Métodos Computacionais B

Agenor Hentz[1] Leonardo Brunnet[1] Heitor Fernandes[1]

[1] Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2016-2

Área 3

1. **Números Aleatórios e Método de Monte Carlo**
   - Números Aleatórios Segundo uma Distribuição

Números Aleatórios Segundo uma Distribuição

Podemos notar facilmente que a função cumulativa $fdc(x)$ de $fdp(x)$ entre x_0 e um valor qualquer de x no intervalo $[x_0;\ x_f]$ é dada por:

$$fdc(x) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{x_0}^{x} fdp(x')dx', \tag{1}$$

sendo $fdc(x)$ um número real no intervalo $[0;\ 1]$. Isto nos habilita, a princípio, a realizarmos a operação inversa, ou seja, a partir de um número real $R = fdc(x)$ no intervalo $[0;\ 1]$ podemos determinar através da inversão da equação (1) o valor correspondente de x. O lado prático desta inversão é que os valores de x obtidos desta forma seguem a mesma distribuição de $f(x)$.

Números Aleatórios Segundo uma Distribuição

Esta observação parte do fato de que tendo uma densidade de probalidade conhecida, $f(x)$, queremos obter outra de acordo com a densidade de probabilidade $g(y)$. Para isto, lembramos que $f(x)\,dx$ é a probabilidade da variável x assumir um valor entre x e $x+dx$ e igualamos a probabilidade da outra variável, ou seja,

$$|f(x)\,dx| = |g(y)\,dy| .$$

Como $f(x) \geq 0$ e $g(y) \geq 0$, podemos reescrever

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| .$$

Como $f(x)$ gera uma distribuição uniforme, a equação simplifica para

$$\frac{dx}{dy} = g(y) .$$

Números Aleatórios Segundo uma Distribuição

Podemos integrar a equação anterior

$$\int dx \;=\; \int g(y)\, dy\,,$$

e obter

$$x \;=\; G(y)\,,$$

onde $G(y)$ é a integral indefinida (no intervalo) que representa a função de distribuição cumulativa de y.
Invertendo a equação anterior, temos

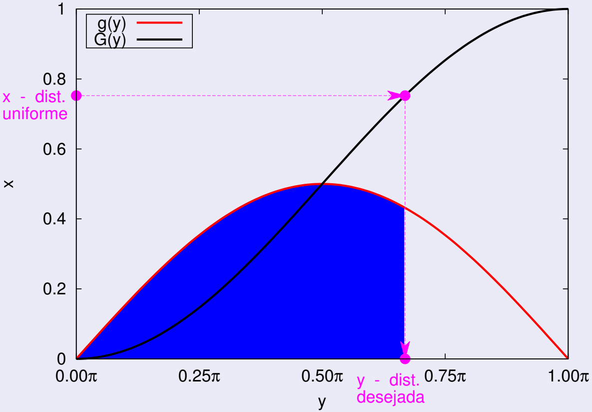
$$y(x) \;=\; G^{-1}(x)$$

onde $G^{-1}(x)$ é a função inversa da G.

Números Aleatórios Segundo uma Distribuição

É possível uma interpretação geométrica deste resultado. Como $G(y)$ é a área sob a curva de probabilidade à esquerda de y, o resultado anterior segue a receita: Escolha um x aleatório e uniforme, então encontre o valor y que apresenta esta fração x de área de probabilidade a sua esquerda, e retorne este valor de y.

A figura abaixo esquematiza este processo.



Exemplo: Distribuição Uniforme Generalizada

Imaginemos que um caminhante aleatório siga uma distribuição uniforme entre $[-10 : 10]$. Podemos, à partir de um gerador uniforme que gera números R independentes e aleatórios entre $[0 : 1]$, gerar os números x desta distribuição se:

$$x = (R - 0,5)\,20,0.$$

Exemplo: Distribuição Senoidal

Caso seja necessária a geração de números aleatórios segundo uma distribuição senoidal

$$f(x) = \sin(x),$$

no intervalo [0,π] podemos utilizar o método descrito na seção anterior. Para isto calculamos primeiramente a normalização $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N} = \int_0^{\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2,$$

Assim a função cumulativa é dada por:

$$fdc(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x} \sin(x')dx' = -\cos(x) + \cos(0) = R.$$

Portanto, o número aleatório x gerado segundo a função distribuição $\sin(x)$ encontrado a partir do número aleatório R gerado através de uma distribuição uniforme é dado por:

$$x = \cos\left[1 - 2R\right]^{-1}.$$

Exemplo: Distribuição Senoidal

VAI A FIGURA PRA MOSTAR O PROCESSO PRA DIST SENOIDAL

Exemplo: Distribuição Triangular

Imagine que temos a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 5 \\ 10 - 2(x-5), & 5 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

Podemos calcular facilmente a normalização $\mathcal{N} = 2 \times (5 * 10/2) = 50$.
Temos para a primeira parte de $f(x)$:

$$fdc(x) = R = \frac{1}{50}\int_0^x 2x'\,dx' = \frac{1}{50}\left(\frac{1}{2}2x'^2\right)\Big|_0^x = \frac{1}{50}x^2,$$

que resulta em:

$$x = \sqrt{50R} \quad 0 \leq R \leq 0,5.$$

Exemplo: Distribuição Triangular

A segunda parte pode ser escrita como:

$$fdc(x) = R = \frac{1}{50}\left[\int_0^5 2x'\,dx' + \int_5^x 10 - 2(x'-5)\,dx'\right],$$

que é igual a:

$$fdc(x) = R = \frac{1}{50}\left\{25 + \left[20x' - x'^2\right]_5^x\right\}$$

que resulta em:

$$x^2 - 20x + (50R - 25 + 100 - 25) = 0,$$

cuja solução é:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 200(R+1)}}{2}$$

Exemplo: Distribuição Triangular

Assim as equações que definem como os valores de x podem ser sorteados é calculada como sendo:

$$x = \begin{cases} \sqrt{50R}, & 0 \leq R \leq 0,5 \\ \frac{1}{2}\, 20 - \sqrt{200(1-R)}], & 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Exemplo: Distribuição Gaussiana

É bastante conhecido o fato de que podemos gerar números aleatórios segundo uma distribuição Gaussiana através do seguinte esquema, chamado de transformação de Box-Muller[**?**]. Se U_0 e U_1 são dois números aleatórios independentes gerados segundo uma distribuição uniforme no intervalo $[0:1]$, podemos gerar dois números aleatórios Z_0 e Z_1 independentes gerados segundo uma distribuição Gaussiana segundo as expressões:

$$Z_0 = \sqrt{-2\ln U_1}\,\cos(2\pi U_2),$$

e

$$Z_1 = \sqrt{-2\ln U_1}\,\sin(2\pi U_2).$$