Trabalho 3

Aluna: Cristiane de Paula Oliveira - Matrícula: 261424
IF-UFRGS

24 de Junho de 2016

Resumo

O objetivo deste trabalho foi interpolar conjuntos de pontos com polinômio de Lagrange e comparar com outro método de interpolação. O programa utilizado para interpolar os pontos é baseado no algoritmo de Neville e o método de comparação foi o de splines cúbicos.

1 Introdução

Interpolação é um método que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discretp de dados pontuais previamente conhecidos. Através da intepolação pode-se construir uma função que aproximadamente se "encaixe" nestes dados pontuais, conferindo-lhes, então a continuidade desejada.

2 Método

Entre qualquer dois pontos passa uma única reta, entre qualquer três pontos uma única parábola et cetera. O polinômio interpolado de grau $N-1$ que passa pelos N pontos $y_1 = f(x_1)$,$y_2 = f(x_2)$,..., $y_N = f(x_N)$ é dado pela fórmula de Lagrange

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_N)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3...(x_1-x_N)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_N)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)...(x_2-x_N)}y_2$$

$$+... + \frac{(x-x_1)(x-x_1)...(x-x_{N-1})}{(x_N-x_1)(x_N-x_1)...(x_N-x_{N-1})}y_N$$

Este polinômio tem N termos, cada um com grau $N-1$. Um algoritmo melhor para construir o mesmo (único) polinômio interpolado é o *algoritmo de Neville*.

Seja P_1 o valor em x do polinômio de grau zero que passa por (x_1, y_1), então $P_1 = y_1$. Dessa forma definimos P_2,P_3,...,P_N. Agora, seja P_{12} o valor em x do polinômio de grau um que passa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Da mesma forma definimos P_{23},P_{34},...,$P_{(N-1)N}$. Similarmente, para polinômios de ordens maiores, até $P_{1234...N}$, que é o único polinômio que interpola todos os N pontos.

Os vários polinômios P forma uma matriz com os polinômios ascendentes à esquerda e os decendentes à direita, da forma

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 : y_1 = P_1 & \rightarrow & P_{12} & \rightarrow & P_{123} & \rightarrow & P_{1234} \\
. & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
x_2 : y_2 = P_2 & \rightarrow & P_{23} & \rightarrow & P_{234} & & \\
. & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_3 : y_3 = P_3 & \rightarrow & P_{34} & & & & \\
. & \nearrow & & & & & \\
x_4 : y_4 = P_4 & & & & & &
\end{array}
$$

O algoritmo de Neville é uma maneira de preencher essa matriz uma coluna por vez, da esquerda à direita, baseada na relação entre o polinômio descendente e seus dois ascendentes. Seja A a matriz, então

$$A_{i,j} = \frac{1}{x_i - x_k}[(x - x_k)A_{i,j-1} - (x - x_i)A_{i+1,j-1}]$$

sendo $k = i + j - 1$.

Assim, implemantamos o método de Neville em *FORTRAN 90*. Os resultados estão na próxima seção.

3 Resultados

Usando o algorimo de Neville em *FORTRAN 90* para os dados do arquivo `d1.dat` com números crescentes de pontos entre cada par de pontos, obtivemos os polinômios de Lagrange mostrados no gráfico da figura 1.

Usando o mesmo programa, intepolamos os pontos do arquivo `d2.dat` com 19 pontos entre cada par de pontos e comparamos com a interpolação de splines cúbicos do *gnuplot*. Estes resultados estão mostrados na figura 2.

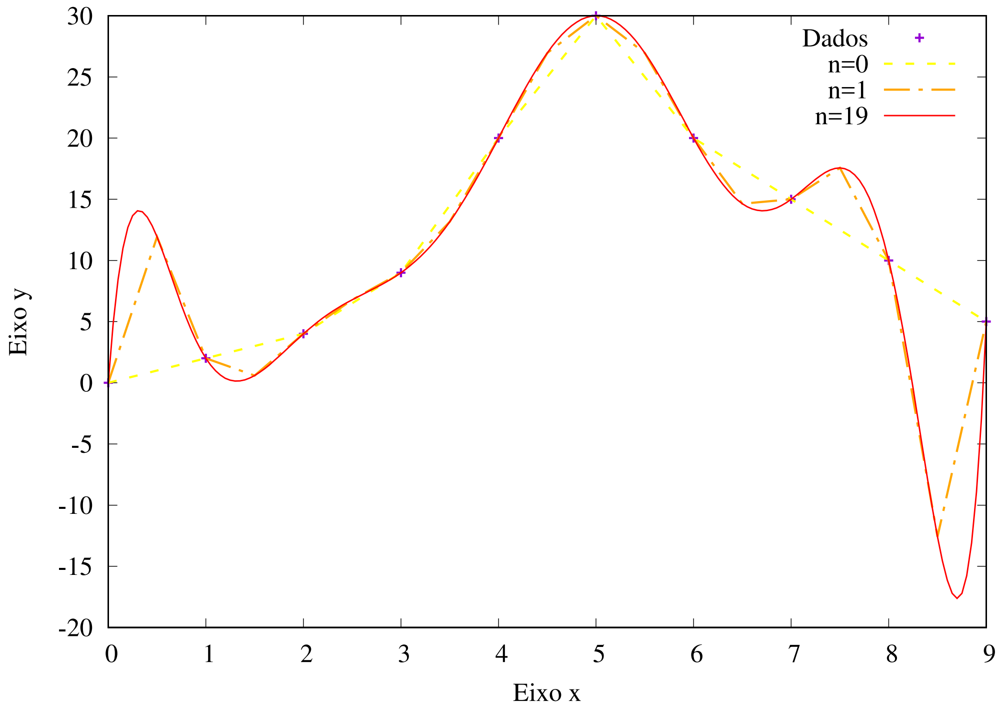

Figura 1: Dados 1 com um número crescente n de pontos entre cada par de pontos.

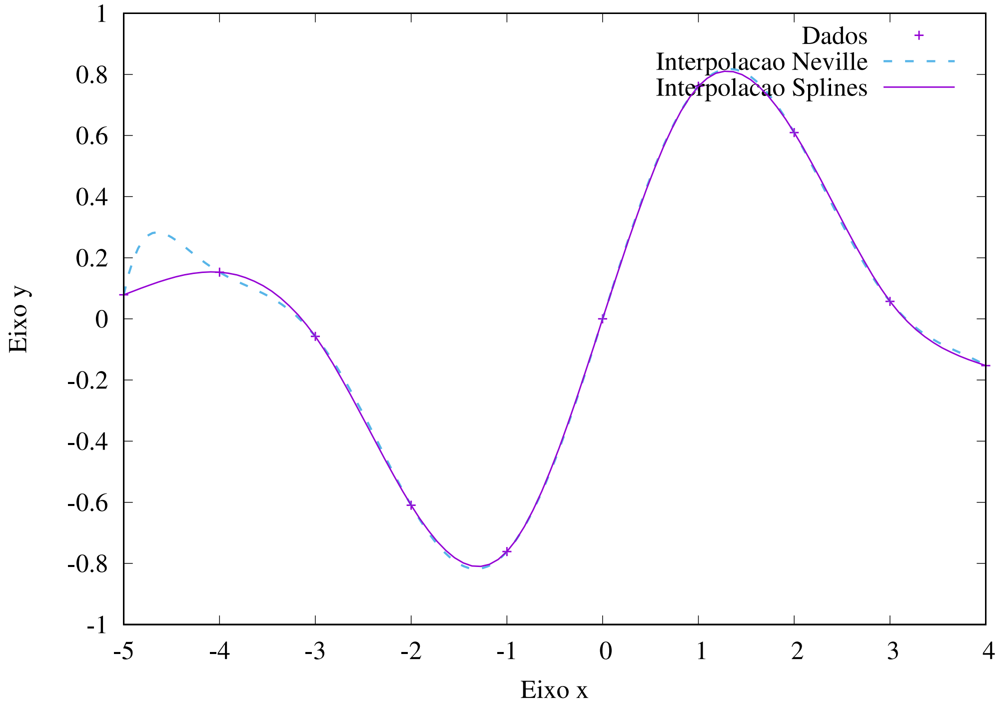

Figura 2: Dados 2 com 19 pontos entre cada par de pontos e superposta interpolação de splines cúbicos do *gnuplot*.

4 Conclusões

A interpolação pelos polinômios de Lagrange gera um polinômio $P(x)$ de grau $N-1$, que pode se tornar um inconveniente pois não temos controle sobre a continuidade das derivadas nas junções das regiões interpoladas, ou seja, nas interfaces.

Já o polinômio $s(x)$ por slines cúbicos é composto por $N-1$ polinômios cúbicos definidos a cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ e têm as propriedades que $s(x)$, $s'(x)$ e $s''(x)$ são funções contínuas no intervalo $[x_1, x_N]$.

Assim, a interpolação por splines cúblicos se mostra uma boa solução para o problema de interpolação pois ajusta um polinômio mais "suave" que o polinômio de Lagrange.

Referências

[1] COMPLEXWIKI, *Interpolação e extrapolação.* Disponível em: <http://fiscomp.if.ufrgs.br/index.php/Interpolação_e_extrapolação>. Acesso em 22 jun. 2016.

[2] PRESS, William H., TEUKOLSKY, Saul A.,VETTERLING, William T., FLANNERY, Brian P. *NUMERICAL RECIPES IN FORTRAN 90: The Art Of Parallel Scientific Computing.* Disponível em: <http://apps.nrbook.com/fortran/index.html>. Acesso em 22 jun. 2016.

[3] WIKIPEDIA, *Interpolação.* Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Interpolação>. Acesso em 22 jun. 2016.