

Дополнительные задачи для практики после семинара 2

Задание 1. Сл. в. X равномерно распределена на отрезке $[-6; 4]$

1. Найдите следующую функцию распределения: $F(2.5)$

Ответ: 0.85

Пояснение: Площадь под всем графиком функции плотности (1) делим на длину стороны прямоугольника $(4 - (-6))$, получаем, что значение функции плотности $= 0.1$. Вспомним, что функция распределения – это вероятность того, что случайная величина НЕ превысит указанное значение. Необходимую нам площадь под графиком функции плотности для равномерного распределения можно найти следующим образом: $(2.5 - (-6)) \times 0.1 = 0.85$

2. Найдите $P(-3 \leq X \leq 2)$

Ответ: 0.5

Пояснение: $(2 - (-3)) \times 0.1 = 0.5$

3. Найдите математическое ожидание сл.в. X

Ответ: -1

Пояснение: $EX = \frac{a+b}{2} = \frac{4+(-6)}{2} = -1$

4. Найдите вариацию сл. в. X (предварительно выведите в общем виде)

Ответ: 8(3)

Пояснение: $Var X = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(4-(-6))^2}{12} = 8(3)$

5. Найдите квантиль уровня 0.65.

Ответ: 0.5

Пояснение: Вспомним, что квантиль уровня p – это такое значение сл.в., которое не превышает с вероятностью p .

$$F(X_{0.65}) = 0.65$$

$$(X_{0.65} - (-6)) \times 0.1 = 0.65$$

$$X_{0.65} = 0.5$$

Задание 2. Функция плотности сл.в. Y имеет следующий вид:

$$p(Y) = \begin{cases} y, & \text{если } y \in [0; 1] \\ 1, & \text{если } y \in (1; 1.5] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите

1. запишите в общем виде функцию распределения сл. в. Y

Ответ:

$$F(Y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0 \\ \frac{y^2}{2}, & \text{если } y \in [0; 1] \\ y - 0.5, & \text{если } y \in (1; 1.5] \\ 1, & \text{если } y > 1.5 \end{cases}$$

Пояснение: Функцию распределения можно найти через интегрирование функции плотности.

Для отрезка от 0 до 1: $F(Y) = \int_0^y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^y$. При этом в качестве верхней границы ставим y , а не 1, потому что нас будет интересовать значение функции распределения для *любого* y , входящего в указанный отрезок от 0 до 1.

Для (1; 1.5]: $F(Y) = \int_0^1 dy + \int_1^y 1 dy \rightarrow \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 + y \Big|_1^y = 0.5 + y - 1 = y - 0.5$

2. найдите значение функции распределения $F(3)$

Ответ: 1

Пояснение: см. найденную функцию распределения выше

3. найдите $P(0.7 \leq Y \leq 1.1)$

Ответ: 0.355

Пояснение:

Подставляем значения в функции распределения для указанного промежутка.

$$F(1.1) - F(0.7) = 1.1 - 0.5 - \frac{0.7^2}{2} = 0.355$$

Задание 3. Функция плотности сл.в. Y имеет следующий вид:

$$p(Y) = \begin{cases} a \times \sin(y), & \text{если } y \in [0; \pi] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найдите

1. найдите значение константы a

Ответ: 0.5

Пояснение: В очередной раз обратимся к положению о том, что площадь всей фигуры под графиком функции плотности равна 1.

$$\int_0^{\pi} a \sin(y) dy = 1 \rightarrow -a \cos(y) \Big|_0^{\pi} = 1 \rightarrow -a \cos(\pi) - (-a \cos 0) = 1 \rightarrow 2a = 1 \\ a = 0.5$$

2. запишите в общем виде функцию распределения сл. в. Y

Ответ:

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0 \\ -0.5 \cos y + 0.5, & \text{если } y \in [0; \pi] \\ 1, & \text{если } y > \pi \end{cases}$$

Пояснение: Опять же вспомним, как связаны функция плотности и функция распределения. Функцию распределения можно найти через интегрирование функции плотности. Исходя из этого, $F(y) = -0.5 \cos y + C$, где C – это константа.

3. найдите вероятность того, что сл. в. Y не превышает $\frac{\pi}{6}$

Ответ: 0.067

Пояснение: $F(y) = -0.5 \cos \frac{\pi}{6} + 0.5 = -0.5 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0.5 = 0.067$

4. Найдите EY

Ответ: $\frac{\pi}{2}$

Пояснение: $EY = \int_0^{\pi} y \times 0.5 \sin y dy$

Задание 4. Средняя длительность рассмотрения заявления на получение визы в посольстве Словении составляет 10 дней. Предполагая, что случайная величина X – срок рассмотрения заявления на получение визы в посольстве Словении, имеет экспоненциальное распределение, найдите

1. вероятность того, что срок рассмотрения заявления на получение визы в посольстве Словении будет более 5 дней, но при этом не превысит 8 дней

Ответ: 0.1572

Пояснение: $F(8) - F(5) = 1 - e^{-0.8} - 1 + e^{-0.5}$

2. медиану сл. в. X

Ответ: 6.93

Пояснение: $F(X_{0.5}) = 0.5 \rightarrow 1 - e^{-0.1x} = 0.5 \rightarrow x = \frac{\ln(0.5)}{-0.1}$

3. функцию надежности $G(7)$

Ответ: 0.4965

Пояснение: Функция надежности – вероятность того, что сл.в. превышает указанное значение.

$G(7) = 1 - F(7) = 1 - 1 + e^{-0.7} = 0.4965$

4. найдите значение квантили уровня 0.3 для случайной величины X

Ответ: 3.5667

Пояснение: Решается аналогично второму пункту про медиану.