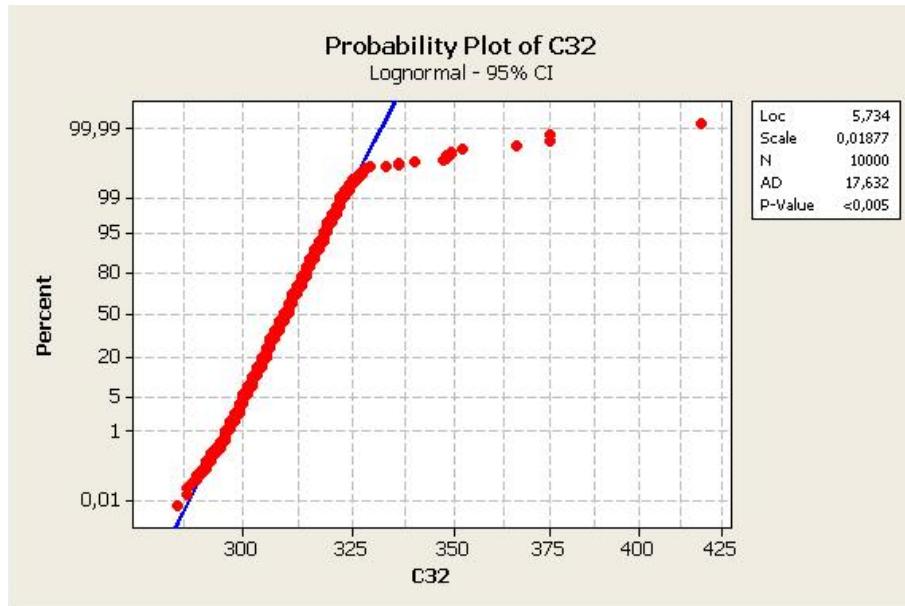


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

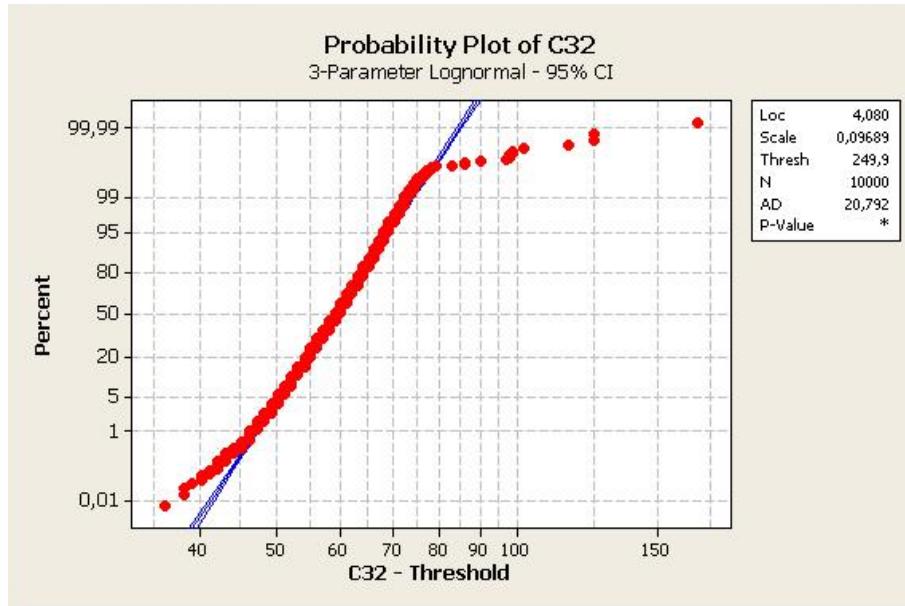


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.53: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=200$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.54: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=200$

A.1.20 N= 200 e M=400 ($\frac{M}{N} = 2$)

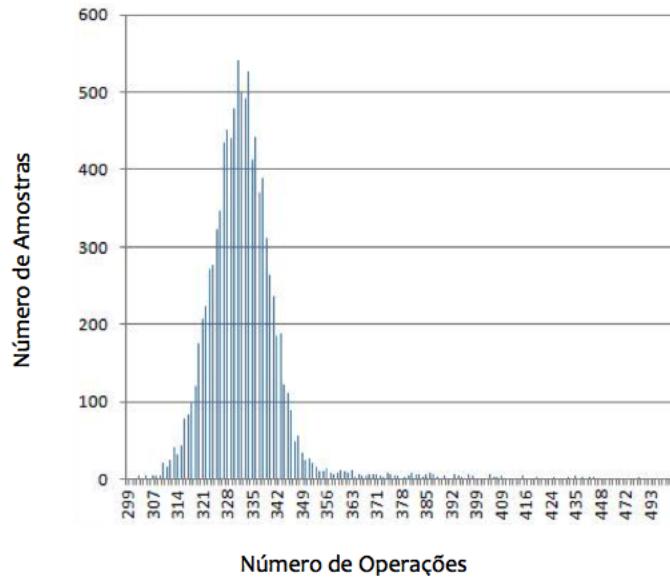
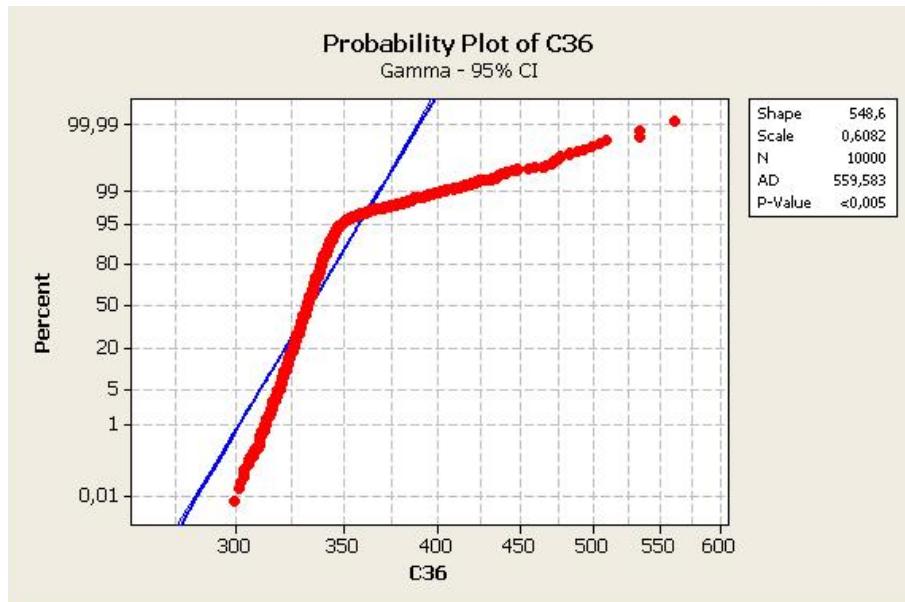


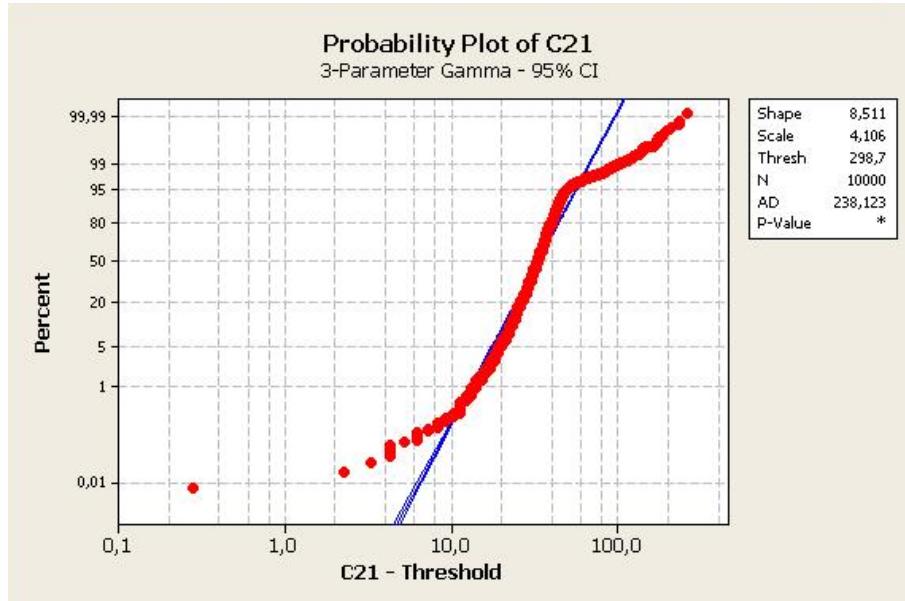
Figura A.55: Distribuição encontrada para $N=200$ e $M=400$

Como nos casos anteriores, onde $\frac{M}{N}=2$, notaa-se que o zChaff se comporta conforme uma distribuição discreta a qual ainda não identificamos sua origem porém com caudas que possuem comprimentos semelhantes .

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

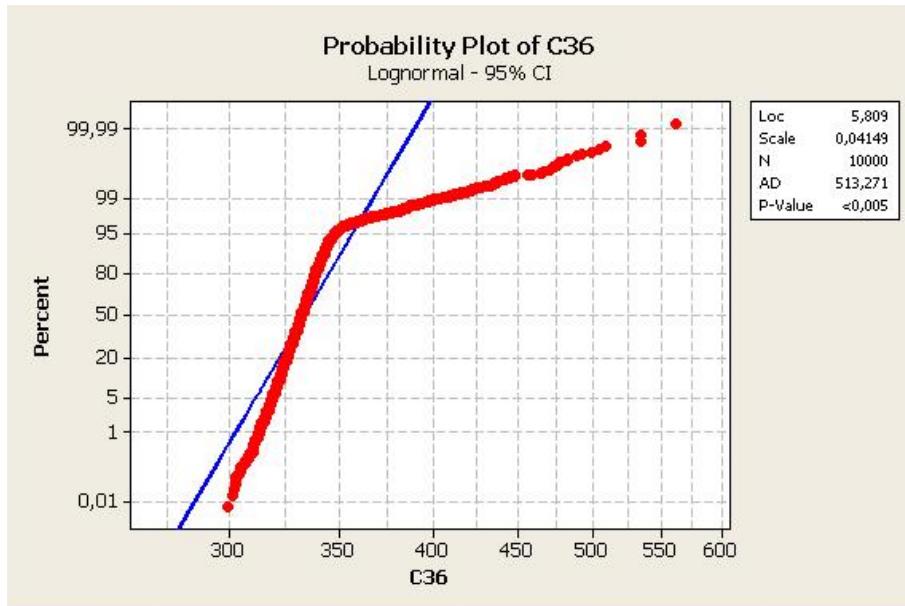


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

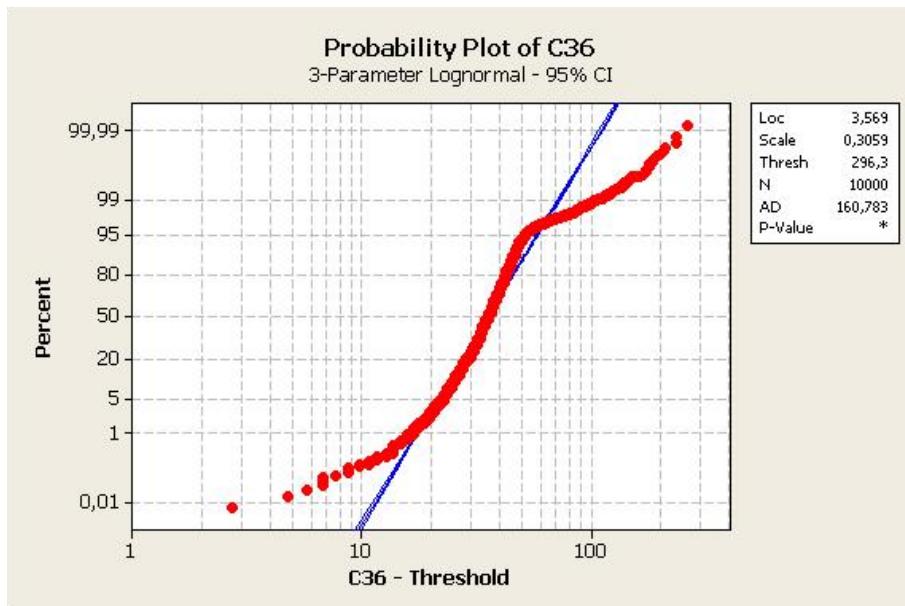


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.56: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=400$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.57: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=400$

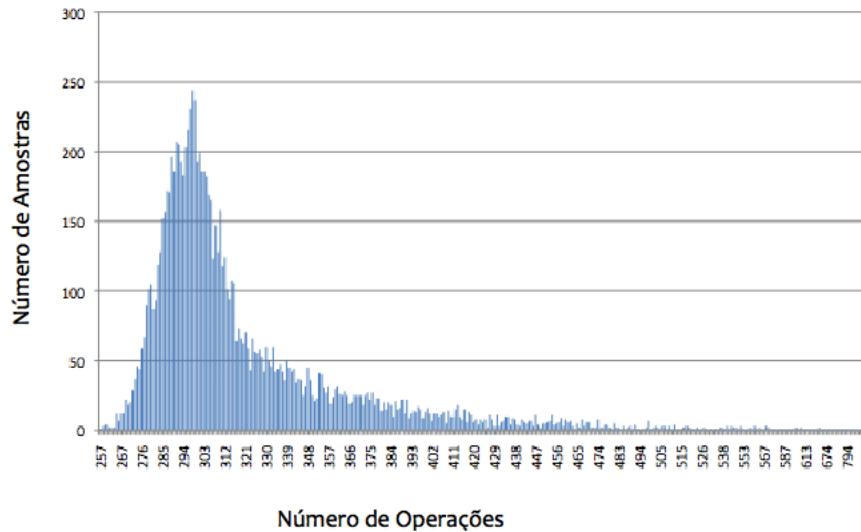
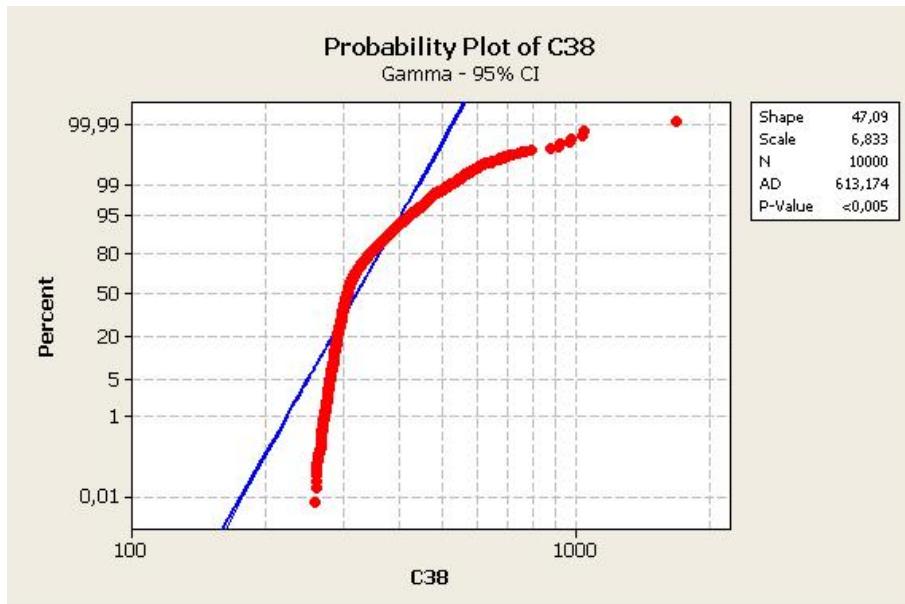
A.1.21 N= 200 e M=600 ($\frac{M}{N} = 3$)


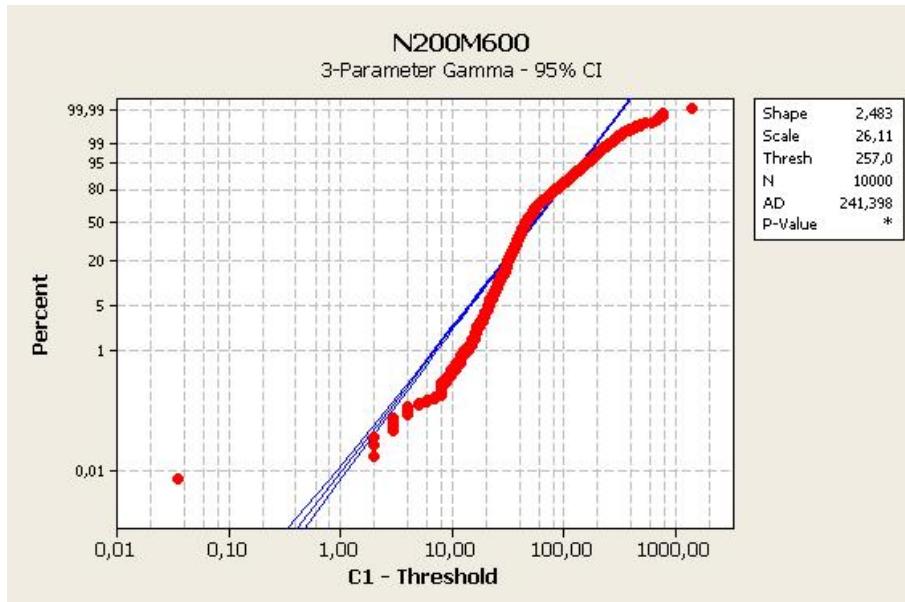
Figura A.58: Distribuição encontrada para $N=200$ e $M=600$

Verificamos neste caso a existência de uma aproximação a uma distribuição discreta com caudas bastante distintas e não uniformes, quase contínua e de origem desconhecida.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

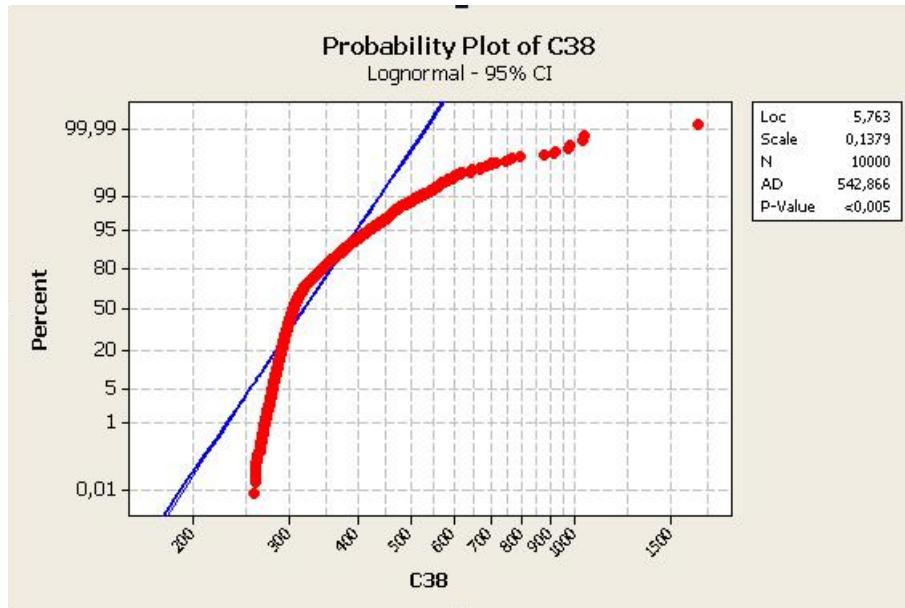


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

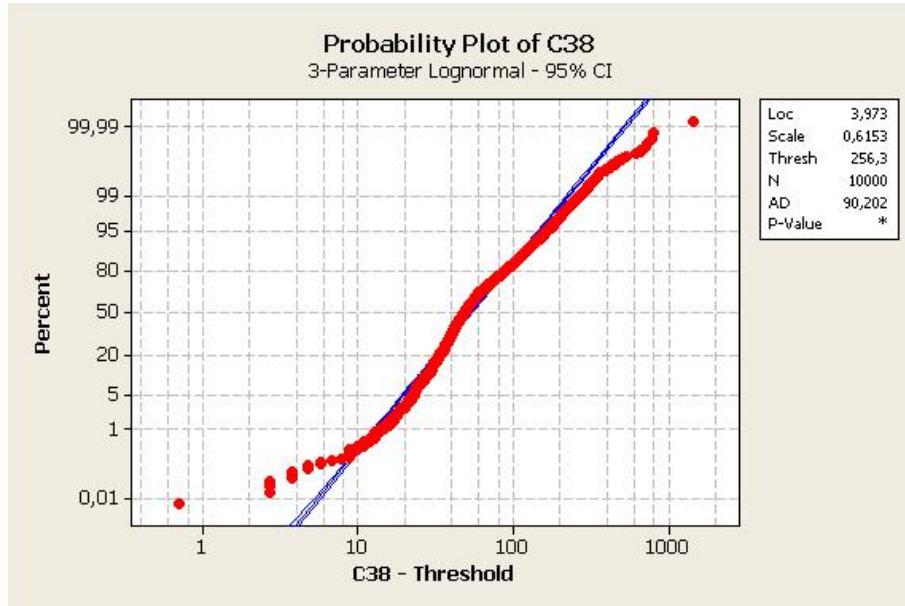


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.59: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=600$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.60: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=600$

A.1.22 N= 200 e M=800 ($\frac{M}{N} = 4$)

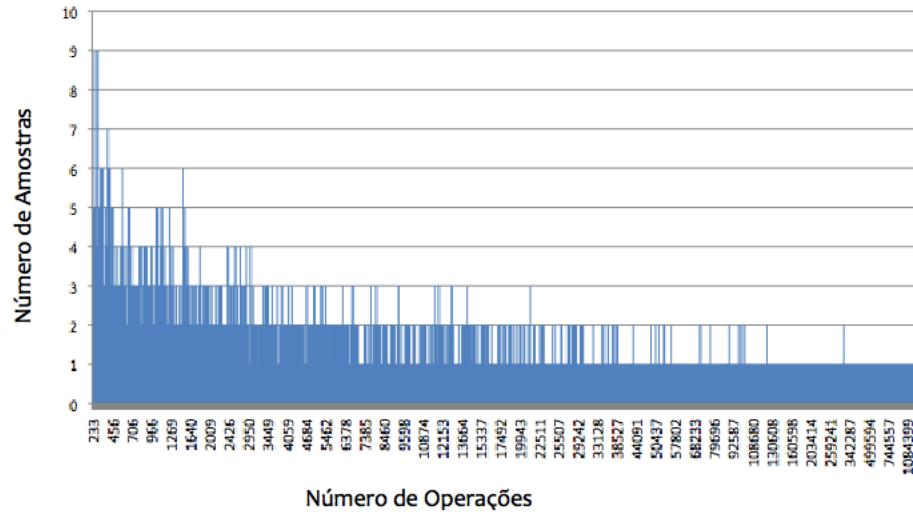
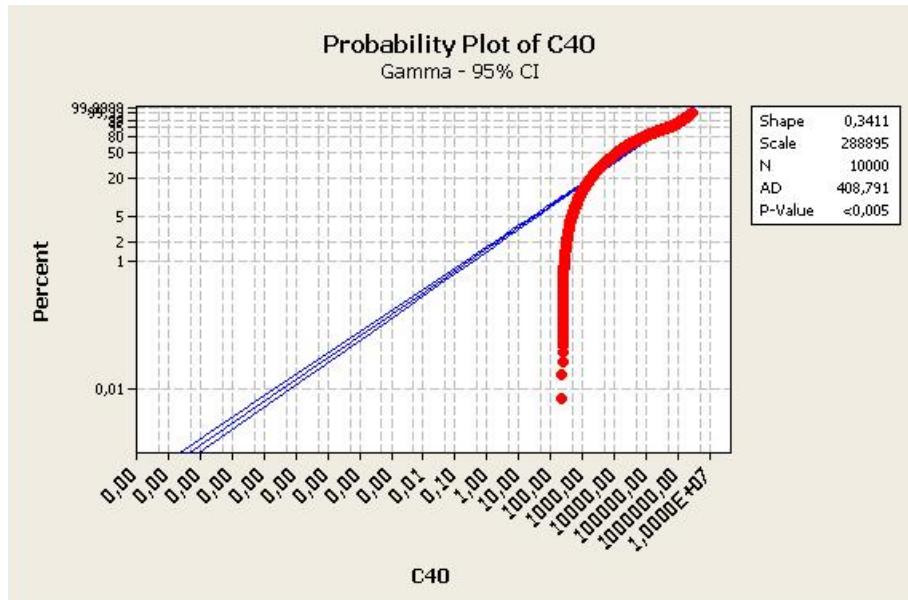


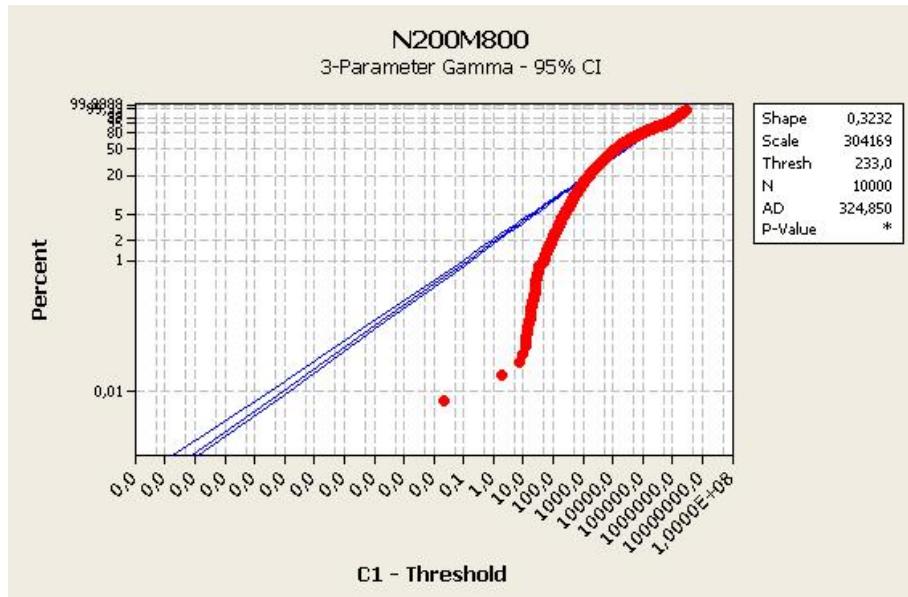
Figura A.61: Distribuição encontrada para $N=200$ e $M=800$

O comportamento para este caso é muito semelhante ao caso $\frac{M}{N}=4$ da sessão anterior que através da análise gráfica nota-se uma semelhança à uma exponencial logarítmica, a qual não se ajustou a nenhuma distribuição e não conseguimos descobrir seus parâmetros.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

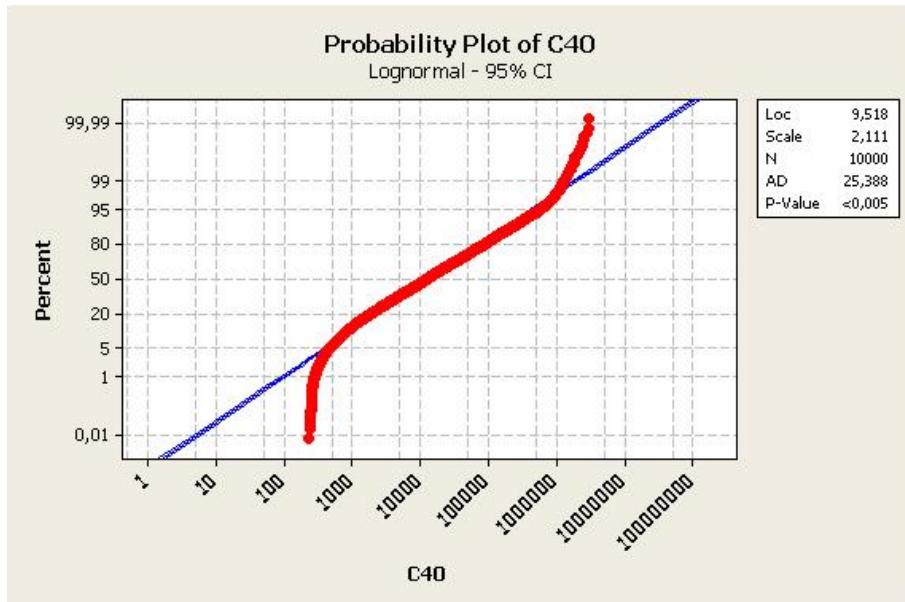


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

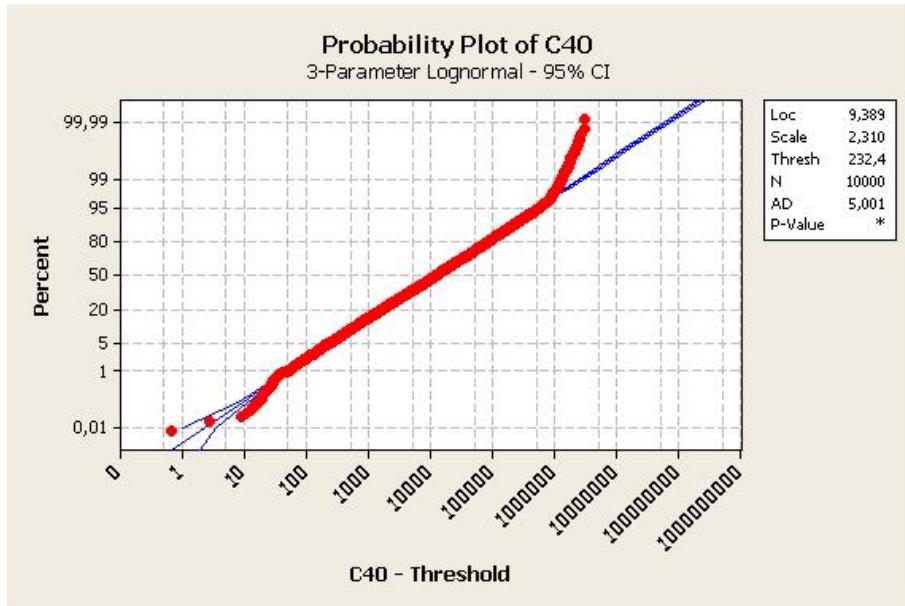


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.62: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=800$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.63: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=800$

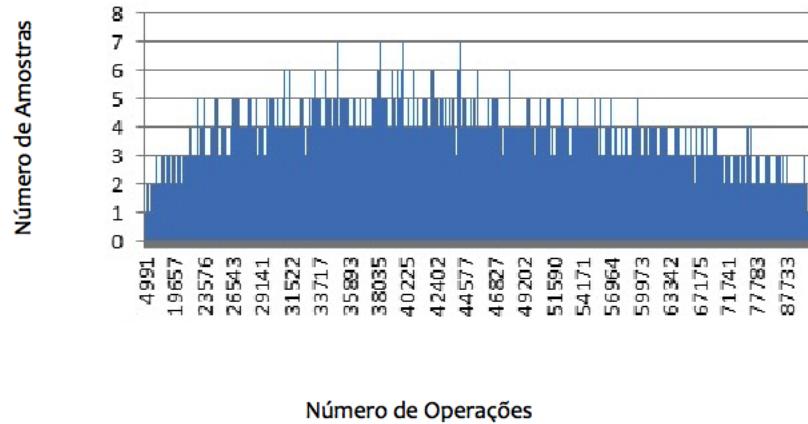
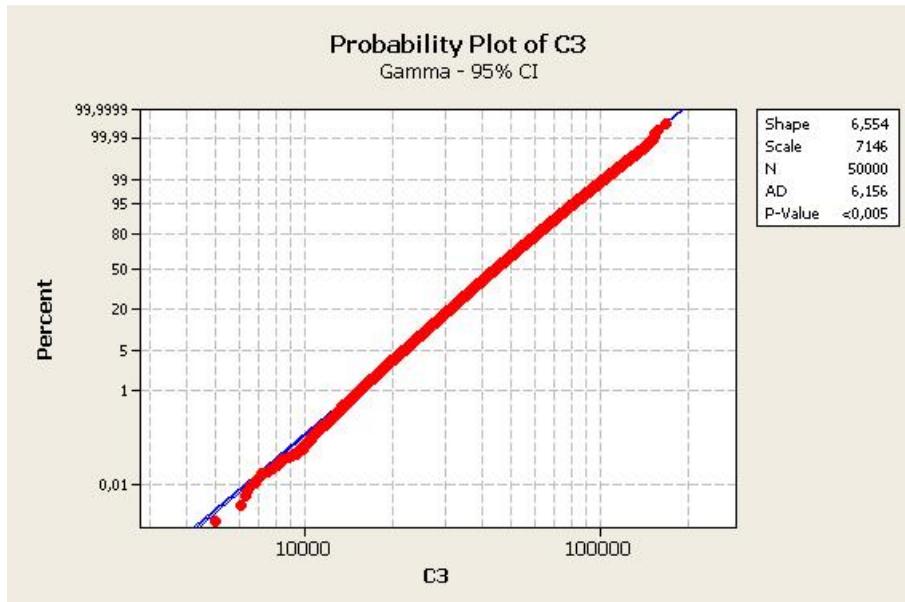
A.1.23 N= 200 e M=860 ($\frac{M}{N} = 4.3$)


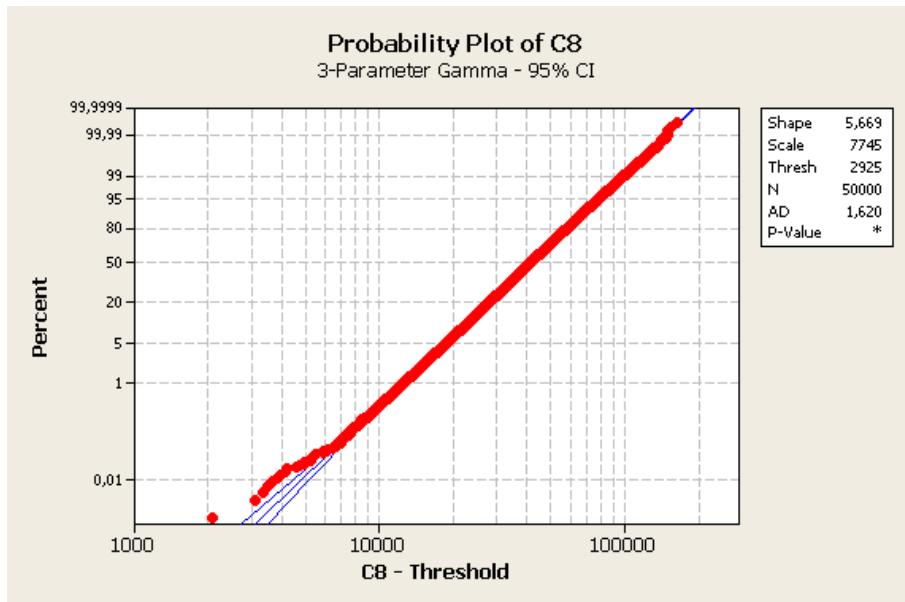
Figura A.64: Distribuição encontrada para $N=200$ e $M=860$

Para este teste também houve a necessidade de executar 50.000 problemas, e assim conseguimos obter uma distribuição aproximada da Gamma e da Lognormal, porém, como os valores de AD foram maiores que o valor crítico, não podemos afirmar que a distribuição encontrada se ajusta à alguma destas.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

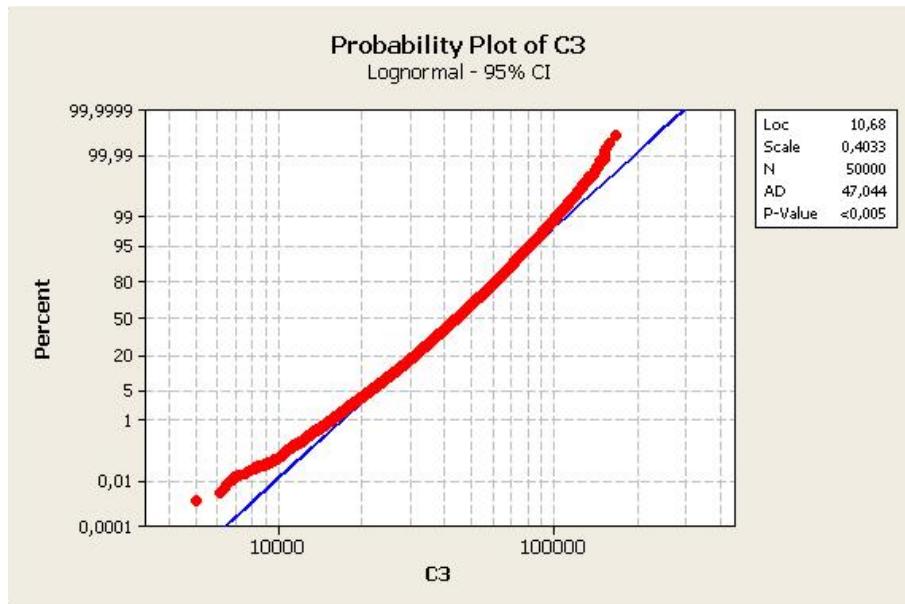


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

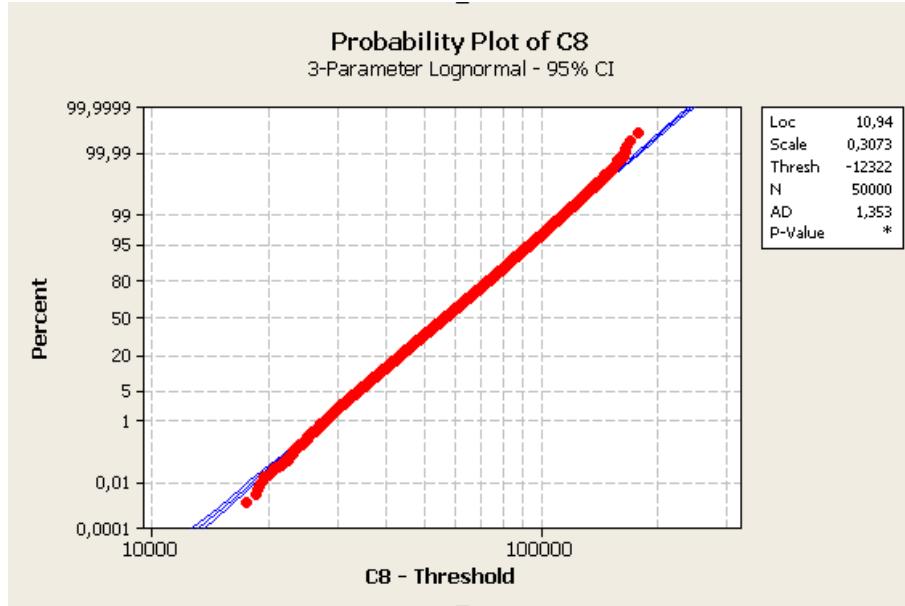


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.65: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=860$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.66: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=860$

A.1.24 N= 200 e M=1000 ($\frac{M}{N} = 5$)

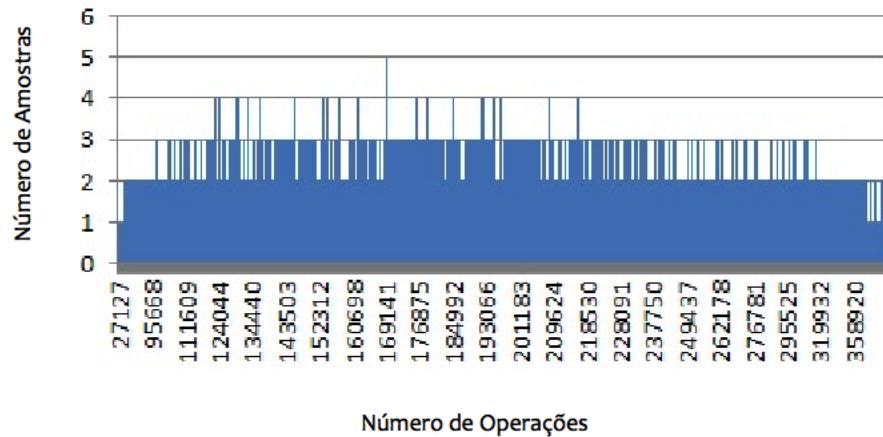
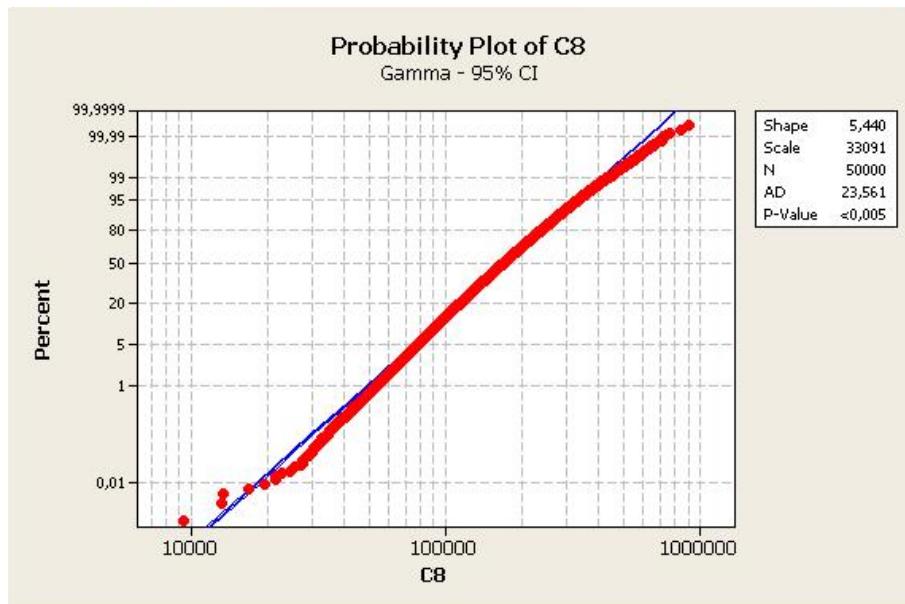


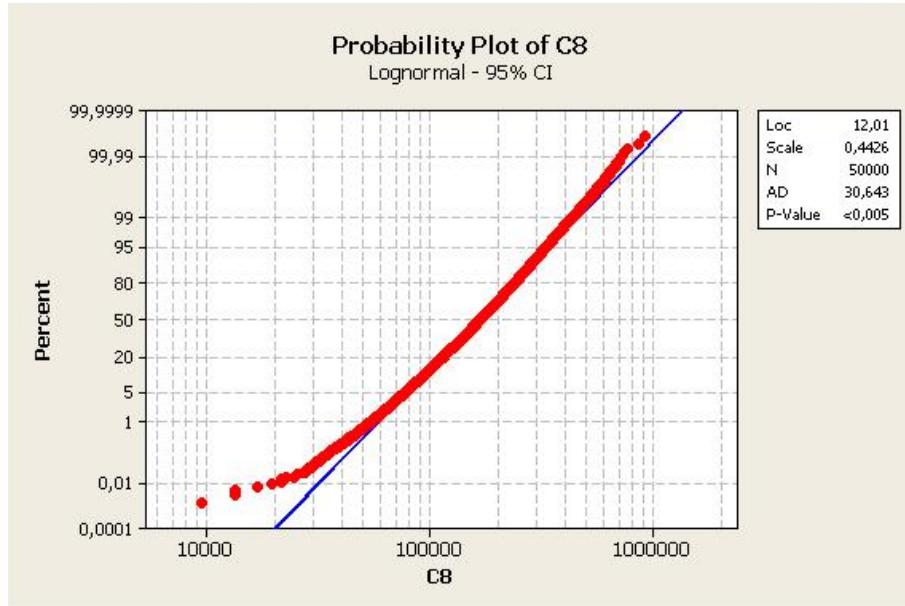
Figura A.67: Distribuição encontrada para $N=200$ e $M=1000$

Para este teste também houve a necessidade de executar 50.000 problemas, e assim conseguimos obter uma distribuição aproximada da Gamma e da Lognormal, porém, como os valores de AD foram maiores que o valor crítico, não podemos afirmar que a distribuição encontrada se ajusta à alguma distribuição conhecida.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal

Figura A.68: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=1000$

A.1.25 N= 200 e M=1200 ($\frac{M}{N} = 6$)

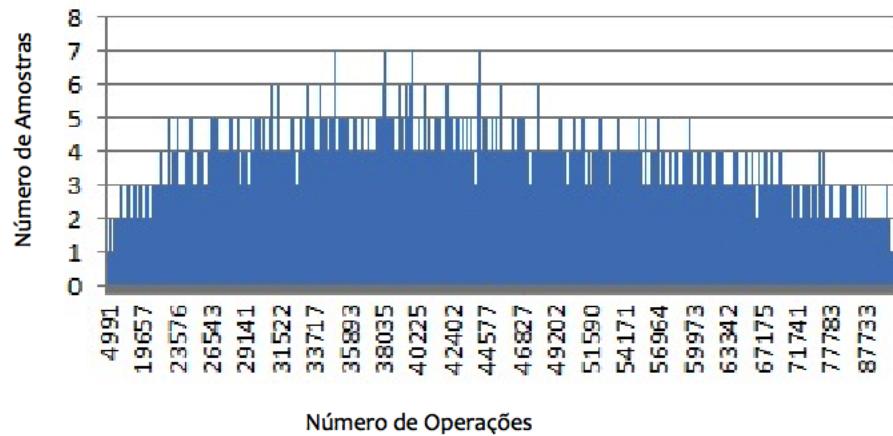
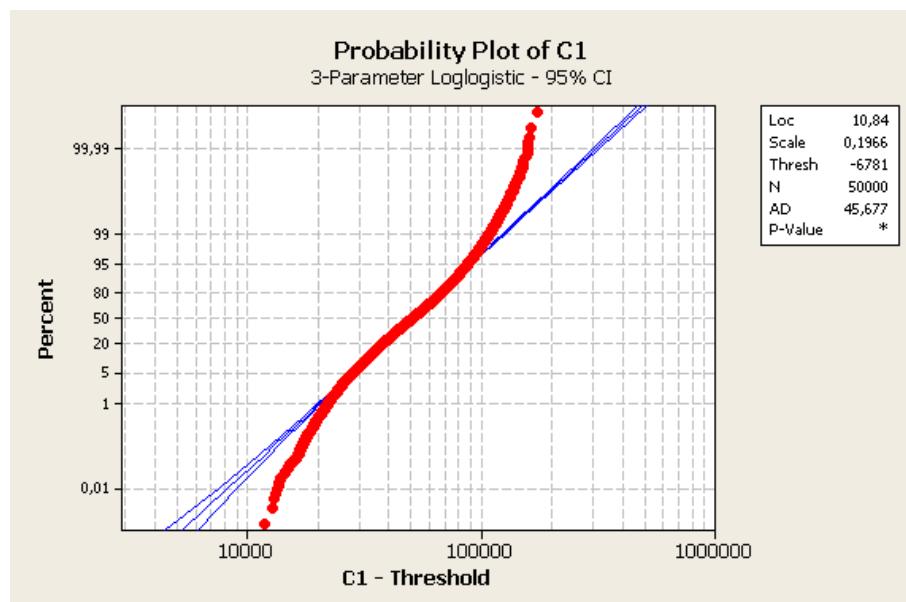


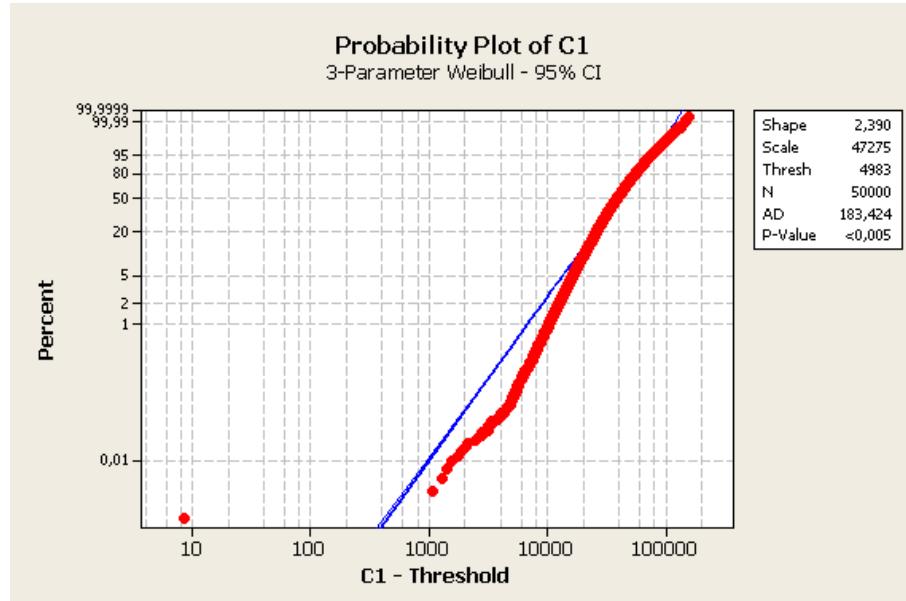
Figura A.69: Distribuição encontrada para $N=200$ e $M=1200$

Para este teste também houve a necessidade de executar 50.000 problemas, e assim conseguimos obter uma distribuição aproximada da Gamma e da Lognormal, porém, como os valores de AD foram maiores que o valor crítico, não podemos afirmar que a distribuição encontrada se ajusta à alguma distribuição conhecida.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

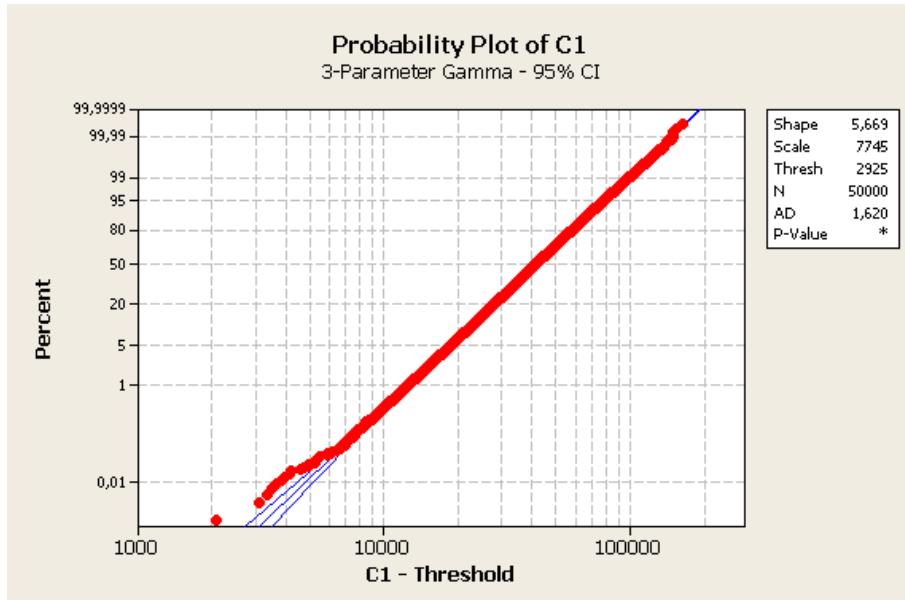


(a) Teste de aderência com a distribuição Loglogistic com 3 parâmetros

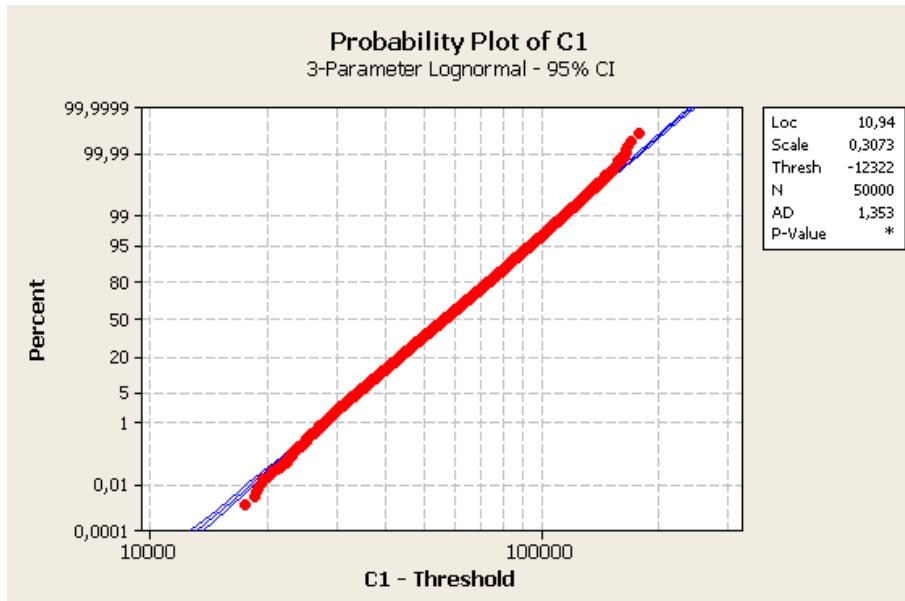


(b) Teste de aderência com a distribuição weibull com 3 parâmetros

Figura A.70: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=1200$



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.71: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=1200$

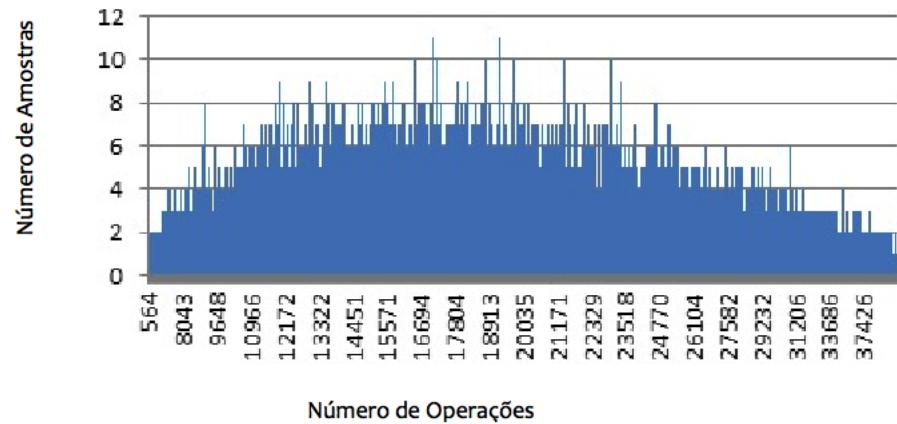
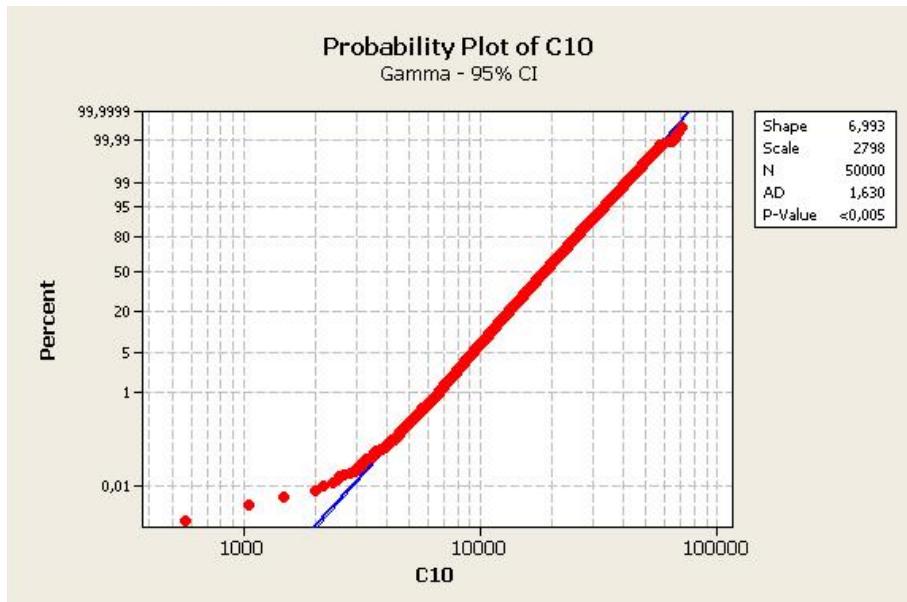
A.1.26 N= 200 e M=1400 ($\frac{M}{N} = 7$)


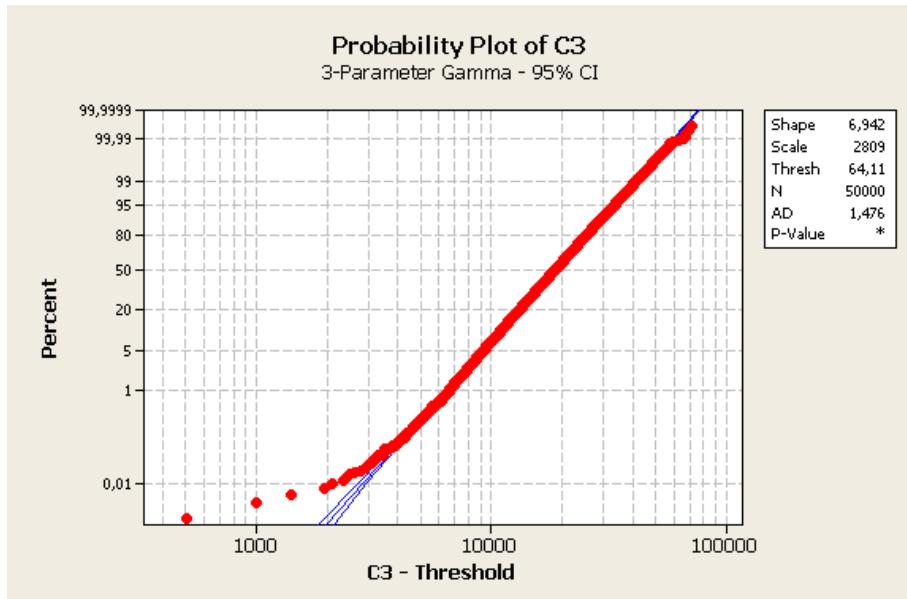
Figura A.72: Distribuição encontrada para $N=200$ e $M=1400$

Para este teste também houve a necessidade de executar 50.000 problemas, e assim conseguimos obter uma distribuição aproximada da Gamma e da Lognormal, porém, como os valores de AD foram maiores que o valor crítico, não podemos afirmar que a distribuição encontrada se ajusta à alguma distribuição conhecida.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

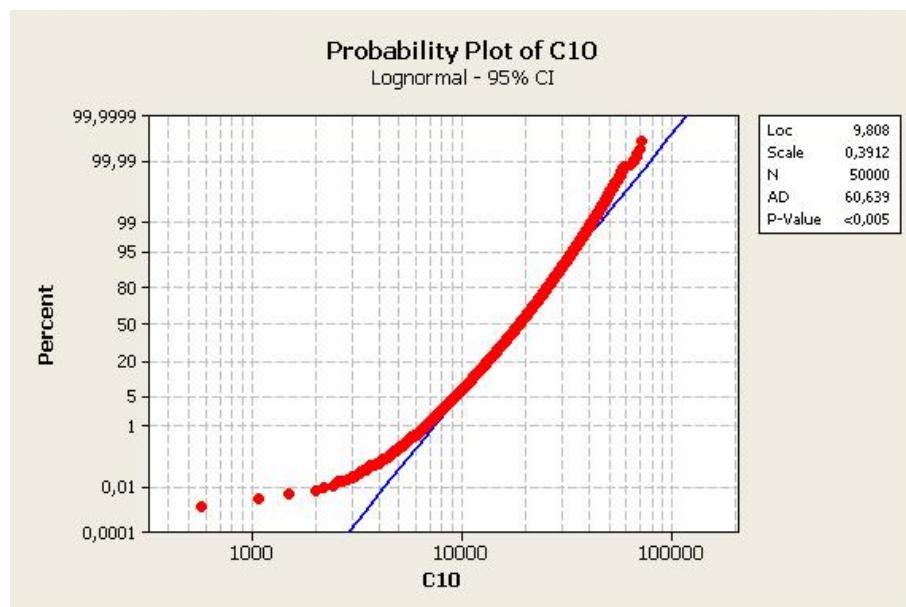


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

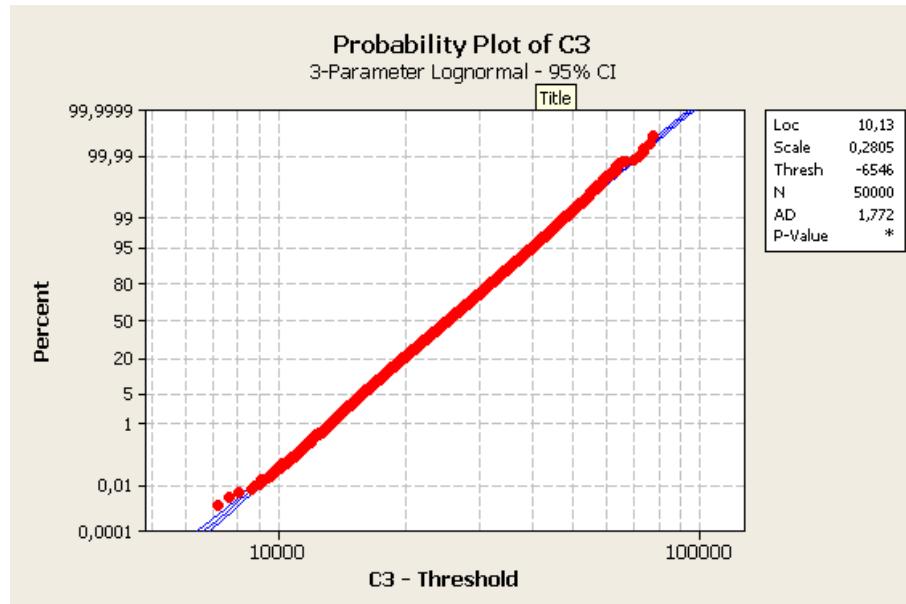


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.73: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=1400$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.74: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=1400$

A.1.27 N= 200 e M=1600 ($\frac{M}{N} = 8$)

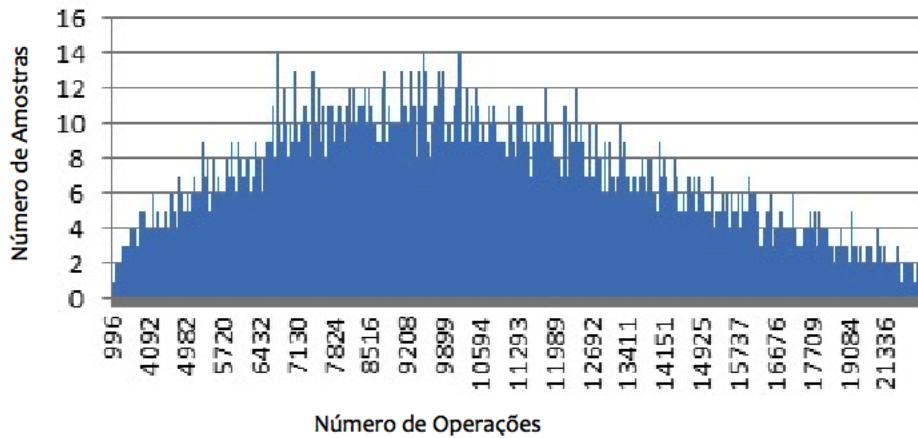
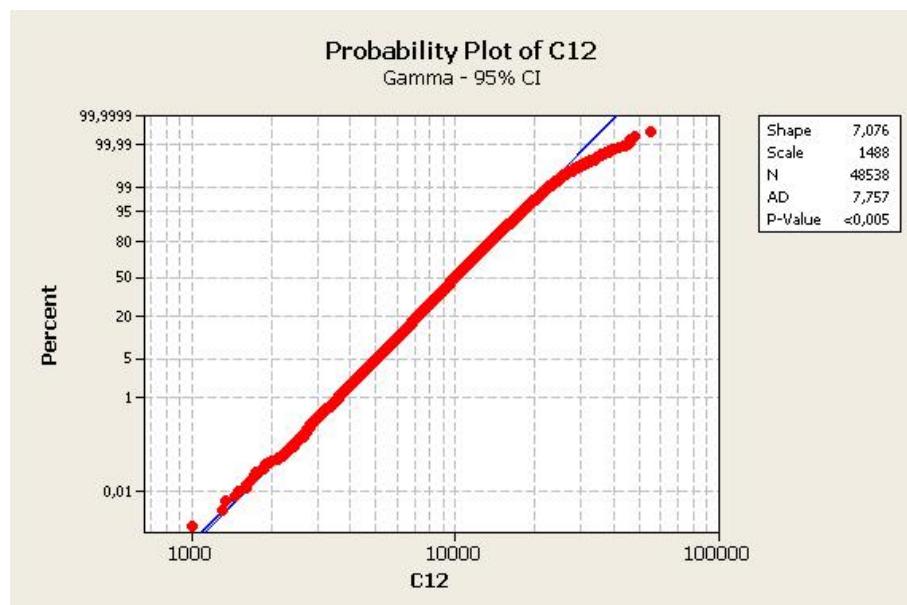


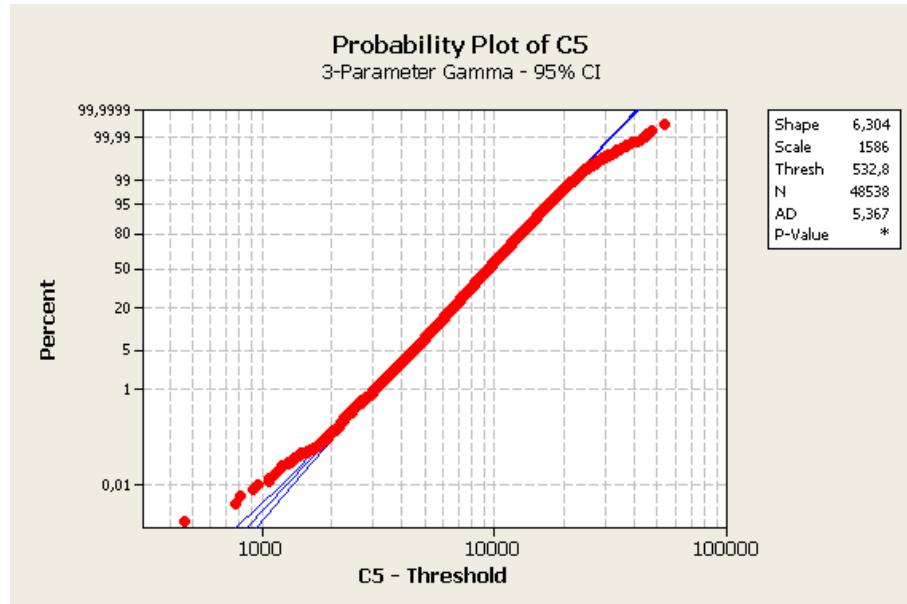
Figura A.75: Distribuição encontrada para $N=200$ e $M=1600$

Para este teste também houve a necessidade de executar 50.000 problemas, e assim conseguimos obter uma distribuição aproximada da Gamma e da Lognormal, porém, como os valores de AD foram maiores que o valor crítico, não podemos afirmar que a distribuição encontrada se ajusta à alguma distribuição conhecida.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

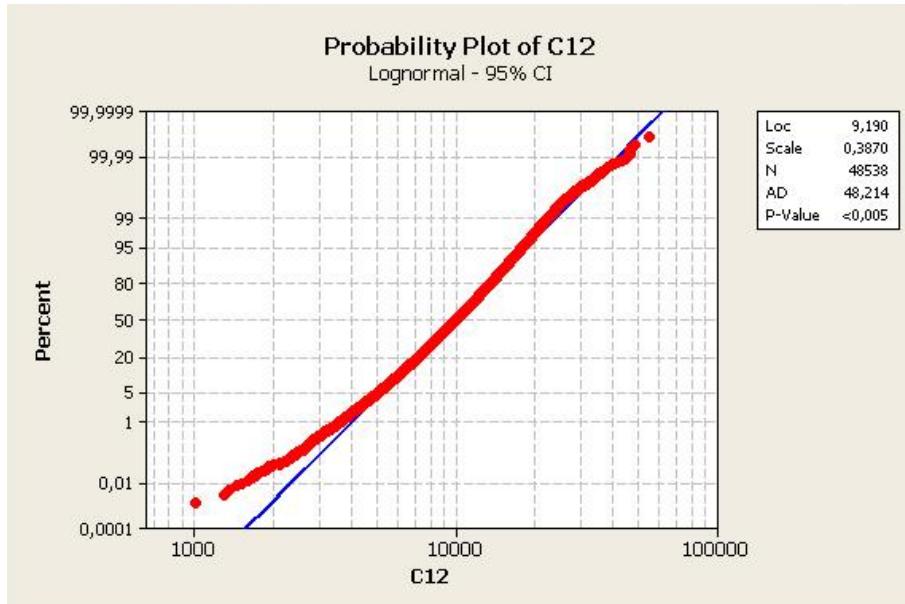


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

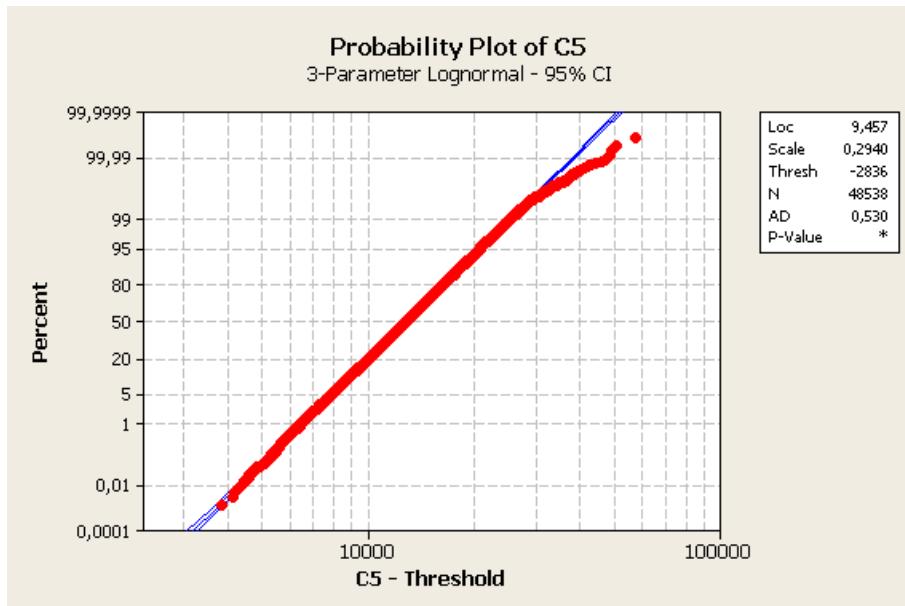


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.76: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=1600$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.77: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=200$ e $M=1600$

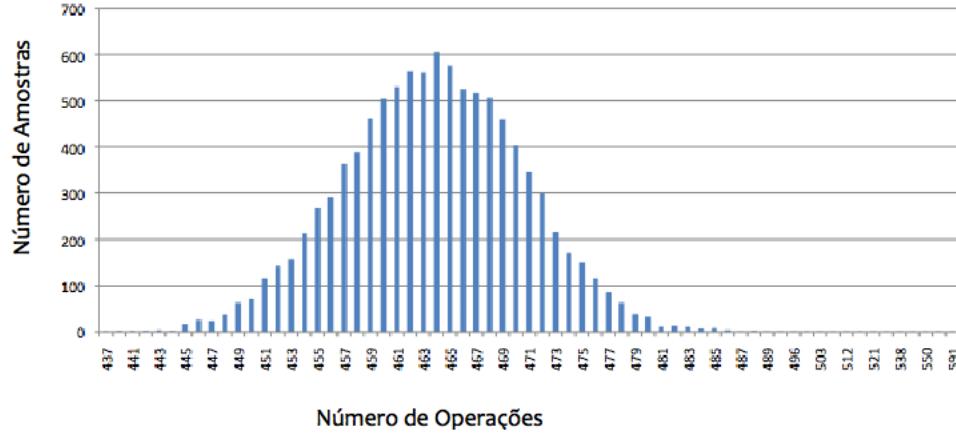
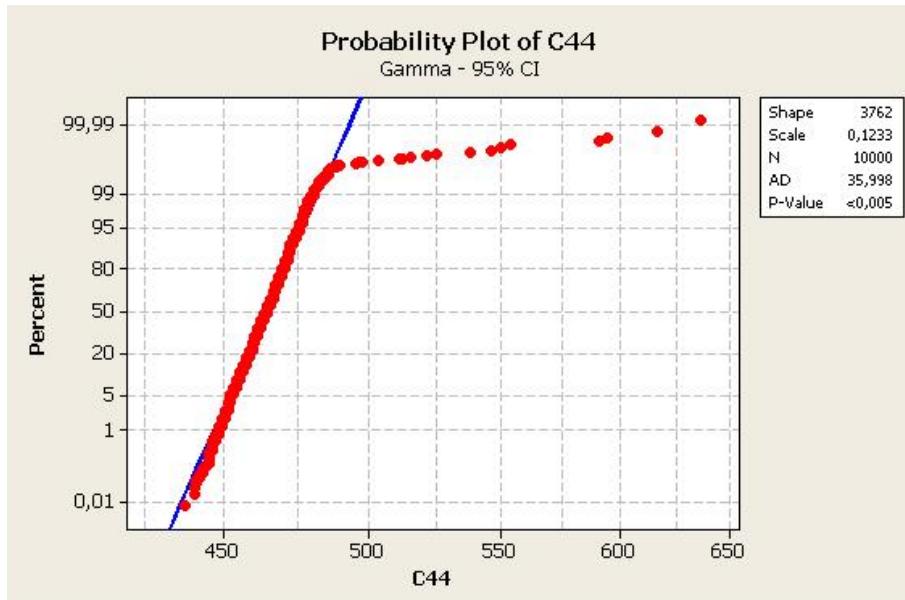
A.1.28 N= 300 e M=300 ($\frac{M}{N} = 1$)


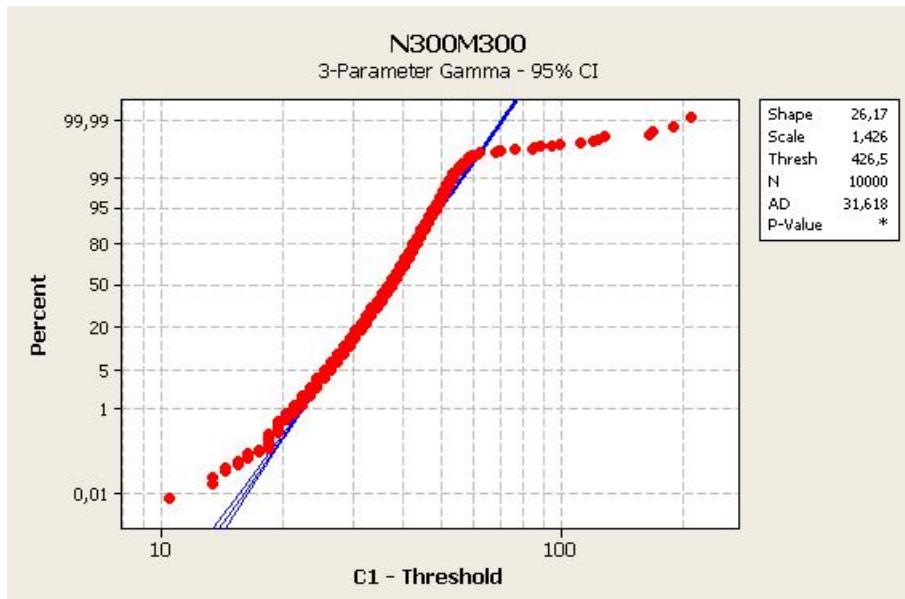
Figura A.78: Distribuição encontrada para $N=300$ e $M=300$

Para o caso acima, verificamos em todos os testes que o valor de AD está em torno de 30, o que é um valor alto. Porém podemos perceber que tanto para a distribuição Gama quanto para a Lognormal, a reta do teste possui muitos pontos aderidos com exceção de alguns, mas mesmo assim não podemos afirmar a correspondência a alguma distribuição e concluímos que para $N=300$ e $M=300$, o número de operações realizadas pelo zChaff respeita uma distribuição discreta a qual ainda não descobrimos sua origem.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

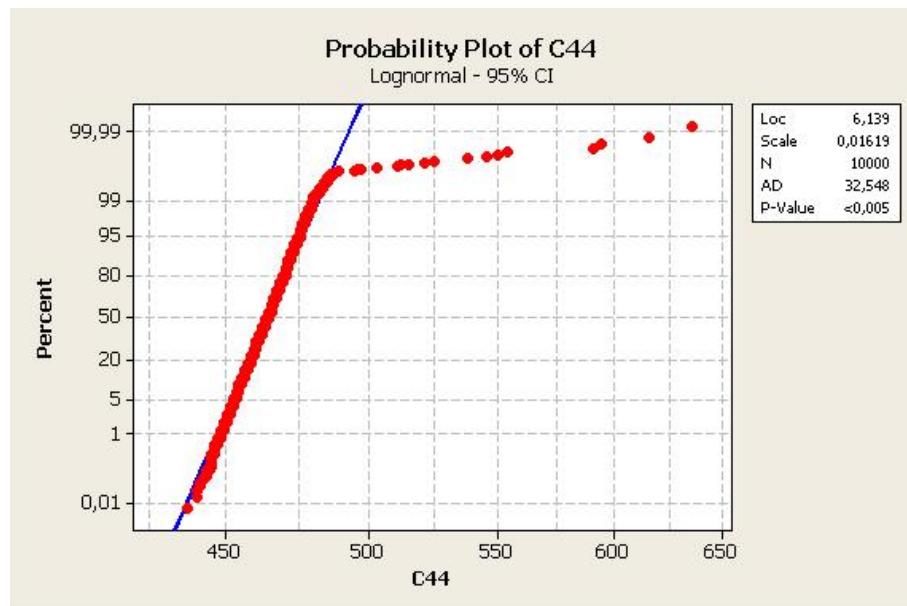


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

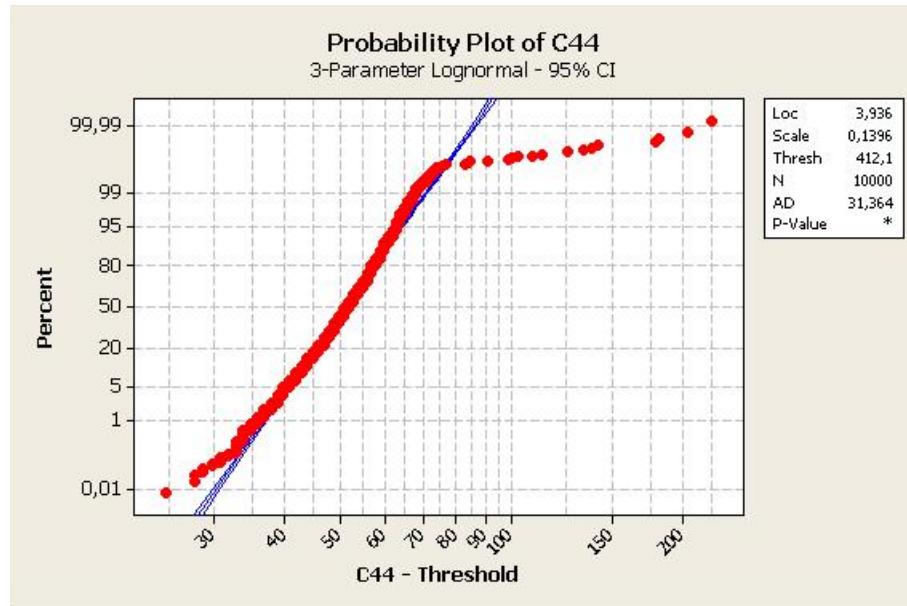


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.79: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=300$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.80: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=300$

A.1.29 N= 300 e M=600 ($\frac{M}{N} = 2$)

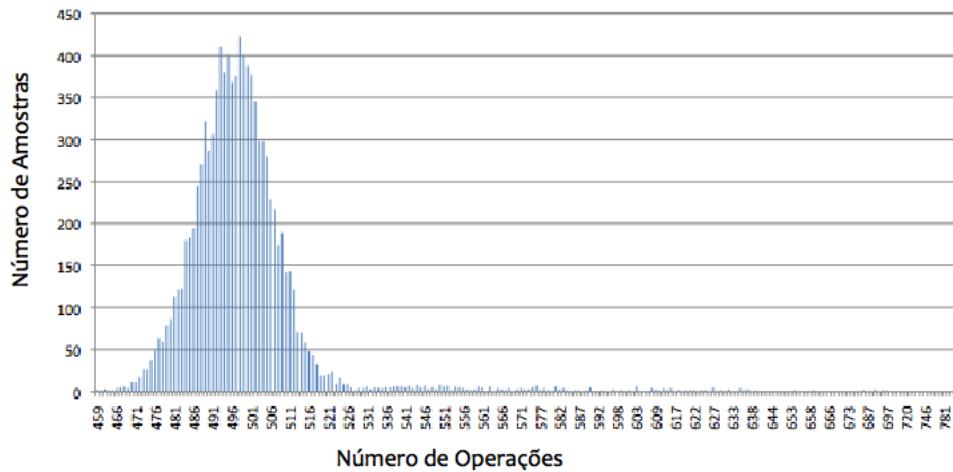
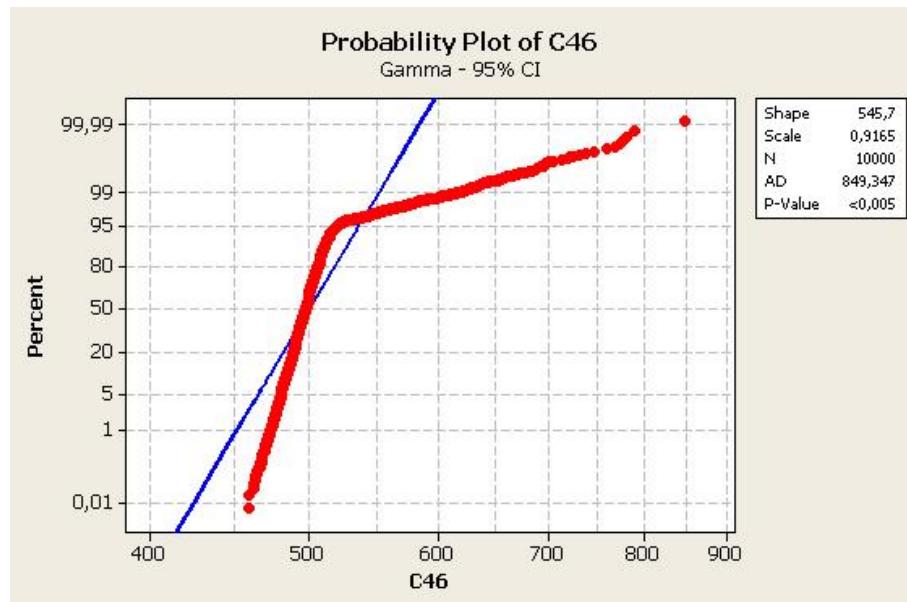


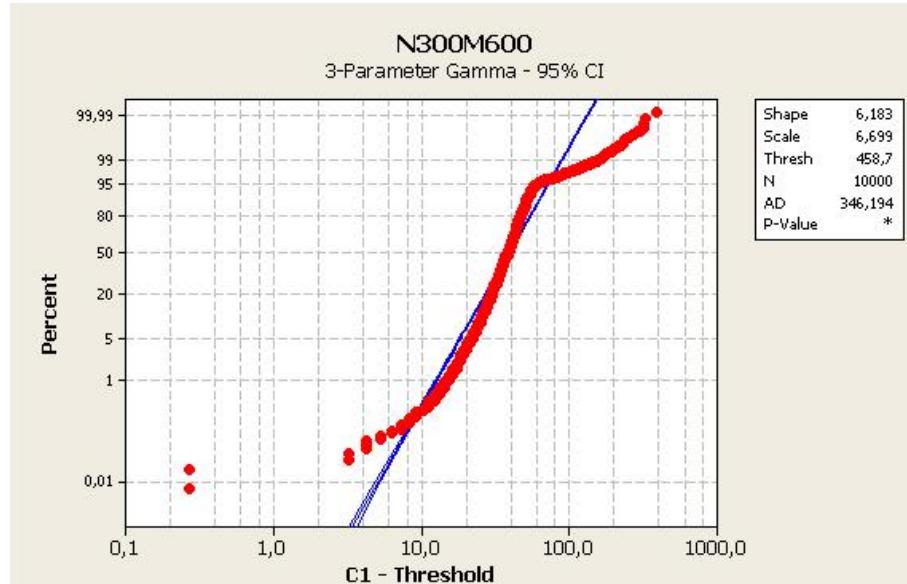
Figura A.81: Distribuição encontrada para $N=300$ e $M=600$

Aqui também verificamos que os testes de aderência de Anderson-Darling não se adere a nenhuma distribuição conhecida porém verificamos graficamente uma distribuição discreta e concluímos que para $N=300$ e $M=600$, o número de operações realizadas pelo zChaff respeita uma distribuição discreta desconhecida onde as caudas possuem comprimentos semelhantes exceto poucos valores se estendem a cauda de direita .

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

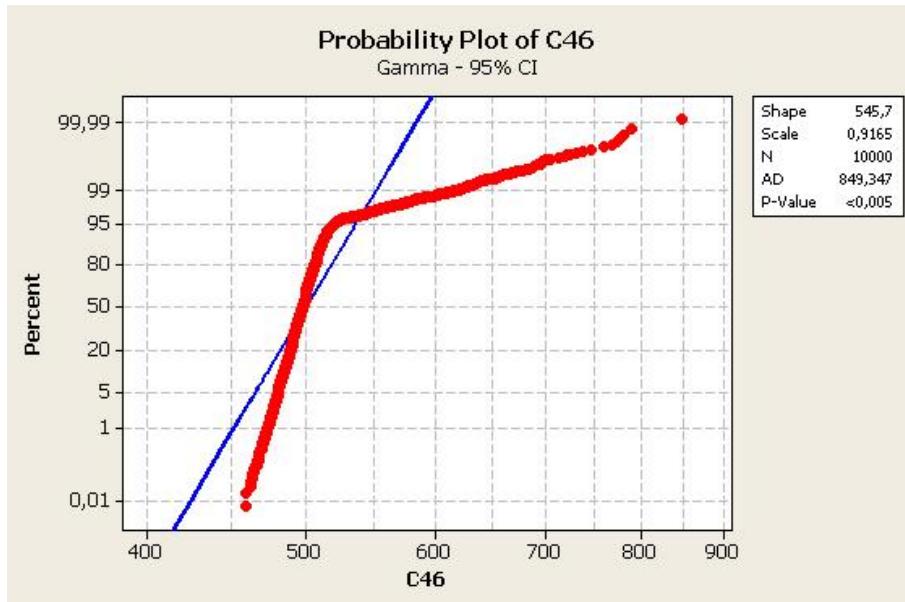


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

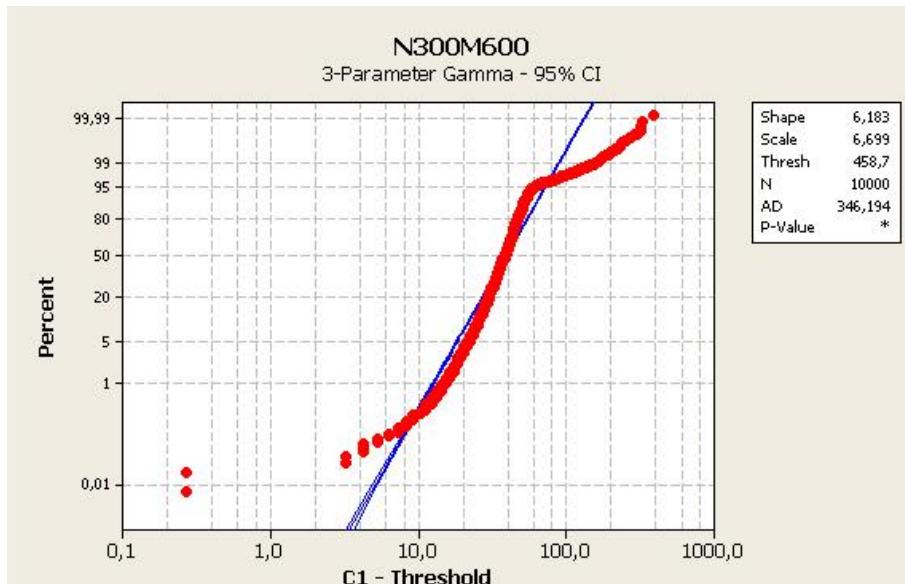


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.82: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=600$



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama



(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.83: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=600$

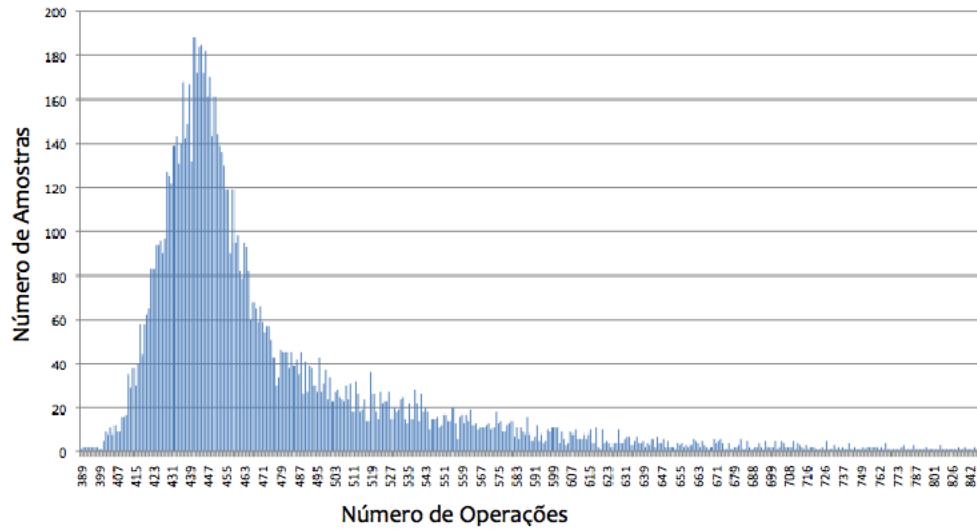
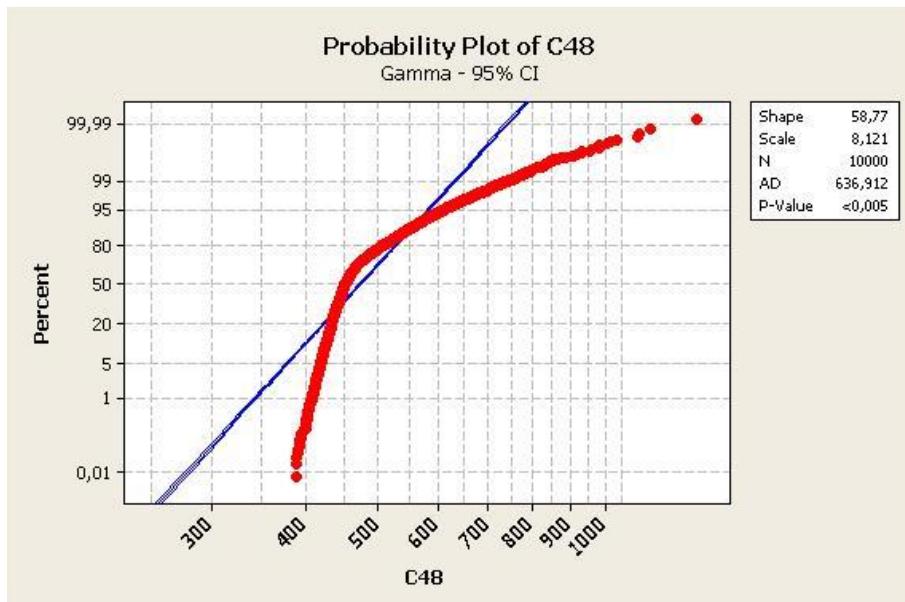
A.1.30 N= 300 e M=900 ($\frac{M}{N} = 3$)


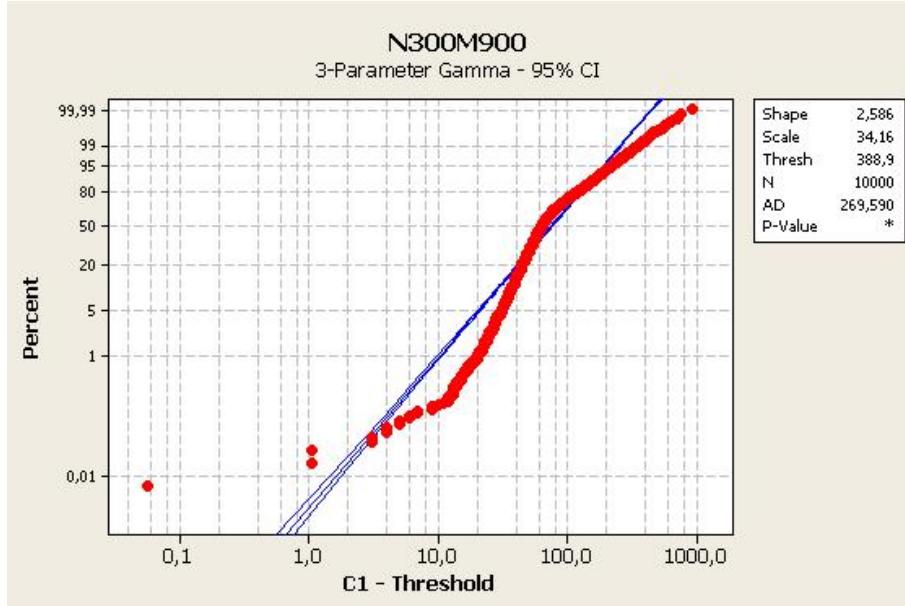
Figura A.84: Distribuição encontrada para $N=300$ e $M=900$

Verificamos neste caso a existência de uma distribuição discreta com caudas bastante distintas e não uniformes, quase contínua, a qual os testes de aderência de Anderson-Darling não se adere a nenhuma distribuição conhecida .

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

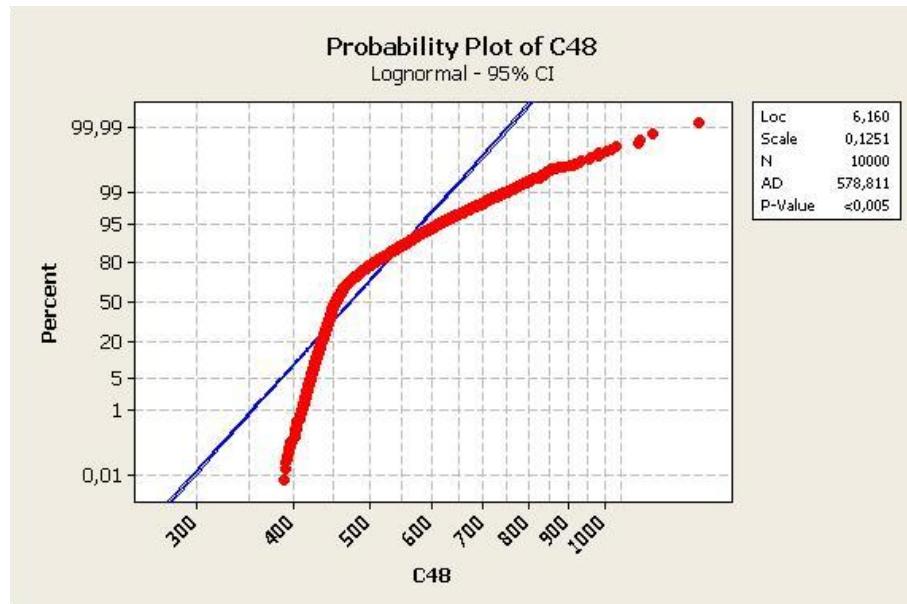


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

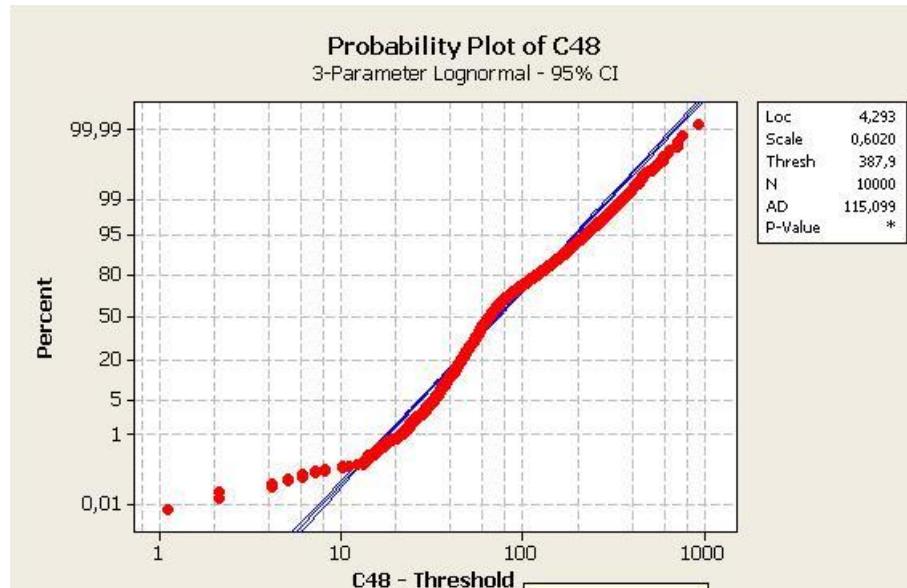


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.85: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=900$



(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal



(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.86: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=900$

A.1.31 $N=300$ e $M=1200$ ($\frac{M}{N} = 4$) , $N=300$ e $M=1290$ ($\frac{M}{N} = 4.3$) e $N=300$ e $M=1500$ ($\frac{M}{N} = 5$)

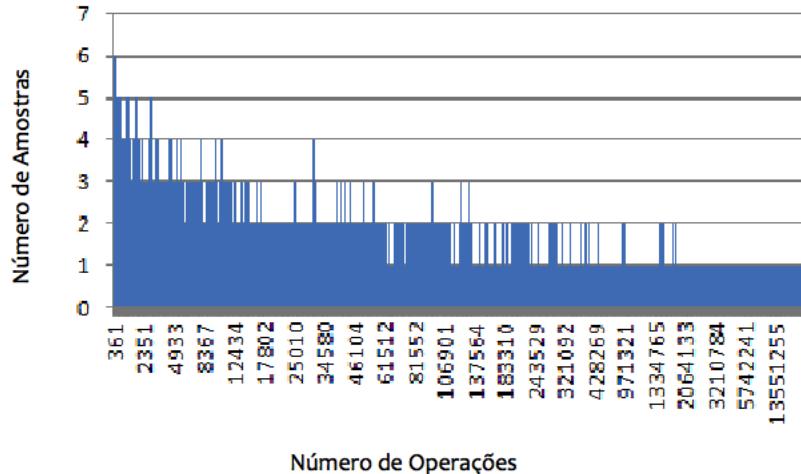
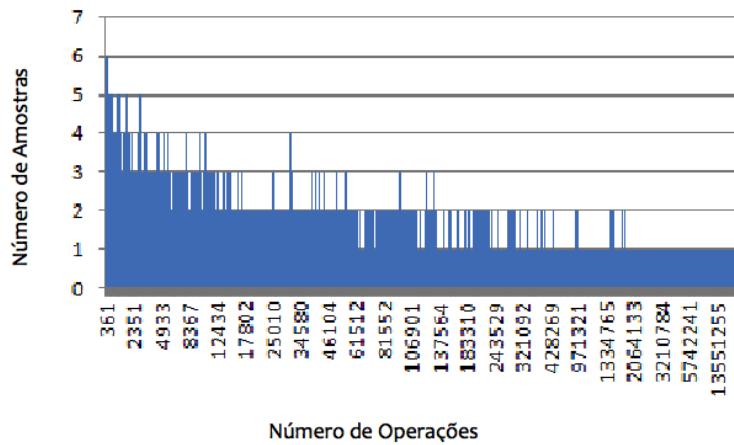
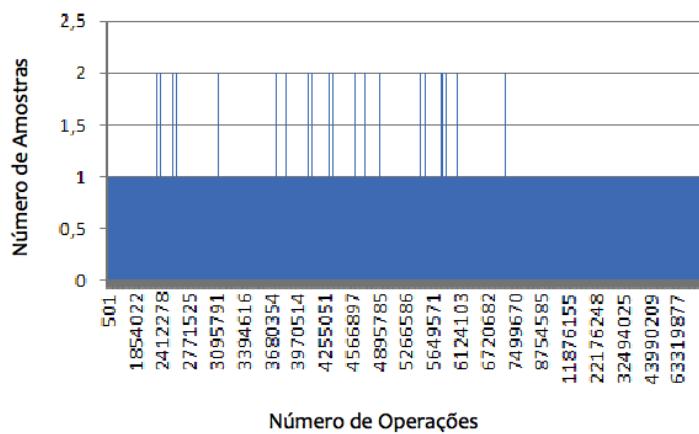
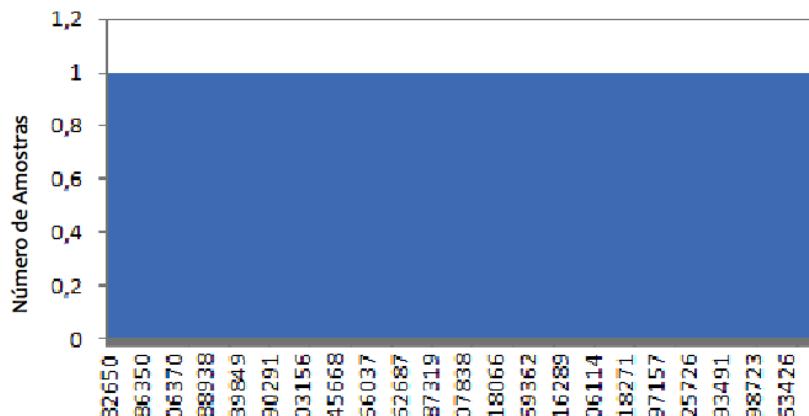


Figura A.87: Distribuição encontrada para $N=300$ e $M=1200$

Nestes casos foram realizados 50 mil testes para cada configuração, porém o resultado obtido para $\frac{M}{N}=4$ foi semelhante aos casos com um menor número de átomos (N) onde onde a distribuição gráfica se assemelha a uma exponencial logarítmica, a qual não se ajustou a nenhuma distribuição e não conseguimos descobrir seus parâmetros. No caso de $\frac{M}{N}=4.3$ novamente obtivemos um resultado inconclusivo. A grande diferença que obtivemos, foi para o caso de $\frac{M}{N} = 5$ que o resultado foi uma constante.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

**Figura A.88:** Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=1200$ (a) Distribuição encontrada para $N=300$ e $M=1290$ **Figura A.89:** Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=1290$ 

A.1.32 N= 300 e M=1800 ($\frac{M}{N} = 6$)

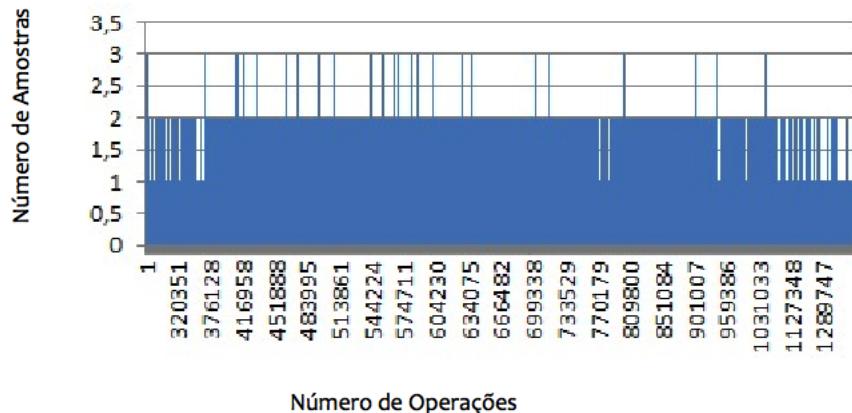
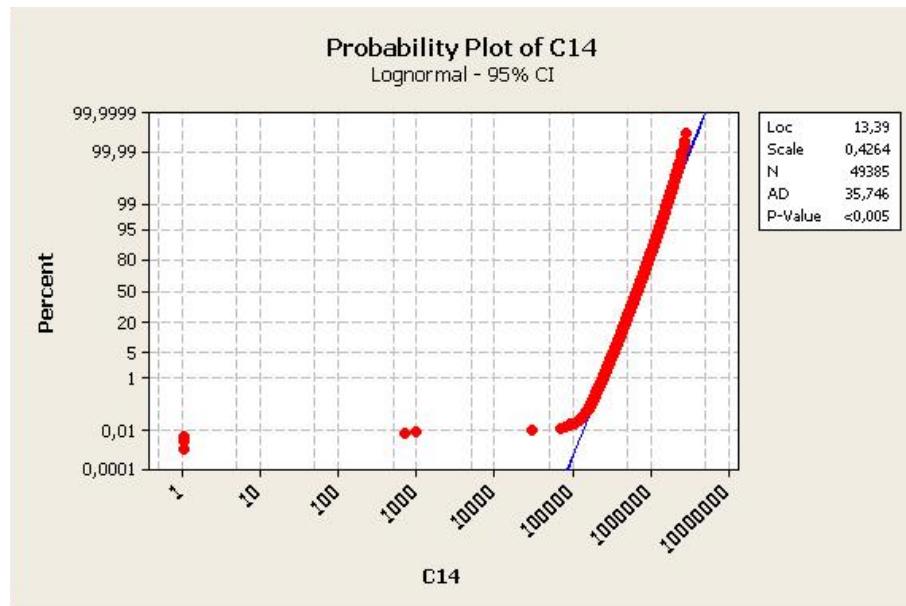


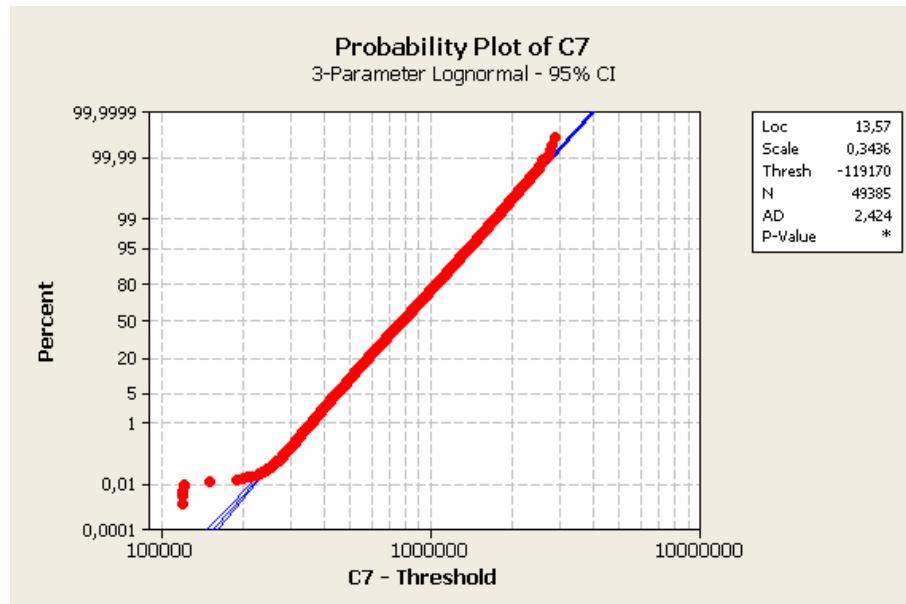
Figura A.91: Distribuição encontrada para $N=300$ e $M=1800$

Para este teste também houve a necessidade da utilizando de mais problemas como entrada, e assim conseguimos obter uma distribuição aproximada da Lognormal, porém, como o valore de AD foram maiores que o valor crítico, não podemos afirmar que a distribuição encontrada se ajusta à Lognormal.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

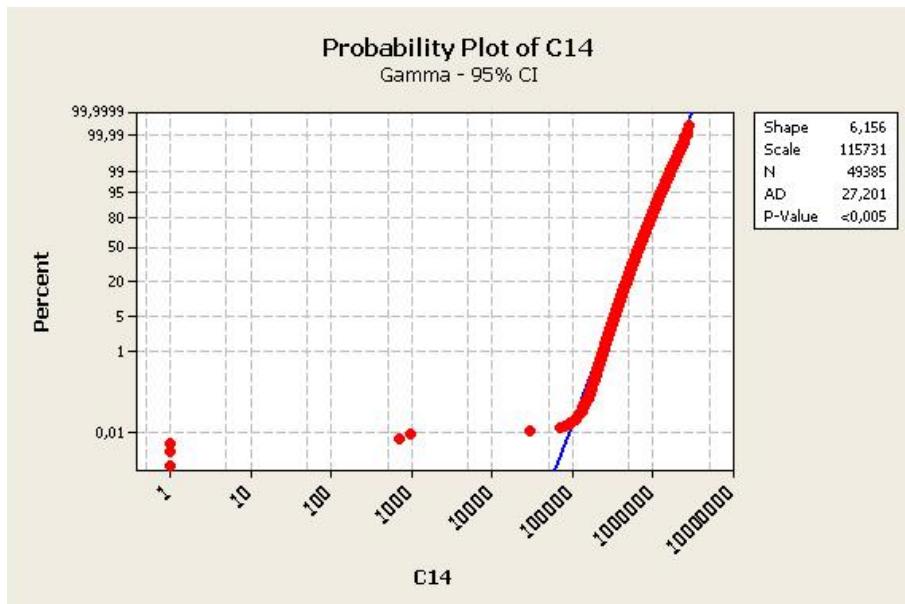


(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal

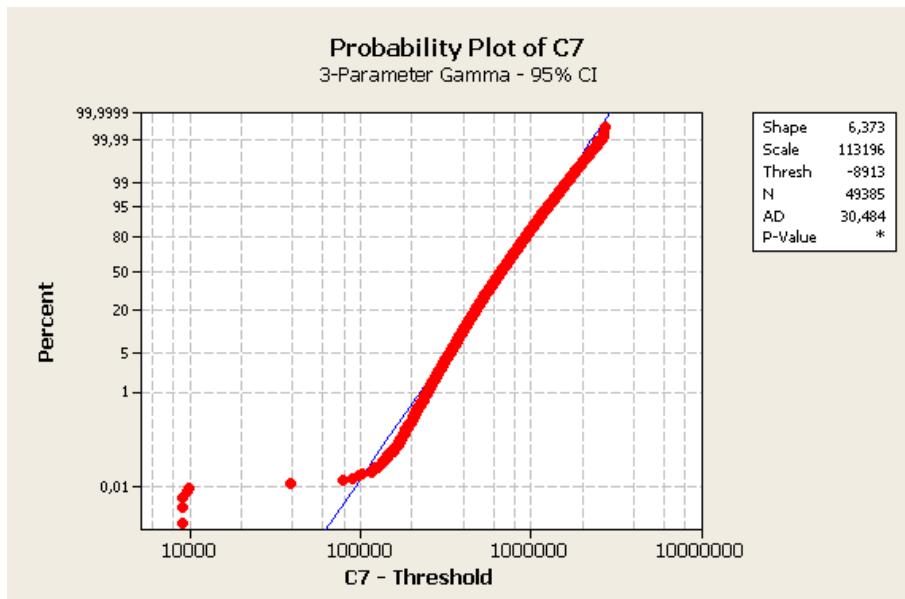


(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.92: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=1800$



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama



(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.93: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=1800$

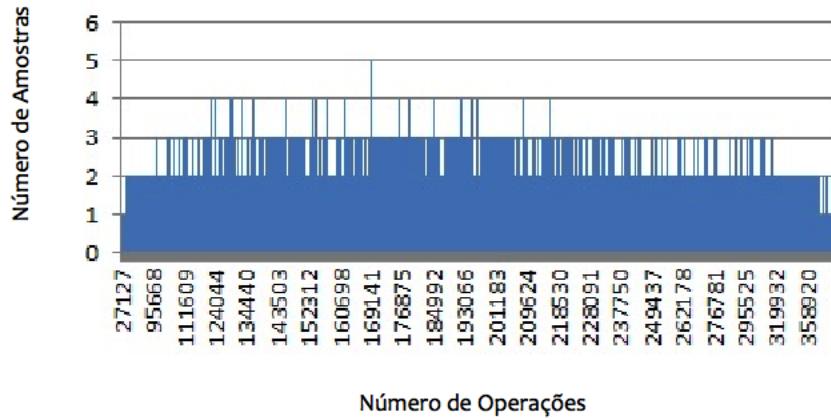
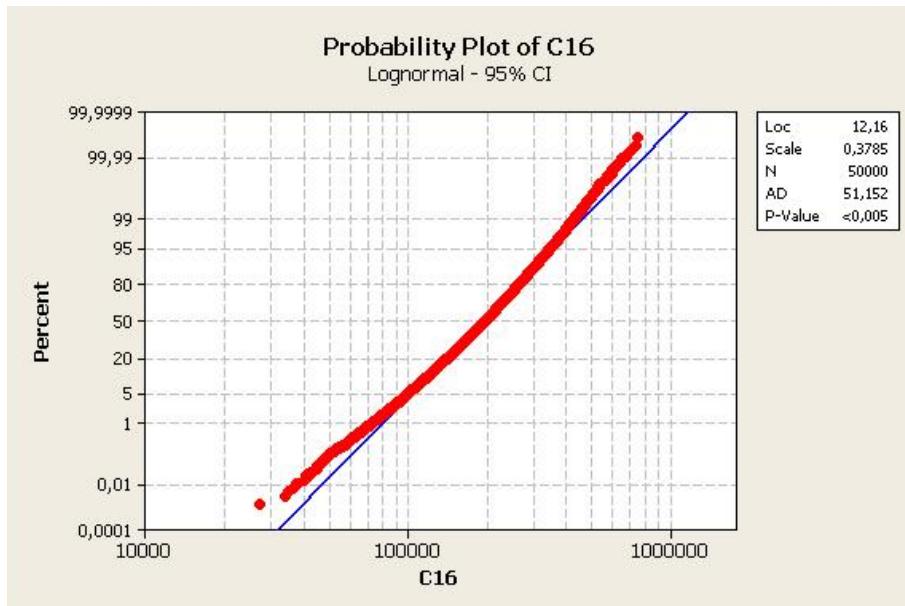
A.1.33 N= 300 e M=2100 ($\frac{M}{N} = 7$)


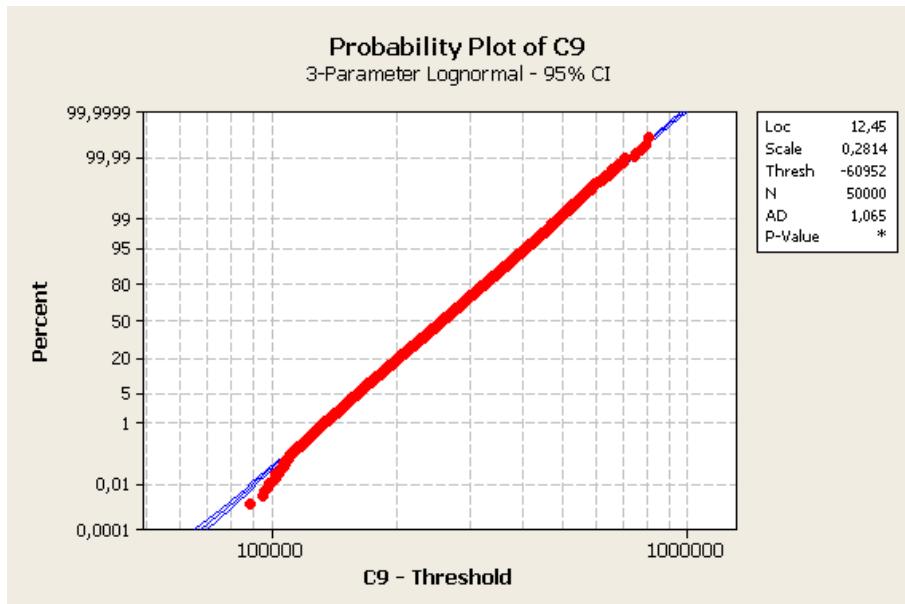
Figura A.94: Distribuição encontrada para $N=300$ e $M=2100$

Para este teste também houve a necessidade de executar mais problemas, e assim conseguimos obter uma distribuição aproximada da Lognormal, porém, como o valor de AD foi um pouco maior que o valor crítico, não podemos afirmar que a distribuição encontrada se ajusta à Lognormal.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

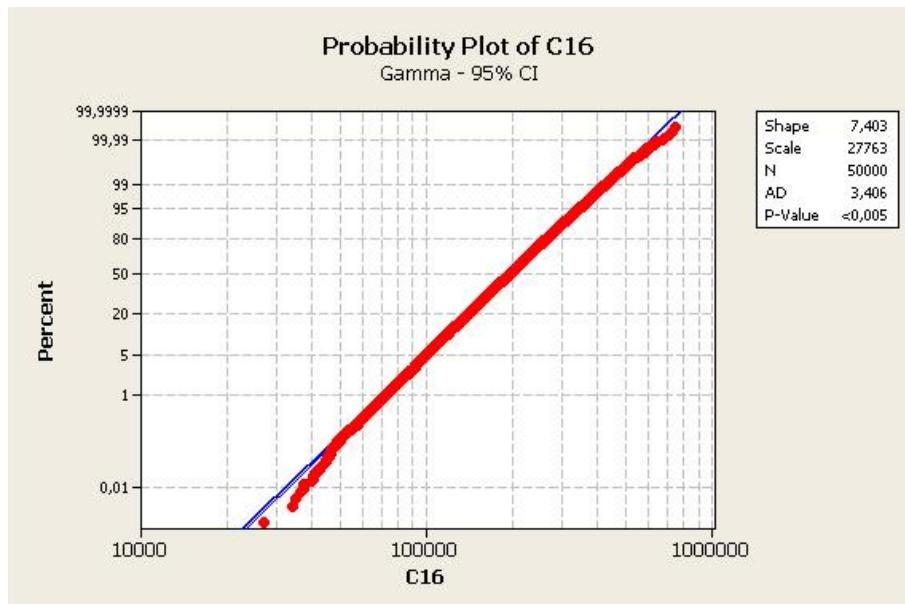


(a) Teste de aderência com a distribuição Lognormal

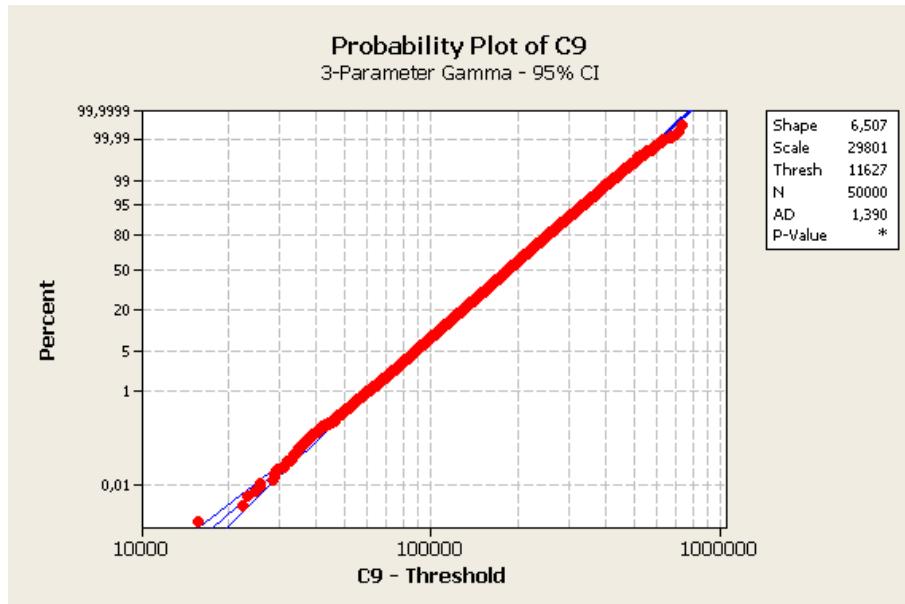


(b) Teste de aderência com a distribuição Lognormal com 3 parâmetros

Figura A.95: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=2100$



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama



(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.96: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=2100$

A.1.34 N= 300 e M=2400 ($\frac{M}{N} = 8$)

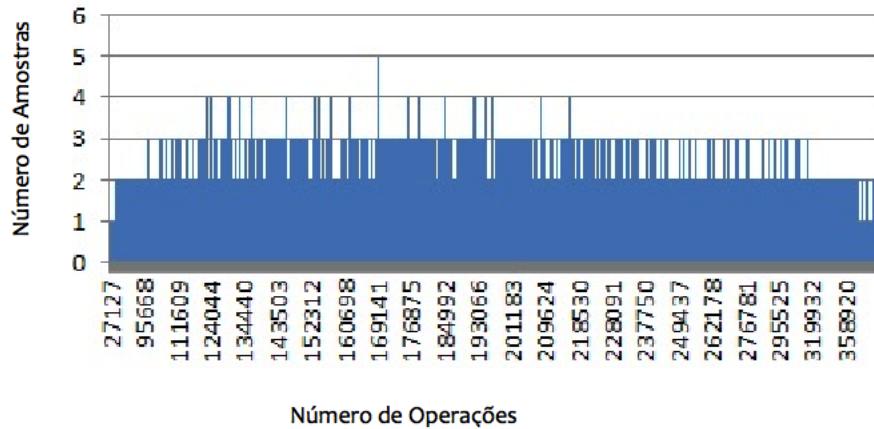
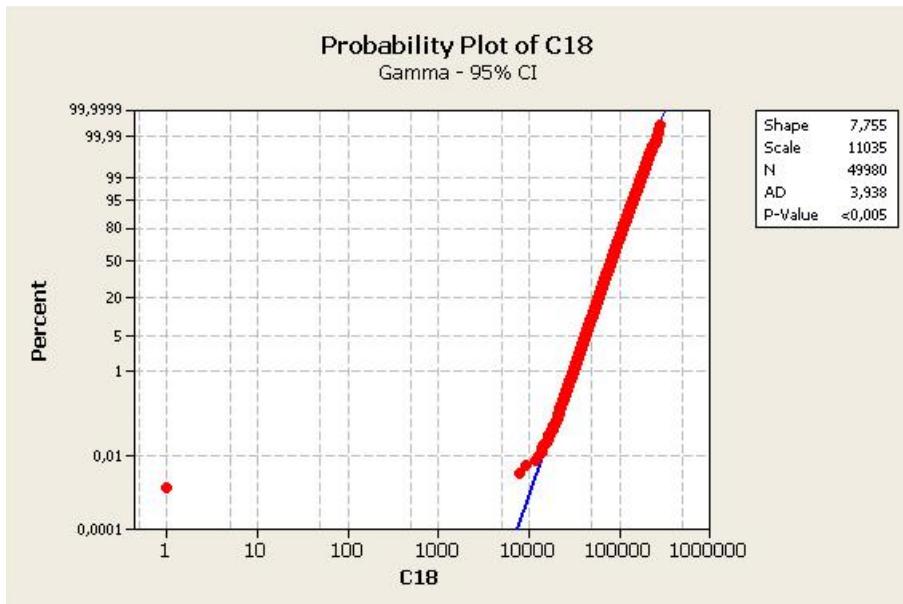


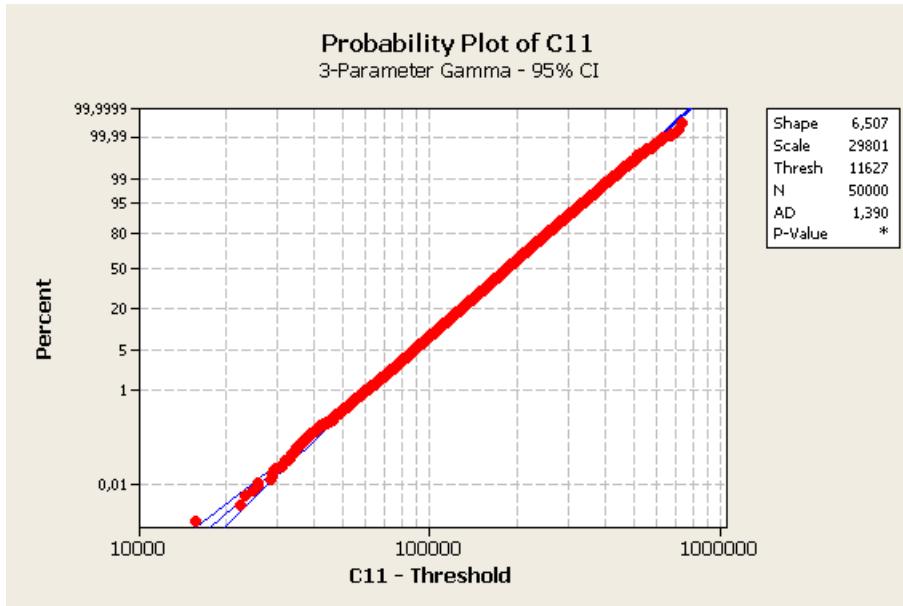
Figura A.97: Distribuição encontrada para $N=300$ e $M=2400$

Para este teste também houve a necessidade de executar mais problemas, e assim conseguimos obter uma distribuição aproximada da Lognormal, porém, como o valor de AD foi um pouco maior que o valor crítico, não podemos afirmar que a distribuição encontrada se ajusta à Lognormal.

Os testes de aderência para este caso estão apresentados a seguir.

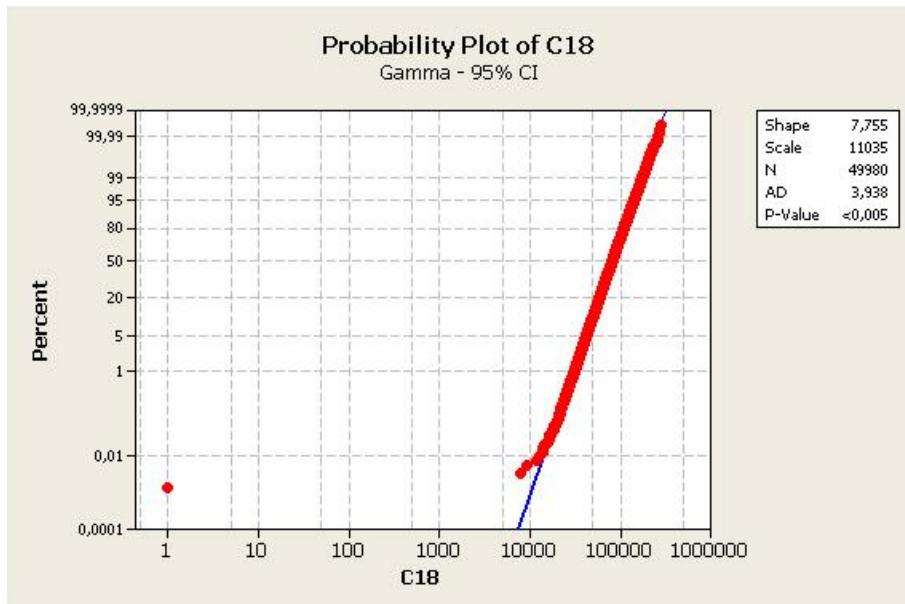


(a) Teste de aderência com a distribuição Gama

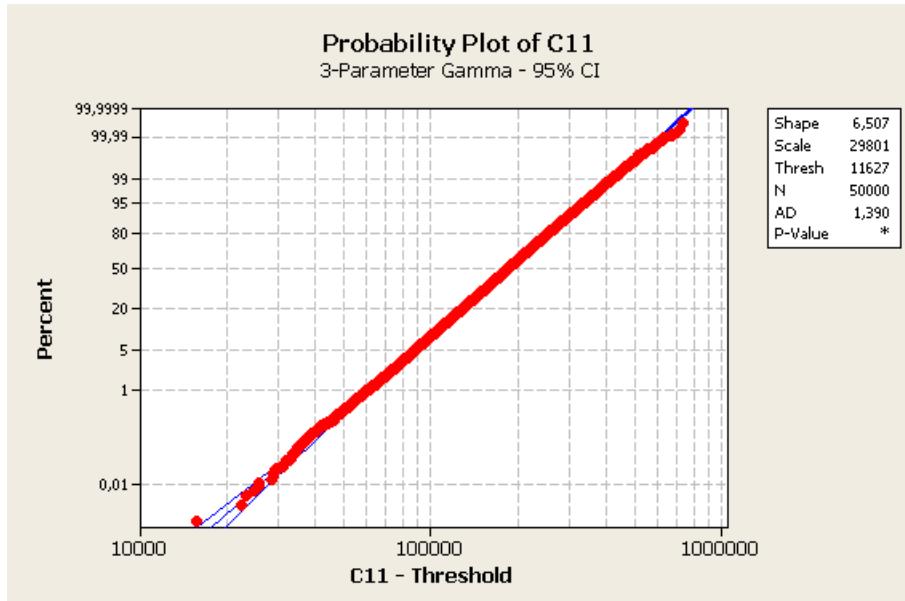


(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.98: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=2400$



(a) Teste de aderência com a distribuição Gama



(b) Teste de aderência com a distribuição Gama com 3 parâmetros

Figura A.99: Distribuição e testes de aderência para os valores de $N=300$ e $M=2400$

Referências Bibliográficas

- Action(2011)** Portal Action. *Teste de Kolmogorov-Smirnov*. URL <http://portalaction.com.br/content/62-teste-de-kolmogorov-smirnov>. Citado na pág. 16
- Altman DG(1995)** Bland JM Altman DG. Absence of evidence is not evidence of absence. Em *British Medical Journal*. Citado na pág. 15
- Anderson e Darling(1952)** T. W. Anderson e D. A. Darling. Asymptotic theory of certain "goodness-of-fit" criteria based on stochastic processes. Em *Annals of Mathematical Statistics*, páginas 193–212. Citado na pág. 17
- Bessegato(2011)** Lupércio F. Bessegato. *Métodos Computacionais para Estatística*. Departamento de Estatística – ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais. URL <http://bessegato.sites.uol.com.br/UFMG/bondade.htm>. Citado na pág. 15
- Camponogara(2002)** Eduardo Camponogara. *Problemas Intratáveis e Algoritmos de Aproximação*. URL http://www.das.ufsc.br/~camponog/Disciplinas/DAS-9003/slides_CLR/l25-reduction-approximation.pdf. Accessed 20/10/2011. Citado na pág. 6
- Cook(1971)** Stephen Cook. The complexity of theorem-proving procedures. Em *Proceedings of the 3rd Symposium on the Theory of Computing*, páginas 151–158. ACM. Citado na pág. 1
- Cormen et al.(1990)** Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest e Clifford Stein. *Introduction to algorithms*. The Massachusetts Institute of Technology, segunda edição. Citado na pág. 1, 3, 5, 6, 7, 11
- da Silva et al.(2006)** Flávio S. C. da Silva, Marcelo Finger e Ana C. V de Melo. *Lógica para Computação*. Thomson Learning. Citado na pág. 3, 8, 9, 10, 11, 12
- Dahab(2002)** Ricardo Dahab. *Algoritmos*. URL http://www.ic.unicamp.br/~rdahab/cursos/mc102/2010-1s/Welcome_files/pdfs/textos/algos-adianta-texto-62-79.pdf. Accessed 20/10/2011. Citado na pág. 6
- Dantas(2004)** Carlos Alberto Barbosa Dantas. *Probabilidade: Um Curso Introdutório*. Editora da Universidade de São Paulo. Citado na pág. 13, 14
- de Moraes(2009)** Eduardo Menezes de Moraes. *Provadores de teoremas baseados em contagem*. URL <http://www.ime.usp.br/~cef/mac499-08/monografias/rec/eduardo/monografia.pdf>. Accessed 20/10/2011. Citado na pág. 12
- DIMACS(1993)** DIMACS. Satisfiability suggested format. Citado na pág. 7
- Feofiloff(2009)** Paulo Feofiloff. *Complexidade computacional e problemas NP-completos Complexidade computacional e problemas NP-completos*. URL http://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/NPcompleto2.html. Accessed 20/10/2011. Citado na pág. 5, 6
- Fux(2004)** Jacques Fux. Análise de algoritmos sat para resolução de problemas multivalorados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil. Citado na pág. vi, 8, 9, 10, 11

- Gardner MJ(1986)** Altman DG Gardner MJ. Confidence intervals rather than p values: estimation rather than hypothesis testing. Em *British Medical Journal (Clin Res Ed)*. Citado na pág. 15
- Gauvreau K(1994)** Pagano M. Gauvreau K. Why 5%? Em *Nutrition*. Citado na pág. 14
- Gent e Walsh(1994)** Ian P. Gent e Toby Walsh. The sat phase transition. Em *ECAI94 – Proceedings of the Eleventh European Conference on Artificial Intelligence*, páginas 105–109. John Wiley & Sons. Citado na pág. vi, 12
- Grimes DA(2002)** Schulz KF Grimes DA. An overview of clinical research: the lay of the land. Em *The Lancet*. Citado na pág. 15
- Harry R. Lewis(1995)** Christos H. Papadimitriou Harry R. Lewis. *Elementos de Teoria da Computação*. University of California. Citado na pág. 1, 4, 5, 6, 8
- Kato(2009)** Sérgio Kato. *Teste de hipótese*. URL http://www.pucrs.br/famat/sergio/Estatistica_Basica_T126/Teste_de_hipotese.pdf. Accessed 20/10/2011. Citado na pág. 13, 14
- Leichsenring(2010)** Alexandre Ribeiro Leichsenring. *Ajuste e identificação de distribuições*. Daiichi Sankyo. URL www.virtualsurvey.com.br/arquivos/daiichi/modulo3/livr/aula4i.pdf. Citado na pág. 15
- Levin(1973)** Leonid Levin. Universal search problems. *Problemy Peredachi Informatsii*. Citado na pág. 1
- Lima(2007)** Fernando Corrêa Lima. Um resolvedor sat paralelo com bsp sobre uma grade. Dissertação de Mestrado, UNIVESIDADE DE SÃO PAULO. Citado na pág. 2, 3
- Magalhães e de Lima(2008)** Marcos Nascimento Magalhães e Antonio Carlos Pedroso de Lima. *Noções de Probabilidade e Estatística*. Editora da Universidade de São Paulo, sexta edição. Citado na pág. 15
- NIST e SEMATECH(2011)** NIST e SEMATECH. *e-Handbook of Statistical Methods*. URL <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>. Citado na pág. 14, 17
- Pasquali(2000)** Luiz Pasquali. *Introdução à Estatística Inferencial*. Editora Vozes. Citado na pág. vi, 14
- Sipser(2007)** Michael Sipser. *Introdução à Teoria da Computação*. Thomson Learning, tradução da segunda edição norte-americana edição. Citado na pág. 4, 5, 6
- Stephens(1974)** M. A. Stephens. Edf statistics for goodness of fit and some comparisons. Em *Journal of the American Statistical Association*, páginas 730–737. Citado na pág. 17, 18, 26
- Stephens(1976)** M. A. Stephens. Asymptotic results for goodness-of-fit statistics with unknown parameters. Em *Annals of Statistics*, páginas 357–369. Citado na pág. 17, 18, 26
- Stephens(1977)** M. A. Stephens. Goodness of fit for the extreme value distribution. Em *Biometrika*, páginas 583–588. Citado na pág. 17, 18, 26
- Stephens(1979)** M. A. Stephens. Tests of fit for the logistic distribution based on the empirical distribution function. Em *Biometrika*, páginas 591–595. Citado na pág. 17, 18, 26
- Vanessa Bielefeldt Leotti e Riboldi(2005)** Alan Rodrigues Birck Vanessa Bielefeldt Leotti e João Riboldi. ComparaÇÃo dos testes de aderÊncia À normalidade kolmogorov- smirnov, anderson-darling, cramer-von mises e shapiro-wilk por simulaÇÃo. Citado na pág. 13, 15

Wyle Laboratories et al.(2011) University of Maryland Center for Risk Wyle Laboratories, Penn State University Applied Research Laboratory Reliability, Quanterion Solutions Incorporated e State University of New York Institute of Technology. *RIAC Desk Reference*. URL <http://www.theriac.org/DesktopReference/viewDocument.php?id=60>. Citado na págs. 13, 15, 16