Trabalho 3: Resolução analítica e numérica para problema de valor inicial

Cristiane de Paula Oliveira

Instituto de Física – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

9 de novembro de 2017

1 Problema

Exercicio 29 da seçao 5.4 do livro *Análise Numérica* de Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Annette M. Burden, tradução da 10ª edição norte-americana:

> Mostre que o método do ponto médio e o método de Euler modificado resultam nas mesmas aproximações para o problema de valor inicial
>
> $$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$$
>
> para h. Por que isto é verdade?

2 Métodos

Neste trabalho, serão utilizados métodos de Runge-Kutta de segunda ordem. Nesse caso, utiliza-se os três primeiros termos da expansão em séries de Taylor, da forma

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{(t_i,\omega_i)} h + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2\omega}{dt^2}\right|_{(t_i,\omega_i)} h^2 + \mathcal{O}(h^3) \tag{1}$$

Sendo $\frac{d\omega}{dt}$ uma função conhecida, podemos resolver (1) e encontrar uma aproximação numérica.

$$\omega_{i+1} = \omega_i + a_1\, h\, f(t_i, \omega_i) + a_2\, h\, f(t_i + \alpha_2\, h, \omega_i + \delta_2\, h\, f(t_i, \omega_i)) \tag{2}$$

As constantes a_1, a_2, α_2 e δ_2 devem ser determinadas de forma que:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1; \\ a_2\alpha_2 = \frac{1}{2} \\ a_2\delta_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2.1 Método do Ponto Médio

Como existem somente 3 equações para encontrar as 4 incógnitas a_1, a_2, α_2 e δ_2. Portanto, existem várias escolhas dessas constantes para implementar o método de Runge-Kutta de 2^a ordem. Para o método do ponto médio, os valores das constantes são definidos $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\alpha_2 = \delta_2 = \frac{1}{2}$.

Assim, a equação (2) fica

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h\,f\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{h}{2}\,f(t_i, \omega_i)\right) \tag{3}$$

onde $f(t,\omega) = \frac{d\omega}{dt}$ e $h = t_{i+1} - t_i$.

2.2 Método de Euler Modificado

O método de Euler modificado corresponde a outra escolha das constantes, sendo $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_1 = \delta_1 = 1$. Dessa forma

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{2}[f(t_i, \omega_i) + f(t_i + h, \omega_i + h\,f(t_i, \omega_i)] \tag{4}$$

onde $f(t,\omega) = \frac{d\omega}{dt}$ e $h = t_{i+1} - t_i$.

3 Resolução analítica

Para a resolução analítica, utiliza-se a notação correspondente ao problema $y = \omega$ e $y' = f(t,\omega)$.

Sendo $f(t,y) = -y + t + 1$, encontra-se y_{i+1} pelo método do Ponto Médio conforme a equação (3).

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + h\,f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\,f(t_i, y_i)) \\
&= y_i + h\,f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}(-y_i + t_i + 1)) \\
&= y_i + h\,[-(y_i - \frac{h}{2}y_i + \frac{h}{2}t_i + \frac{h}{2}) + t_i + \frac{h}{2} + 1] \\
&= y_i + h\,(-y_i + \frac{h}{2}y_i - \frac{h}{2}t_i - \frac{h}{2} + ti + \frac{h}{2} + 1) \\
&= y_i - hy_i + \frac{h^2}{2}y_i - \frac{h^2}{2}t_i + ht_i + h \\
y_{i+1} &= y_i + \left(\frac{h^2}{2} - h\right) y_i + \left(h - \frac{h^2}{2}\right) t_i + h \qquad (5)
\end{aligned}$$

Utilizando-se o método de Euler Modificado, conforme a equação (4), obtém-se

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}\, f(t_i, y_i) + \frac{h}{2}\, f(t_i + h, y_i + h\, f(t_i, y_i)) \\
&= y_i + \frac{h}{2}(-y_i + t_i + 1) + \frac{h}{2}\, f(t_i + h, y_i + h(-y_i + t_i + 1)) \\
&= y_i - \frac{h}{2}y_i + \frac{h}{2}t_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\, f(t_i + h, y_i - hy_i + ht_i + h) \\
&= y_i - \frac{h}{2}y_i + \frac{h}{2}t_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\,[-(y_i - hy_i + ht_i + h) + t_i + h + 1] \\
&= y_i - \frac{h}{2}y_i + \frac{h}{2}t_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\,(-y_i + hy_i - ht_i - h + t_i + h + 1) \\
&= y_i - \frac{h}{2}y_i + \frac{h}{2}t_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}y_i + \frac{h^2}{2}y_i - \frac{h^2}{2}t_i + \frac{h}{2}t_i + \frac{h}{2} \\
&= y_i - hy_i + ht_i + h + \frac{h^2}{2}y_i - \frac{h^2}{2}ti \\
y_{i+1} &= y_i + \left(\frac{h^2}{2} - h\right) y_i + \left(h - \frac{h^2}{2}\right) t_i + h \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Nota-se que a equação (5) é idêntica à equação (6). Isso ocorre pois os dois métodos são de Runge-Kutta de ordem 2. Para este problema em específico, os dois métodos resultam na mesma aproximação para qualquer escolha de h.

Para ser possível estimar os erros envolvidos nos métodos, resolvemos o problema de valor inicial para encontrar $y(t)$. A solução exata para este problema é

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t} + t \qquad (7)$$

4 Verificação numérica

Utilizando um programa que resolve a equação diferencial do problema pelo método do ponto médio e pelo método de Euler modificado, encontra-se uma solução numérica. Essas soluções numéricas são mostradas na na figura 1, para o método do ponto médio, e na figura 2, para o método de Euler modificado.

Optou-se por usar $h = 0,1$ nestes gráficos porque, como pode-se perceber pela figura 4, os erros com esse valor de h são toleráveis.

Na figura 3 mostra-se a subtração entre as soluções encontrada por cada método ao longo do intervalo $0 \leq t \leq 1$. Pela resolução analítica do problema, espera-se que os valores encontrados em ambos os métodos sejam idênticos.

Porém, percebe-se que isso não acontece numericamente. Isso ocorre pois na realidade existe um erro numérico de representação do ponto flutuante. Como as operações realizadas por cada método são diferentes, a conversão de um número real para dígitos binários pode gerar um erro que

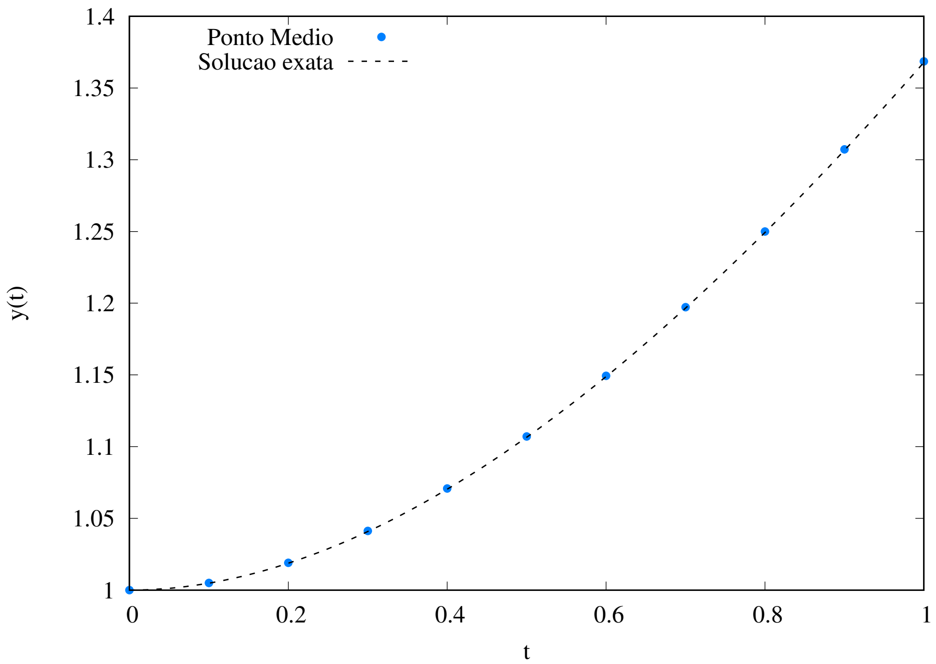

Figura 1: Comparação entre a solução numérica do problema e a solução exata (equação (7)) utilizando o método do ponto médio.

é acumulado. No gráfico, até o ponto $t = 0,5$ os resultados são de fato idênticos, aumentando a diferença entre eles a partir desse ponto. Para outros problemas, essa diferença, da ordem de 10^{-16}, pode ser bastante significativa.

5 Análises dos erros

O método de Runge-Kutta de 2ª ordem tem erro local de truncamento $\mathcal{O}(h^3)$ e erro global $\mathcal{O}(h^2)$.

Nas figuras 5 e 6 são mostrados o erro global para difentes valores de h. Os valores no eixo vertical estão em logaritmo base 10 do valor absoluto do erro e no eixo horizontal em logaritmo base 10 de h.

Ajusta-se uma reta da forma $f(x) = C + n\,x$, onde $f(x) = \log_{10} erro$, $x = \log_{10} h$, C o ponto onde $\log_{10} h = 0$, e n é a potência de h, isto é, a ordem do erro global.

A partir dos resultados, encontrau-se que quando $\log_{10} h = 0$, e portanto $h = 1$, $\log_{10} erro \approx -0,87903$. Portanto, ajustou-se a reta $f(x) = -0,87903 + n\,x$ para encontrar somente o valor de n.

Para o ajuste da figura 5, onde mostra-se o erro global obtido pelo método do ponto médio, encontrou-se que $n = 2,09017 \pm 0,0176$.

O erro global encontrado pelo método de Euler modificado é mostrado na figura 6. Novamente, ajustou-se uma reta cuja inclinação foi de $n = 2,09004 \pm 0,01763$.

Espera-se $n = 2$ para métodos de Runge-Kutta 2ª ordem. Os resultados de ambos ajustes

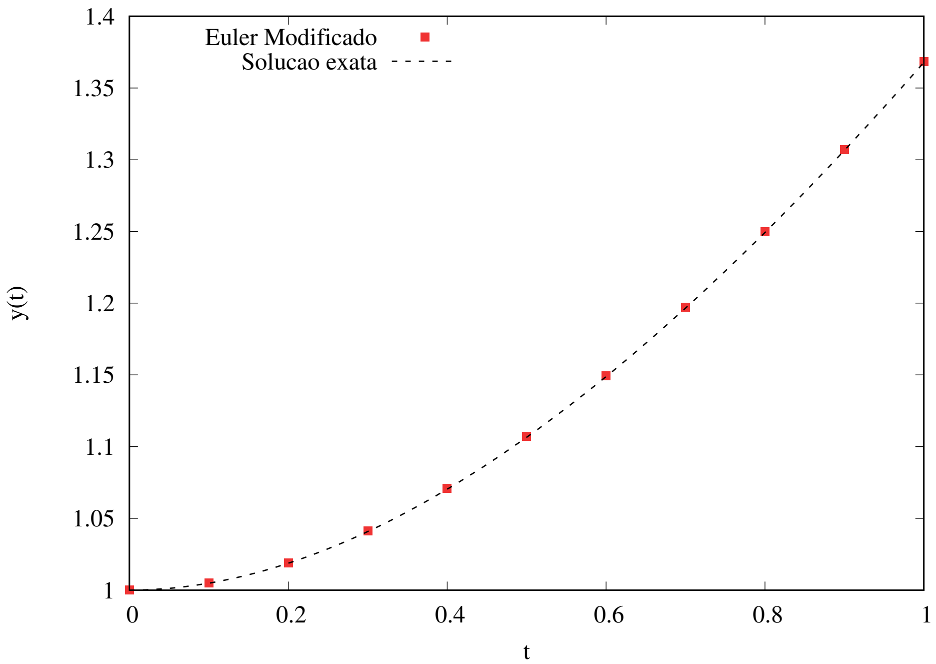

Figura 2: Comparação entre a solução numérica do problema e a solução exata (equação (7)) utilizando o método de Euler modificado.

concordam com a expectativa teórica. Esses valores não são idênticos porque, como já foi discutido anteriormente, há um acúmulo de erro na representação de ponto flutuante.

Referências

[1] RICHARD L. BURDEN, J. DOUGLAS FAIRES e ANNETTE M. BURDEN. *Análise Numérica*, (editora Cengage Learning, tradução da 10ª edição norte-americana, 2016)

A APÊNDICE - INSTRUÇÕES

Para compilar e rodar todos os programas utiliza-se o script:

```
$ sh RunT3.sh
```

Ao final, plota-se os gráficos utilizando:

```
gnuplot> load 'PlotAll.gnu'
```

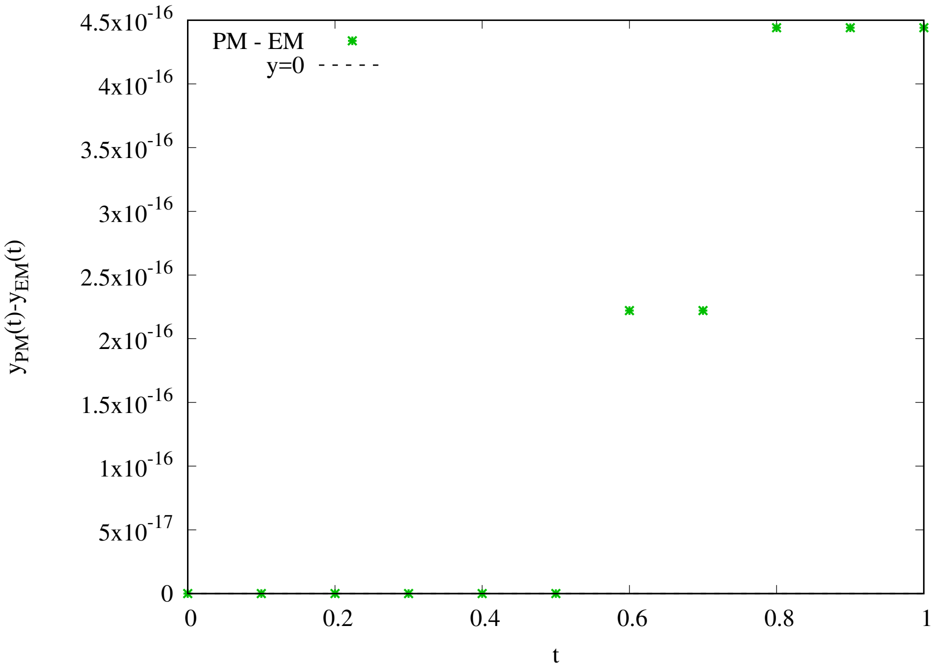

Figura 3: Diferença entre a solução numérica encontrada pelo método do ponto médio e pelo método de Euler modificado.

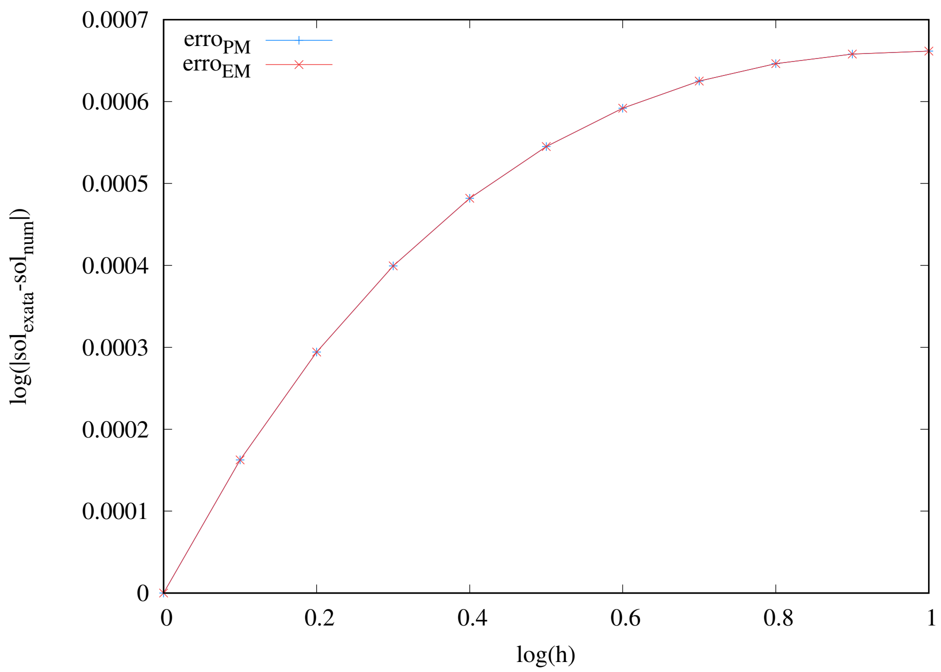

Figura 4: Erro para cada t no intervalo para os métodos do ponto médio e Euler modificado.

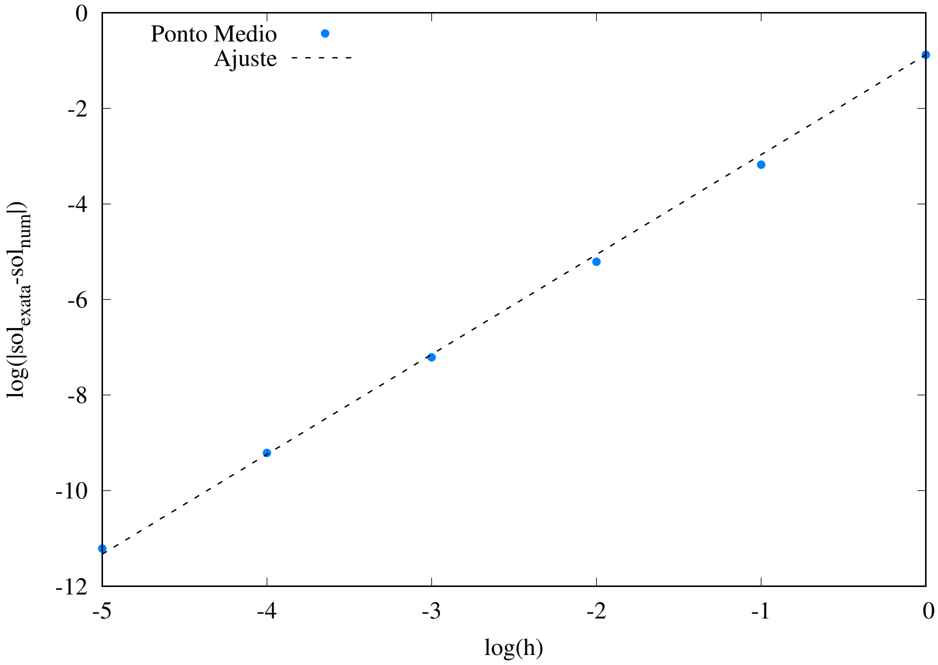

Figura 5: Erro global para diferentes valores de h. A inclinação da reta é $n = 2,09017 \pm 0,0176$.

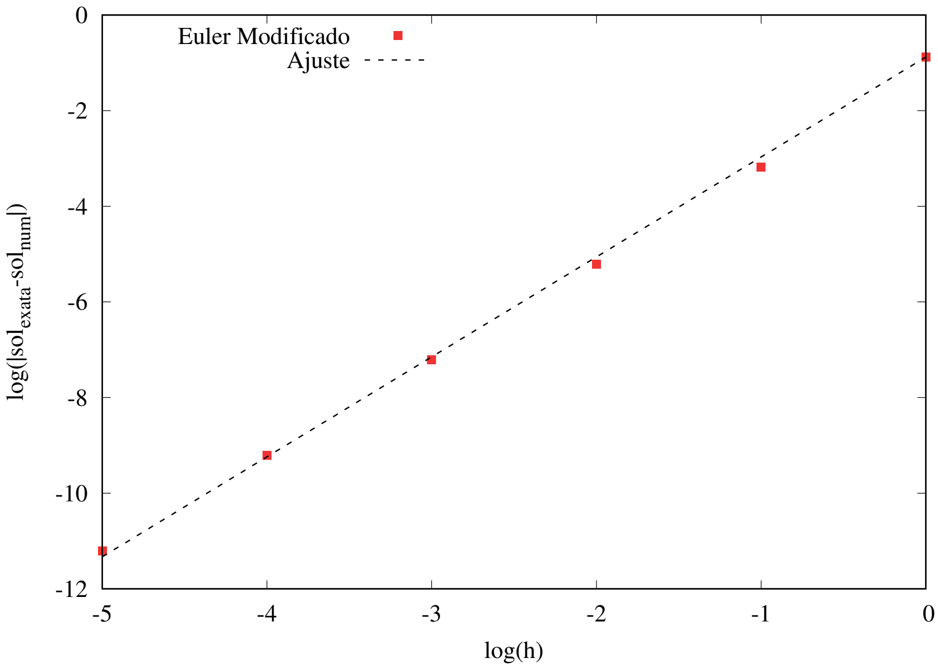

Figura 6: Erro global para diferentes valores de h. A inclinação da reta é $n = 2,09004 \pm 0,01763$.