Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Теоретическая информатика и компьютерные технологии»

Лабораторная работа № 6

по курсу «Численные методы линейной алгебры»

«Изучение скорости сходимости однопараметрического метода»

Студентка группы ИУ9-72Б Самохвалова П. С.

Преподаватель Посевин Д. П.

Москва 2023

1 Цель работы

Изучить зависимость скорости сходимости однопараметрического метода в зависимости от значения τ.

2 Задание

- Реализовать однопараметрический метод для положительной симметричной матрицы произвольного размера N x N.
- Вычислить спектр матрицы A методом Крылова или Данилевского, которые были реализованы ранее, и получить минимальное и максимальное значение спектра λ_{min} и λ_{max}. После чего вычислить τ_{opt} = 2 / (λ_{min} + λ_{max}).
- Построить график зависимости количества итераций n решения уравнения A·x = f однопараметрическим методом в зависимости от значения τ лежащего в пределах от 0 до 2 / λ_{max}. Определить τ_{opt} из графика и сравнить с теоретическим значением полученным в пункте 2.
- Для каждого эксперимента пункта 3 вывести условие сходимости посчитанное по формуле:

$$\|r^{(k)}\|_2^2 \leq \max_i |\mu_i|^2 \cdot \|r^{(k-1)}\|_2^2$$

  Решение x* системы уравнения Ax = f для оценки неравенства приведенного выше можно получить путем решения Ax = f методом Гаусса. Другими словами, требуется убедиться в том, что выполняются условия теоремы о сходимости однопараметрического метода. Обязательно, дополнительно проверить и показать, что для каждого k модуль максимального значения μ_i меньше 1.

3 Практическая реализация

Исходный код программы представлен в листинге 1.

Листинг 1: Однопараметрический метод

```
from num_methods import *

n = 5
a = generate_symm_matrix(n, 1, 10)
a = increase_diagonal_elements_to_diagonal_predominance(a)
x_true = [i for i in range(1, n + 1)]
f = mult_matr_vec(a, x_true)

d, b = danilevsky_method(a)
p1 = d[0][:]
g1 = gershgorin_rounds(a)
ls = div_half_method(g1[0], g1[1], func(p1))

l_min = min(ls)
l_max = max(ls)
t_opt = 2 / (l_min + l_max)

print("t optimal")
print(t_opt)
print()

eps = 0.0001

ks = []
ts = []

t_start = 0.0001

t = t_start

t_opt_graphic = t
k_min = 0

while t < 2 / l_max:
    k = 0
    x_old = [0] * n
    p = sub_matr_matr(generate_unit_matr(n), mult_matr_num(t, a))
    g = mult_vec_num(t, f)

    max_m = 0
    for i in range(len(ls)):
```

```
        m = 1 - t * ls[i]
        if abs(m) > max_m:
            max_m = abs(m)
    if max_m >= 1:
        print("max_m >= 1")

    while True:
        x = sum_vec(mult_matr_vec(p, x_old), g)
        if norm_vec(sub_vec(x, x_old)) < eps:
            break
        if round(norm_vec_sq(sub_vec(x_true, x)), 5) > round((max_m**2) * norm_vec_sq(sub_vec(x_true, x_old)), 5):
            print("Convergence condition is not satisfied")
        x_old = x[:]
        k += 1
    if t == t_start:
        k_min = k
        t_opt_graphic = t
    elif k <= k_min:
        k_min = k
        t_opt_graphic = t
    ts.append(t)
    ks.append(k)
    t += 0.0001

print("t optimal graphic")
print(t_opt_graphic)

plt.xlabel('t')
plt.ylabel('k')
plt.grid()
plt.plot(ts, ks)
plt.show()
```

4 Результаты

Результаты работы программы представлены на рисунках 1 – 3.

```
t optimal
0.024945187613054857
```

Рис. 1 — τ оптимальное, полученное аналитически

```
t optimal graphic
0.024499999999999907
```

Рис. 2 — τ оптимальное, полученное из графика

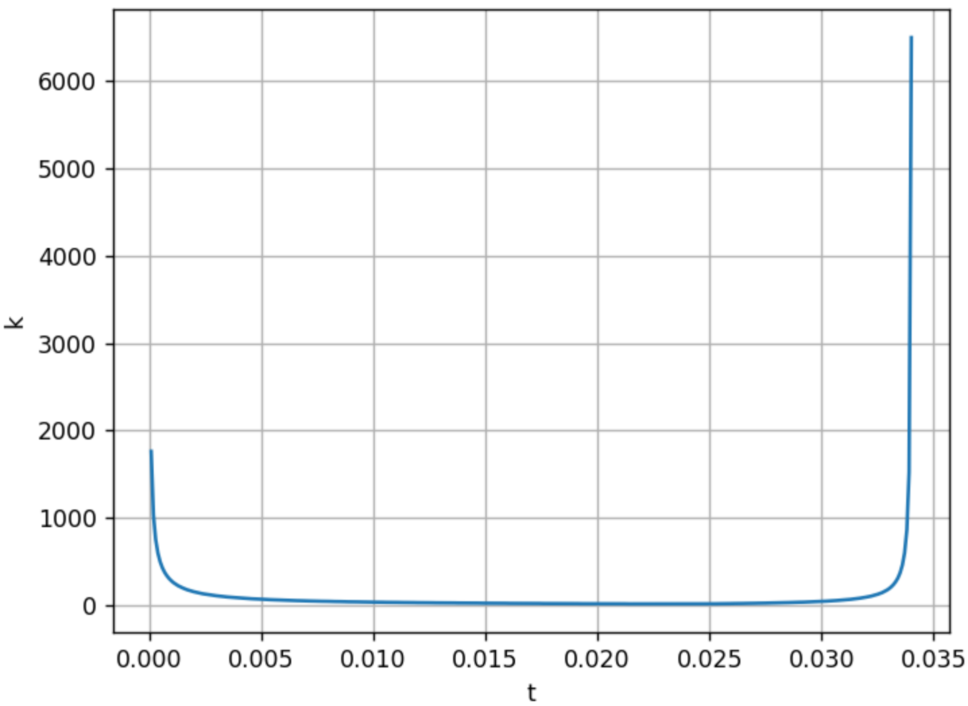

Рис. 3 — График

5 Выводы

В результате выполнения лабораторной работы была изучена зависимость скорости сходимости однопараметрического метода в зависимости от значения τ.