

Решение бонусных задач

Задание 1. Функция плотности сл.в. Y имеет следующий вид:

$$p(Y) = \begin{cases} y, & \text{если } y \in [0; 1] \\ 1, & \text{если } y \in (1; 1.5] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите

1. запишите в общем виде функцию распределения сл. в. Y

Ответ:

$$F(Y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0 \\ \frac{y^2}{2}, & \text{если } y \in [0; 1] \\ y - 0.5, & \text{если } y \in (1; 1.5] \\ 1, & \text{если } y > 1.5 \end{cases}$$

Пояснение: Функцию распределения можно найти через интегрирование функции плотности.

Для отрезка от 0 до 1: $F(Y) = \int_0^y y \, dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^y$. При этом в качестве верхней границы ставим y , а не 1, потому что нас будет интересовать значение функции распределения для *любого* y , входящего в указанный отрезок от 0 до 1.

$$\text{Для } (1; 1.5]: F(Y) = \int_0^1 y \, dy + \int_1^y 1 \, dy \longrightarrow \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 + y \Big|_1^y = 0.5 + y - 1 = y - 0.5$$

2. найдите значение функции распределения $F(3)$

Ответ: 1

Пояснение: см. найденную функцию распределения выше

3. найдите $P(0.7 \leq Y \leq 1.1)$

Ответ: 0.355

Пояснение:

Подставляем значения в функции распределения для указанного промежутка.

$$F(1.1) - F(0.7) = 1.1 - 0.5 - \frac{0.7^2}{2} = 0.355$$

Задание 2. Функция плотности сл.в. Y имеет следующий вид:

$$p(Y) = \begin{cases} a \times \sin(y), & \text{если } y \in [0; \pi] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите

1. найдите значение константы a

Ответ: 0.5

Пояснение: В очередной раз обратимся к положению о том, что площадь всей фигуры под графиком функции плотности равна 1.

$$\int_0^\pi a \sin(y) \, dy = 1 \longrightarrow -a \cos(y) \Big|_0^\pi = 1 \longrightarrow -a \cos(\pi) - (-a \cos 0) = 1 \longrightarrow 2a = 1 \\ a = 0.5$$

2. запишите в общем виде функцию распределения сл. в. Y

Ответ:

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0 \\ -0.5\cos y + 0.5, & \text{если } y \in [0; \pi] \\ 1, & \text{если } y > \pi \end{cases}$$

Пояснение: Опять же вспомним, как связаны функция плотности и функция распределения. Функцию распределения можно найти через интегрирование функции плотности. Исходя из этого, $F(y) = -0.5\cos y + C$, где C – это константа.

3. найдите вероятность того, что сл. в. Y не превышает $\frac{\pi}{6}$

Ответ: 0.067

Пояснение: $F(y) = -0.5\cos\frac{\pi}{6} + 0.5 = -0.5\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.5 = 0.067$

4. Найдите EY

Ответ: $\frac{\pi}{2}$

Пояснение: $EY = \int_0^{\pi} y \times 0.5\sin y \, dy$