

Solução numérica do problema de uma partícula carregada num campo magnético uniforme

Cristiane de Paula Oliveira

Instituto de Física – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

19 de janeiro de 2018

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar o movimento de partículas carregadas sob ação de um campo magnético uniforme e analisar os erros envolvidos em cada método. Os métodos utilizados para resolver as equações de movimento foram os Métodos de Euler, Euler-Cromer, Runge-Kutta de 2ª e 4ª ordem. Foi possível descrever a espiral circular do movimento de um elétron e um próton sob ação do campo magnético. Obteve-se que, dos quatro métodos utilizados e utilizando o mesmo passo de tempo, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem é o mais preciso e o método de Euler o menos preciso.

Palavras-chave: força de Lorentz, eletromagnetismo, métodos numéricos

1 Introdução

Campos elétricos e magnéticos são fontes muito importante de estudos tanto para a física teórica quanto para a física experimental. Neste trabalho, serão utilizados métodos de integração numérica para resolver as equações do movimento de partículas carregadas submetidas a um campo magnético uniforme.

sobre uma partícula carregada.

A força elétrica é dada por

$$\vec{F}_E = q\vec{E}, \quad (1)$$

onde q é a carga da partícula e \vec{E} é o campo elétrico.

A força magnética é dada por

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (2)$$

onde \vec{v} é a velocidade da partícula e \vec{B} é o campo magnético.

Portanto, a força de Lorentz pode ser escrita como

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3)$$

2 Formulação do problema

A força de Lorentz é a força devido a um campo elétrico e um campo magnético que atuam

Pela segunda Lei de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (4)$$

Portanto, podemos separar a força em suas componentes nos vetores unitários do sistema cartesiano:

$$m(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}) = q(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}), \quad (5)$$

considerando $\vec{E} = 0$.

Agora, considerando que \vec{B} só tem componente na direção y , ou seja, $\vec{B} = B_0\hat{j}$ e fazendo o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{B}$, obtém-se o sistema

$$m\ddot{x} = -qB_0\dot{z} \quad (6)$$

$$m\ddot{y} = 0 \quad (7)$$

$$m\ddot{z} = qB_0\dot{x} \quad (8)$$

A equação (7) para y é simples de resolver, sendo a solução

$$y(y) = y_0 + \dot{y}_0 t. \quad (9)$$

As equações (6) para x e (8) para z , podem ser desacopladas derivando uma delas e substituindo na outra, resultando em

$$\ddot{z} = -\alpha^2 z \quad (10)$$

$$\ddot{x} = -\alpha^2 x, \quad (11)$$

onde $\alpha = \frac{qB_0}{m}$. Resolvendo essas equações, obtém-se

$$x(t) = x_0 + A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t), \quad (12)$$

$$z(t) = z_0 + A \sin(\alpha t) - B \cos(\alpha t), \quad (13)$$

onde $A = \frac{\dot{z}_0}{\alpha}$ e $B = \frac{\dot{x}_0}{\alpha}$.

Esse resultado mostra que se uma partícula entra em um campo magnético com velocidade inicial, seu movimento será uma espiral circular.

Também obtém-se que quanto maior a massa ou velocidade da partícula, maior será o raio da espiral. E quanto maior a carga ou a intensidade do campo magnético, mais comprimida será a espiral.

3 Métodos numéricos

Os métodos numéricos que serão utilizados para resolver o sistema são descritos a seguir.

3.1 Método de Euler

Um dos métodos mais simples para aproximar soluções de problemas de valor inicial é o método de Euler. Este método utiliza

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n) h \quad (14)$$

onde $f(t, x) = \frac{dx}{dt}$ e h é o tamanho do passo.

3.2 Método de Euler-Cromer

O método de Euler-Cromer, diferente do método de Euler, utiliza a velocidade no tempo t_{n+1} para o cálculo da posição x_{n+1} . Portanto,

$$v_{n+1} = v_n + a_n h, \quad (15)$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1} h. \quad (16)$$

3.3 Método de Runge-Kutta de 2ª ordem

Existem três maneiras principais pelas quais o método de Runge-Kutta de 2ª ordem pode ser implementado. O que será utilizado neste trabalho é o método conhecido como Ponto Central.

Este método consiste em encontrar

$$k_1 = f(t_n; x_n) h \text{ e} \quad (17)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}; x_n + \frac{k_1}{2}\right) h \quad (18)$$

de forma que

$$x_{n+1} = x_n + k_2, \quad (19)$$

onde $f(t, x) = \frac{dx}{dt}$ e h é o tamanho do passo.

3.4 Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem consiste em encontrar

$$k_1 = f(t_n; x_n) h, \quad (20)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}; x_n + \frac{k_1}{2}\right) h, \quad (21)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}; x_n + \frac{k_2}{2}\right) h \text{ e} \quad (22)$$

$$k_4 = f(t_n + h; x_n + k_3) h, \quad (23)$$

de forma que

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (24)$$

onde $f(t, x) = \frac{dx}{dt}$ e h é o tamanho do passo.

4 Resultados e análises

Neste trabalho foram considerados os movimentos de um elétron e um próton sob ação de um campo magnético uniforme.

Considerou-se, em unidades adimensionais, $q_e = -1,60217662$ e $m_e = 9,10938356$, $q_p = 1,60217662$ e $m_p = 1,6726219 \times 10^4$. Considerou-se $B_0 = 30$ para o movimento do elétron e $B_0 = 30000$ para o movimento do próton. O intervalo de tempo foi $0 \leq t \leq 10$.

As condições iniciais foram $x_0 = 1/\alpha$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0,02$ e $\dot{z}_0 = 1$.

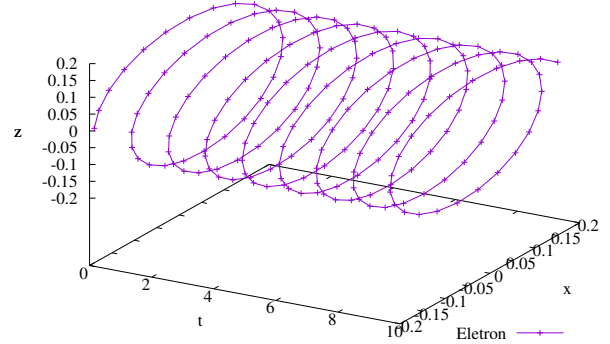


Figura 1: Trajetória x e z de um elétron no intervalo $0 \leq t \leq 10$.

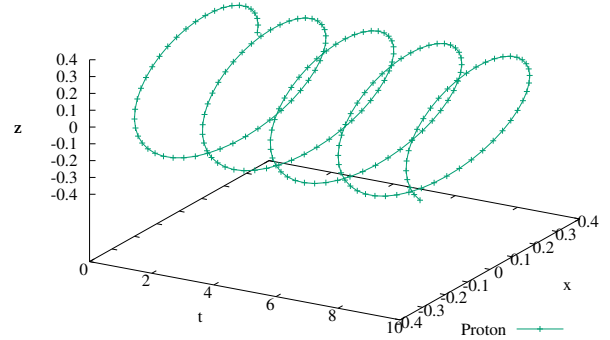


Figura 2: Trajetória x e z de um próton no intervalo $0 \leq t \leq 10$.

Na figura 1 é mostrado o movimento de um elétron sujeito a essas condições. Na figura 2, um próton.

O raio da trajetória do próton é maior que o raio da trajetória do elétron, por isso, para que os gráficos ficassem da mesma ordem de grandeza a intensidade do campo magnético para o próton foi multiplicada por 1000.

Como a massa do próton é quase 2000 vezes maior que do elétron, o raio da espiral do próton é quase 2 vezes o raio da espiral do elétron. Também, como a relação entre a massa e o campo é quase metade para o elétron do que para o próton, existem aproximadamente o dobro de espiras na trajetória do elétron no intervalo de tempo considerado.

Também percebe-se pelas figuras 1 e 2 que o sentido da trajetória do elétron e do próton são opostos, enquanto a trajetória do elétron tem sentido horário, a do próton tem sentido anti-horário. Isso se deve ao fato que $q_e = -q_p$.

Analisou-se o erro global no final do intervalo para diferentes valores de passo h para os quatro diferentes métodos. A figura 3 mostra os erros globais para diferentes h .

A partir gráfico da figura 3, é possível perceber que o método de Runge-Kutta de 4ª ordem é mais preciso que o método de Runge-Kutta de 2ª ordem. Este, por sua vez, tem erro da mesma ordem que o método de Euler-Cromer. Ambos os métodos Runge-Kutta de 2ª ordem e Euler-Cromer são mais precisos que o método de Euler, que é preciso até somente à 1ª ordem.

Ainda analisando o gráfico da figura 3, nota-se que para determinado valor de h o método de Runge-Kutta de 4ª ordem não passa a ser mais preciso. Isso se deve pois a solução numérica deste método converge rapidamente para a solução exata. Para um valor de h pequeno o suficiente, o valor do erro chega próximo ao limite de precisão da máquina.

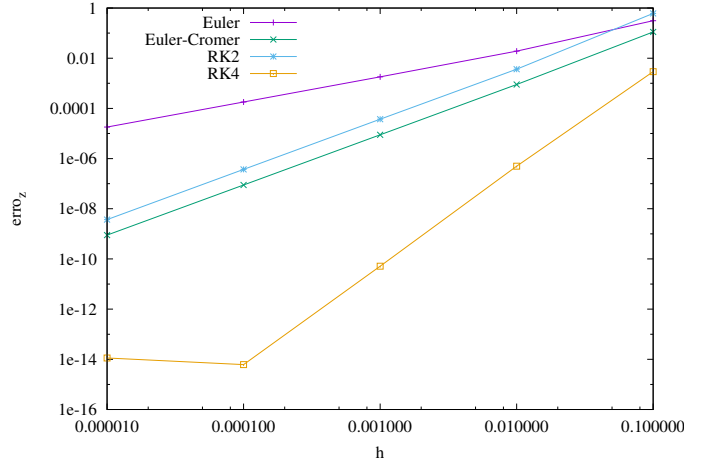


Figura 3: Erro global($t = 10$) dos métodos para diferentes passos de tempo h .

Para as figuras a seguir utilizou-se o passo de tempo $h = 0,05$ para fazer a análise dos erros.

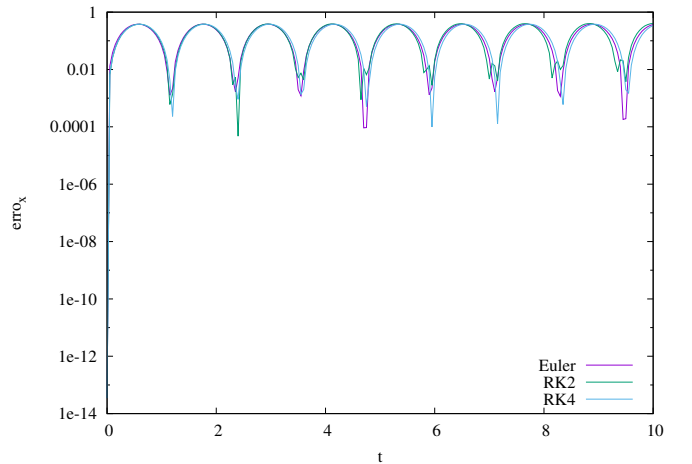


Figura 4: Erro local dos diferentes métodos no eixo x da trajetória do elétron.

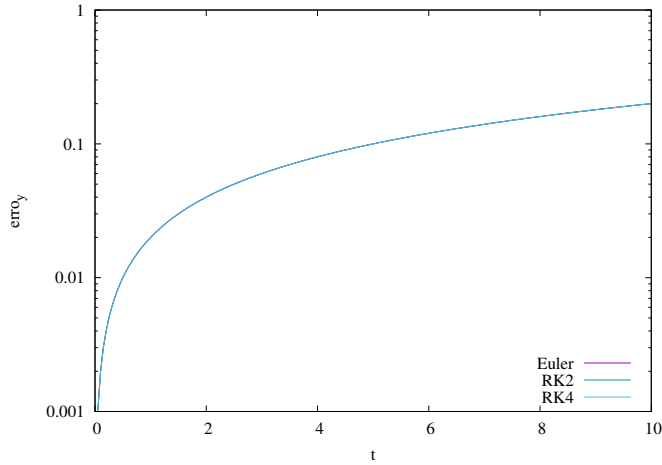


Figura 5: Erro local dos diferentes métodos no eixo y da trajetória do elétron.

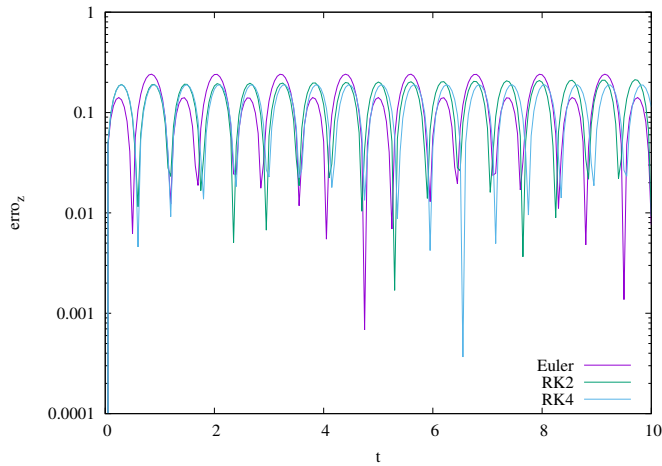


Figura 6: Erro local dos diferentes métodos no eixo z da trajetória do elétron.

Nas figuras 4, 5 e 6, mostra-se os erros locais dos diversos métodos para a trajetória do elétron nos eixos x , y e z respectivamente.

Perecebe-se que os erros para x e z possuem comportamento periódico enquanto o erro para y cresce monotonicamente com o tempo. Apesar de o erro em x e z serem periódicos, o período para

diferentes métodos não é constante, como é possível perceber, principalmente na figura 6, que o período do erro do método de Euler diminui rapidamente em relação aos métodos Runge-Kutta.

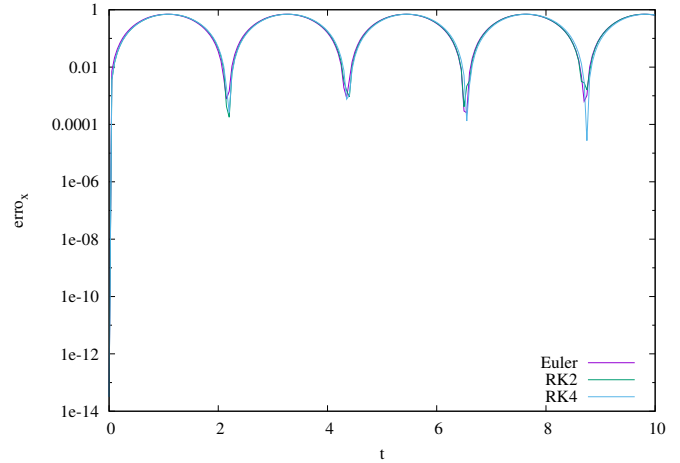


Figura 7: Erro local dos diferentes métodos no eixo x da trajetória do próton.

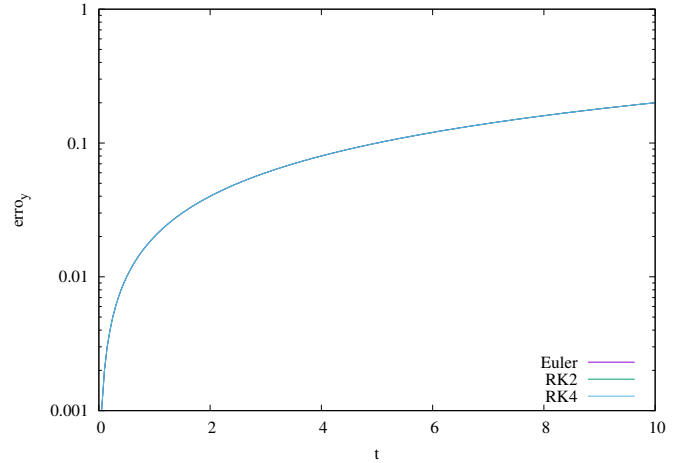


Figura 8: Erro local dos diferentes métodos no eixo y da trajetória do próton.

Nas figuras 7, 8 e 9, mostra-se os erros locais dos diversos métodos para a trajetória do próton nos eixos x , y e z . O comportamento dos erros,

como esperado, é semelhante ao dos erros para o elétron, sendo o período a única diferença significativa, que é explicada pela discussão acima sobre a relação entre a intensidade do campo magnético e a massa do elétron e do próton.

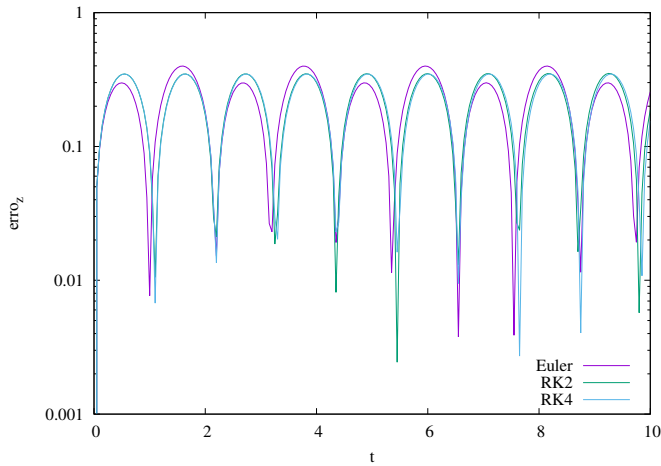


Figura 9: Erro local dos diferentes métodos no eixo z da trajetória do próton.

5 Considerações finais

Neste trabalho estudou-se as equações de movimento de duas partículas fundamentais, o elétron e o próton, submetidas a um campo magnético uniforme. Para isso, utilizou-se os métodos de integração numéricas: Euler, Euler-Cromer, Runge-Kutta de 2ª ordem e Runge-Kutta de 4ª ordem.

Os métodos reproduziram as espirais circulares esperadas pela resolução analítica do problema. Porém, para um mesmo passo de tempo, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem é o mais preciso dentre os métodos utilizados enquanto o método de Euler é o menos preciso.

Algo interessante que poderia ser feito a fim de aprofundar o estudo da solução desse problema com métodos numéricos é analisar a conservação

de energia de cada método.

Referências

- [1] S. T. Thornton, J. B. Marion, *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas*, (editora Cengage Learning, 5ª edição, 2011)
- [2] R. L. Burden, J. D. Faires e A. M. BURDEN. *Análise Numérica*, (editora Cengage Learning, tradução da 10ª edição norte-americana, 2016)

A APÊNDICE - INSTRUÇÕES

Para compilar e rodar todos os programas utiliza-se o script:

```
$ sh Lorentz.sh
```

Ao final, plota-se os gráficos utilizando:

```
gnuplot> load 'PlotAll.gnu'
```