Trabalho 2

Aluna: Cristiane de Paula Oliveira - Matrícula: 261424
IF-UFRGS

8 de junho de 2016

Resumo

O objetivo deste trabalho foi encontrar as bacias de atração do método de Newton-Raphson de cada raiz, reais e complexas, do polinômio $z^5 - 1$ no plano complexo no intervalo $[-1, 1]$, usando derivada analítica e derivada numérica. O resultado tem um formato fractal e por isso chama-se Fractal de Newton.

1 Introdução

1.1 Método de Newton-Raphson

Um dos mais conhecidos métodos de encontrar raízes de um polinômio é o *Método de Newton-Raphson*. Este método requer a avaliação tanto da função $f(x)$ quando da derivada $f'(x)$ em pontos x nas proximidades de uma provável raiz. O método de Newton-Raphson consiste, geometricamente, de estender a reta tangente a um ponto x_n até ela interceptar o eixo x, definindo como próximo chute, x_{n+1}, este ponto em que a reta tangente interceptou o eixo x. Algebricamente, o método é derivado da expansão da série de Taylor de uma função na vizinhança de um ponto,

$$f(x_n + \delta) = f(x_n) + f'(x_n)\delta + \frac{f''(x_n)}{2}\delta^2 + ... \tag{1}$$

Mantendo somente os termos de primeira ordem

$$f(x_n + \delta) \approx f(x_n) + f'(x_n)\delta. \tag{2}$$

A equação (2) é a equação da reta tangente ao ponto $(x_n, f(x_n)$, então $(x_{n+1}, 0)$ é o ponto onde essa tangente intercepta o eixo x.

Para valores suficientemente pequenos de δ, e para funções bem-comportadas, $f(x_n + \delta) = 0$ implica

$$\delta_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3}$$

Sendo $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, a interação de Newton-Raphson tem a forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{4}$$

Infelizmente o método pode não convergir para uma raiz no caso em que o método encontra um extremo local, $f'(x_n) = 0$, ou quando entra num ciclo não-convergente.

1.2 Newton-Raphson e fractais

O Método de Newton-Raphson também funciona para encontrar raízes num plano complexo. É possível, então, mapear o plano complexo em regiões em que o valor inicial de z_n converge para determinada raiz na interação de Newton-Raphson. A bacia de atração de cada raiz tem formato fractal, assim chamado porque, geralmente, tem uma estrutura geométrica autossimilar que se repete em todas as escalas de magnificação.

2 Resultados

O polinômio escolhido para a obtenção de raízes foi

$$z^5 - 1,$$

um polinômio simples, de grau cinco, com uma raiz real e quatro complexas. Dessa forma, o método de Newton-Raphson, equação (4), nos dá a interação

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^5 - 1}{5z_n^4}.$$

2.1 Derivada Analítica

A raízes encontradas usando o método de Newton-Raphson, usando a derivada analítica, para esse polinômio estão listadas na tabela 1. A figura 1 mostra o fractal formado pelas bacias de atração das raízes desse polinômio usando a derivada analítica.

Raíz	**Real**	**Imaginário**
1	-0.809016943	-0.587785184
2	0.309017003	0.951056540
3	0.309017003	-0.951056600
4	-0.809017003	0.587785244
5	1.000000000	0.000000000

Tabela 1: Tabela com as raízes reais e complexas do polinômio $z^5 - 1$, encontradas com a derivada analítica.

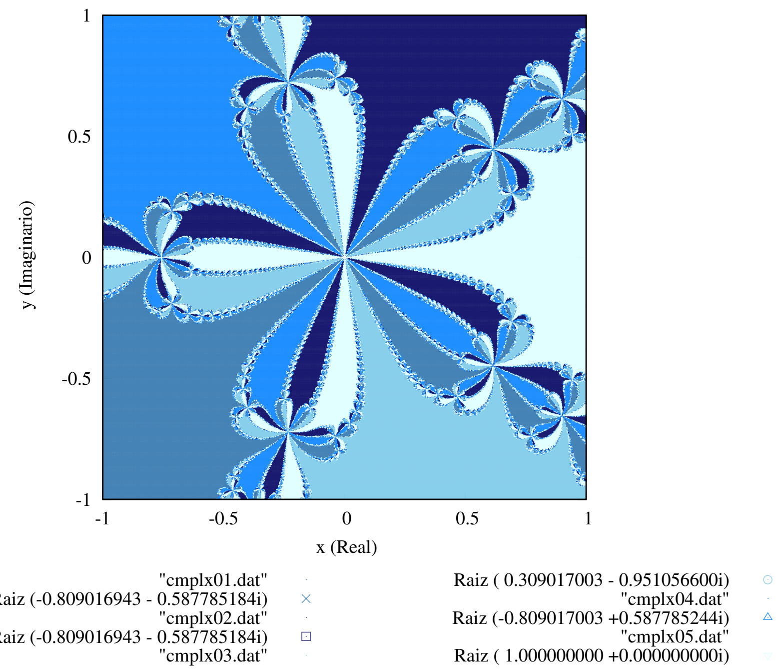

Figura 1: Fractal de Newton para o polinômio $z^5 - 1$, usando a derivada analítica. Cada região, em diferentes tons de azul, converge para uma raiz. Há um ponto branco no centro que é onde a derivada é um ponto de não-convergência.

2.2 Derivada Numérica

A raízes encontradas usando o método de Newton-Raphson com derivada numérica para esse polinômio estão listadas na tabela 2. A figura 2 mostra o fractal formado pelas bacias de atração das raízes desse polinômio usando a derivada numérica.

Raíz	**Real**	**Imaginário**
1	-0.80901688	-0.58778524
2	-0.80901700	0.58778524
3	1.000000000	0.0000000
4	0.30901697	0.95105654
5	0.30901697	-0.95105654

Tabela 2: Tabela com as raízes reais e complexas do polinômio $z^5 - 1$, encontradas com a derivada numérica.

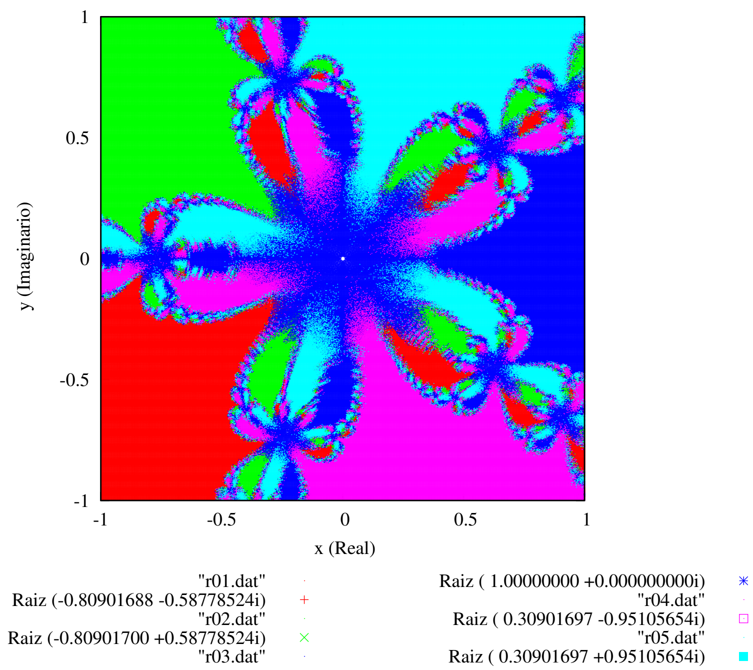

Figura 2: Fractal de Newton para o polinômio $z^5 - 1$, usando a derivada numérica. Cada região, em diferentes cores, converge para uma raiz. É possível notar que usando a derivada numérica existe um erro devido a aproximação de dz, que tenderia a zero na definição de derivada mas que para o cálculo numérico da derivada é aproximado a um valor muito pequeno. No centro também há uma região branca de não-convergência.

3 Conclusões

O Método de Newton-Raphson é razoavelmente eficaz em encontrar raízes de polinômios tanto reais quanto complexos. A estrutura do fractal mostra como o método é sensível a escolha do ponto inicial fora da região de convergência quadrática. Um encontro com um extremo local faz com que o método chute para o infinito. Porém se o chute inicial é ligeiramente desviado de tal ponto, o método não chuta para o infinito, mas para a bacia de atração de alguma raiz. Isso significa que na vizinhança de um extremo deve haver uma pequena, talvez distorcida, cópia da bacia de atração. Esse comportamento se repete em escalas menores, daí surge o fractal.

Referências

[1] WIKIPEDIA, *Newton fractal*. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_fractal>. Acesso em 02 jun. 2016.

[2] WEISSTEIN, Eric W., *Newton's Method*. Disponível em: <mathworld.wolfram.com/NewtonsMethod.html>. Acesso em 02 jun. 2016.

[3] PRESS, William H., TEUKOLSKY, Saul A.,VETTERLING, William T., FLANNERY, Brian P. *NUMERICAL RECIPES IN FORTRAN 90: The Art Of Parallel Scientific Computing*. Disponível em: <http://apps.nrbook.com/fortran/index.html>. Acesso em 04 jun. 2016.