# Комплексные числа

$z = x + iy$ $\quad$ $x$ — действительная часть ($\mathrm{Re}\, z$) $\quad$ $x, y \in \mathbb{R}$

$i^2 = -1$ $\quad$ $y$ — мнимая часть ($\mathrm{Im}\, z$)

$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$

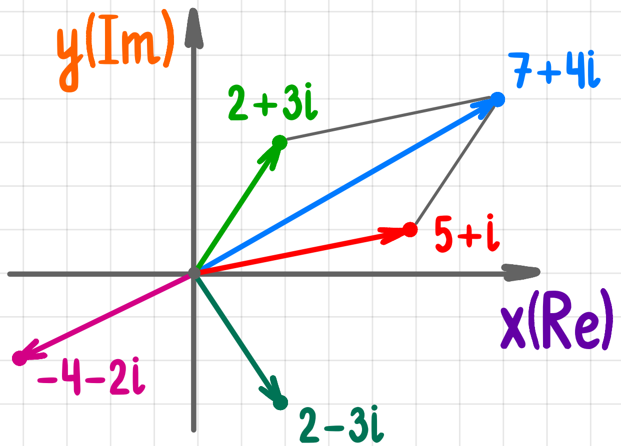
сложение $\quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

вычитание $\quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

умножение $\quad z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$$(3+i)(2-i) + i^3 - 1 + i = 6 - 3i + 2i - i^2 + i^2 \cdot i - 1 + i = 6 - i + 1 - i - 1 + i = 6 - i$$

# Геометрическая интерпретация




Модуль $z$: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Комплексно сопряженное: $\bar{z} = x - iy$

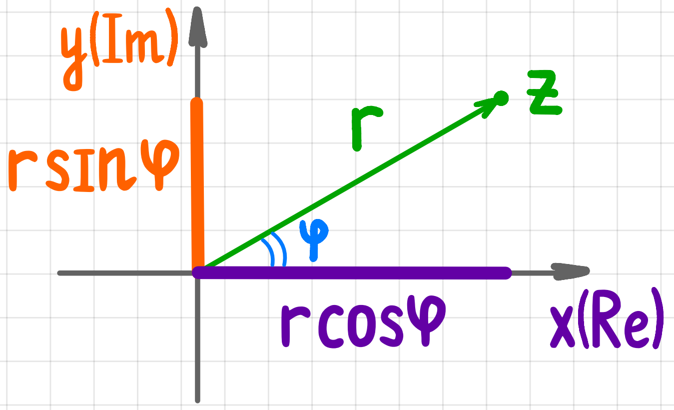
$\bar{\bar{z}} = z;\ z \cdot \bar{z} = |z|^2;$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

# Комплексные числа

$$\frac{1+i}{2-i}=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{1+i+2i+i^2}{4-i^2}=\frac{1+3i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$$

# Тригонометрическая форма



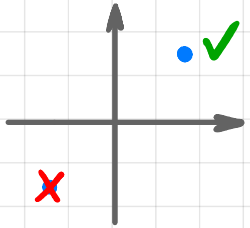

$|z|=r$ — модуль, $\varphi=\arg z$ — аргумент
$\varphi\in[0,\,2\pi)$

$$z=x+iy=r\cos\varphi+ir\sin\varphi$$

$$\boxed{z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$$ тригоном. форма

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$$

$z=1+i\cdot 1$; $\quad r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; $\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{1}=1$



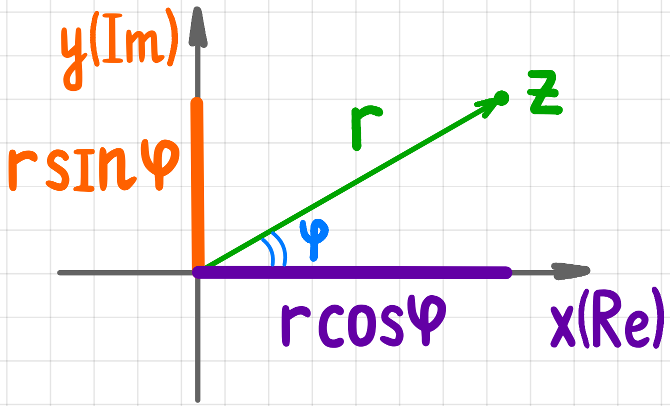
$\varphi=\frac{\pi}{4}$

$$\boxed{z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

# Комплексные числа

$$\frac{1+i}{2-i}=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{1+i+2i+i^2}{4-i^2}=\frac{1+3i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$$

## Тригонометрическая форма



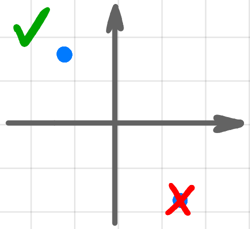

$|z|=r$ — модуль, $\varphi=\arg z$ — аргумент
$\varphi\in[0,\,2\pi)$

$$z=x+iy=r\cos\varphi+ir\sin\varphi$$

$$\boxed{z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$$ тригоном. форма

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$$

$z=-1+i\sqrt{3}$; $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$




$\varphi=\frac{2\pi}{3}$

$$\boxed{z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

# Комплексные числа

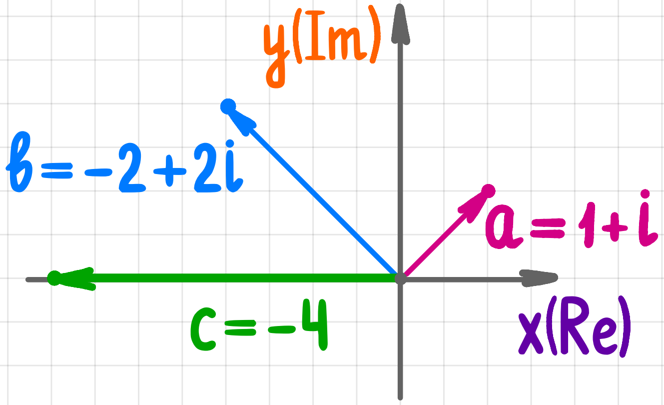
Перемножим $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$

$$=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1)]$$

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Модули перемножаются, аргументы складываются




$|a|=\sqrt{2}$, $\varphi_a=\frac{\pi}{4}$

$|b|=2\sqrt{2}$, $\varphi_b=\frac{3\pi}{4}$

$|c|=4$, $\varphi_c=\pi \Rightarrow c=-4$

Формула Муавра $\quad z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

# Комплексные числа

## Извлечение корня

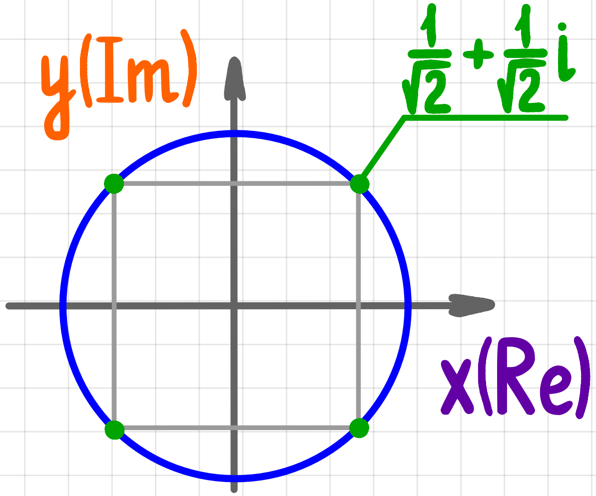
$$z^n = z_0, \qquad z = ?$$

$$(r,\varphi)^n \quad (r_0,\varphi_0) \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{r_0} \\ \varphi \cdot n = \varphi_0 + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \; k \in \mathbb{Z}$$

→ $n$ точек

$$z^4 = -1 \qquad \begin{matrix} r_0 = 1 \\ \varphi_0 = \pi \end{matrix}$$




$$r = 1, \; \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$$

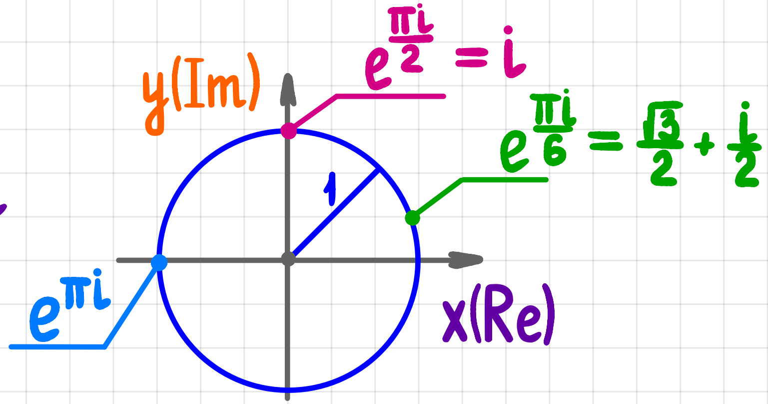
# Комплексные числа

## Показательная форма

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$ формула Эйлера

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \rightarrow \boxed{z = r\cdot e^{i\varphi}}$$

тригоном. форма — показ. форма




$$\frac{(1+i)^4}{(-1+i\sqrt{3})^3} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^4}{\left(2e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^3} = \frac{4\cdot e^{\pi i}}{8\cdot e^{2\pi i}} = \frac{1}{2}\cdot e^{-\pi i} = -\frac{1}{2}$$

$$1+i = \left|\begin{matrix} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \end{matrix}\right| = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$$

$$-1+i\sqrt{3} = \left|\begin{matrix} r = 2 \\ \varphi = \frac{2\pi}{3} \end{matrix}\right| = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}$$