

Коллоквиум по математическому анализу, осень 2024

Агаркова Полина, ассистент 241

Версия 2.0

Содержание

Содержание программы коллоквиума.	4
1 Логические операции. Кванторы. Построение отрицания	4
2 Доказательства по мат. индукции и от противного. Неравенство Бернулли.	4
3 Перестановки, размещения и сочетания. Бином Ньютона.	5
4 Единственность предела. Ограниченные, б. м., б. б. и отделимые от нуля.	5
5 Арифметические свойства предела последовательности.	6
6 Предельный переход в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности.	7
7 Верхняя и нижняя грань. Теорема о сущ. точной верхней и нижней грани.	8
8 Теорема Вейерштрасса.	9
9 Число e . Постоянная Эйлера.	10
10 Подпоследовательность. Предельная точка. Теорема Больцано-Вейерштрасса.	12
11 Частичный, верхний и нижний предел. Их эквивалентность.	13
12 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.	14
13 Предел функции в точке по Коши и по Гейне. Арифметика предела.	15

Содержание билетов.

1. Понятие высказывания и n -местного предиката. Логические операции. Кванторы. Построение отрицания к высказыванию с кванторами.
2. Доказательства методами математической индукции и от противного. Неравенство Бернулли.
3. Перестановки, размещения и сочетания. Бином Ньютона.
4. Понятие последовательности. Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченные, бесконечно малые, бесконечно большие и отделимые от нуля последовательности. Связь между ними. Ограниченность сходящейся последовательности. Отделимость от нуля последовательности, сходящейся не к нулю.
5. Арифметические свойства предела последовательности.
6. Предельный переход в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности.
7. Ограниченные подмножества действительных чисел. Аксиома непрерывности действительных чисел. Верхняя и нижняя грань. Точная верхняя и точная нижняя грань. Теорема о существовании точной верхней и нижней грани.
8. Теорема Вейерштрасса.
9. Число e . Постоянная Эйлера.
10. Подпоследовательность. Предельная точка. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
11. Частичный предел. Верхний и нижний предел. Эквивалентность понятий частичного предела и предельной точки.
12. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.
13. Предел функции в точке: определения по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений. Арифметика предела функции. Теорема о зажатой функции.
14. Сходимость стандартных последовательностей.

1 Логические операции. Кванторы. Построение отрицания

Высказывание - утверждение, про которое можно сказать истинно оно или ложно.

n-местный предикат - высказывание с n переменными: $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Логические операции:

- \neg - отрицание
- \vee - дизъюнкция ("или")
- \wedge - конъюнкция ("и")
- \rightarrow - импликация

Кванторы:

- \forall - квантор всеобщности
- \exists - квантор существования
- $\exists!$ - квантор существования и единственности

Построение отрицания к высказыванию с кванторами:

Пусть $P(n)$ - предикат. Тогда:

1. $\neg(\forall n P(n)) = \exists n \neg P(n)$
2. $\neg(\exists n P(n)) = \forall n \neg P(n)$

2 Доказательства по мат. индукции и от противного. Неравенство Бернулли.

Метод доказательства от противного. Пусть A - высказывание. Тогда A - истина, если $\neg A$ - ложь.

Метод математической индукции. Пусть $P(n)$ - предикат, $a \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall n \geq a P(n)$ - истина, если:

1. $P(a)$ - истина (база индукции).
2. $\forall n P(n) \rightarrow P(n+1)$ (шаг индукции)

Неравенство Бернулли. $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq -1 : (1+x)^n \geq 1+xn$

Доказательство. База. $n = 1$: $(1 + x)^1 \geq 1 + x \cdot 1$ - верно.

Шаг. Пусть для $n = k$ выполнено. То есть: $\forall x \geq -1$: $(1 + x)^k \geq 1 + xk$ (*).

Хотим проверить выполнение утверждения: $\forall x \geq -1$: $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + x \cdot (k + 1)$.

Домножим (*) на $(1 + x)$:

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + x) \cdot (1 + xk) = 1 + x + xk + x^2k = 1 + x \cdot (k + 1) + x^2k \geq 1 + x \cdot (k + 1)$$

Получили: $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + x \cdot (k + 1)$ - что и хотели.

□

3 Перестановки, размещения и сочетания. Бином Ньютона.

Перестановка - упорядоченное множество размером n .

Число перестановок: $n!$

Размещение - упорядоченное подмножество размером k из множества размером n .

Число размещений: $\frac{n!}{(n - k)!}$

Сочетание - неупорядоченное подмножество размера k из множества размером n .

Число сочетаний: $C_k^n = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$

Бином Ньютона: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n \cdot x^k \cdot y^{n-k}$

4 Единственность предела. Ограниченные, б. м., б. б. и отделимые от нуля.

Последовательностью называется индексированный набор чисел $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon), N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |a_n - a| < \varepsilon$$

или (запись определения через ε -окрестности):

$$\forall U_\varepsilon(a) \exists N = N(\varepsilon), N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \in U_\varepsilon(a)$$

Теорема о единственности предела. Последовательность $\{a_n\}$ может иметь только один предел.

Доказательство. Предположим противное. \Rightarrow существует хотя бы два предела.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$. Тогда по определению:

$$\forall U_\varepsilon(a) \exists N = N_1(\varepsilon), N_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 : a_n \in U_\varepsilon(a) \quad (1)$$

$$\forall U_\varepsilon(b) \exists N = N_2(\varepsilon), N_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_2 : a_n \in U_\varepsilon(b) \quad (2)$$

Возьмём $\varepsilon_0 = \frac{|a-b|}{7}$, тогда $U_{\varepsilon_0}(a) \cap U_{\varepsilon_0}(b) = \emptyset$

Рассмотрим член последовательности с номером $n_0 = N_1(\varepsilon) + N_2(\varepsilon)$. Так как $n_0 > N_1(\varepsilon)$ и $n_0 > N_2(\varepsilon)$, то выполнены утверждения (1) и (2) $\Rightarrow a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}(a) \cap U_{\varepsilon_0}(b) = \emptyset$ противоречие. \square

Последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной**, если $\exists C \forall n : |a_n| \leq C$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **бесконечно большой** (б.б), если

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n \geq N : |a_n| > M$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **бесконечно малой** (б.м.), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n \geq N : |a_n| < \varepsilon$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **отделённой от нуля**, если $\exists \varepsilon_0 \neq 0 \forall n : |a_n| > \varepsilon_0$.

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Всякая сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

Доказательство. Т. к. $\{a_n\}$ сходится, то: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon), N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |a_n - a| < \varepsilon \quad (1)$.

Возьмём $\varepsilon = 1 : \forall n > N(1) : a - 1 < a_n < a + 1 \Rightarrow \forall n > N(1) : |a_n| < \max\{|a-1|; |a+1|\}$

Тогда последовательность $\{a_n\}$ ограничена либо каким-то своим членом из первых $N(1)$ членов, либо $\max\{|a-1|; |a+1|\}$. То есть выполнено следующее:

$\forall n \in \mathbb{N} |a_n| < \max\{|a-1|; |a+1|; |a_1|; |a_2|; \dots |a_{N(1)-1}|\} + 1$ - определение ограниченности \square

5 Арифметические свойства предела последовательности.

Утверждение. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - последовательность, α_n - б.м. последовательность.

Доказательство. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$.

$\{\alpha_n\}$ - б.м. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon$, где $\alpha_n = a_n - a$.

Доказательство "греческое": смотри! \square

Рассмотрим две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Тогда выполнены следующие свойства:

1. Предел суммы. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.
2. Предел произведения. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
3. Предел частного. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$, если дополнительно известно, что $b \neq 0$ и $\forall n \ b_n \neq 0$.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, если дополнительно известно, что $a_n, a > 0$

Доказательство. Нам дано:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \ \forall n \geq N_1(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \ \forall n \geq N_2(\varepsilon) : |b_n - b| < \varepsilon \quad (2)$$

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_3(\varepsilon) \ \forall n > N_3(\varepsilon) : |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon.$$

Неравенство $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнено, начиная с $n = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$; неравенство $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнено, начиная с $n = N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow$ неравенство $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ выполнено начиная с $n = N_3(\varepsilon) = \max\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right); N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\}$ ч.т.д.

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Leftrightarrow b_n = b + \beta_n, \text{ где } \alpha_n \text{ и } \beta_n - \text{б.м. последовательности.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot b + a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot b) + \lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot \beta_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b \cdot \alpha_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n \cdot \beta_n) = a \cdot b + 0 + 0 + 0 = a \cdot b$$

$$3. \text{Хотим доказать, что } \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} - \text{бесконечно малая. Начнём:}$$

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{(a \cdot b + b \cdot \alpha_n) - (a \cdot b + a \cdot \beta_n)}{b \cdot (b + \beta_n)} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b + \beta_n} \cdot (b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n). \text{ Понятно,}$$

что $b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n$ - бесконечно малая, так как это сумма б.м. (б.м. \cdot огр. = б.м.). А $\frac{1}{b} = \text{const}$ -

ограниченная. А $b + \beta_n$ - отделимая от нуля ($b \neq 0$), значит $\frac{1}{b + \beta_n}$ - ограниченная (так как $1 /$

отд. от нуля = огр.) □

6 Предельный переход в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности.

Теорема. Если $\forall n \ c_n \geq A$ и $c_n \rightarrow c$ при $n \rightarrow \infty$, то $c \geq A$

Доказательство. Так как c_n сходится к c , то по определению предела: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) :$

$$|c_n - c| < \varepsilon \ (*) \text{ (то есть } c_n \in U_\varepsilon(c))$$

Предположим противное: $c < A$. Возьмём $\varepsilon_0 = \frac{A-c}{7}$. Так как выражение (*) выполнено для любого ε , то оно выполнено и для ε_0 : $\forall n > N(\varepsilon_0) \ c_n \in U_{\varepsilon_0}(c) \Rightarrow c_n < A$ - противоречие (по условию $\forall n \ c_n \geq A$) \square

Следствие (а.к.а. предельный переход в неравенствах). Если $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, $b_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$ и $\forall n \ a_n \leq b_n$, то $a \leq b$.

Доказательство. Рассмотрим $c_n = b_n - a_n$. По условию $a_n \leq b_n$, значит $c_n \geq 0$. Применим для c_n теорему, доказанную выше, и получим: $c \geq 0$, где $c = b - a$ - предел последовательности c_n (использовались арифметикой предела). То есть $b - a \geq 0 \Leftrightarrow b \geq a$

Замечание. При предельном переходе все неравенства становятся *нестрогими*. \square

Теорема о зажатой последовательности. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ и $\forall n \ a_n \leq c_n \leq b_n$. Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$.

Доказательство. По определению предела последовательности для a_n и b_n соответственно:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \ \forall n \geq N_1 \ c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon \quad (1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \ \forall n \geq N_2 \ c - \varepsilon < b_n < c + \varepsilon \quad (2)$$

Положим $N_3 = \max\{N_1(\varepsilon); N_2(\varepsilon)\}$. Тогда для $\forall n \geq N_3$ выполнена следующая цепочка неравенств: $c - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < c + \varepsilon$ (самое левое неравенство выполнено для $n \geq N_1(\varepsilon)$, самое правое неравенство выполнено для $n \geq N_2(\varepsilon)$: см. выражения (1) и (2)).

То есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_3 = \max\{N_1(\varepsilon); N_2(\varepsilon)\} \ \forall n \geq N_3 : |c_n - c| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ \square

7 Верхняя и нижняя грань. Теорема о сущ. точной верхней и нижней грани.

Пусть X - не пустое числовое множество. Множество X - называется **ограниченным сверху** если существует такое число a , что $\forall x \in X \ x < a$

Пусть X - не пустое числовое множество. Множество X - называется **ограниченным снизу** если существует такое число a , что $\forall x \in X \ x > a$

Множество, ограниченное сверху и снизу называется **ограниченным**.

Аксиома непрерывности действительных чисел. Пусть $X, Y \in \mathbb{R}$, причём $X \neq \emptyset$ и $Y \neq \emptyset$.

Кроме того, пусть $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется следующее неравенство: $x \leq y$. Тогда найдётся

число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leq c \leq y$.

Верхней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число C , такое что: $\forall a \in A \quad a \leq C$.

Нижней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$ называется число C , такое что: $\forall a \in A \quad a \geq C$.

Точной верхней гранью множества A ($\sup A$) называется наименьший элемент множества верхних граней A .

Точной нижней гранью множества A ($\inf A$) называется наибольший элемент множества нижних граней A .

Теорема о существовании точной верхней грани. У любого непустого, ограниченного сверху множества A существует точная верхняя грань ($\sup A$).

Доказательство. Пусть S_A - множество верхних граней множества A . Тогда выполнены следующие три условия:

1. $S_A \neq \emptyset$ (так как множество A ограничено сверху, то множество верхних граней множества A не пусто).
2. $\forall a \in A \quad \forall c \in S_A : a \leq c$ (любая верхняя грань множества A не меньше любого элемента из множества A)
3. $A \neq \emptyset$ (по условию)

Значит можно применить аксиому непрерывности действительных чисел для множеств A и S_A
 $\Rightarrow \exists B \quad \forall a \in A \quad \forall c \in S_A : a \leq B \leq c$. Разобьём это утверждение на две части:

1. $\forall a \in A \quad a \leq B \Rightarrow B$ - верхняя грань множества A .
2. $\forall c \in S_A \quad B \leq c \Rightarrow B$ - не больше всех верхних граней множества A .

Значит B - наименьшая верхняя грань множества $A \Rightarrow B = \sup A$

Замечание. Теорема о существовании точной нижней грани доказывается аналогично. □

8 Теорема Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса. Пусть последовательность $\{a_n\}$ не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу). Тогда $\{a_n\}$ сходится.

Доказательство. Докажем для случая: последовательность ограничена сверху и не убывает (второй случай доказывается абсолютно аналогично).

Рассмотрим множество $A = \{a_n\}$, то есть A - множество значений последовательности $\{a_n\}$. Так как a_n - ограничена сверху и $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \sup A = a$ (по теореме о существовании точной верхней грани).

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Хотим: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$, раскроем модуль, зная, что a - точная верхняя грань ($\forall n a_n \leq a$) и получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n \geq N : a - a_n < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n \geq N : a_n > a - \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow (*) \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : a_{n_0} > a - \varepsilon$$

Такой равносильный переход корректен, поскольку a_n - не убывающая: если выражение $(*)$ выполнено, то неравенство $a_n > a - \varepsilon$ также выполнено для $\forall n \geq n_0$ (правая часть неравенства остаётся неизменной, левая не уменьшается).

Докажем теперь от противного, что $(*)$ выполнена. Пусть $(*)$ не выполняется, тогда:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n : a_n \leq a - \varepsilon_0 \Rightarrow a - \varepsilon_0 - \text{верхняя грань множества } A \text{ (по определению)}.$$

Тогда $a - \varepsilon_0 \in S_A$. В то же время $a > a - \varepsilon_0$ и $a = \min S_A$ (по определению точной верхней грани). То есть $a - \varepsilon_0$ - верхняя грань множества A , которая меньше точной верхней грани, что невозможно \Rightarrow противоречие $\Rightarrow (*)$ выполнена $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ □

9 Число e . Постоянная Эйлера.

Число e . Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, заданную формулой $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Докажем, что у этой последовательности существует предел. Этот предел и называют числом e .

Доказательство. Покажем, что последовательность ограничена:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} \cdot 1^{n-k} = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + C_n^3 \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + \dots + \\ &+ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-(n-1)}{n} = 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \\ &+ \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \\ &2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n} \leq 3 \end{aligned}$$

То есть $\forall n a_n \leq 3 \Rightarrow \{a_n\}$ ограничена сверху. Докажем, что $\{a_n\}$ неубывающая последовательность:

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots$$

$$\dots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \leq a_n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \geq a_n \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ не убывает.

Значит $\{a_n\}$ ограничена сверху и не убывает \Rightarrow по теореме Вейрштасса $\{a_n\}$ имеет предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad \square$$

Постоянная Эйлера. Рассмотрим последовательность $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

Докажем, что $\{\gamma_n\}$ сходится к некоторому числу γ . Это число и называется постоянной Эйлера.

Доказательство. Покажем, что $\{\gamma_n\}$ убывает:

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - (n+1) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Обозначим за b_n последовательность $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$. Значит чтобы доказать, что $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} \cdot$

$(1 - \ln(b_n)) < 0$, нужно чтобы b_n убывала. Докажем это:

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (n+1)^{n+2}}{n^{n+1} \cdot (n+2)^{n+2}} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{(n+1)^2}{n \cdot (n+2)}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} = \\ &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \geq \{\text{применим неравенство Бернулли}\} \geq \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n}\right) = \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n^2 + 3n + 1)}{n^3 + 4n^2 + 4n} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1 \Rightarrow b_n > b_{n+1} \Rightarrow b_n - \text{убывающая} \Rightarrow \end{aligned}$$

$(1 - \ln(b_n)) < 0 \Rightarrow \gamma_n$ - убывающая.

Теперь докажем, что $\{\gamma_n\}$ ограничена снизу. Для этого докажем вспомогательное утверждение: $\forall n \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

Рассмотрим последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, как мы знаем, она возрастающая и сходится к e , то есть: $\forall n \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \Rightarrow \{\text{возьмём натуральный логарим от обеих частей}\} \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 \Leftrightarrow n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ ч.т.д.

$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) > \{\text{пользуемся доказанным выше фатком}\} > \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(n) = (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + (\ln(4) - \ln(3)) + \dots + (\ln(n+1) - \ln(n)) - \ln(n) = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0 \Rightarrow \{\gamma_n\}$ ограничена снизу нулём.

Значит $\{\gamma_n\}$ убывает и ограничена снизу \Rightarrow по теореме Вейерштасса $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \{\gamma_n\} = \gamma$ - посто-

10 Подпоследовательность. Предельная точка. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ - это последовательность $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\}$, полученная из $\{x_n\}$ удалением ряда её членов без изменения порядка следования членов.

Предельной точкой последовательности $\{a_n\}$ называется число a , такое что в любой окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности $\{a_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$.

Доказательство. Так как $\{a_n\}$ ограничена, то $\exists c \forall n : |a_n| < c$.

Рассмотрим отрезок $I_1 = [-c; c]$, причём $\forall n \ a_n \in I_1$. Возьмём в качестве $n_1 = 1$. Разделим I_1 пополам (на 2 отрезка). В какой-то половине находится бесконечное число членов, возьмём эту половину и обозначим за I_2 . В I_2 возьмём член a_{n_2} , $n_2 > n_1$ I_k разделим на два отрезка пополам, выберем половинку, где бесконечное число членов, её назовём I_{k+1} и в ней выберем $a_{n_{k+1}} : n_{k+1} > n_k$.

Построим последовательность $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $I_k = [b_k; d_k]$. В силу построения $I_{k+1} \subset I_k$.

Рассмотрим последовательность левых концов отрезков $I_k \ \{b_k\}$: $\{b_k\}$ не убывает и ограничена сверху $c \Rightarrow$ По теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$.

Рассмотрим последовательность правых концов отрезков $I_k \ \{d_k\}$: $\{d_k\}$ не возрастает и ограничена снизу $c \Rightarrow$ По теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} d_k = d$.

Рассмотрим длину отрезка I_k . Поскольку длина самого первого отрезка $2c$ и мы $k - 1$ раз разделили отрезок пополам, то длина I_k равна: $|d_k - b_k| = \frac{2c}{2^{k-1}} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty \Rightarrow d = b$.

Возьмём $a = b = d$. Рассмотрим последовательность $a_{n_k} \in I_k = [b_k; d_k] \Rightarrow b_k \leq a_{n_k} \leq d_k$.

По теореме о зажатой последовательности $\lim_{n_k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ (b_k и d_k сходятся к a). $\Rightarrow a_{n_k}$ - сходящаяся подпоследовательность.

11 Частичный, верхний и нижний предел. Их эквивалентность.

Частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется предел подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Нижний предел последовательности: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k$.

Верхний предел последовательности: $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$.

Замечание. Пусть $b_k = \sup_{n \geq k} \{a_n\}$. Тогда $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k$ $\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \right)$ всегда существуют в одном из следующих смыслов:

1. b_k ограничена \Rightarrow существует конечный $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$
2. b_k не ограничена $\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = -\infty$
3. b_k не определена \Rightarrow зададим $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

Теорема об эквивалентности понятий предельной точки и частичного предела. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Число a является предельной точкой последовательности $\Leftrightarrow a$ - частичный предел этой последовательности.

Доказательство. Докажем сначала, что если a - частичный предел, то a - предельная точка.

По определению частичного предела: $\exists \{n_k\} : \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall k \geq N : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$. То есть в ε -окрестности точки a расположена бесконечное количество членов последовательности a_n (т.к. члены подпоследовательности a_{n_k} являются членами последовательности a_n) $\Rightarrow a$ - предельная точка.

Теперь докажем в обратную сторону. Пусть a - предельная точка. Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_k\}$, заданную формулой: $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$.

$\varepsilon_1 = 1$ В окрестности $U_1(a)$ находится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$. Выберем из этой окрестности какое-то a_{n_1} .

$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ В окрестности $U_2(a)$ находится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$.

Выберем из этой окрестности какое-то a_{n_2} , такое что $n_2 > n_1 \Rightarrow a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}$

$\langle \dots \rangle$

$\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ В окрестности $U_{\frac{1}{k}}(a)$ находится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$.

Выберем из этой окрестности какое-то a_{n_k} , такое что $n_k > n_{k-1} \Rightarrow a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}$.

$\Rightarrow a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k}$. Причём $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{k}\right) = a$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(a - \frac{1}{k}\right) = a \Rightarrow$ по теореме о зажатой последовательности $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. А поскольку $\{a_{n_k}\}$ - подпоследовательность $\{a_n\}$, то a - частичный предел последовательности $\{a_n\}$. \square

12 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **фундаментальной**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Критерий Коши. Последовательность $\{a_n\}$ сходится $\Leftrightarrow \{a_n\}$ фундаментальная.

Доказательство. Сначала докажем, что если $\{a_n\}$ сходится, то она фундаментальная. По определению сходимости последовательности: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \quad \forall n \geq N_1(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$ (1).

Хотим: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \quad \forall n, m \geq N_2(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$.

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a|.$$

Согласно (1) неравенство $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и неравенство $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнены начиная с номера $N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow N_2(\varepsilon) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow \{a_n\}$ фундаментальная

Теперь докажем в обратную сторону. Пусть $\{a_n\}$ фундаментальная. То есть выполнено следующее условие: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \quad \forall n, m \geq N_2(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Возьмём $\varepsilon = 1 : \forall n > N_2(1) : |a_n - a_{N_2(1)+1}| < 1$ (член $a_{N_2(1)+1}$ мы зафиксировали: $N_2(1) + 1$ - конкретный номер члена последовательности). $\Rightarrow a_{N_2(1)+1} - 1 < a_n < a_{N_2(1)+1} + 1$.

Положим $C = \max\{|a_1|; |a_2|; \dots; |a_{N_2(1)+1}| + 1\}$. Значит $\forall n : |a_n| \leq C \Rightarrow \{a_n\}$ ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса: $\exists \{n_k\} : a_{n_k} \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \quad \forall n \geq N_1(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Докажем, что предел $\{a_n\}$ тоже равен $a : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_3 = N_3(\varepsilon) \quad \forall n > N_3(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$.

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

Неравенство $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнено начиная с $N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ (по фундаментальности a_n)

Неравенство $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнено начиная с $N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ (по сходимости a_{n_k}).

Значит неравенство $|a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$ выполнено начиная с $N_3 = \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right); N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} \Rightarrow \{a_n\}$ сходится. \square

13 Предел функции в точке по Коши и по Гейне. Арифметика предела.

Определение предела функции по Коши. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : x \in \mathring{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

или

Определение предела функции по Коши. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение предела функции по Гейне. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, если:

$$\forall x_n : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, x_n \neq a \text{ (т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a) \text{ соответствует последовательность значений функции } f(x): f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

Теорема об эквивалентности определений Коши и Гейне. A - предел функции $f(x)$ в точке x_0 по Коши $\Leftrightarrow A$ - предел функции $f(x)$ в точке x_0 по Гейне

Доказательство. Сначала докажем, что из определения по Коши следует определение по Гейне. Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (1)$$

Рассмотрим произвольную последовательность x_n , такую что: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$, причём $\forall x_n \in E$ и $x_n \neq x_0$, где E - область определения функции $f(x)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0)$.

Так как x_n лежит в δ -окрестности точки x_0 , то выполнено (1) и $|f(x) - A| < \varepsilon$. А значит:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0 : |f(x_n) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

Теперь докажем в обратную сторону: из определения по Гейне следует определение по Коши.

Имеем:

$$\forall x_n : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, x_n \neq a : f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \quad (2)$$

Предположим противное: определение по Коши не выполнено. То есть:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0), x \in E : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$$

Возьмём последовательность $\delta_n = \frac{1}{n} : \exists x_n \in E x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(x_0) : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$.

Заметим, что последовательность x_n удовлетворяет условию $x_n \neq x_0$, поскольку x_n лежит в *проколотой* окрестности точки x_0 ($x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_n}(x_0)$). Кроме того $x_0 - \delta_n < x_n < x_0 + \delta_n$, а поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ (по теореме о зажатой последовательности). Получается, что существует такая последовательность $\{x_n\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$, так как выполнено следующее выражение: $\forall n \in \mathbb{N} : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0 \Rightarrow$ противоречие с определением по Гейне (2) \Rightarrow определение по Коши выполнено. \square

Арифметические свойства предела функции. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$.

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, при $B \neq 0$ и $g(x) \neq 0$.

Докажем первое утверждение, остальные доказываются аналогично.

Доказательство. Используем определение предела функции по Гейне: рассмотрим последовательность $\{x_n\} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \neq x_0$. Тогда согласно определению: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B$. Тогда по теореме о пределе суммы для последовательностей: $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B$. В силу произвольности x_n это означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$. \square

Предельный переход в неравенствах. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, причём $A, B \in \mathbb{R}$. Если в некоторой проколотой ε -окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq g(x)$, то $A \leq B$.

Доказательство. Используем определение предела функции по Гейне: рассмотрим последовательность $\{x_n\} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \neq x_0$. Тогда согласно определению: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B$. Начиная с какого-то номера n_0 члены последовательности $\{x_n\}$ будут находиться в проколотой ε -окрестности точки x_0 , где выполнено следующее неравенство: $\forall n \geq n_0 : f(x_n) \leq g(x_n)$. Тогда по предельному переходу для последовательностей: $A \leq B$. \square

Теорема о зажатой функции. Рассмотрим три функции: $f(x), g(x), h(x)$. Пусть в некоторой ε -окрестности точки x_0 выполнено следующее неравенство: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Причём $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$. Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Доказательство. Используем определение предела функции по Гейне: рассмотрим последовательность $\{x_n\} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \neq x_0$. Тогда согласно определению: $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = A$. Начиная с какого-то номера n_0 члены последовательности $\{x_n\}$ будут находиться в проколотой ε -окрестности точки x_0 , где выполнено следующее неравенство : $\forall n \geq n_0 : h(x_n) \leq f(x_n) \leq g(x_n)$ Тогда по теореме о зажатой последовательности: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. В силу произвольности x_n : $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ □

14 Сходимость стандартных последовательностей.

$$\boxed{1} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = A.$$

1.1 $q = 0$, тогда очевидно $A = 0$.

1.2 $q = 1$, тогда очевидно $A = 1$.

1.3 $q = -1$, тогда $a_n = (-1)^n$ расходится.

1.4 $q > 1$, тогда $A = +\infty$

Доказательство. Хотим: $\forall M > 0 \exists N = N(M) \forall n \geq N(M) : q^n > M$. Обозначим за x : $x = q - 1$, причём $x > 0$. То есть хотим доказать:

$q^n = (1 + (q - 1))^n = (1 + x)^n > M$. Примени неравенство Бернулли, так как $x > -1$:

$(1 + x)^n > 1 + xn > M$. А это выполнено при $n > \frac{M - 1}{x} = \frac{M - 1}{q - 1}$. Значит в качестве $N(M)$

можем взять, например, $N(M) = \left\lceil \frac{M}{q - 1} \right\rceil + 241$ □

1.5 $0 < q < 1$. Тогда нашу последовательность a_n можем представить в виде: $a_n = q^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}$.

Понятно, что $\frac{1}{q} > 1$, значит $\left(\frac{1}{q}\right)^n$ - бесконечно большая последовательность (доказано в 4-м случае). Значит a_n - обратная к б.б. последовательности $\Rightarrow a_n$ - б.м. последовательность $\Rightarrow A = 0$

1.6 $-1 < q < 0$. Тогда $q^n = (-1)^n \cdot (|q|)^n$. Последовательность $(-1)^n$ - ограниченная, а $(|q|)^n$ - бесконечно малая (доказано в 5-м случае). А произведение ограниченной и бесконечно малой - бесконечно малая $\Rightarrow A = 0$

1.7 $q < -1$. $q^n = (-1)^n \cdot |q|^n$. Мы знаем, что $|q|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, значит $(-1)^n \cdot |q|^n$ стремится просто к ∞ . $A = \infty$.

$$\boxed{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = A, \quad a > 0 \quad \mathbf{2.1} \quad a = 1, \text{ очевидно, что } A = 1.$$

2.2 $a > 1$, тогда $A = 1$.

Доказательство. Хотим: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Понятно, что $\sqrt[n]{a} - 1 > 0$, тогда можем раскрыть модуль: $\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \varepsilon + 1$. Так как обе части неравенства неотрицательные, можем возвести в степень n : $a < (\varepsilon + 1)^n$. Применим неравенство Бернулли: $(\varepsilon + 1)^n > 1 + \varepsilon n > a$ (мы уменьшили левую часть неравенства, поэтому сейчас доказываем более строгое утверждение). Тогда в качестве $N(\varepsilon)$ можем взять: $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{a-1}{\varepsilon} \right\rceil + 241$. \square

2.2 $0 < a < 1$, тогда $A = 1$.

Доказательство. Запишем нашу последовательность в виде: $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$, причём $\frac{1}{a} > 1$. Значит $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ (доказали в пункте 2.1). По арифметике предела получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{1} = 1$ \square

$$\boxed{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Доказательство. Хотим: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ можем снять модуль $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$. Перенесём единицу в правую часть и возведём в степен n : $n < (\varepsilon + 1)^n$. Распишем $(\varepsilon + 1)^n$ по биному Ньютона: $(\varepsilon + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \varepsilon^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \varepsilon^k$. Понятно, что каждое слагаемое из этой суммы положительное, значит каждое наше слагаемое меньше, чем сама сумма, то есть $(\varepsilon + 1)^n$. Оставим из этой суммы только одно слагаемое при $k = 2$: $\sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \varepsilon^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \varepsilon^k > \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \varepsilon^2$. Проверим выполнение неравенства: $n < \frac{n(n-1)}{2} \cdot \varepsilon^2 \Leftrightarrow 1 < \frac{n-1}{2} \cdot \varepsilon^2 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$. В качестве $N(\varepsilon)$ можем взять: $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \right\rceil + 241$. \square

$$\boxed{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Доказательство. Будем доказывать по теореме о зажатой последовательности. Понятно, что $0 < \frac{n^2}{2^n}$. Теперь сделаем оценку сверху. Чтобы увеличить чило, нужно уменьшить знаменатель. Распишем знаменатель: $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k > C_n^3 = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ (взяли только одно слагаемое при $k = 3$, аналогично предыдущему пункту).

Тогда:

$$0 < \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{(1+1)^n} < \frac{n^2 \cdot 3!}{n(n-1)(n-2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{в числителе многочлен второй степени, в}$$

знаменателе многочлен от n третьей степени) \Rightarrow по теореме о зажатой последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0. \quad \square$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Доказательство. $0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \leq \{for\ n \geq 3\} \leq 2 \cdot \frac{2}{n}$ - мы "выкинули" все множители,

меньшие 1, а именно:

убрали произведение $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n}$ - значит мы увеличили дробь.

Поскольку $2 \cdot \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Значит по теореме о зажатой последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$. \square



Тимоша желает всем удачно сдать
коллоквиум!