Prova 3

Cristiane de Paula Oliveira

Instituto de Física – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

17 de janeiro de 2018

Questão 1

1. (a)

Para que a densidade de probabilidade $\rho(x)$ esteja corretamente normalizada no intervalo é necessário que a integral de $\rho(x)$ no intervalo $[-L, L]$ seja igual a 1. Portanto, precisamos calcular

$$\frac{1}{A} = \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx. \tag{1}$$

$$\frac{1}{A} = \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) dx = \frac{2L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\Bigg|_{-L}^{L} = \frac{2L}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4L}{\pi}.$$

Assim,

$$A = \frac{\pi}{4L}. \tag{2}$$

1. (b)

O método da transformada inversa consiste em calcular a função cumulativa $fdc(x)$, cujo valor está no intervalo $[0, 1]$, definida como

$$fdc(x) = \int_{x_0}^{x} \rho(x')dx'. \tag{3}$$

Como $fdc(x)$ possui valores entre 0 e 1, podemos gerar números aleatórios r que correspondem a $fdc(x)$ para determinado x. Assim, fazendo a transformada inversa geramos números aleatórios x a partir de r de acordo com a distribuição de probabilidade $\rho(x)$.

Neste problema,

$$r = \frac{\pi}{4L}\int_{-L}^{x} \cos\left(\frac{\pi x'}{2L}\right) dx' = \frac{\pi}{4L}\frac{2L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x'}{2L}\right)\Big|_{-L}^{x} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + 1\right].$$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) = 2r - 1 \Rightarrow x = \frac{2L}{\pi}\arcsin(2r-1).$$

1. (c)

Usando $L = 5$ e 100 bins, gera-se o gráfico da figura 1 para diversos valores de N.

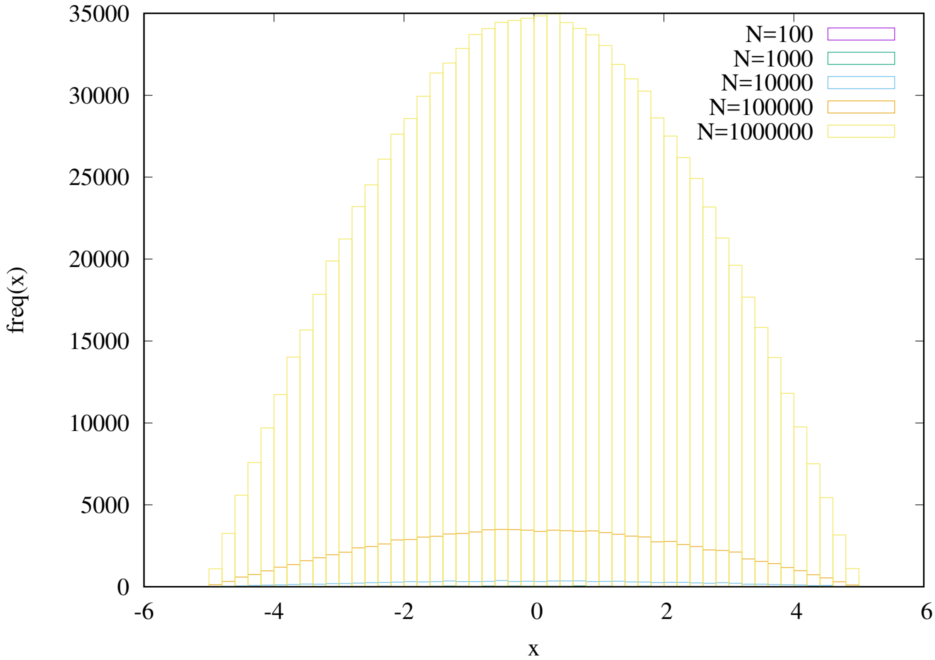

Figura 1: Histograma para diversos valor de N.

Para normalizar o histograma, calcula-se a área total do histograma, dada por

$$Area = \sum_{i=1}^{N} hist[i]\Delta x, \tag{4}$$

e em seguida divide-se cada frequência em $hist[i]$ pela área.

Na figura 2 mostra-se o histograma normalizado.

Percebe-se que os números gerados pelo programa de fato obedecem a distribuição de probabilidade e tendem a se aproximar cada vez mais para N maiores.

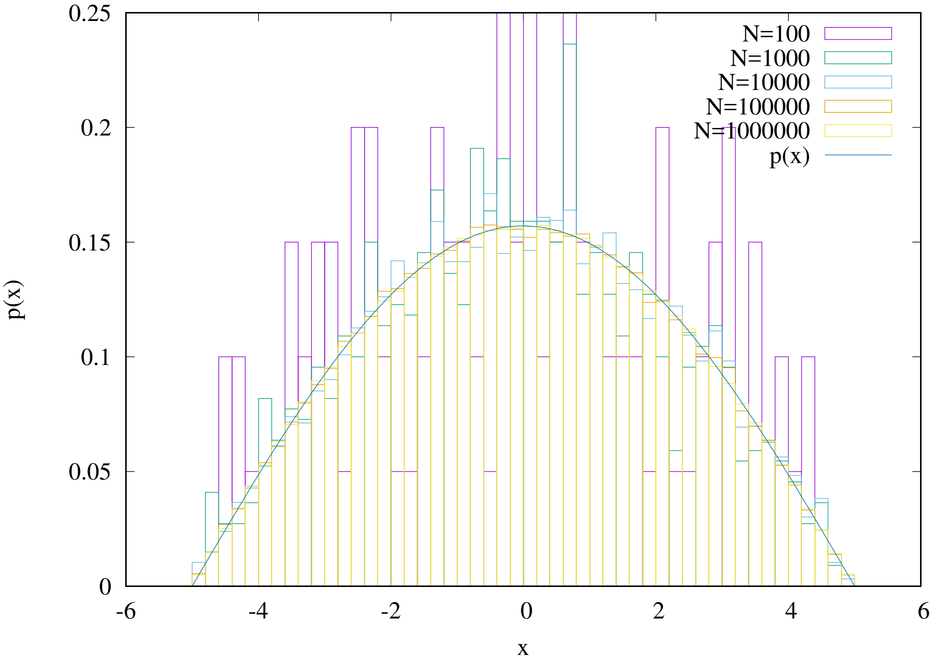

Figura 2: Histograma normalizado para diversos valores de N e função densidade de probabilizade $\rho(x)$.

Questão 2

2. (a)

A solução analítica da integral é

$$I = 3\int_{-5}^{5} 1 - \frac{x^2}{25}dx = 3\left[x - \frac{x^3}{75}\right]\Bigg|_{-5}^{5} = 3\left[10 - \frac{10}{3}\right] = 20.$$

2. (b)

2. (c)

Na figura 4 são mostrados os valores da integral encontrados pelas três abordagens para diferentes valores de N. Pela figura é possível perceber que o método (ii) se aproxima mais rapidamente do valor exato que o método (i) e o método (iii) ainda mais rapidamente que o método (ii).

O método (i), método da tentativa e erro, consiste em gerar um retângulo de lados $x_{max} - x_{min}$ e $y_{max} = -y_{min}$, onde x_{min} é o início do intervalo em que busca-se calcular a integral, x_{max} é o final, y_{max} é o valor máximo no intervalo da $f(x)$ e $y_{min} = 0$.

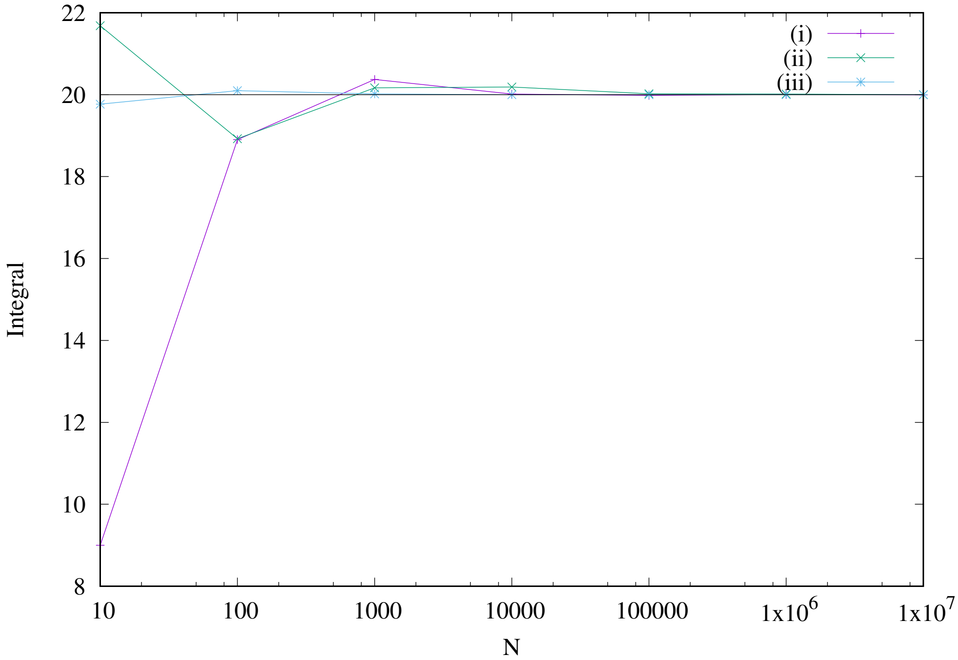

Figura 3: Integral utilizando (i) tentativa e erro, (ii) estimativa por amostragem simples e (iii) por amostragem por importância.

São gerados N pares (x, y) no retângulo e contabiliza-se os número de pares que estão abaixo de $f(x)$. Assim, a integral encontrada a partir dessa abordagem é dada por

$$I = \frac{S}{N}[(x_{max} - x_{min}) - (y_{max} - y_{min})]. \tag{5}$$

No método (ii), estimativa por amostragem simples, busca-se encontrar o valor médio da função $f(x)$ no intervalo. O valor médio de $f(x)$ pode ser encontrado gerando-se N valores aleatório x_i e calculando-se a média

$$\mu_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i). \tag{6}$$

Com μ_N, calcula-se então a integral

$$I = (x_{max} - x_{min})\mu_N. \tag{7}$$

Existem casos em que é preferível que alguns valores de x sejam evitados pois caso contrário podem induzir a erros no cálculo da integral. No método (iii), estimativa por amostragem por importância, os números aleatórios x_i não são gerados uniformemente, e sim, gerados a partir de uma distribuição de probabilidades.

Sendo assim, a integral é calculada por

$$I = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x_i)}{p(x_i)}. \tag{8}$$

2. (d)

Por se tratar de um processo estatístico, e não determinístico, o método de Monte Carlo possui flutuações nos valores encontrados a cada repetição. Para verifica se os valores encontrados são coerentes com o esperado, é necessário realizar diversas repetições para verificar se os valores são distribuidos em torno de um valor médio. Geralmente, essa distribuição é a distribuição normal e é possível estimar-se um valor médio e um erro associado.

Questão 3

3. (a)

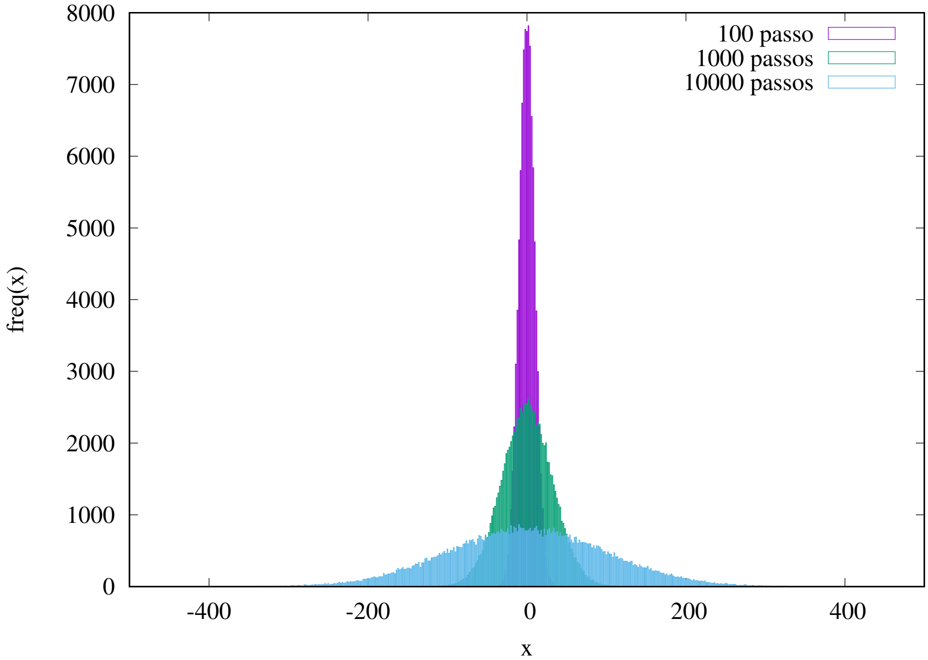

Figura 4: Histogramas da distribuição espacial após 100, 1000 e 1000 passos.

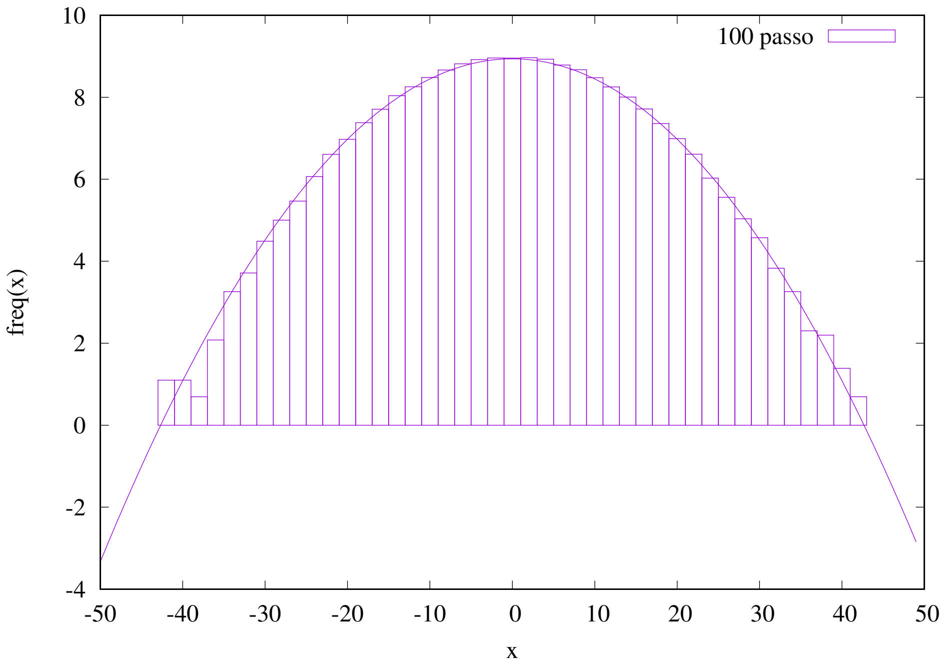

Figura 5: Histograma com ajuste da função $f(x) = bx^2 + log(a)$ para 100 passos.

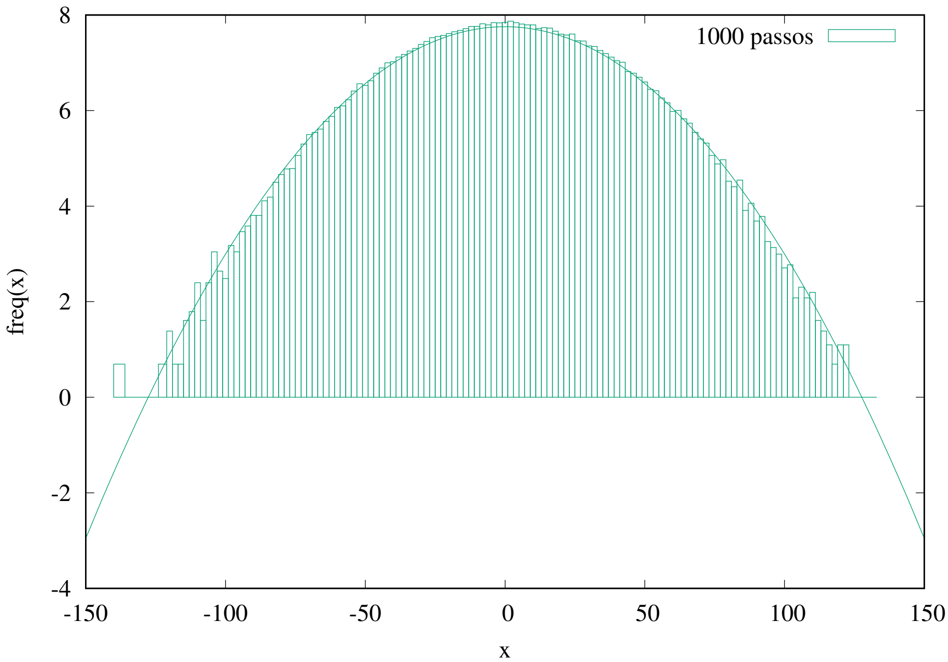

Figura 6: Histograma com ajuste da função $f(x) = bx^2 + log(a)$ para 1000 passos.

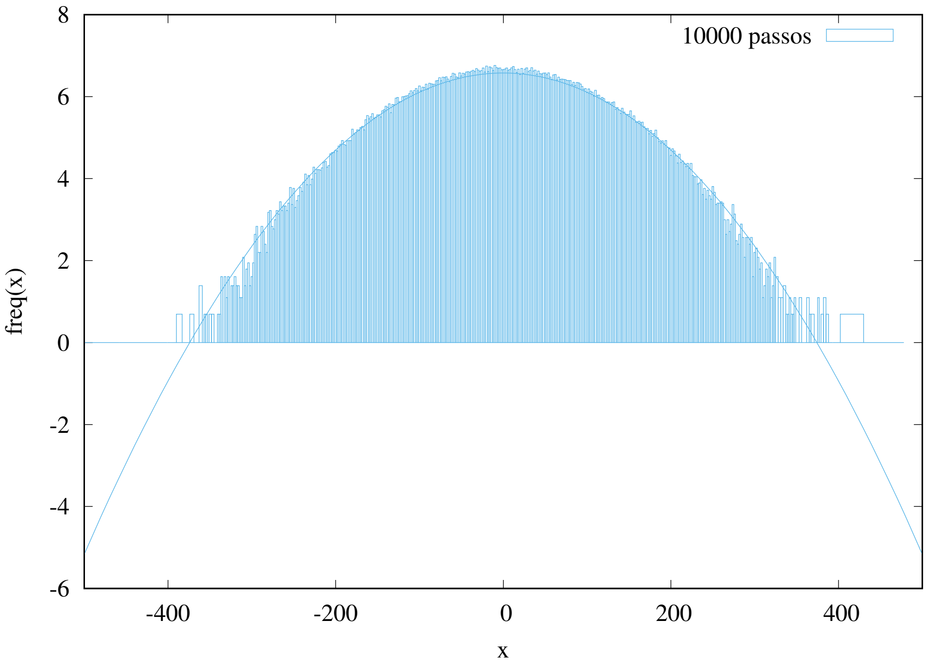

Figura 7: Histograma com ajuste da função $f(x) = bx^2 + \log(a)$ para 10000 passos.

Passos	a	b
100	7622.3 ± 459.9	$-0.0049082 \pm 7.299e-05$
1000	2332.78 ± 81.13	$-0.000476007 \pm 4.671e-06$
10000	718.037 ± 20.08	$-4.69867e-05 \pm 4.241e-07$

Tabela 1: Parâmetros dos ajustes da função $f(x) = bx^2 + \log(a)$ aos logaritmos dos histogramas.

3. (b)

Questão 5

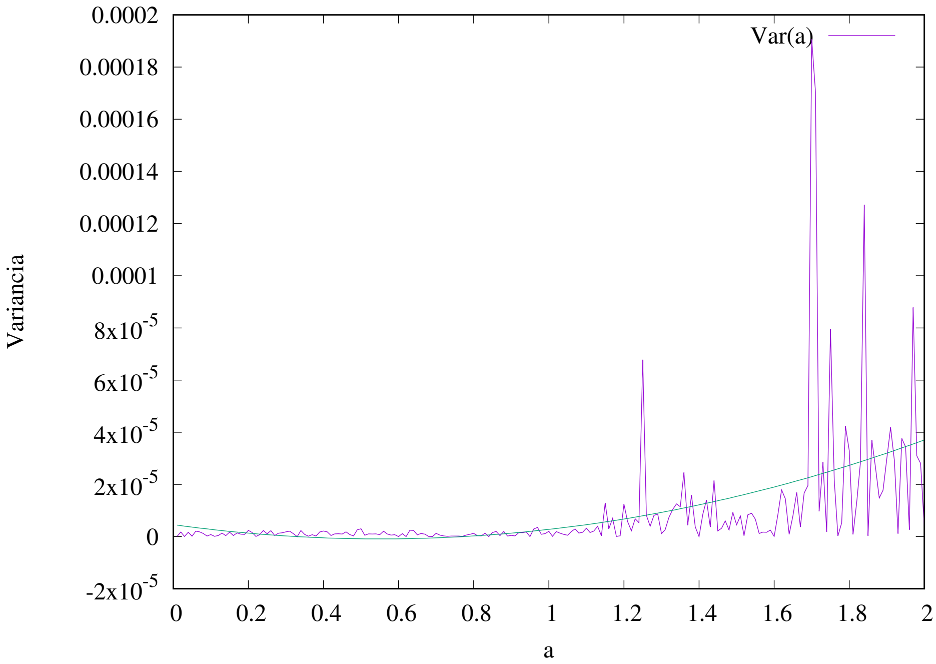

Figura 8: Variância da integral para diferentes a. Ajusta-se uma parábola para encontrar o valor de a que minimiza a variância. Encontra-se que $a \approx 0,55$ é o que minimiza a variância.

Pela figura 9, percebe-se que o método da amostragem por importância tende a ter uma dispersão muito menor em torno do valor real da integral do que o método da amostragem uniforme. Isso se deve pois o método da amostragem por importância calcula a integral utilizando valores x aleatórios a partir de uma distribuição de probabilidade, dando peso maior para valores de x que mais contribuem para que a estimativa da integral seja mais próxima do valor real.

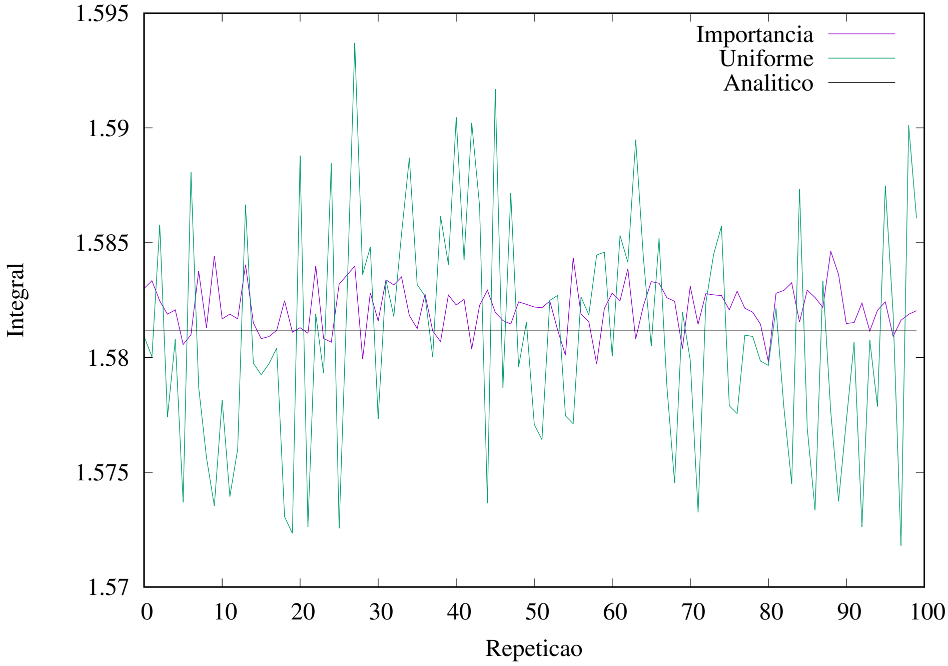

Figura 9: Estimativa da integral em 100 repetições utilizando o método da amostragem por importância e amostragem uniforme.