НИУ ВШЭ, ОП «Политология»
Курс «Теория вероятностей и математическая статистика», 2023

Решение бонусных задач

Задание 1. Сл. в. X равномерно распределена на отрезке $[x_1; x_2]$. Выведите в общем виде формулу для дисперсии равномерного распределения.

Ответ: $VarX = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}$

Пояснение: Для начала запишем функцию плотности:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1}, & \text{если x} \in [x_1; x_2] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$VarX = E(X^2) - (EX)^2$

$EX = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{x}{x_2 - x_1}\, dx = \ \frac{x^2}{2(x_2 - x_1)} \ \Big|_{x_1}^{x_2} = \ \frac{(x_2^2 - x_1^2)}{2(x_2 - x_1)} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2(x_2 - x_1)} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$E(X^2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{x_2 - x_1}\, dx = \ \frac{x^3}{3(x_2 - x_1)} \ \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{(x_2^3 - x_1^3)}{3(x_2 - x_1)} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2)}{3(x_2 - x_1)} = \frac{x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2}{3}$

$VarX = \frac{x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2}{3} - \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} = \frac{4x_2^2 + 4x_1 x_2 + 4x_1^2 - 3x_1 - 6x_1 x_2 - 3x_2^2}{12} = \frac{x_2^2 - 2x_2 x_1 + x_1^2}{12} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}$

Задание 2. Функция плотности сл.в. Y имеет следующий вид:

$$p(Y) = \begin{cases} y, & \text{если y} \in [0; 1] \\ 1, & \text{если y} \in (1; 1.5] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите

1. запишите в общем виде функцию распределения сл. в. Y
   Ответ:

$$F(Y) = \begin{cases} 0, & \text{если y} < 0 \\ \frac{y^2}{2}, & \text{если y} \in [0; 1] \\ \text{y - 0.5}, & \text{если y} \in (1; 1.5] \\ 1, & \text{если y} > 1.5 \end{cases}$$

   Пояснение: Функцию распределения можно найти через интегрирование функции плотности.

   Для отрезка от 0 до 1: $F(Y) = \int\limits_0^y \text{y}\ dy = \ \frac{y^2}{2} \ \Big|_0^y$. При этом в качестве верхней границы ставим у, а не 1, потому что нас будет интересовать значение функции распределения для *любого* у, входящего в указанный отрезок от 0 до 1.

   Для (1; 1.5]: $F(Y) = \int\limits_0^1 \text{y}\ dy + \int\limits_1^y 1\ dy \ \longrightarrow \ \frac{y^2}{2} \ \Big|_0^1 + y \ \Big|_1^y = 0.5 + y - 1 = y - 0.5$

2. найдите значение функции распределения $F(3)$
   Ответ: 1
   Пояснение: см. найденную функцию распределения выше

3. найдите $P(0.7 \leq Y \leq 1.1)$

   Ответ: 0.355

Пояснение:

Подставляем значения в функции распределения для указанного промежутка.

$F(1.1) - F(0.7) = 1.1 - 0.5 - \frac{0.7^2}{2} = 0.355$

Задание 3. Функция плотности сл.в. Y имеет следующий вид:

$$p(Y) = \begin{cases} a \times \text{sin(y)}, & \text{если y} \in [0; \pi] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите

1. найдите значение константы a

   Ответ: 0.5

   Пояснение: В очередной раз обратимся к положению о том, что площадь всей фигуры под графиком функции плотности равна 1.

   $\int\limits_0^\pi a \sin(\text{y})\ dy = 1 \quad \longrightarrow \quad -a\cos(\text{y})\ \Big|_0^\pi = 1 \quad \longrightarrow \quad -a\cos(\pi) - (-acos0) = 1 \longrightarrow \quad \text{2a} = 1$

   $\text{a} = 0.5$

2. запишите в общем виде функцию распределения сл. в. Y

   Ответ:

   $$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0 \\ \text{-0.5cosy+0.5}, & \text{если y} \in [0; \pi] \\ 1, & \text{если } y > \pi \end{cases}$$

   Пояснение: Опять же вспомним, как связаны функция плотности и функция распределения. Функцию распределения можно найти через интегрирование функции плотности. Исходя из этого, $F(y) = -0.5cosy + C$, где C – это константа.

3. найдите вероятность того, что сл. в. Y не превышает $\frac{\pi}{6}$

   Ответ: 0.067

   Пояснение: $F(y) = -0.5cos\frac{\pi}{6} + 0.5 = -0.5\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.5 = 0.067$

4. Найдите EY

   Ответ: $\frac{\pi}{2}$

   Пояснение: $EY = \int\limits_0^\pi y \times 0.5siny\ dy$