Применение сингулярного разложения матрицы для сжатия изображений

Самохвалова П. С. ИУ9-72Б

Руководитель: Посевин Д. П.

Цель работы

Целью курсовой работы является реализация сингулярного разложения матрицы и применение его для задачи сжатия изображений.

Задачи

- рассмотреть различные алгоритмы сингулярного разложения матрицы;
- реализовать алгоритмы SVD разложения матрицы на языке программирования Python;
- оценить точность различных алгоритмов сингулярного разложения матрицы;
- рассмотреть различные методы сжатия изображений;
- применить SVD разложение матрицы для задачи сжатия изображений.

Сингулярное разложение матрицы (SVD)

Любая матрица (вещественная или комплексная) может быть представлена в виде произведения трех матриц:

$$X=U\Sigma V^*,$$

где U – унитарная матрица порядка m; Σ – матрица размера m x n, на главной диагонали которой лежат неотрицательные числа, называющиеся сингулярными числами матрицы X, элементы вне главной диагонали равны нулю; V^* – эрмитово-сопряжённая к V матрица порядка n; m столбцов матрицы U и n столбцов матрицы V называются соответственно левыми и правыми сингулярными векторами матрицы X.

Методы сингулярного разложения матрицы

1) Сингулярное разложение с использованием собственных значений. Этот метод часто используется для нахождения SVD для квадратных матриц. Он включает в себя нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы $A^T \cdot A$, а затем вычисление левых и правых сингулярных векторов.
2) Сингулярное разложение с использованием QR-разложения. Этот метод часто применяется для нахождения SVD прямоугольных матриц. Он включает вычисление QR-разложения исходной матрицы и применение его компонент к нахождению левых и правых сингулярных векторов.
3) Итерационные методы. Эти методы используют итерационные алгоритмы для поиска приближенного SVD. Они могут быть полезны для больших матриц, когда вычисление точного SVD неоправданно «затратно».

Сингулярное разложение с использованием поиска собственных значений матрицы

1) Вычисление матрицы $A^T \cdot A$, путём умножения транспонированной исходной матрицы на исходную матрицу.
2) Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы $A^T \cdot A$.
3) Вычисление сингулярных значений, как квадратных корней из собственных значений.
4) Вычисление левых сингулярных векторов, как произведений исходной матрицы на собственные векторы, разделенное на сингулярные значения.
5) Получение правых сингулярных векторов, как собственных векторов матрицы $A^T \cdot A$.

Результаты работы метода собственных значений для реализации SVD

```
Matrix:
7.28656915211096212204  7.30270909101705001376  0.54006268610966023935  6.66429281331258671628  6.47662594653005907475
8.18649785073193747564  5.58824721145155134394  6.76321885076378137569  8.74764147088573729150  4.08000065795692101744
3.83961979262732988616  5.06430445317779209802  3.54418116794712467765  6.73259211771537380287  4.49586335532660008596
9.73435824297993335108  6.66270314329227630878  2.48834839786293038344  6.52016245803990113217  6.12938950958246930867
3.03236164369281890885  3.88611605319775454959  6.75455385480267445075  8.56771364954459890839  4.04186309891321293719
```

```
U:
-0.45023161337478817545  -0.52134365957706496619  0.45833520647058556552  0.45783625371641434310  -0.32528001203457101997
-0.51280243825124005586  0.28972605404341000845  -0.61098060218112482112  0.06424966731434694767  -0.52504014793194453414
-0.36427370363352701288  0.13474565140696867505  0.44686730618383324609  -0.78417070618052608921  -0.18583377653222582504
-0.49554441048836744832  -0.44615961751982230465  -0.35398390624697051443  -0.19646298438955128729  0.62567964871105807845
-0.39505133807692133230  0.65348665430038099800  0.30271529041344524824  0.36433026825372588631  0.43876706977497531570
```

```
Sigma:
29.44992823753984367841  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000
0.00000000000000000000  7.35882557483634514028  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000
0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  3.43759213195242407934  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000
0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.27399639532920661011  0.00000000000000000000
0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.68295390902277797185
```

```
V*:
-0.50591354885554107312  -0.43583301038078231526  -0.30233972112015894407  -0.56212395887267119221  -0.38302534647346364594
-0.44450877259430160438  -0.26347565311782322750  0.74187051020125116541  0.36107306318062376560  -0.22857585270526864507
-0.71973738633772532669  0.29490036839954958392  -0.33075932303595828587  0.29205367684816080365  0.44756540023756802293
0.15860785935466911734  -0.59101522943427442502  -0.45777297772283181976  0.63575008375883412803  -0.10867510016139132756
0.05731556359113517546  -0.55169279365522871927  0.19814391289739366475  -0.25331675575608625373  0.76741097114521450440
```

```
Result after multiplication
7.28656915211096034568  7.30270909101705001376  0.54006268610966157162  6.66429281331258760446  6.47662594653004841661
8.18649785073193569929  5.58824721145154601487  6.76321885076378315205  8.74764147088574262057  4.08000065795692190562
3.83961979262732722162  5.06430445317779298620  3.54418116794712956263  6.73259211771537380287  4.49586335532659919778
9.73435824297993335108  6.66270314329227542061  2.48834839786293793296  6.52016245803989225038  6.12938950958246930867
3.03236164369281402386  3.88611605319776431955  6.75455385480268244436  8.56771364954459535568  4.04186309891320849630
```

Сингулярное разложение матрицы с использованием QR-разложения

1) Определение размеров матрицы matrix, как m и n.
2) Инициализация матриц u и v случайными значениями размерности m × m и n × n соответственно.
3) Запуск цикла с числом итераций, равным num_iterations.

Внутри цикла:

Обновление матрицы u путем выполнения QR-разложения матрицы matrix, умноженной на v.

Обновление матрицы v путем выполнения QR-разложения матрицы matrix.T, умноженной на u.

4) Вычисление матрицы сингулярных значений sigma как произведение u.T, matrix и v.
5) Возвращение функцией матрицы u, sigma и v.T (транспонированной матрицы v).

Результаты работы метода использования QR-разложения для нахождения SVD

```
Matrix:
2.24852362101250502491  9.57178749737069622938  2.03316596915950142943  0.35928331274096114711  9.68584610252270650221
6.25902140186938815702  8.34905588170577672713  1.10971192900528703440  3.77011702309695273527  2.15195161290368863760
6.87608758809823950031  3.26171573966675509837  0.48759014872521766470  8.51974756476082362155  2.54275762321038190095
5.28570653763658349078  2.96629725657666565297  6.25379440071634107312  7.85744807834190783780  6.89340172541155205010
1.60801446398364689117  5.51073636464568039628  9.47107773641593553293  4.95347063718890368023  5.08069724977921666209
```

```
U:
-0.46057911134145190779  0.74621908772164835533  0.23411350698084262834  -0.38322266391971349098  -0.17133362490532547118
-0.39766891465786158300  -0.01192565673375356461  0.55161384361127907550  0.60972846586595585983  0.40702650832033826500
-0.38493144629781994581  -0.58550522473374688737  0.35880041066356682666  -0.19703114387270931340  -0.58433929109073323716
-0.51213871119432785584  -0.30361668919563006286  -0.32605096103511710393  -0.43828882747998765268  0.58917274296456645377
-0.46826065247684284243  0.08952870870680673665  -0.63707618814491473458  0.50045301459922819642  -0.34117045935506046250
```

```
Sigma:
25.00063865366034221438  0.00000000000000038060  -0.00000000000000168443  -0.00000000000000155529  0.00000000000000133826
-0.00000000000000101321  -9.95202445708396687962  0.00000000000000069121  -0.00000000000000035782  0.00000000000000032917
-0.00000000000000269972  -0.00000000000040070397  8.60631085696482500680  0.00000000000000051597  0.00000000000000033044
0.00000000000000048197  0.00000000000000000205  -0.00000000000000007153  -4.46191371410440673628  0.00000000000000040095
-0.00000000000000034032  -0.00000000000000158475  -0.00000000000000113582  -0.00000000000000131320  -0.99001722240506673245
```

```
V*:
-0.38524809579929475412  -0.52334179012222803440  -0.36811714561730640716  -0.45150343424792982461  -0.48819226884453176263
0.39023237747410960408  -0.47488656518126892703  -0.01684517971366369937  0.67397224940601652143  -0.40948637185167574559
0.42971701736846829034  0.41117751402524693738  -0.79125449524364366294  -0.05775017354225367439  -0.12983673654452407287
-0.01969658609918543621  -0.50149809498214414916  -0.40347226173386446790  0.10812531815224991905  0.75738415273304504627
-0.71711779069683279086  0.28289367898787776134  -0.27446760244347268021  0.57173410683921410680  -0.05916829337149309698
```

```
Result after multiplication
2.24852362101251035398  9.57178749737069978210  2.03316596915950276170  0.35928331274096625414  9.68584610252271183128
6.25902140186938993338  8.34905588170577850349  1.10971192900528548009  3.77011702309695495572  2.15195161290369085805
6.87608758809824038849  3.26171573966675953926  0.48759014872521688755  8.51974756476082539791  2.54275762321038367730
5.28570653763658526714  2.96629725657667098204  6.25379440071634373766  7.85744807834190783780  6.89340172541155560282
1.60801446398364755730  5.51073636464568128446  9.47107773641593730929  4.95347063718890545658  5.08069724977921843845
```

Итерационные методы нахождения сингулярного разложения

1) В функции power_iteration реализуется метод степенной итерации для нахождения доминирующего собственного вектора матрицы. Для этого инициализируется случайный вектор b_k, затем матрица итеративно умножается на b_k и результат нормализуется.
2) В функции find_eigvals_and_vecs происходит поиск нескольких собственных значений и соответствующих им собственных векторов матрицы. Для этого используется метод степенной итерации итеративно наряду с некоторыми матричными операциями для нахождения собственных значений и собственных векторов.
3) В функции gram_schmidt_process реализуется процесс Грама-Шмидта, метод ортонормирования набора векторов.
4) В функция svd_decomposition_iterations происходит вычисление разложения по сингулярным значениям матрицы с использованием ранее определенных функций. Для этого вычисляются собственные значения и векторы матриц $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$, из которых выводятся сингулярные значения и, в конечном счете, компоненты SVD U, S и V^T.

Результат работы итерационного метода нахождения сингулярного разложения

```
Matrix:
8.74067582715810154070  7.76064385026553615887  2.47777661122614567546  5.89111574481793098812  9.17180764796419012441
0.94287064750128712909  5.20872235870540656322  1.54560293723374986286  7.95613433724728924545  5.74988696457673675866
6.78317806152440194722  6.73153162500896762310  0.96869624683752930672  4.98089435641231226271  3.29921385882991469174
4.37118311955635530097  6.31870291817081319863  7.07902389290884581641  0.05132216316836801795  3.45598415738197939362
0.01540790911304212862  0.77662172025350417748  5.12209422991482021814  9.78646272112751525185  5.79214646797368892805
```

```
U:
0.62373194670575449194  -0.27377979879923003415  0.28370115964408321174  -0.63107147388101914043  -0.23930216734986625715
0.41112436183629186282  0.36043720203403284419  0.17691331306642002485  0.55690521642825618898  -0.59968328480076860121
0.41783387502777286082  -0.26838112104442718442  0.36456800673491840392  0.44748141528508822429  0.64825687669780640565
0.34185082860367277391  -0.43503863673009229851  -0.80538319193871965584  0.19592837812433017142  -0.08276098309695352484
0.38792793354643767545  0.73064533364573702734  -0.32659365315999838719  -0.23016912996459656937  0.39500388874420933050
```

```
Sigma:
25.17319170539557404709  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000
0.00000000000000000000  10.14210250434600446567  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000
0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  6.47312015810142948880  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000
0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  3.02173738035161587590  0.00000000000000000000
0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  0.00000000000000000000  2.44795421734575668893
```

```
V*:
0.40415960223494656889  0.48686647790499615329  0.27778087309539961636  0.51009069760913083869  0.51211455297488017724
-0.56832669256930679058  -0.41760089372964431798  0.02775885720864695524  0.69474218961984490761  0.13848104519438245164
0.24624390801731246836  0.03625457281921962149  -0.93380451518386464738  0.25601356390854868028  0.02270960658241606700
-0.36491029596234847432  0.68660429614668772036  -0.02031696568346335122  0.23147912783905885692  -0.58431126182358439358
0.56556538092387076411  -0.34033905551844556570  0.22285327172037022736  0.37150402238007296241  -0.61369887390169464148
```

```
Result after multiplication
8.74067582715809976435  7.76064385026553438252  2.47777661122614389910  5.89111574481792921176  9.17180764796418834806
0.94287064750128768420  5.20872235870540745140  1.54560293723375030694  7.95613433724729190999  5.74988696457673675866
6.78317806152440461176  6.73153162500896939946  0.96869624683752819649  4.98089435641231226271  3.29921385882991380356
4.37118311955635618915  6.31870291817081319863  7.07902389290884848094  0.05132216316836815673  3.45598415738197983771
0.01540790911304135147  0.77662172025350351134  5.12209422991482021814  9.78646272112751525185  5.79214646797368892805
```

Применение сингулярного разложения матрицы для задачи сжатия изображений

Сингулярное разложение используется для сжатия изображений путем декомпозиции матрицы изображения. SVD позволяет разложить матрицу изображения на три более простые матрицы, что позволяет эффективно сжимать данные, убирая ненужную информацию, сохраняя при этом основные характеристики изображения.

Процесс сжатия с использованием SVD включает в себя следующие шаги:

- выбор сингулярных чисел для достижения определённого процента отношения суммы выбранных сингулярных чисел к сумме всех сингулярных чисел;
- хранение только выбранных сингулярных чисел и соответствующих сингулярных векторов;
- восстановление сжатого изображения из выбранных сингулярных чисел и векторов.

Применение сингулярного разложения матрицы для задачи сжатия изображений

1) В функция zip_img_by_svd происходит сжатие входного изображения с использованием SVD. В качестве входных данных принимаются данные изображения, идентификатор участка и степень сжатия.
2) В рамках функции SVD выполняется для каждого цветового канала входного изображения отдельно.
3) Затем выполняется итерация по сингулярным значениям SVD до тех пор, пока совокупная сумма сингулярных значений не достигнет определенного процента от общей суммы, как определено параметром rate.
4) Используя выбранные сингулярные значения, сжатое изображение восстанавливается с использованием усеченных компонентов SVD.
5) Восстановленное изображение затем нормализуется и сохраняется в формате JPEG с помощью plt.imsave.
6) Вычисление степени сжатия достигается путем сравнения размеров исходного и сжатого изображений.
7) Наконец, в основном блоке кода считывается файл изображения, настраивается фигура для построения графика, отображается исходное изображение и вызывается функция zip_img_by_svd для различных степеней сжатия.
8) Полученные сжатые изображения отображаются в таблице вспомогательных графиков для сравнения.

Результаты сжатия изображения при помощи сингулярного разложения матрицы

Исходное изображение
Размер 2419 КБ

77.73% сжатия по сингулярным числам
88.04% сжатия по памяти
Размер 289 КБ

77.73% сжатия по сингулярным числам
88.04% сжатия по памяти
Размер 289 КБ

68.8% сжатия по сингулярным числам
85.8% сжатия по памяти
Размер 343 КБ

59.39% сжатия по сингулярным числам
84.08% сжатия по памяти
Размер 385 КБ

49.91% сжатия по сингулярным числам
81.42% сжатия по памяти
Размер 449 КБ

39.91% сжатия по сингулярным числам
78.49% сжатия по памяти
Размер 520 КБ

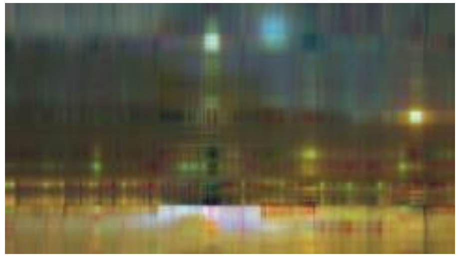
29.97% сжатия по сингулярным числам
75.17% сжатия по памяти
Размер 600 КБ

19.97% сжатия по сингулярным числам
74.1% сжатия по памяти
Размер 626 КБ

Результаты сжатия изображений при помощи сингулярного разложения матрицы

Исходное изображение
Размер 3628 КБ

87.51% сжатия по сингулярным числам
91.7% сжатия по памяти
Размер 301 КБ



79.53% сжатия по сингулярным числам
90.41% сжатия по памяти
Размер 348 КБ

69.76% сжатия по сингулярным числам
87.94% сжатия по памяти
Размер 437 КБ

59.92% сжатия по сингулярным числам
86.15% сжатия по памяти
Размер 503 КБ

49.88% сжатия по сингулярным числам
83.75% сжатия по памяти
Размер 590 КБ

39.95% сжатия по сингулярным числам
81.52% сжатия по памяти
Размер 671 КБ

29.98% сжатия по сингулярным числам
78.57% сжатия по памяти
Размер 778 КБ

19.99% сжатия по сингулярным числам
74.76% сжатия по памяти
Размер 916 КБ

Заключение

В результате выполнения курсовой работы:

- были реализованы методы А. М. Данилевского и А. Н. Крылова для поиска собственных значений и собственных векторов матрицы, для данных методов также был реализованы вспомогательные методы – метод деления отрезка пополам и метод нахождения кругов Гершгорина;
- был реализован метод QR-разложения матрицы;
- были реализованы методы сингулярного разложения матрицы – метод, использующий собственные значения, метод, использующий QR-разложение, итерационные методы;
- была оценена точность реализованных методов;
- были рассмотрены различные методы сжатия изображений;
- сингулярное разложение матрицы было применено для задачи сжатия изображений.