Métodos Computacionais B

Agenor Hentz[1] Leonardo Brunnet[1] Heitor Fernandes[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2016-1

Área 2

$\lambda > 0,89$ e o Limite Caótico

Conforme visto na seção anterior, espera-se que à medida que λ se aproxima de 1, tanto o número de ciclos quanto o transiente até o ponto-fixo aumentem cada vez mais. Este comportamento pode ser observado na figura (1).

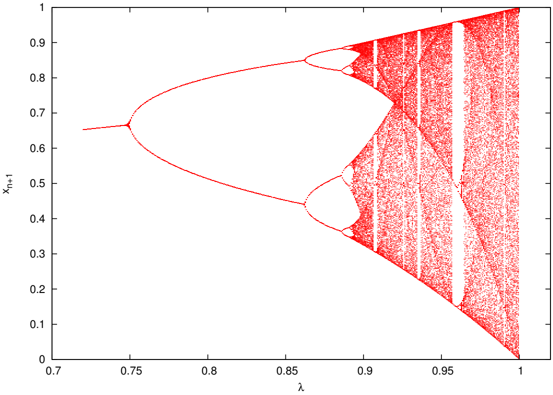

Figura: Valores assimptóticos de x para diferentes valores de λ. O gráfico apresenta os últimos 400 pontos calculados por λ, depois de calcular 700 pontos. Os valores de λ variam de 0,72 até 1, em uma malha de 400 valores.

$\lambda > 0,89$ e o Limite Caótico

Note o aumento da complexidade do comportamento à medida que $\lambda > 0,89$. É bastante visível o momento em que o tamanho dos ciclos dobra à medida que λ aumenta, até atingirmos um transiente caótico. Em particuar, os valores de λ em que o período dobra formam uma série cujos primeiros números são:

$$\lambda_0 = \frac{1}{4};\ \lambda_1 = \frac{3}{4};\ \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{6}}{4};\ \lambda_4 = 0,8860; ...$$

Valores sucessivos de $(\lambda_k - \lambda_{k-1})$ formam uma progressão geométrica de forma que podemos definir:

$$\delta_F = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = 4,6692... \quad (1)$$

onde δ é conhecida como constante de Feigenbaum. Esta constante é considerada “univesal” e aparece em diversas séries, não somente no mapa logístico.

Mapas de Teia e Mapas de Primeiro Retorno

Uma maneira de se visualizar a dinâmica dos valores de x é através dos chamados mapas de teia. Neste caso, plotamos o gráfico da função logistica (**??**) e da função $y = x$. Os gráficos do tipo teia são construídos unindo-se os seguintes pontos (x, y):

$$
\begin{array}{rl}
x_0 & 0 \\
x_0 & x_1 \\
x_1 & x_1 \\
x_1 & x_2 \\
x_2 & x_2 \\
x_2 & x_3 \\
 & \ldots,
\end{array}
$$

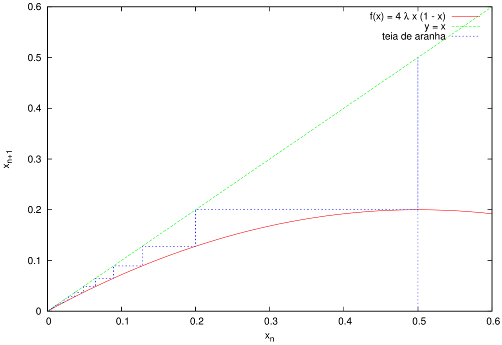

Figura: Mapa do tipo teia para o valor inicial $x_0 = 0,5$ λ = 0,2.

Mapas de Teia e Mapas de Primeiro Retorno

Outro tipo de visualização dos resultados do mapa logístico é utilizar os mapas de recorrência. Estes são construídos através de uma matriz M_{ij}, onde os elementos desta matriz são definidos como:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } |x_i - x_j| < \epsilon \\ 0, & \text{em caso contrario} \end{cases},$$

onde ϵ é um número arbitrário pequeno o suficiente. Temos um exemplo do mapa de recorrência na figura (3).

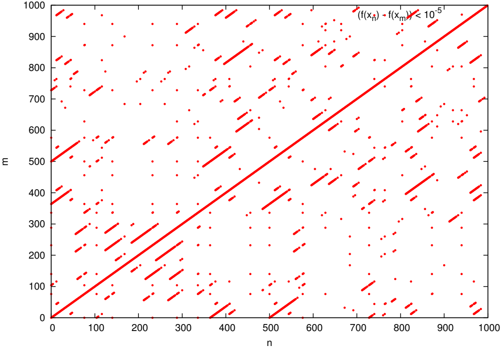

Figura: Mapa de recorrência para o valor inicial $x_0 = 0,5$ λ = 0,895. Neste caso $\epsilon = 10^{-5}$.

Coeficiente de Lyapunov

A assinatura de um sistema caótico é a sensibilidade quanto às condições iniciais. Se duas trajetórias iniciam muito próximas entre si, e a distância delas aumenta com o tempo, se diz que o sistema é caótico. A taxa com que as distâncias entre duas trajetórias aumenta com o tempo é caracterizada por uma quantidade chamada expoente de Lyapunov.
Consideremos duas trajetórias que iniciam, correspondentemente, nas posições x_0 e $x_0 + \delta$. As duas trajetórias se relacionam através dos valores de x seguintes: $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ e, correspondentemente, $x_0 + \delta, x_1 + \delta_1, x_2 + \delta_2, ..., x_n + \delta_n$. Assumindo que δ_n é pequeno, podemos expandir $f(x)$ ao redor de x_n, obtendo:

$$f(x_n + \delta_n) = f(x_n) + f'(x_n)\delta_n \rightarrow x_{n+1} + \delta_{n+1} = x_{n+1} + f'(x_n)\delta_n,$$

que resulta em:

$$\delta_{n+1} = f'(x_n)\delta_n.$$

Coeficiente de Lyapunov

Podemos utilizar esta forma recursiva para obtermos a razão entre a distância entre as duas trajetórias após n passos (δ_n) e a distância inicial (δ_0):

$$\left|\frac{\delta_n}{\delta_0}\right| = \prod_{i=0}^{n-1} \left|f'(x_i)\right| .$$

Assumindo que a quantidade acima varie exponencialmente para valores grandes de n, temos:

$$\left|\frac{\delta_n}{\delta_0}\right| = e^{\lambda_L n},$$

onde λ_L é o chamado expoente de Lyapunov, definido como:

$$\lambda_L \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \left|f'(x_i)\right| . \quad (2)$$

Coeficiente de Lyapunov

Se $\lambda_L > 0$, então as trajetórias vizinhas se distanciam umas das outras para grandes valores de n e temos o comportamento caótico. Entretanto, se as trajetórias convergem para um valor fixo ou um limite cíclico, elas se aproximam, o que resulta em $\lambda_L < 0$.
Podemos visualizar o coefiente de Lyapunov calculado para alguns valores de λ na figura (2). Fica claro pela figura que o comportamento caótico surge ao redor de 0,9. Pode-se notar que em alguns pontos durante a fase que ainda não se tornou caótica, a curva do coeficiente se aproxima de zero, como por exemplo ao redor de 0,75: estes são os pontos de bifurcação do mapa logístico, onde o sistema está na iminência de se tornar caótico, cujo efeito é removido pela bifurcação.
Outro comportamento que pode ser notado pela figura é o fato de haver, memo durante a fase caótica, “ilhas” de estabilidade, em que o coeficiente de Lyapunov chega a ficar negativo.

Coeficiente de Lyapunov

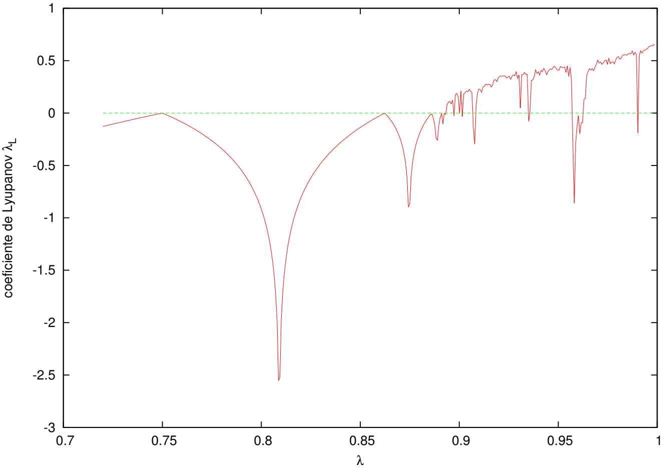

Figura: Coeficiente de Lyapunov como função de λ. Coeficiente calculado para x_0 = 0.5, para séries até n=700 desprezandando-se os primeiros 300 valores de x_n. O coeficiente λ foi calculado para 400 valores diferentes, igualmente espaçados entre λ = 0,72 e λ = 1.