→ somente N termos são diferentes de zero

→ são finitos ~~[illegible]~~ por suposição.

$$\langle \xi^3 \rangle = \frac{N \cdot \langle \xi_i^3 \rangle}{N^{3/2}} = \frac{\text{número}}{N^{1/2}} \xrightarrow{N\to\infty} 0 \;//$$

→ posso fazer para o momento K e obter
repetir

(momentos de $\xi = \frac{1}{\sqrt{N}}(\xi_1 + \dots + \xi_N)$)

$$\begin{cases} \langle \xi^{2K} \rangle \to 1 \times 3 \times \dots \times (2K-1) \\ \langle \xi^{2K-1} \rangle \to 0 \end{cases} \quad \text{q.d. } N\to\infty$$

→ preciso conferir se são os mesmos que os da dist. gaussiana.

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + xh\right) = \exp\left(\frac{h^2}{2}\right)}_{\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-(x-h)^2/2\right) = 1} = 1 + \frac{h^2}{2} + \frac{\left(h^2/2\right)^2}{2!} + \dots$$

→ diferencio $2k$ vezes e faço o limite $h \to 0$

(17)

$$\langle x^{2k} \rangle = \frac{\partial^{2k}}{\partial h^{2k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + xh\right) \Bigg|_{h=0}$$

$$= \frac{\partial^{2k}}{\partial h^{2k}} \left[1 + \frac{h^2}{2} + \frac{(h^2/2)^2}{2!} + \frac{(h^2/2)^3}{3!} \right]_{h=0}$$

$$= \frac{\partial^{2k}}{\partial h^{2k}} \left(\frac{h^{2k}}{k!\,2^k} \right) = \frac{(2k)!}{k!\,2^k} = 1.3.\ldots(2k-1)$$

OK!

→ a dist. dos ξ deve convergir para uma gaussiana τ^{-1} $N \to \infty$

tabela 1.12

→ analisando os dados

$$\eta_i = \xi_i - \theta$$

$$\langle \eta_i \rangle = 0 \quad Var(\eta_i) = Var(\xi_i) = \theta(1-\theta) < \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \eta_i = \frac{3156}{4000} - \frac{\pi}{4}$$

Chebyshev. 18

$$\begin{pmatrix}\text{Prob.}\\ \text{dentro de}\\ 68\%\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \eta_i \right) < \frac{1{,}77\,\sigma}{\sqrt{N}} < \frac{1{,}77}{2\sqrt{4000}} = 0{,}014$$

→ resultado exp. do livro 0,789

→ a diferença entre ele e o valor real ~~em~~ ser menor ~~...~~ do que 0,014 tem 68% de chance de ocorrer.

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}789 \pm 0{,}014 \rightarrow \pi = 3{,}156 \pm 0{,}056$$

↳ intervalo de confiança → barra de erro.

↳ posso analisar supondo uma dist. gaussiana e supor a validade do teorema central do limite.

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\mathrm{Var}(\xi_x) = \mathrm{Var}(\eta_x) \simeq \frac{1}{N-1}\left[\sum_{j=1}^{N} \left(\xi_j - \frac{1}{N}\sum_i \xi_i\right)^2\right]$$

(18. i)

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$ 68% de confiança

$$Var(\xi_i) = Var(\eta_i) \approx \frac{1}{N-1} \left[\sum_j \left(\xi_j - \frac{1}{N} \sum_i \xi_i \right)^2 \right]$$

$$\text{erro} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i \xi_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_i \xi_i \right)^2}$$

↳ raiz pq. é com o desvio e não com a variância

MC 2017/1

Amostragem por importância

→ Dificuldades com amostragem simples aparecem quando configurações raras (conf. com baixa probabilidade) que contribuem significativamente para o valor do integral.

→ O "problema" pode ser gerado pela própria dist. de prob. e não pelo algoritmo utilizado para integração.

→ exemplo: encontrar um buraco num campo de golfe, amostragem direta e por Markov chain

↓

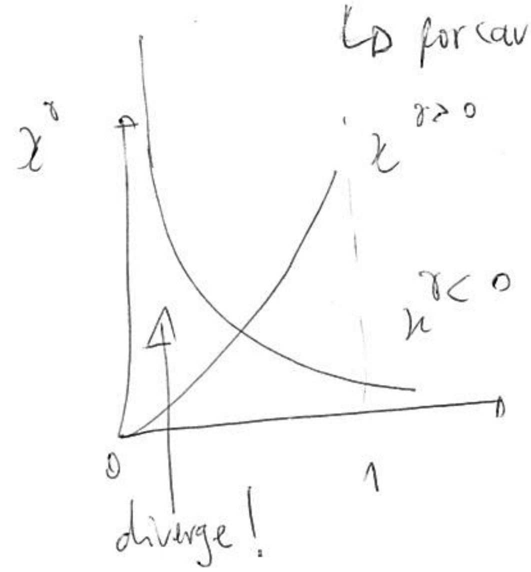
agulha no palheiro

→ a ideia da amostragem por importância é repesar (reweight) as ~~pro~~ amostradas de prob. e observáveis de forma a levar em conta corretamente os eventos raros.

MC 201711

$$I(\gamma) = \int_0^1 dx\, x^\gamma = \frac{1}{\gamma+1}\, x\Big|_0^1 = \frac{1}{\gamma+1} \qquad \gamma \neq 1$$

↳ por causa do zero: $\gamma > -1$



• Os eventos raros (números próx. a 0) contribuem com um grande valor na integral por amostragem simples

• ~~...~~ P. Lévy estudou ~~...~~ eventos raros em distribuições.

• escrever um programa que ~~...~~ gere $N = 10.000$ ~~...~~ ~~...~~ amostras simples e estimar a integral e o erro. Comparar com o resultado exato $\frac{1}{\gamma+1}$

$\gamma = 2$

$\gamma = 1$

$\gamma = 0$

$\gamma = -0,2$

$\gamma = -0,4$

→ $\gamma = -0,8$ → $3,959 \pm 0,110$ → 5.0

↳ vários desvios de dist. do valor correto.

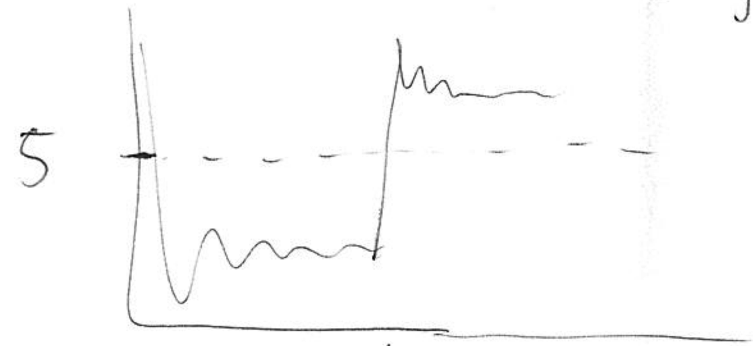
↳ altamente improvável! (des. de Chebyshev)

MC - 20/7/11

(21)

→ fazer um gráfico de série temporal da média para um N grande. (~10 ↑ ?)

. cuidar a saída para conseguir fazer um gráfico no GP.



↑
evento raro
próx. a zero

→ exemplo: $x^{-0,8} = (10^{-6})^{-0,8}$

$\approx 63095,7\ldots$

$= (10^{-12})^{-0,8}$

$\approx 3,981 \cdot 10^{9}$

→ NUNCA REMOVER PONTOS

→ o que está errado? pensando que o código é simples e não tem bug.

. média não deve estar errada...
. RNG é (razoavelmente) bom
. cálculo do erro é simples...

$$\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} O_i^2}_{} \simeq \int_0^1 dx\, x^{2\gamma}$$

nossa estimativa
→ FINITA

→ $\frac{1}{2\gamma+1}$ → $\gamma > -\frac{1}{2}$

diverge para $\gamma < -\frac{1}{2}$

Como saber que isto pode ocorrer qdo ñ sei a resposta?

não posso estimar com uma soma finita

→ posso recalcular a integral ~~mais~~ amostrando preferencialmente regiões onde $O(x)\,\Pi(x)$ é grande.

→ nova ~~fx~~ dens. de prob. $\Pi(x) = x^{y}$

→ novo observável $O(x) = x^{\gamma - y}$

. para y negativo $(\gamma < y < 0)$ peq. valores de x, com integrando grande, são visitados mais frequentemente e, com isto, a variância do observável diminui.

o produto $O(x)\,\Pi(x)$ é preservado

↳ amostragem por importância.

→ algoritmo

repetir N vezes

$$x_i \leftarrow [\mathrm{ran}(0,1)]^{\frac{1}{y+1}} \quad : \Pi(x_i) \propto x_i^{y}$$

$$\Sigma \leftarrow \Sigma + x^{\gamma - y}$$

$$\langle O_{New} \rangle = \frac{\Sigma}{N}$$

fre 201711

→ lembrar que estamos calculando

$$\frac{\Sigma}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} O_i \simeq \langle O \rangle = \frac{\int_0^1 dx\, \pi(x)\, O(x)}{\int_0^1 dx\, \pi(x)} = \frac{\int_0^1 dx\, x^{y}\, x^{\gamma-y}}{\int_0^1 dx\, x^{y}}$$

$$= \frac{\int_0^1 dx\, x^{\gamma}}{\int_0^1 dx\, x^{y}} = \frac{I(\gamma)}{I(y)} = \frac{y+1}{\gamma+1}$$

→ tabela 1.16

→ erro

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} O_i^2 \simeq \langle O^2 \rangle = \frac{\int_0^1 dx\, \pi(x)\, O^2(x)}{\int_0^1 dx\, \pi(x)} = \int_0^1 dx\, x^{y}\, x^{2\gamma-2y}$$

$$2\gamma - y > -1$$
$$2\gamma > -1 + y$$
$$\gamma > -\frac{1}{2} + \frac{y}{2}$$

Satisfazem

variância finita

→ usando os valores de γ e y da tabela

$$\underbrace{\frac{\int_0^1 dx\, x^{-0,8}}{\int_0^1 dx\, x^{-0,7}}}_{\substack{\gamma = 0,8 \\ y = -0,7}} \cdot \frac{\int_0^1 dx\, x^{-0,7}}{\int_0^1 dx\, x^{-0,6}} \cdot \frac{\int_0^1 dx\, x^{-0,6}}{\int_0^1 dx\, x^{-0,4}} \cdot \frac{\int_0^1 dx\, x^{-0,4}}{\int_0^1 dx\, x^{0,0}} = I(-0,8)$$

$$\langle O \rangle \simeq 1,508 \cdot 1,351 \cdot 1,495 \cdot 1,685 = 5,057$$

MC 29/11

→ usando a prop. de erro gaussiano, a variância é

$$Var(0) = \left[\left(\frac{0{,}017}{1{,}685}\right)^2 + \left(\frac{0{,}008}{1{,}495}\right)^2 + \left(\frac{0{,}004}{1{,}331}\right)^2 + \left(\frac{0{,}008}{1{,}508}\right)^2 \right] \cdot (5{,}057)$$

$$\hookrightarrow I(\gamma = -0{,}8) = 5{,}057 \pm 0{,}06$$

Propagação do erro / covariância

$$y_i^r = a_{i0} + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j^r \qquad i = 1, \dots, M$$

→ ~~funções característica~~

$$\cancel{\phi_{y_i}(t) = \left\langle e^{it(a_{i0} + \sum_j a_{ij} x_j^r)} \right\rangle} \quad \text{não!!}$$

$$\cancel{= e^{ita_{i0}} \int \prod_j dx_j \, e^{itx_j a_{ij}}}$$

média

$$\hat{y}_i = \langle y_i^r \rangle = a_{i0} + \sum_j^N a_{ij} \langle x_j^r \rangle = a_{i0} + \sum_j a_{ij} \hat{x}_j$$

Aula 20/4/11

variância

$$\sigma^2(y_i^r) = \langle (y_i^r - \hat{y}_i)^2 \rangle = \left\langle \left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij} (x_j^r - \hat{x}_j) \right]^2 \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{j=1}^{N} a_{ij} (x_j^r - \hat{x}_j) \sum_{k} a_{ik} (x_k^r - \hat{x}_k) \right\rangle$$

usei que são independentes

$$= \sum_{j} a_{ij}^2 \langle (x_j^r - \hat{x}_j)^2 \rangle = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2 \sigma^2(x_j^r)$$

$$\sigma^2(y_i^r) = \sum_{j=1}^{N} \sigma^2(x_j^r)\, a_{ij}^2 \quad \rightarrow \quad a_{ij}^2 = \left(\frac{\partial y_i^r}{\partial x_j^r} \right)^2$$

. as variáveis são correlacionadas

. matriz de covariância $C = (c_{ij})$ $\quad y_i^r \quad i = 1, \dots, M$

$(M \times M)$

$$c_{ij} = \mathrm{cov}(y_i^r, y_j^r) = \langle (y_i^r - \hat{y}_i)(y_j^r - \hat{y}_j) \rangle$$

⋮

RW

- $x_0 = 0$
- passos de tamanho a
- prob. p p/ direita $+a$
- prob q p/ esquerda $\Rightarrow q = 1-p$ $-a$
- depois de N passos

$$x_N = \sum_{i=1}^{N} S_i$$

- $S_i = \pm a$

$\langle x_N \rangle$ média dos x_N $= (p-q)Na$

$$\langle x_N \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle S_i \rangle = N \langle S \rangle$$

$$\langle S \rangle = p.a + q(-a)$$
$$= (p-q)a$$

q-do $\langle x \rangle = 0$

$$x_N^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} S_i \right]^2$$

$\langle x \rangle \neq 0$

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$
$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

27.2

2. (4,0 pt) Seja o Mapa Logístico dado por

$$f(x) = \mu\, x\,(1-x)\;;\; x \in \{0,1\},$$

- Determine o valor máximo que μ pode assumir para que a aplicação se mantenha dentro do intervalo de definição.
- Encontre os pontos fixos de ordem 1. Estude a estabilidade.
- Obtenha a expressão para $f(f(x_n))$. Esboce o gráfico. Justifique a partir dele a origem de órbitas de período-2.
- Encontre os pontos fixos da órbita de período-2. Estude a estabilidade.

$$\Delta x^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \Delta_i \sum_{j=1}^{N} \Delta_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 \right\rangle + \left\langle \sum_{i \neq j=1}^{N} \Delta_i \Delta_j \right\rangle$$

→ como os passos são independentes

$$\langle \Delta_i \Delta_j \rangle = \langle \Delta_i \rangle \langle \Delta_j \rangle$$

Como $\Delta_i = x_i - \langle x_i \rangle$

$$\langle \Delta_i \rangle = \langle x_i \rangle - \langle x_i \rangle = 0 \quad \forall\, i$$

$$N \langle \Delta^2 \rangle = N\left[\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2\right] = N\left[a^2 - (p-q)^2 a^2\right] =$$

$\cancel{\Delta x^2 = 4}$ $= N\, 4pqa^2$

$$a^2 \cdot p + q \cdot a^2 = 1$$

$$\Delta x^2 = 4pqNa^2$$

↳ Como estudar estas grandezas?

dist gaussiana

$$P_N(x) = C \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta x^2}} e^{-(x-\langle x\rangle)^2/2\Delta x^2}$$

(25.3)

$$P(y,t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi D t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4Dt}\right)$$

$$\sigma = \sqrt{2Dt}$$

$$P(m\Delta, (s+1)\tau) = \frac{1}{2} P((m+1)\Delta, s\tau) + \frac{1}{2} P((m-1)\Delta, s\tau)$$

$$\frac{P(m\Delta, (s+1)\tau) - P(m\Delta, s\tau)}{\tau} = \frac{\Delta^2}{2\tau}\left[P((m+1)\Delta, s\tau) + P((m-1)\Delta, s\tau) - 2P(m\Delta, s\tau)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$$

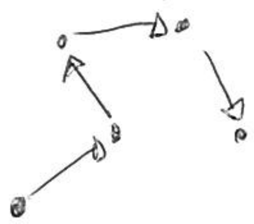
MC - 2017-1

(26)

Cadeias de Markov

motivação: jogo do π no heliporto: terreno muito grande

estratégia: jogo uma pedra da posição onde estou: mesmo alcance ou variando
vou até a pedra e repito



→ como a partir desta estratégia posso calcular uma integral?

- dado as coord. vejo se estou dentro do círculo → Nhits = Nhits + 1

- "problema": o que fazer com as que caem fora?

SE DESCONSIDERO, ~~calcula~~ π calculado está errado

FORMA CORRETA, conto +1 na posição onde estiver.

MC - 201711

- a idéia da cadeia de Markov é gerar uma tentativa a partir do ponto atual sem depender dos pontos já visitados: sistema sem memória

↳ pode ser determinística

- MCMC: adiciona o uso de variáveis estatísticas de forma a obter a amostragem correta da distribuição desejada