Коллоквиум по математичекому анализу, осень 2024

Агаркова Полина, ассистент 241

Версия 2.0

Содержание

Содержание билетов.

1. Понятие высказывания и n-местного предиката. Логические операции. Кванторы. Построение отрицания к высказыванию с кванторами.

2. Доказательства методами математической индукции и от противного. Неравенство Бернулли.

3. Перестановки, размещения и сочетания. Бином Ньютона.

4. Понятие последовательности. Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченные, бесконечно малые, бесконечно большие и отделимые от нуля последовательности. Связь между ними. Ограниченность сходящейся последовательности. Отделимость от нуля последовательности, сходящейся не к нулю.

5. Арифметические свойства предела последовательности.

6. Предельный переход в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности.

7. Ограниченные подмножества действительных чисел. Аксиома непрерывности действительных чисел. Верхняя и нижняя грань. Точная верхняя и точная нижняя грань. Теорема о существовании точной верхней и нижней грани.

8. Теорема Вейерштрасса.

9. Число e. Постоянная Эйлера.

10. Подпоследовательность. Предельная точка. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

11. Частичный предел. Верхний и нижний предел. Эквивалентность понятий частичного предела и предельной точки.

12. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

13. Предел функции в точке: определения по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений. Арифметика предела функции. Теорема о зажатой функции.

14. Сходимость стандартных последовательностей.

1 Логические операции. Кванторы. Построение отрицания

Высказывание - утверждение, про которое можно сказать истинно оно или ложно.

n-местный предикат - высказывание с n переменными: $P(a_1, a_2, ..., a_n)$

Логические операции:

- $\neg$ - отрицание
- $\vee$ - дизъюнкция ("или")
- $\wedge$ - конъюнкия ("и")
- $\rightarrow$ - импликация

Кванторы:

- $\forall$ - квантор всеобщности
- $\exists$ - квантор существования
- $\exists!$ - квантор существования и единственности

Построение отрицания к высказыванию с кванторами:

Пусть $P(n)$ - предикат. Тогда:

1. $\neg(\forall n\ P(n)) = \exists n\ \neg P(n)$
2. $\neg(\exists n\ P(n)) = \forall n\ \neg P(n)$

2 Доказательста по мат. индукции и от противного. Неравенство Бернулли.

Метод доказательства от противного. Пусть A - высказыание. Тогда A - истина, если $\neg A$ - ложь.

Метод математической индукции. Пусть $P(n)$ - предикат, $a \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall n \geq a\ P(n)$ - истина, если:

1. $P(a)$ - истина (база индукции).
2. $\forall n\ P(n) \rightarrow P(n+1)$ (шаг индукции)

Неравенство Бернулли. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \geq -1\ :\ (1+x)^n \geq 1 + xn$

Доказательство. *База.* $n = 1 \ : \ (1+x)^1 \geq 1 + x \cdot 1$ - верно.

Шаг. Пусть для n = k выполнено. То есть: $\forall x \geq -1 \ : \ (1+x)^k \geq 1 + xk \ \ (*)$.

Хотим проверить выполнение утверждения: $\forall x \geq -1 \ : \ (1+x)^{k+1} \geq 1 + x \cdot (k+1)$.

Домножим $(*)$ на $(1+x)$:

$(1+x)^{k+1} \geq (1+x)\cdot(1+xk) = 1 + x + xk + x^2k = 1 + x\cdot(k+1) + x^2k \geq 1 + x\cdot(k+1)$

Получили: $(1+x)^{k+1} \geq 1 + x\cdot(k+1)$ - что и хотели.

$\square$

3 Перестановки, размещения и сочетания. Бином Ньютона.

Перестановка - упорядоченное множество размером n.

Число перестановок: $n!$

Размещение - упорядоченное подмножество размером k из множества размером n.

Число размещений: $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Сочетание - неупорядоченное подмножество размера k из множества размером n.

Число сочетаний: $C_k^n = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Бином Ньютона: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot x^k \cdot y^{n-k}$

4 Единственность предела. Ограниченные, б. м., б. б. и отделимые от нуля.

Последовательностью называется индексированный набор чисел $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon), N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n - a| < \varepsilon$$

или (запись определения через ε-окрестности):

$$\forall U_\varepsilon(a) \ \ \exists N = N(\varepsilon), \ N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N \ : \ a_n \in U_\varepsilon(a)$$

Теорема о единственности предела. Последовательность $\{a_n\}$ может иметь только один предел.

Доказательство. Предположим противное. $\Rightarrow$ существует хотя бы два предела.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Тогда по определению:

$\forall U_\varepsilon(a)\ \ \exists N = N_1(\varepsilon),\ N_1 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq N_1\ :\ a_n \in U_\varepsilon(a) \quad (1)$

$\forall U_\varepsilon(b)\ \ \exists N = N_2(\varepsilon),\ N_2 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq N_2\ :\ a_n \in U_\varepsilon(b) \quad (2)$

Возьмём $\varepsilon_0 = \dfrac{|a-b|}{7}$, тогда $U_{\varepsilon_0}(a) \cap U_{\varepsilon_0}(b) = \varnothing$

Рассмотрим член последовательности с номером $n_0 = N_1(\varepsilon) + N_2(\varepsilon)$. Так как $n_0 > N_1(\varepsilon)$ и $n_0 > N_2(\varepsilon)$, то выполнены утверждения (1) и (2) $\Rightarrow$ $a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(a) \cap U_{\varepsilon_0}(b) = \varnothing$ противоречие. $\square$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной**, если $\exists C\ \forall n\ :\ |a_n| \leq C$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **бесконечно большой** (б.б), если

$$\forall M > 0\ \exists N = N(M)\ \forall n \geq N\ :\ |a_n| > M$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **бесконечно малой** (б.м.), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n \geq N\ :\ |a_n| < \varepsilon$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **отделённой от нуля**, если $\exists \varepsilon_0 \neq 0\ \ \forall n\ :\ |a_n| > \varepsilon_0$.

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Всякая сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

Доказательство. Т. к. $\{a_n\}$ сходится, то: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon), N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \varepsilon \quad (1)$.

Возьмём $\varepsilon = 1 : \forall n > N(1)\ :\ a - 1 < a_n < a + 1\ \Rightarrow\ \forall n > N(1)\ :\ |a_n| < max\{|a-1|;\ |a+1|\}$

Тогда последовательность $\{a_n\}$ ограничена либо каким-то своим членом из первых $N(1)$ членов, либо max{|a-1|; |a+1|}. То есть выполнено следующее:

$\forall n \in N\ |a_n| < max\{|a-1|;\ |a+1|;\ |a_1|;\ |a_2|; ...\ |a_{N(1)-1}|\} + 1$ - определение ограниченности $\square$

5 Арифметические свойства предела последовательности.

Утверждение. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\ \Leftrightarrow\ a_n = a + \alpha_n,$ где $\{a_n\}$ - последовательность, α_n - б.м. последовательность.

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon) :\ |a_n - a| < \varepsilon$.

$\{\alpha_n\}$ - б.м. $\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon) :\ |\alpha_n| < \varepsilon$, где $\alpha_n = a_n - a$.

Доказательсво "греческое": смотри! $\square$

Рассмторим две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда выполнены следующие свойсва:

1. Предел суммы. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.
2. Предел произведения. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
3. Предел частного. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b},$ если дополнительно известно, что $b \neq 0$ и $\forall n\ b_n \neq 0$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, если дополнительно известно, что $a_n, a > 0$

Доказательство. Нам дано:

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N_1(\varepsilon)\ :\ |a_n - a| < \varepsilon \quad (1)$

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N_2 = N_2(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N_2(\varepsilon)\ :\ |b_n - b| < \varepsilon \quad (2)$

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \ \exists N_3(\varepsilon)\ \ \forall n > N_3(\varepsilon)\ :\ |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$

$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon.$

Неравенство $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнено, начиная с $n = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$; неравенство $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнено, начиная с $n = N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \ \Rightarrow$ нераенство $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ выполнено начиная с $n = N_3(\varepsilon) = max\{N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right);\ N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\}$ ч.т.д.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ \Leftrightarrow\ a_n = a + \alpha_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \ \Leftrightarrow\ b_n = b + \beta_n,$ где α_n и β_n - б.м. последовательности.

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a + \alpha_n)\cdot(b + \beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a\cdot b + a\cdot\beta_n + b\cdot\alpha_n + \alpha_n\cdot\beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a\cdot b) + \lim\limits_{n\to\infty}(a\cdot\beta_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(b\cdot\alpha_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n\cdot\beta_n) = a\cdot b + 0 + 0 + 0 = a\cdot b$

3. Хотим доказать, что $\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b}$ - бесконечно малая. Начнём:

$\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{(a\cdot b + b\cdot\alpha_n) - (a\cdot b + a\cdot\beta_n)}{b\cdot(b + \beta_n)} = \dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{b - \beta_n}\cdot(b\cdot\alpha_n - a\cdot\beta_n)$. Понятно, что $b\cdot\alpha_n - a\cdot\beta_n$ - бесконечно малая, так как это сумма б.м (б.м. $\cdot$ огр. = б.м.). А $\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{b - \beta_n}$ - ограниченная, так как (1 / огр. = огр. и $b \neq 0$). □

6 Предельный переход в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности.

Теорема. Если $\forall n\ c_n \geq A$ и $c_n \to c$ при $n \to \infty$, то $c \geq A$

Доказательство. Так как c_n сходится к c, то по определению предела: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ :$ $|c_n - c| < \varepsilon$ $(*)$ (то есть $c_n \in U_\varepsilon(c)$)

Преподположим противное: $c < A$. Возьмём $\varepsilon_0 = \dfrac{A-c}{7}$. Так как выражение $(*)$ выполнено для любого ε, то оно выполнено и для ε_0: $\forall n > N(\varepsilon_0)\ c_n \in U_{\varepsilon_0}(c) \ \Rightarrow\ c_n < A$ - противорчие (по условию $\forall n\ c_n \geq A$) $\square$

Следствие (a.k.a. предельный переход в неравенствах). Если $a_n \to a$ при $n \to \infty$, $b_n \to b$ при $n \to \infty$ и $\forall n\ a_n \leq b_n$, то $a \leq b$.

Доказательство. Рассмотрим $c_n = b_n - a_n$. По условию $a_n \leq b_n$, значит $c_n \geq 0$. Применим для c_n теорему, доказанную выше, и получим: $c \geq 0$, где $c = b - a$ - предел последовательности c_n (вопользовались арифметикой предела). То есть $b - a \geq 0 \ \Leftrightarrow\ b \geq a$

Замечание. При предельном переходе все неравенства становятся *нестрогими.* $\square$

Теорема о зажатой последовательности. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ и $\forall n\ a_n \leq c_n \leq b_n$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Доказательство. По определению предела последовательности для a_n и b_n соответсвенно:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N_1\ \ c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$ (1)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N_2\ \ c - \varepsilon < b_n < c + \varepsilon$ (2)

Положим $N_3 = max\{N_1(\varepsilon);\ N_2(\varepsilon)\}$. Тогда для $\forall n \geq N_3$ выполнена следующая цепочка неравенств: $c - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < c + \varepsilon$ (самое левое неравенство выполнено для $n \geq N_1(\varepsilon)$, самое правое неравенство выполнено для $n \geq N_2(\varepsilon)$: см. выражения (1) и (2)).

То есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_3 = max\{N_1(\varepsilon);\ N_2(\varepsilon)\}\ \ \forall n \geq N_3\ :\ |c_n - c| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ $\square$

7 Верхняя и нижняя грань. Теорема о сущ. точной верхней и нижней грани.

Пусть X - не пустое числовое множество. Множество X - называется **ограниченным сверху** если существует такое число a, что $\forall x \in X\ x < a$

Пусть X - не пустое числовое множество. Множество X - называется **ограниченным снизу** если существует такое число a, что $\forall x \in X\ x > a$

Множество, ограниченное сверху и снизу называется **ограниченным**.

Аксиома непрерывности действительных чисел. Пусть $X, Y \in \mathbb{R}$, причём $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$. Кроме того, пусть $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется следующее неравенство: $x \leq y$. Тогда найдётся число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leq c \leq y$.

Верхней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число C, такое что: $\forall a \in A \;\; a \leq C$.

Нижней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число C, такое что: $\forall a \in A \;\; a \geq C$.

Точной верхней гранью множества A ($supA$) называется наименьший элемент множества верхних граней A.

Точной нижней гранью множества A ($infA$) называется наибольший элемент множества нижних граней A.

Теорема о существовании точной верхней грани. У любого непустого, ограниченного сверху множества A существует точная верхняя грань ($supA$).

Доказательство. Пусть S_A - множество верхних граней множества A. Тогда выполнены следующие три условия:

1. $S_A \neq \varnothing$ (так как множество A ограничено сверху, то множество верхних граней множества A не пусто).
2. $\forall a \in A \;\; \forall c \in S_A \; : \; a \leq c$ (любая верхняя грань множества A не меньше любого элемента из множества A)
3. $A \neq \varnothing$ (по условию)

Значит можно применить аксиому непрерывности действительных чисел для множеств A и S_A $\Rightarrow \;\; \exists B \;\; \forall a \in A \;\; \forall c \in S_A \; : \; a \leq B \leq c.$ Разобъём это утверждение на две части:

1. $\forall a \in A \;\; a \leq B \Rightarrow B$ - верхняя грань множества A.
2. $\forall c \in S_A \;\; B \leq c \Rightarrow B$ - не больше всех верхних граней множества A.

Значит B - наименьшая верхняя грань множества $A \;\Rightarrow\; B = supA$

Замечание. Теорема о существовании точной нижней грани доказывается аналогично. □

8 Теорема Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса. Пусть последовательность $\{a_n\}$ не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу). Тогда $\{a_n\}$ сходится.

Доказательство. Докажем для случая: последовательность ограничена сверху и не убывает (второй случай доказывается абсолютно аналогично).

Рассмотрим множество $A = \{a_n\}$, то есть A - множество значений последовательности $\{a_n\}$. Так как a_n - ограничена сверху и $A \neq \varnothing \Rightarrow \exists supA = a$ (по теореме о существовании точной верхней грани).

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Хотим: $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \; \forall n \geq N \; : \; |a_n - a| < \varepsilon$, раскроем модуль, зная, что a - точная верхняя грань ($\forall n \; a_n \leq a$) и получим:

$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \; \forall n \geq N \; : \; a - a_n < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \; \forall n \geq N \; : \; a_n > a - \varepsilon.$

$\Leftrightarrow \;(*)\;\; \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \; : \;\; a_{n_0} > a - \varepsilon$

Такой равносильный переход корректен, поскольку a_n - не убывающая: если выражение $(*)$ выполнено, то неверенство $a_n > a - \varepsilon$ также выполнено для $\forall n \geq n_0$ (правая часть неравенства остаётся неизменной, левая не уменьшается).

Докажем теперь от противного, что $(*)$ выполнена. Пусть $(*)$ не выполняется, тогда:

$\exists\varepsilon_0 > 0 \; \forall n \; : \; a_n \leq a - \varepsilon_0 \;\Rightarrow\; a - \varepsilon_0$ - верхняя грань множетсва A (по определению).

Тогда $a - \varepsilon_0 \in S_A$. В то же время $a > a - \varepsilon_0$ и $a = minS_A$ (по определению точной верхней грани). То есть $a - \varepsilon_0$ - верхняя грань множества A, которая меньше точной верхней грани, что невозможно $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $(*)$ выполнена $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ $\square$

9 Число е. Постоянная Эйлера.

Число е. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, заданную формулой $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Докажем, что у этой последовательности существует предел. Этот предел и называют числом e.

Доказательство. Покажем, что последовательность ограничена:

$$a_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = \left(\tfrac{1}{n} + 1\right)^n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \dfrac{1}{n^k} \cdot 1^{n-k} = 1 + C_n^1 \cdot \dfrac{1}{n} + C_n^2 \cdot \dfrac{1}{n^2} + C_n^3 \cdot \dfrac{1}{n^3} + ... + C_n^n \cdot \dfrac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + ... + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n}{n} \cdot$$
$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + ... + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot ... \cdot \frac{n-(n-1)}{n} = 2 + \frac{1}{2!} \cdot (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) +$$
$$\frac{1}{n!} \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{n-1}{n}) \leq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1) \cdot n} =$$
$$2 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 3 - \frac{1}{n} \leq 3$$

То есть $\forall n \; a_n \leq 3 \;\Rightarrow \{\mathrm{a}_n\}$ ограничена сверху. Докажем, что $\{a_n\}$ неубывающая последовательность:

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot (1 - \frac{2}{n+1}) + ... + \frac{1}{(n+1)!} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot (1 - \frac{2}{n+1}) \cdot$$

$... \cdot (1 - \frac{n}{n+1}) \leq a_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot (1 - \frac{2}{n+1}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{n}{n+1}) \geq a_n \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$
$\Rightarrow \{a_n\}$ не убывает.

Значит $\{a_n\}$ ограничена сверху и не убывает $\Rightarrow$ по теореме Вейрштрасса $\{a_n\}$ имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. $\square$

Постоянная Эйлера. Рассмотрим последовательность $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$. Докажем, что $\{\gamma_n\}$ сходится к некоторому числу γ. Это число и называется постоянной Эйлера.

Доказательство. Покажем, что $\{\gamma_n\}$ убывает:

$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - (n+1) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$

Обозначим за b_n последовательность $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$. Значит чтобы докать, что $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} \cdot (1 - \ln(b_n)) < 0$, нужно чтобы b_n убывала. Докажем это:

$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+2}} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{(n+1)^2}{n \cdot (n+2)}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq \{\text{применим неравенство Бернулли}\} \geq \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(1 + \frac{n+1}{n^2+2n}\right) = \frac{(n+1) \cdot (n^2+3n+1)}{n^3+4n^2+4n} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1 \Rightarrow b_n > b_{n+1} \Rightarrow b_n$ - убывающая $\Rightarrow (1 - \ln(b_n)) < 0 \Rightarrow \gamma_n$ - убывающая.

Теперь докажем, что $\{\gamma_n\}$ ограничена снизу. Для этого докажем вспомогательное утверждение: $\forall n \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

Рассмотрим последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, как мы знаем, она возрастающая и сходится к e, то есть: $\forall n \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \Rightarrow \{\text{возьмём натуральный логарим от обеих частей}\} \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 \Leftrightarrow n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ ч.т.д.

$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n) > \{\text{пользуемся доказанным выше фатком}\} > \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + ... + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(n) = (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + (\ln(4) - \ln(3)) + ... + (\ln(n+1) - \ln(n)) - \ln(n) = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0 \Rightarrow \{\gamma_n\}$ ограничена снизу нулём.

Значит $\{\gamma_n\}$ убывает и огрничена снизу $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \{\gamma_n\} = \gamma$ - постоянная Эйлера. □

10 Подпоследовательность. Предельная точка. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ - это последовательность $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\}$, полученная из $\{x_n\}$ удалением ряда её членов без изменения порядка следования членов.

Предельной точкой последовательности $\{a_n\}$ называется число a, такое что в любой окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности $\{a_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$.

Доказательство. Так как $\{a_n\}$ ограничена, то $\exists c \ \forall n \ : \ |a_n| < c$.

Рассмотрим отрезок $I_1 = [-c; \ c]$, причём $\forall n \ a_n \in I_1$. Возьмём в качестве $n_1 = 1$. Разделим I_1 пополам (на 2 отрезка). В какой-то половине находится бесконечное число членов, возьмём эту половину и обзначим за I_2. В I_2 возьмём член a_{n_2}, $n_2 > n_1$. ... I_k разделим на два отрезка пополам, выберем половинку, где бесконечное число членов, её называем I_{k+1} и в ней выберем $a_{n_{k+1}} : n_{k+1} > n_k$.

Построим последовательность $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $I_k = [b_k; \ d_k]$. В силу построения $I_{k+1} \subset I_k$.

Рассмотрим последовательность левых концов отрезков I_k $\{b_k\}$: $\{b_k\}$ не убывает и ограничена сверху $c \ \Rightarrow$ По теореме Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{k \to \infty} b_k = b$.

Рассмотрим последовательность правых концов отрезков I_k $\{d_k\}$: $\{d_k\}$ не возрастает и ограничена снизу $c \ \Rightarrow$ По теореме Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{k \to \infty} d_k = d$.

Рассмотрим длину отрезка I_k. Поскольку длина самого первого отрезка $2c$ и мы $k-1$ раз разделили отрезок пополам, то длина I_k равна: $|d_k - b_k| = \dfrac{2c}{2^{k-1}} \to 0$ при $k \to \infty \ \Rightarrow \ d = b$.

Возьмём $a = b = d$. Рассмотрим последовательность $a_{n_k} \in I_k = [b_k; \ d_k] \ \Rightarrow \ b_k \le a_{n_k} \le d_k$.

По теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n_k \to \infty} a_{n_k} = a$ (b_k и d_k сходятся к a). $\Rightarrow \ a_{n_k}$ - сходящаяся подпоследовательность. □

11 Частичный, верхний и нижний предел. Их эквивалентность.

Частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется предел подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Нижний предел последовательности: $\underline{\lim}_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} a_k$.

Верхний предел последовательности: $\overline{\lim}_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} a_k$.

Замечание. Пусть $b_k = \sup\limits_{n\geq k}\{a_n\}$. Тогда $\overline{\lim}_{k\to\infty} a_k$ $\left(\underline{\lim}_{k\to\infty} a_k\right)$ всегда существуют в одном из следующих смыслов:

1. b_k ограничена $\Rightarrow$ существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$
2. b_k не ограничена $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{k\to\infty} b_k = -\infty$
3. b_k не определена $\Rightarrow$ зададим $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Теорема об эквивалентности понятий предельной точки и частичного предела. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Число a является предельной точкой последовательности $\Leftrightarrow$ a - частичный предел этой последовательности.

Доказательство. Докажем сначала, что если a - частичный предел, то a - предельная точка. По определению частичного предела: $\exists\{n_k\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ $\forall k \geq N$: $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. То есть в ε-окрестности точки a расположена бесконечное количество членов последовательности a_n (т.к. члены подпоследовательности a_{n_k} являются членами последовательности a_n) $\Rightarrow$ a - предельная точка.

Теперь докажем в обратную сторону. Пусть a - предельная точка. Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_k\}$, заданную формулой: $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$.

$\varepsilon_1 = 1$ В окрестности $U_1(a)$ находится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$. Выберем из этой окрестности какое-то a_{n_1}.

$\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}$ В окрестности $U_2(a)$ находится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$. Выберем из этой окрестности какое-то a_{n_2}, такое что $n_2 > n_1$ $\Rightarrow$ $a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}$

<...>

$\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$ В окрестности $U_{\frac{1}{k}}(a)$ находится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$. Выберем из этой окрестности какое-то a_{n_k}, такое что $n_k > n_{k-1}$ $\Rightarrow$ $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}$.

$\Rightarrow \ a - \dfrac{1}{k} < a_{n_k} < a + \dfrac{1}{k}$. Причём $\lim\limits_{k\to\infty}\left(a + \dfrac{1}{k}\right) = a$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\left(a - \dfrac{1}{k}\right) = a \ \Rightarrow$ по теореме о зажатой последовательности $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. А посольку $\{a_{n_k}\}$ - подпоследовательность $\{a_n\}$, то a - частичный предел последовательности $\{a_n\}$. $\square$

12 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **фундаментальной**, если:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \ \ \forall n, m \geq N(\varepsilon) \ : \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Критерий Коши. Последовательность $\{a_n\}$ сходится $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ фундаментальная.

Доказательство. Сначала докажем, что если $\{a_n\}$ сходится, то она фундаментальная. По определению сходимости последовательности: $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \ \ \forall n \geq N_1(\varepsilon) \ : \ |a_n - a| < \varepsilon$ (1).

Хотим: $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \ \ \forall n, m \geq N_2(\varepsilon) \ : \ |a_n - a_m| < \varepsilon$.

$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a_n)| \leq |a_n - a| + |a_m - a|$.

Согласно (1) неравенство $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и неравенство $|a_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнены начиная с номера $N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \ \Rightarrow \ N_2(\varepsilon) = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \ \Rightarrow \ \{a_n\}$ фундаментальная

Теперь докажем в обратную сторону. Пусть $\{a_n\}$ фундаментальная. То есть выполнено следующее условие: $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \ \ \forall n, m \geq N_2(\varepsilon) \ : \ |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Возьмём $\varepsilon = 1 \ : \forall n > N_2(1) \ : \ |a_n - a_{N_2(1)+1}| < 1$ (член $a_{N_2(1)+1}$ мы зафиксировали: $N_2(1) + 1$ - конкретный номер члена последовательности). $\Rightarrow \ a_{N_2(1)+1} - 1 < a_n < a_{N_2(1)+1} + 1$.

Положим $C = max\{|a_1|; \ |a_2|; \ ...; |a_{N_2(1)+1}| + 1\}$. Значит $\forall n \ : \ |a_n| \leq C \ \Rightarrow \ \{a_n\}$ ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса: $\exists\{n_k\} \ : \ a_{n_k} \to a$ при $n \to \infty \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \ \ \forall n \geq N_1(\varepsilon) \ : \ |a_n - a| < \varepsilon$.

Докажем, что предел $\{a_n\}$ тоже равен $a : \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N_3 = N_3(\varepsilon) \ \ \forall n > N_3(\varepsilon) \ : \ |a_n - a| < \varepsilon$.

$|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$

Неравенство $|a_n - a_{n_k}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнено начиная с $N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ (по фундаментальности a_n)

Неравенство $|a_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнечно начиная с $N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ (по сходимости a_{n_k}).

Значит неравенство $|a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$ выполнено начиная с $N_3 = max\{N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right); \ N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\}$

$\Rightarrow \ \{a_n\}$ сходится. $\square$

13 Предел функции в точке по Коши и по Гейне. Арифметика предела.

Определние предела функции по Коши. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ :\ x \in \mathring{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

или

Определение предела функции по Коши. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ :\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Определение предела функции по Гейне. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если:

$\forall x_n : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\ , x_n \neq a$ (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$) соответсвует последовательность значений функции f(x): $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

Теорема об эквивалентности определений Коши и Гейне. A - предел функции $f(x)$ в точке x_0 по Коши$\Leftrightarrow$ A - предел функции $f(x)$ в точке x_0 по Гейне

Доказательство. Сначала докажем, что из определения по Коши следует определение по Гейне. Имеем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \tag{1}$$

Рассмотрим произвольную последовательность x_n, такую что: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, причём $\forall x_n \in E$ и $x_n \neq x_0$, где E - область определения функции $f(x)$. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ n_0\ \forall n \geq n_0\ : x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0)$. Так как x_n лежит в δ-окрестности точки x_0, то выполнено (1) и $|f(x) < A| < \varepsilon$. А значит: $\forall\varepsilon > 0\ \forall n \geq n_0 : |f(x_n) - A| < \varepsilon\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Теперь докажем в обратную сторону: из определения по Гейне следует определение по Коши. Имеем:

$$\forall x_n : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\ , x_n \neq a\ :\ f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A \tag{2}$$

Предположиим противное: определение по Коши не выполенено. То есть:

$\exists\varepsilon_0 > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0),\ x \in E\ :\ |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$

Возьмём последовательность $\delta_n = \dfrac{1}{n}$: $\exists x_n \in E\ x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(x_0) :\ |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$.

Заметим, что последовательность x_n удовлетворяет условию $x_n \neq x_0$, поскольку x_n лежит в *проколотой* окрестности точки x_0 ($x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_n}(x_0)$). Кроме того $x_0 - \delta_n < x_n < x_0 + \delta_n$, а поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ (по теореме о зажатой последовательности). Получается, что существует такая последовательность $\{x_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$, так как выполнено следующее выражение: $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0 \ \Rightarrow$ противорчение с определением по Гейне (2) $\Rightarrow$ определение по Коши выполнено. $\square$

Арифметические свойства предела фуекции. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x))} = \dfrac{A}{B}$, при $B \neq 0$ и $g(x) \neq 0$.

Докажем певрое утверждение, остальные доказываются аналогично.

Доказательство. Используем определение предела функции по Гейне: рассмотрим последовательность $\{x_n\} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0, \ x_n \neq x_0$. Тогда согласно определению: $\lim\limits_{n\to\infty} f_(x_n) = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g_(x_n) = B$. Тогда по теореме о пределе суммы для последовательностей: $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B$. В силу произвольности x_n это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$. $\square$

Предельный переход в неравенствах. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, причём $A, B \in \mathbb{R}$. Если в некоторой прооколотой ε-окрестности точки x_0 выпонено неравенство $f(x) \leq g(x)$, то $A \leq B$.

Доказательство. Используем определение предела функции по Гейне: рассмотрим последовательность $\{x_n\} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0, \ x_n \neq x_0$. Тогда согласно определению: $\lim\limits_{n\to\infty} f_(x_n) = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g_(x_n) = B$. Начиная с какого-то номера n_0 члены последовательности $\{x_n\}$ будут находиться в проколотой ε-окрестности точки x_0, где выполнено следующее неравенство : $\forall n \geq n_0 : f(x_n) \leq g(x_n)$ Тогда по предельному переходу для последовательностей: $A \leq B$. $\square$

Теорема о зажатой функции. Рассмотрим три функции: $f(x), g(x), h(x)$. Пусть в некоторой ε-оккрестности точки x_0 выполнено следующее неравенство: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Причём $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Доказательство. Используем определение предела функции по Гейне: рассмотрим последовательность $\{x_n\}$: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0,\ x_n \neq x_0$. Тогда согласно определению: $\lim\limits_{n\to\infty} g_(x_n) = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} h_(x_n) = A$. Начиная с какого-то номера n_0 члены последовательности $\{x_n\}$ будут находиться в проколотой ε-окрестности точки x_0, где выполнено следующее неравенство : $\forall n \geq n_0$: $h(x_n) \leq f(x_n) \leq g(x_n)$ Тогда по теореме о зажатой последовательности: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. В силу произвольности x_n: $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ □

14 Сходимость стандартных последовательностей.

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = A$.

1.1 $q = 0$, тогда очевидно $A = 0$.

1.2 $q = 1$, тогда очевидно $A = 1$.

1.3 $q = -1$, тогда $a_n = (-1)^n$ расходится.

1.4 $q > 1$, тогда $A = +\infty$

Доказательство. Хотим: $\forall M > 0\ \exists N = N(M)\ \forall n \geq N(M) :\ q^n > M$. Обозначим за x: $x = q-1$, причём $x > 0$. То есть хоти доказать:

$q^n = (1 + (q-1))^n = (1+x)^n > M$. Примени неравенство Берунулли, так как $x > -1$: $(1+x)^n > 1 + xn > M$. А это выполнено при $n > \dfrac{M-1}{x} = \dfrac{M-1}{q-1}$. Значит в качестве $N(M)$ можем взять,например, $N(M) = \left[\dfrac{M}{q-1}\right] + 241$ □

1.5 $0 < q < 1$. Тогда нашу последовательность a_n можем представить в виде: $a_n = q^n = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}$. Понятно, что $\dfrac{1}{q} > 1$, значит $\left(\dfrac{1}{q}\right)^n$ - бесконечно большая последовательность (доказано в 4-м случае). Значит a_n - обратная к б.б. последовательности $\Rightarrow$ a_n - б.м. последовательность $\Rightarrow$ $A = 0$

1.6 $-1 < q < 0$. Тогда $q^n = (-1)^n \cdot (|q|)^n$. Последовательность $(-1)^n$ - ограниченная, а $(|q|)^n$ - бесконечно малая (доказано в 5-м случае). А произведение ограниченной и бесконечно малой - бесконечно малая $\Rightarrow$ $A = 0$

1.7 $q < -1$. $q^n = (-1)^n \cdot |q|^n$. Мы знаем, что $|q|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, значит $(-1)^n \cdot |q|^n$ стремится просто к ∞. $A = \infty$.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = A,\ a > 0$ **2.1** $a = 1$, очевидно, что $A = 1$.

2.2 $a > 1$, тогда $A = 1$.

Доказательство. Хотим: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon):\ |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Понятно, что $\sqrt[n]{a} - 1 > 0$, тогда можем раскрыть модуль: $\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \sqrt[n]{a} < \varepsilon + 1$. Так как обе части неравенства неотрицательные, можем возвести в степень n: $a < (\varepsilon + 1)^n$. Применим нервенство Бернулли: $(\varepsilon + 1)^n > 1 + \varepsilon n > a$ (мы уменьшили левую часть неравенства, поэтому сейчас доказываем более строгое утверждение). Тогда в качестве $N(\varepsilon)$ можем взять: $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right] + 241$. $\square$

2.2 $0 < a < 1$, тогда $A = 1$.

Доказательство. Запишем нашу последовательность в виде: $\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$, причём $\dfrac{1}{a} > 1$. Значит $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (доказали в пункте 2.1). По арифметике предела получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{1} = 1$ $\square$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Доказательство. Хотим: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon):\ |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ можем снять модуль $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$. Перенесём единицу в правую часть и возведём в степент n: $n < (\varepsilon + 1)^n$. Распишем $(\varepsilon+1)^n$ по биному Ньютона: $(\varepsilon+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \varepsilon^k \cdot 1^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \varepsilon^k$. Понятно, что каждое слагаемое из этой суммы положительное, значит каждое наше слагаемое меньше, чем сама сумма, то есть $(\varepsilon+1)^n$. Оставим из этой суммы только одно слагаемое при $k = 2$: $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \varepsilon^k \cdot 1^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \varepsilon^k > \dfrac{n(n-1)}{2!} \cdot \varepsilon^2$. Проверим выполнение неравенства:

$n < \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot \varepsilon^2 \ \Leftrightarrow\ 1 < \dfrac{n-1}{2} \cdot \varepsilon^2 \ \Leftrightarrow\ n > \dfrac{2}{\varepsilon^2} + 1$.

В качестве $N(\varepsilon)$ можем взять: $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{2}{\varepsilon^2} + 1\right] + 241$. $\square$

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$.

Доказательство. Будем доказывать по теореме о зажатой последовательности. Понятно, что $0 < \dfrac{n^2}{2^n}$. Теперь сделаем оценку сверху. Чтобы увеличить чило, нужно уменьшить знаменатель. Распишем знаменатель: $2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k > C_n^3 = \dfrac{n!}{(n-3)!3!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ (взяли только одно слагаемое при $k = 3$, аналогчно предыдщему пункту).

Тогда:

$0 < \dfrac{n^2}{2^n} = \dfrac{n^2}{(1+1)^n} < \dfrac{n^2 \cdot 3!}{n(n-1)(n-2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (в числителе многочлен второй степени, в знаменетеле многочлен от n третьей степени) $\Rightarrow$ по теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$. $\square$

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

Доказательство. $0<\dfrac{2^n}{n!}=\dfrac{2\cdot 2\cdot\dots\cdot 2}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\le\{for\ n\ge 3\}\le 2\cdot\dfrac{2}{n}$ - мы "выкинули"все множители, меньшие 1, а именно:

убрали произведение $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dots\cdot\dfrac{2}{n-1}\cdot\dfrac{2}{n}$ - значит мы увеличили дробь.

Поскольку $2\cdot\dfrac{2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Значит по теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$. $\square$

Тимоша желает всем удачно сдать коллоквиум!