Коллоквиум по математичекому анализу, осень 2024

Агаркова Полина, ассистент 241

Версия 1.0

Содержание

Содержание билетов.

1. Понятие высказывания и n-местного предиката. Логические операции. Кванторы. Построение отрицания к высказыванию с кванторами.

2. Доказательства методами математической индукции и от противного. Неравенство Бернулли.

3. Перестановки, размещения и сочетания. Бином Ньютона.

4. Понятие последовательности. Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченные, бесконечно малые, бесконечно большие и отделимые от нуля последовательности. Связь между ними. Ограниченность сходящейся последовательности. Отделимость от нуля последовательности, сходящейся не к нулю.

5. Арифметические свойства предела последовательности.

6. Предельный переход в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности.

7. Ограниченные подмножества действительных чисел. Аксиома непрерывности действительных чисел. Верхняя и нижняя грань. Точная верхняя и точная нижняя грань. Теорема о существовании точной верхней и нижней грани.

8. Теорема Вейерштрасса.

9. Число e. Постоянная Эйлера.

10. Подпоследовательность. Предельная точка последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

11. Частичный предел. Верхний и нижний предел. Эквивалентность понятий частичного предела и предельной точки.

12. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

13. Предел функции в точке и на бесконечности: определения по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений. Односторонние пределы. Бесконечный предел.

14. Арифметика предела функции. Предельный переход в неравенствах. Теорема о зажатой функции.

15. (?) Асимптоты и их вычисление.

16. (?) Теорема о пределе сложной функции.

1 Логические операции. Кванторы. Построение отрицания

Высказывание - утверждение, про которое можно сказать истинно оно или ложно.

n-местный предикат - высказывание с n переменными: $P(a_1, a_2, ..., a_n)$

Логические операции:

- $\neg$ - отрицание
- $\vee$ - дизъюнкция ("или")
- $\wedge$ - конъюнкия ("и")
- $\rightarrow$ - импликация

Кванторы:

- $\forall$ - квантор всеобщности
- $\exists$ - квантор существования
- $\exists!$ - квантор существования и единственности

Построение отрицания к высказыванию с кванторами:

Пусть $P(n)$ - предикат. Тогда:

1. $\neg(\forall n\ P(n)) = \exists n\ \neg P(n)$
2. $\neg(\exists n\ P(n)) = \forall n\ \neg P(n)$

2 Доказательста по мат. индукции и от противного. Неравенство Бернулли.

Метод доказательства от противного. Пусть A - высказыание. Тогда A - истина, если $\neg A$ - ложь.

Метод математической индукции. Пусть $P(n)$ - предикат, $a \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall n \geq a\ P(n)$ - истина, если:

1. $P(a)$ - истина (база индукции).
2. $\forall n\ P(n) \rightarrow P(n+1)$ (шаг индукции)

Неравенство Бернулли. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \geq -1\ :\ (1+x)^n \geq 1 + xn$

Доказательство. *База.* $n = 1 \ : \ (1+x)^1 \geq 1 + x \cdot 1$ - верно.

Шаг. Пусть для n = k выполнено. То есть: $\forall x \geq -1 \ : \ (1+x)^k \geq 1 + xk \ \ (*)$.

Хотим проверить выполнение утверждения: $\forall x \geq -1 \ : \ (1+x)^{k+1} \geq 1 + x \cdot (k+1)$.

Домножим $(*)$ на $(1+x)$:

$(1+x)^{k+1} \geq (1+x) \cdot (1+xk) = 1 + x + xk + x^2k = 1 + x \cdot (k+1) + x^2 k \geq 1 + x \cdot (k+1)$

Получили: $(1+x)^{k+1} \geq 1 + x \cdot (k+1)$ - что и хотели.

□

3 Перестановки, размещения и сочетания. Бином Ньютона.

Перестановка - упорядоченное множество размером n.

Число перестановок: $n!$

Размещение - упорядоченное подмножество размером k из множества размером n.

Число размещений: $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Сочетание - неупорядоченное подмножество размера k из множества размером n.

Число сочетаний: $C_k^n = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Бином Ньютона: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot x^k \cdot y^{n-k}$

4 Единственность предела. Ограниченные, б. м., б. б. и отделимые от нуля.

Последовательностью называется индексированный набор чисел $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon), N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n - a| < \varepsilon$$

или (запись определения через ε-окрестности):

$$\forall U_\varepsilon(a) \ \ \exists N = N(\varepsilon), \ N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N \ : \ a_n \in U_\varepsilon(a)$$

Теорема о единственности предела. Последовательность $\{a_n\}$ может иметь только один предел.

Доказательство. Предположим противное. $\Rightarrow$ существует хотя бы два предела.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Тогда по определению:

$\forall U_\varepsilon(a)\ \ \exists N = N_1(\varepsilon),\ N_1 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq N_1\ :\ a_n \in U_\varepsilon(a) \quad (1)$

$\forall U_\varepsilon(b)\ \ \exists N = N_2(\varepsilon),\ N_2 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq N_2\ :\ a_n \in U_\varepsilon(b) \quad (2)$

Возьмём $\varepsilon_0 = \dfrac{|a-b|}{7}$, тогда $U_{\varepsilon_0}(a) \cap U_{\varepsilon_0}(b) = \varnothing$

Рассмотрим член последовательности с номером $n_0 = N_1(\varepsilon) + N_2(\varepsilon)$. Так как $n_0 > N_1(\varepsilon)$ и $n_0 > N_2(\varepsilon)$, то выполнены утверждения (1) и (2) $\Rightarrow\ a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(a) \cap U_{\varepsilon_0}(b) = \varnothing$ противоречие. $\square$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной**, если $\exists C\ \forall n\ :\ |a_n| \geq C$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **бесконечно большой** (б.б), если

$$\forall M > 0\ \exists N = N(M)\ \forall n \geq N\ :\ |a_n| > M$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **бесконечно малой** (б.м.), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n \geq N\ :\ |a_n| < \varepsilon$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **отделённой от нуля**, если $\exists \varepsilon_0 \neq 0\ \ \forall n\ :\ |a_n| > \varepsilon_0$.

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Всякая сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

Доказательство. Т. к. $\{a_n\}$ сходится, то: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon), N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \varepsilon \quad (1).$

Возьмём $\varepsilon = 1 : \forall n > N(1)\ :\ a - 1 < a_n < a + 1\ \Rightarrow\ \forall n > N(1)\ :\ |a_n| < max\{|a-1|;\ |a+1|\}$

Тогда последовательность $\{a_n\}$ ограничена либо каким-то своим членом из первых $N(1)$ членов, либо max{|a-1|; |a+1|}. То есть выполнено следующее:

$\forall n \in N\ |a_n| < max\{|a-1|;\ |a+1|;\ |a_1|;\ |a_2|; ...\ |a_{N(1)-1}|\} + 1$ - определение ограниченности $\square$

5 Арифметические свойства предела последовательности.

Утверждение. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\ \Leftrightarrow\ a_n = a + \alpha_n,$ где $\{a_n\}$ - последовательность, α_n - б.м. последовательность.

Рассмторим две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда выполнены следующие свойсва:

1. Предел суммы. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

2. Предел произведения. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

3. Предел частного. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ (если дополнительно известно, что $b \neq 0$ и $\forall n\ b_n \neq 0$).

Доказательство. Нам дано:

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N_1(\varepsilon)\ :\ |a_n - a| < \varepsilon \quad (1)$

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N_2 = N_2(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N_2(\varepsilon)\ :\ |b_n - b| < \varepsilon \quad (2)$

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \ \exists N_3(\varepsilon)\ \ \forall n > N_3(\varepsilon)\ :\ |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$

$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon.$

Неравенство $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнено, начиная с $n = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$; неравенство $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнено, начиная с $n = N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\ \Rightarrow$ нераенство $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ выполнено начиная с $n = N_3(\varepsilon) = max\{N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right);\ N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\}$ ч.т.д.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\ \Leftrightarrow\ a_n = a + \alpha_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b\ \Leftrightarrow\ b_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n - б.м. последовательности.

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a \cdot b + a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a \cdot b) + \lim\limits_{n\to\infty}(a \cdot \beta_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(b \cdot \alpha_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot \beta_n) = a \cdot b + 0 + 0 + 0 = a \cdot b$ □

6 Предельный переход в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности.

Теорема. Если $\forall n\ c_n \geq A$ и $c_n \to c$ при $n \to \infty$, то $c \geq A$

Доказательство. Так как c_n сходится к c, то по определению предела: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ :$ $|c_n - c| < \varepsilon\ (*)$ (то есть $c_n \in U_\varepsilon(c)$)

Преподположим противное: $c < A$. Возьмём $\varepsilon_0 = \dfrac{A - c}{7}$. Так как выражение $(*)$ выполнено для любого ε, то оно выполнено и для ε_0: $\forall n > N(\varepsilon_0)\ c_n \in U_{\varepsilon_0}(c)\ \Rightarrow\ c_n < A$ - противорчие (по условию $\forall n\ c_n \geq A$) □

Следствие (a.k.a. предельный переход в неравенствах). Если $a_n \to a$ при $n \to \infty$, $b_n \to b$ при $n \to \infty$ и $\forall n\ a_n \leq b_n$, то $a \leq b$.

Доказательство. Рассмотрим $c_n = b_n - a_n$. По условию $a_n \leq b_n$, значит $c_n \geq 0$. Применим для c_n теорему, доказанную выше, и получим: $c \geq 0$, где $c = b - a$ - предел последовательности c_n (вопользовались арифметикой предела). То есть $b - a \geq 0\ \Leftrightarrow\ b \geq a$

Замечание. При предельном переходе все неравенства становятся *нестрогими.* □

Теорема о зажатой последовательности. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ и $\forall n\ a_n \leq c_n \leq b_n$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Доказательство. По определению предела последовательности для a_n и b_n соответсвенно:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N_1\ \ c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$ (1)

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon)\ \ \forall n \geq N_2\ \ c - \varepsilon < b_n < c + \varepsilon$ (2)

Положим $N_3 = max\{N_1(\varepsilon);\ N_2(\varepsilon)\}$. Тогда для $\forall n \geq N_3$ выполнена следующая цепочка неравенств: $c - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < c + \varepsilon$ (самое левое неравенство выполнено для $n \geq N_1(\varepsilon)$, самое правое неравенство выполнено для $n \geq N_2(\varepsilon)$: см. выражения (1) и (2)).

То есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_3 = max\{N_1(\varepsilon);\ N_2(\varepsilon)\}\ \ \forall n \geq N_3\ :\ |c_n - c| < \varepsilon\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ □

7 Верхняя и нижняя грань. Теорема о сущ. точной верхней и нижней грани.

Пусть X - не пустое числовое множество. Множество X - называется **ограниченным сверху** если существует такое число a, что $\forall x \in X\ x < a$

Пусть X - не пустое числовое множество. Множество X - называется **ограниченным снизу** если существует такое число a, что $\forall x \in X\ x > a$

Множество, ограниченное сверху и снизу называется **ограниченным**.

Аксиома непрерывности действительных чисел. Пусть $X, Y \in \mathbb{R}$, причём $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$. Кроме того, пусть $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется следующее неравенство: $x \leq y$. Тогда найдётся число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leq c \leq y$.

Верхней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число C, такое что: $\forall a \in A\ \ a \leq C$.

Нижней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число C, такое что: $\forall a \in A\ \ a \geq C$.

Точной верхней гранью множества A ($supA$) называется наименьший элемент множества верхних граней A.

Точной нижней гранью множества A ($infA$) называется наибольший элемент множества нижних граней A.

Теорема о существовании точной верхней грани. У любого непустого, ограниченного сверху множества A существует точная верхняя грань ($supA$).

Доказательство. Пусть S_A - множество верхних граней множества A. Тогда выполнены следующие три условия:

1. $S_A \neq \varnothing$ (так как множество A ограничено сверху, то множество верхних граней множества A не пусто).

2. $\forall a \in A \;\; \forall c \in S_A \;:\; a \leq c$ (любая верхняя грань множества A не меньше любого элемента из множества A)

3. $A \neq \varnothing$ (по условию)

Значит можно применить аксиому непрерывности действительных чисел для множеств A и S_A $\Rightarrow \;\exists B \;\; \forall a \in A \;\; \forall c \in S_A \;:\; a \leq B \leq c.$ Разобъём это утверждение на две части:

1. $\forall a \in A \;\; a \leq B \Rightarrow B$ - верхняя грань множества A.

2. $\forall c \in S_A \;\; B \leq c \Rightarrow B$ - не больше всех верхних граней множества A.

Значит B - наименьшая верхняя грань множества $A \;\Rightarrow\; B = supA$

Замечание. Теорема о существовании точной нижней грани доказывается аналогично. □

8 Теорема Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса. Пусть последовательность $\{a_n\}$ не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу). Тогда $\{a_n\}$ сходится.

Доказательство. Докажем для случая: последовательность ограничена сверху и не убывает (второй случай доказывается абсолютно аналогично).

Рассмотрим множество $A = \{a_n\}$, то есть A - множество значений последовательности $\{a_n\}$. Так как a_n - ограничена сверху и $A \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \exists supA = a$ (по теореме о существовании точной верхней грани).

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Хотим: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \; \forall n \geq N \;:\; |a_n - a| < \varepsilon,$ раскроем модуль, зная, что a - точная верхняя грань ($\forall n \; a_n \leq a$) и получим:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \; \forall n \geq N \;:\; a - a_n < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \; \forall n \geq N \;:\; a_n > a - \varepsilon.$

$\Leftrightarrow \;(*)\;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;:\;\; a_{n_0} > a - \varepsilon$

Такой равносильный переход корректен, поскольку a_n - не убывающая: если выражение $(*)$ выполнено, то неверенство $a_n > a - \varepsilon$ также выполнено для $\forall n \geq n_0$ (правая часть неравенства остаётся неизменной, левая не уменьшается).

Докажем теперь от противного, что $(*)$ выполнена. Пусть $(*)$ не выполняется, тогда:

$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall n\ :\ a_n \leq a - \varepsilon_0\ \Rightarrow\ a - \varepsilon_0$ - верхняя грань множетсва A (по определению).

Тогда $a - \varepsilon_0 \in S_A$. В то же время $a > a - \varepsilon_0$ и $a = minS_A$ (по определению точной верхней грани). То есть $a - \varepsilon_0$ - верхняя грань множества A, которая меньше точной верхней грани, что невозможно $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $(*)$ выполнена $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ □

9 Число e. Постоянная Эйлера.

Число e. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, заданную формулой $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Докажем, что у этой последовательности существует предел. Этот предел и называют числом e.

Доказательство. Покажем, что последовательность ограничена:

$$a_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = \left(\tfrac{1}{n} + 1\right)^n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \dfrac{1}{n^k} \cdot 1^{n-k} = 1 + C_n^1 \cdot \dfrac{1}{n} + C_n^2 \cdot \dfrac{1}{n^2} + C_n^3 \cdot \dfrac{1}{n^3} + ... + C_n^n \cdot \dfrac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + ... + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + ... + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot ... \cdot \frac{n-(n-1)}{n} = 2 + \frac{1}{2!} \cdot (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) +$$
$$\frac{1}{n!} \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{n-1}{n}) \leq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1)\cdot n} =$$
$$2 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 3 - \frac{1}{n} \leq 3$$

То есть $\forall n\ a_n \leq 3\ \Rightarrow \{\mathrm{a}_n\}$ ограничена сверху. Докажем, что $\{a_n\}$ неубывающая последовательность:

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot (1 - \frac{2}{n+1}) + ... + \frac{1}{(n+1)!} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot (1 - \frac{2}{n+1}) \cdot$$
$$... \cdot (1 - \frac{n}{n+1}) \leq a_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) \cdot (1 - \frac{2}{n+1}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{n}{n+1}) \geq a_n\ \Rightarrow\ a_{n+1} \geq a_n$$

$\Rightarrow\ \{a_n\}$ не убывает.

Значит $\{a_n\}$ ограничена сверху и не убывает $\Rightarrow$ по теореме Вейрштрасса $\{a_n\}$ имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$ □

Постоянная Эйлера. Рассмотрим последовательность $\gamma_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$. Докажем, что $\{\gamma_n\}$ сходится к некоторому числу γ. Это число и называется постоянной Эйлера.

Доказательство. Покажем, что $\{\gamma_n\}$ убывает:

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$
$$\frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - (n+1) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

Обозначим за b_n последовательность $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$. Значит чтобы докать, что $\gamma_{n+1}-\gamma_n = \frac{1}{n+1}\cdot(1-\ln(b_n)) < 0$, нужно чтобы b_n убывала. Докажем это:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{(n+1)^2}{n\cdot(n+2)}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq \{\text{применим неравенство Бернулли}\} \geq \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right) = \frac{(n+1)\cdot(n^2+3n+1)}{n^3+4n^2+4n} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1 \;\Rightarrow\; b_n > b_{n+1} \;\Rightarrow\; b_n \text{ - убывающая} \;\Rightarrow$$

$(1-\ln(b_n)) < 0 \;\Rightarrow\; \gamma_n$ - убывающая.

Теперь докажем, что $\{\gamma_n\}$ ограничена снизу. Для этого докажем вспомогательное утверждение: $\forall n \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

Рассмотрим последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, как мы знаем, она возрастающая и сходится к e, то есть: $\forall n \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \;\Rightarrow\; \{\text{возьмём натуральный логарим от обеих частей}\} \;\Rightarrow\; \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 \;\Leftrightarrow\; n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \;\Leftrightarrow\; \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ ч.т.д.

$\gamma_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln(n) > \{\text{пользуемся доказанным выше фатком}\} > \ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+...+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\ln(n) = (\ln(2)-\ln(1))+(\ln(3)-\ln(2))+(\ln(4)-\ln(3))+...+(\ln(n+1)-\ln(n))-\ln(n) = \ln(n+1)-\ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0 \;\Rightarrow\; \{\gamma_n\}$ ограничена снизу нулём.

Значит $\{\gamma_n\}$ убывает и огрничена снизу $\;\Rightarrow\;$ по теореме Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\{\gamma_n\} = \gamma$ - постоянная Эйлера. $\square$

10 Подпоследовательность.Предельная точка.Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ - это последовательность $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\}$, полученная из $\{x_n\}$ удалением ряда её членов без изменения порядка следования членов.

Предельной точкой последовательности $\{a_n\}$ называется число a, такое что в любой окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности $\{a_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$.

Доказательство. Так как $\{a_n\}$ ограничена, то $\exists c\ \forall n\ :\ |a_n| < c$.

Рассмотрим отрезок $I_1 = [-c;\ c]$, причём $\forall n\ a_n \in I_1$. Возьмём в качестве $n_1 = 1$. Разделим I_1 пополам (на 2 отрезка). В какой-то половине находится бесконечное число членов, возьмём эту половину и обзначим за I_2. В I_2 возьмём член a_{n_2}, $n_2 > n_1$. ... I_k разделим на два отрезка пополам, выберем половинку, где бесконечное число членов, её называем I_{k+1} и в ней выберем $a_{n_{k+1}} : n_{k+1} > n_k$.

Построим последовательность $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $I_k = [b_k;\ d_k]$. В силу построения $I_{k+1} \subset I_k$.

Рассмотрим последовательность левых концов отрезков I_k $\{b_k\}$: $\{b_k\}$ не убывает и ограничена сверху $c \Rightarrow$ По теореме Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$.

Рассмотрим последовательность правых концов отрезков I_k $\{d_k\}$: $\{d_k\}$ не возрастает и ограничена снизу $c \Rightarrow$ По теореме Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{k\to\infty} d_k = d$.

Рассмотрим длину отрезка I_k. Поскольку длина самого первого отрезка $2c$ и мы $k-1$ раз раздедли отрезок пополам, то длина I_k равна: $|d_k - b_k| = \dfrac{2c}{2^{k-1}} \to 0$ при $k \to \infty \Rightarrow d = b$.

Возьмём $a = b = d$. Рассмотрим последовательность $a_{n_k} \in I_k = [b_k;\ d_k] \Rightarrow b_k \le a_{n_k} \le d_k$.

По теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n_k\to\infty} a_{n_k} = a$ (b_k и d_k сходятся к a). $\Rightarrow a_{n_k}$ - сходящаяся подпоследовательность. □

11 Частичный, верхний и нижний предел. Их эквивалентность.

Частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется предел подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Нижний предел последовательности: $\underline{\lim}_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\ge n} a_k$.

Верхний предел последовательности: $\overline{\lim}_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\ge n} a_k$.

Замечание. Пусть $b_k = \sup\limits_{n\ge k}\{a_n\}$. Тогда $\overline{\lim}_{k\to\infty} a_k$ $\left(\underline{\lim}_{k\to\infty} a_k\right)$ всегда существуют в одном из следующих смыслов:

1. b_k ограничена $\Rightarrow$ существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$
2. b_k не ограничена $\Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} b_k = -\infty$
3. b_k не определена $\Rightarrow$ зададим $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Теорема об эквивалентности понятий предельной точки и частичного предела. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Число a является предельной точкой последовательности $\Leftrightarrow$ a - частичный предел этой последовательности.

Доказательство. Докажем сначала, что если a - частичный предел, то a - предельная точка. По определению частичного предела: $\exists \{n_k\} \ : \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \ \ \forall k \geq N \ :$ $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. То есть в ε-окрестности точки a расположена бесконечное количество членов последовательности a_n (т.к. члены подпоследовательности a_{n_k} являются членами последовательности a_n) $\Rightarrow$ a - предельная точка.

Теперь докажем в обратную сторону. Пусть a - предельная точка. Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_k\}$, заданную формулой: $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$.

$\varepsilon_1 = 1$ В окрестности $U_1(a)$ находится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$. Выберем из этой окрестности какое-то a_{n_1}.

$\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}$ В окрестности $U_2(a)$ находится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$. Выберем из этой окрестности какое-то a_{n_2}, такое что $n_2 > n_1 \ \Rightarrow \ a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}$

<...>

$\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$ В окрестности $U_{\frac{1}{k}}(a)$ находится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$. Выберем из этой окрестности какое-то a_{n_k}, такое что $n_k > n_{k-1} \ \Rightarrow \ a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}$.

$\Rightarrow \ a - \dfrac{1}{k} < a_{n_k} < a + \dfrac{1}{k}$. Причём $\lim\limits_{k\to\infty} \left(a + \dfrac{1}{k}\right) = a$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \left(a - \dfrac{1}{k}\right) = a$ $\Rightarrow$ по теореме о зажатой последовательности $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. А посольку $\{a_{n_k}\}$ - подпоследовательность $\{a_n\}$, то a - частичный предел последовательности $\{a_n\}$. $\square$

12 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **фундаментальной**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \ \ \forall n, m \geq N(\varepsilon) \ : \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Критерий Коши. Последовательность $\{a_n\}$ сходится $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ фундаментальная.

Доказательство. Сначала докажем, что если $\{a_n\}$ сходится, то она фундаментальная. По определению сходимости последовательности: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \ \ \forall n \geq N_1(\varepsilon) \ : \ |a_n - a| < \varepsilon$ (1).

Хотим: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \ \ \forall n, m \geq N_2(\varepsilon) \ : \ |a_n - a_m| < \varepsilon$.

$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a_n)| \leq |a_n - a| + |a_m - a|$.

Согласно (1) неравенство $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и неравенство $|a_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнены начиная с номера $N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \;\Rightarrow\; N_2(\varepsilon) = N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \;\Rightarrow\; \{a_n\}$ фундаментальная

Теперь докажем в обратную сторону. Пусть $\{a_n\}$ фундаментальная. То есть выполнено следующее условие: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \;\; \forall n, m \geq N_2(\varepsilon) \; : \; |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Возьмём $\varepsilon = 1 \; : \forall n > N_2(1) \; : \; |a_n - a_{N_2(1)+1}| < 1$ (член $a_{N_2(1)+1}$ мы зафиксировали: $N_2(1) + 1$ - конкретный номер члена последовательности). $\Rightarrow \; a_{N_2(1)+1} - 1 < a_n < a_{N_2(1)+1} + 1$.

Положим $C = max\{|a_1|; \; |a_2|; \; ...; |a_{N_2(1)+1}| + 1\}$. Значит $\forall n \; : \; |a_n| \leq C \;\Rightarrow\; \{a_n\}$ ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса: $\exists \{n_k\} \; : \; a_{n_k} \to a$ при $n \to \infty \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \;\; \forall n \geq N_1(\varepsilon) \; : \; |a_n - a| < \varepsilon$.

Докажем, что предел $\{a_n\}$ тоже равен $a : \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_3 = N_3(\varepsilon) \;\; \forall n > N_3(\varepsilon) \; : \; |a_n - a| < \varepsilon$.

$|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$

Неравенство $|a_n - a_{n_k}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнено начиная с $N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ (по фундаментальности a_n)

Неравенство $|a_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнечно начиная с $N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ (по сходимости a_{n_k}).

Значит неравенство $|a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$ выполнено начиная с $N_3 = max\{N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right); \; N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\}$

$\Rightarrow \; \{a_n\}$ сходится. $\square$