Métodos Computacionais B

Agenor Hentz[1] Leonardo Brunnet[1] Heitor Fernandes[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2016-2

Área 2

1. **Mapas bidimensionais**
   - Exemplos
2. **Mapa de Hénon**
3. **Atividades Sugeridas**

Mapas bidimensionais

Podemos generalizar os resultados anteriores para mapas bidimensionais. Seja o mapa

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F(x_i, y_i), && (1) \\ y_{i+1} &= G(x_i, y_i), && (2) \end{aligned}$$

que apresenta um ponto fixo em (x^*, y^*), ou seja,

$$\begin{aligned} x^* &= F(x^*, y^*), && (3) \\ y^* &= G(x^*, y^*). && (4) \end{aligned}$$

A expansão em série de Taylor de um ponto $(x_i + \epsilon_i, y_i + \eta_i)$, muito próximo ao ponto fixo (x^*, y^*), em torno deste é dada por

$$\begin{aligned} x^* + \epsilon_{i+1} &= F(x^* + \epsilon_i, y^* + \eta_i) && (5) \\ &= F(x^*) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x^*,y^*)} \epsilon_i + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x^*,y^*)} \eta_i + \ldots && (6) \end{aligned}$$

Mapas bidimensionais

$$
\begin{aligned}
x^* + \epsilon_{i+1} &= F(x^*) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x^*,y^*)} \epsilon_i + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x^*,y^*)} \eta_i + \dots && (7) \\
&= x^* + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x^*,y^*)} \epsilon_i + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x^*,y^*)} \eta_i + \dots && (8) \\
\epsilon_{i+1} &= \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x^*,y^*)} \epsilon_i + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x^*,y^*)} \eta_i + \dots && (9) \\
\eta_{i+1} &= \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{(x^*,y^*)} \epsilon_i + \left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{(x^*,y^*)} \eta_i + \dots && (10)
\end{aligned}
$$

Mapas bidimensionais

Podemos reescrever em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{i+1} \\ \eta_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*,y^*)} \begin{bmatrix} \epsilon_i \\ \eta_i \end{bmatrix}, \tag{11}$$

onde podemos definir a matriz jacobiana J de tal forma que tenhamos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{i+1} \\ \eta_{i+1} \end{bmatrix} = J(x^*, y^*) \begin{bmatrix} \epsilon_i \\ \eta_i \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Desta forma percebemos que os autovalores de J quando calculados no ponto fixo (x^*, y^*) determinarão a estabilidade do sistema.

Mapas bidimensionais

Seja $P = (x^*, y^*)$ um ponto fixo do sistema e $\lambda_{1,2}$ os autovalores da matriz jacobiana neste ponto. Se $\lambda_{1,2}$ são números reais, P é um ponto fixo assintoticamente estável se $-1 < \lambda_{1,2} < 1$; e é instável caso um ou dois autovalores estejam fora deste intervalo. No caso em que os autovalores são números complexos, então $\lambda_{1,2}$ são complexos conjugados e podem ser escritos na forma $\lambda_{1,2} = a \pm i\,b$, e possuem módulo $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Nos casos onde $|\lambda_{1,2}| < 1$, o ponto fixo é assintoticamente estável e quando $|\lambda_{1,2}| < 1$ é instável.

Exemplos

Mapa de Hénon

O mapa não-linear bidimensional mais estudado é sem dúvida alguma o mapa de Hénon. Ele foi proposto pelo astrônomo francês Michel Hénon como um protótipo para o estudo de caos em sistemas dinâmicos. Ele é definido como:

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + y_n \tag{13}$$

$$y_{n+1} = b\, x_n, \tag{14}$$

onde a e b são dois parâmetros.

Mapa de Hénon

A análise de pontos fixos $(x^\star;\ y^\star)$ é feita utilizando-se a definição de ponto-fixo:

$$x^\star = a - (x^\star)^2 + y^\star \tag{15}$$

$$y^\star = b\,x^\star. \tag{16}$$

Este sistema de equações pode ser facilmente rearranjado resultando em uma equação de segundo grau: $(x^\star)^2 + x^\star(1-b) - a = 0$. A solução desta equação para $x^\star$ é:

$$x^\star = \frac{(b-1) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4\,a}}{2}.$$

Para que tenhamos soluções reais, temos que:

$$a \geq -\frac{(1-b)^2}{4}.$$

Atividades Sugeridas

1. Calcule os primeiros 20 valores de x_n para os seguintes valores de λ: 0,1; 0,2; 0,3; 0,6 e x_0 : 0,1; 0,25 e 0,5 e encontre os valores assimptóticos. Grafique as séries em pequenos conjuntos comparando aquelas que têm o mesmo valor de λ e x_0 Compare estes valores com aqueles esperados pela teoria.
2. Produza os gráficos de x_n em função de t, de teia e de recorrência para λ: 0,89; 0,8925 e 0,895, com x_0 = 0,5 e t_{max} = 1000. Tente encontrar visualmente as evidências: a) que indiquem o fim da fase de transiente e b) a fase caótica.

Atividades Sugeridas

3. Calcule séries com os primeiros 700 valores de x_n para 400 diferentes valores igualmente espaçados de λ começando em 0,72 até 1,0. Ignore os primeiros 300 valores de cada série (supondo que após estes 300 valores a fase transciente já tenha acabado), colocando os outros 400 valores em um arquivo único contendo as seguintes colunas: λ e x_n. Plote e analise o gráfico resultante, identificando visualmente as bifurcações e a transição entre as fases assimptóticas e caótica. O gráfico resultante será semelhante ao apresentado na figura (**??**).
4. Utilize o algoritmo da atividade anterior para calcular o valor do expoente de Lyapunov (equação **??**) em função de λ e da constante de Feigenbaum (equação **??**) para o mapa logístico.

Atividades Sugeridas

5 Utilize o mapa de Hénon para plotar o gráfico de x *versus* y para os seguines parâmetros $(a; b)$: (0,2; 0,9991), (0,2; -0,999); (1,4; 0,3).

6 Utilize o gnuplot para fazer um filme do mapa de Hénon onde o intervalo de $a = \{-1 : 1\}$ é varrido em 10^3 partes com $b = -0.999$. Para cada conjunto de parâmetros gere 10^4 pares x,y desprezando os 1000 primeiros. Para descobrir como gerar o filme de dentro de seu programa, digite "help plot special-filenames"no gnuplot e procure por "plot '-' ".