Métodos Computacionais B

Agenor Hentz[1]   Leonardo Brunnet[1]   Heitor Fernandes[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

Semestre 2016-1

Área 2

1. **Mapas**
2. **Mapa Logístico**
3. **Estabilidade para $\lambda < 0,25$**
   - Pontos Fixos
   - Estabilidades dos Pontos Fixos
   - Estabilidade para $0,25 < \lambda < 0,75$
4. **$\lambda >$ 0,75 e o Limite Cíclico**

Mapas

Mapa é um termo utilizado em matemática que pode designar, entre outras coisas, uma função ou família de funções cujas propriedades são importantes para determinado assunto. Entre as mais diversas aplicações de mapas, aquela mais estudada é sem dúvida o chamado mapa logístico.

Mapa Logístico

O mapa logístico é uma relação de recorrência muito utilizada para mostrar como um comportamento caótico pode surgir mesmo da dinâmica de equações não-lineares relativamente simples. O mapa foi bastante popularizado depois da publicação de um artigo do biólogo Robert May na revista Nature. Neste artigo, Robert May descreve modelos matemáticos simples para modelar a dinâmica populacional através de uma escala discreta no tempo. Matematicamente, o mapa logístico pode ser descrito como:

$$x_{n+1} = 4\lambda x_n(1 - x_n). \tag{1}$$

Mapa Logístico

$$x_{n+1} = 4\lambda x_n(1 - x_n).$$

Esta equação não-linear tenta descrever dois efeitos populacionais:

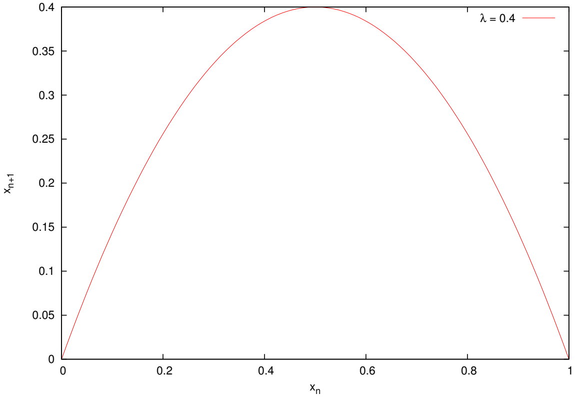
- reprodução, onde a população aumenta a uma taxa proporcional à população atual, para tamanhos populacionais pequenos;
- decréscimo ou mortalidade da população para tamanhos populacionais maiores, onde a taxa de mortalidade depende do tamanho atual.

Entretanto, para que a equação (1) tenha significado real, os valores de x não podem ser negativos. Para tanto, o domínio da equação que pode ser utilizado para os estudos populacionais tem que estar restrito à região [0,1].

Mapa Logístico

A equação (1) têm as características mencinadas nos items acima, uma vez que o crescimento populacional é proporcional ao tamanho atual da população ($x_{n+1} \propto x_n$), ao mesmo tempo em que há um decréscimo da população para valores populacionais altos ($x_{n+1} \propto (1 - x_n)$).

O comportamento geral da equação (1) pode ser visto na figura (1).



Mapa Logístico

Algumas características da equação (1) podem ser obtidas facilmente. Por exemplo, o ponto de máximo da curva $f(x)$ é dado por:

$$f'(x) = 4\lambda(1 - 2x_n) = 0 \rightarrow x_n = 0,5,$$

ou seja, o valor máximo da curva ocorre no meio do intervalo, independentemente do valor de λ. O valor máximo da curva $f(x)$ é dado, portanto, por:

$$f(x = 0.5) = 4\lambda\, 0.5\, (1 - 0.5) = \lambda.$$

O valor mínimo de λ pode ser obtido para $x_{n-1} = 0$:

$$f(x) = 0 = 4\lambda x_n(1 - x_n) \rightarrow \lambda = 0,$$

para qualquer x_n diferente de zero. O valor máximo de λ pode ser obtido de maneira análoga, quando $x_{n+1} = 1$:

$$f(x) = 1 = 4\lambda x_n(1 - x_n) \rightarrow \lambda = 1.$$

Em geral, se está interessado em qual é o valor assimptótico para o qual x converge, após um intervalo de tempo grande.

Mapa Logístico

Pode-se mostrar facilmente que $x = 0$ é uma solução assimptótica da equação do mapa logístico para qualquer valor inicial x_0, quando λ é menor do que 0,25. Isto ocorre porque a equação do mapa logístico pode ser re-arranjada como:

$$x_{n+1} = x_n \left[4\lambda\right] \left[(1 - x_n)\right], \tag{2}$$

e as duas quantidades entre colchetes têm valores no intervalor [0,1], o que faz com que o valor de x_{n+1} diminua assimptóticamente de qualquer valor inicial até zero.

Mapa Logístico

A figura (2) ilustra este fato ao mostrar o valor de x_n para valores incrementais de tempo, tendo diferentes valores iniciais e diferentes valores de λ

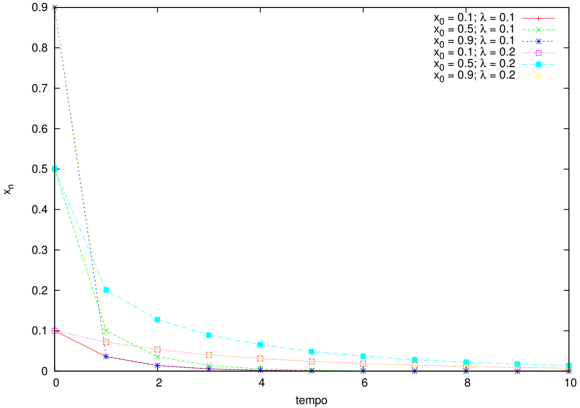


Figura: Mapa logístico em função do tempo discreto t para valores iniciais $x_0 = 0,1;\ 0,5$ e $0,9$ e λ = 0,1 e 0,2.

Pontos Fixos

Seja o mapa:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

A sequência do pontos gerados pelo mapa $(x_0, x_1, .., x_n)$ é chama de órbita e é o resultado de sucessivas aplicações do mapa ao estado inicial x_0.
Quando ocorre $x_{n+1} = x_n = x^*$, x^* é chamado de ponto fixo do mapa, isto ocorre pois uma vez atingido o poonto fixo, o mapa permanecerá neste mesmo ponto em todas as iterações subsequentes. Ou seja,

$$x^* = f(x^*).$$

Por exempo, os pontos fixos do mapa $x_{n+1} = (x_n)^3$ são -1, 0, +1.

Estabilidade dos Pontos Fixos

A estabilidade de um ponto fixo está relacionada com o fato de se um dado ponto x_n na sua vizinhança se aproxima ou se afasta do ponto fixo à medida que o mapa é iterado. Quando ocorre a aproximação, temos um ponto fixo assintoticamente estável. Por outro lado, quando observamos o afastamanto do ponto fixo, este é instável.
Seja um x_n próximo ao ponto fixo x^*,

$$x_n = x^* + \epsilon_n,$$

com $\epsilon_n \equiv x_n - x^*$ e $|\epsilon_n| \ll 1$.
Voltamos ao mapa e temos

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(x^* + \epsilon_n).$$

Também, podemos escrever que

$$x_{n+1} = x^* + \epsilon_{n+1}.$$

Estabilidade dos Pontos Fixos

Comparamos a diferença entre o ponto fixo e a primeira iteração (partindo de x_n), $|\epsilon_{n+1}|$ com a diferença entre o ponto fixo e o ponto original x_n, $|\epsilon_n|$. Se obtivermos que para qualquer n, $|\epsilon_{n+1}| < |\epsilon_n|$, o ponto fixo x^* será estável; caso contrário, $|\epsilon_{n+1}| > |\epsilon_n|$ será instável. A obtenção de um critério para a estabiidade do ponto fixo parte da suposição de que a diferença $|\epsilon_n|$ é pequena, permitindo que seja feita uma expansão em torno de x^*, ou seja,

$$f(x_n) = f(x^* + \epsilon_n) \simeq f(x^*) + \left(\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \right) \epsilon_n + O(\epsilon_n)^2.$$

Utilizando em cojunto com

$$\begin{aligned} f(x_n) &= x_{n+1} = x^* + \epsilon_{n+1}., \qquad (3) \\ x^* &= f(x^*). \qquad (4) \end{aligned}$$

Estabilidade dos Pontos Fixos

Obtemos,

$$
\begin{aligned}
f(x_n) &= f(x^* + \epsilon_n) \simeq f(x^*) + \left(\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \right) \epsilon_n + \ldots \qquad (5) \\
x^* + \epsilon_{n+1} &\simeq x^* + \left(\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \right) \epsilon_n + \ldots \qquad (6) \\
\epsilon_{n+1} &= \lambda \, \epsilon_n \qquad (7)
\end{aligned}
$$

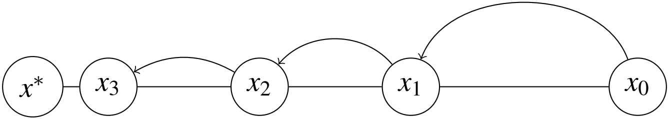
onde

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} .$$

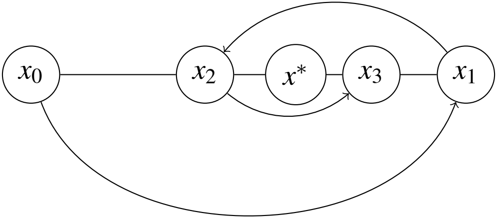
Para que a condição $|\epsilon_{n+1}| < |\epsilon_n|$ seja verificada teremos que $-1 < \lambda < +1$. Esta é a condição de estabilidade assintótica.

Estabilidade dos Pontos Fixos

Se $0 < \lambda < 1$, sucessivas iterações do mapa fazem com que sequência $x_0, x_1, ..$ se **aproxime** de x^* de forma que $(x_n - x^*)$ apresenta sempre o mesmo sinal.

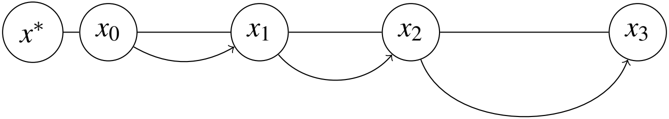


Quando $-1 < \lambda < 0$, as sucessivas iterações do mapa fazem com que sequência $x_0, x_1, ..$ se **aproxime** de x^* de forma oscilatória, ou seja, $(x_n - x^*)$ troca de sinala cada iteração.

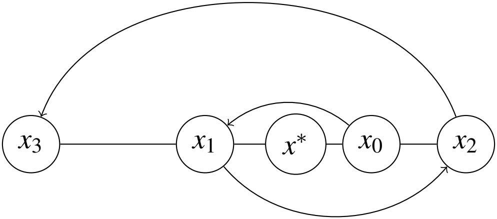


Pontos Fixos instáveis

Se $0 < \lambda < 1$, sucessivas iterações do mapa fazem com que sequência $x_0, x_1, ..$ se **afaste** de x^* de forma que $(x_n - x^*)$ apresenta sempre o mesmo sinal.



Quando $-1 < \lambda < 0$, as sucessivas iterações do mapa fazem com que sequência $x_0, x_1, ..$ se **afaste** de x^* de forma oscilatória, ou seja, $(x_n - x^*)$ troca de sinala cada iteração.



Estabilidade dos Pontos Fixos : Exemplo

Consideramos o mapa

$$x_{n+1} = (x_n)^2$$

que possui pontos fixos em $x = 0$ (estável, $\lambda = 0$) e $x = 1$ (instável, $\lambda = 2$).

n	x_n
0	0.500000
1	0.250000
2	0.062500
3	0.003906
4	0.000015

n	x_n
0	1.500000
1	2.250000
2	5.062500
3	25.62890
4	656.8408

n	x_n
0	1.001000
1	1.002001
2	1.004006
3	1.008028
4	1.016121
5	1.032501
6	1.066058
7	1.136480
8	1.291588
9	1.668198

n	x_n
0	0.999000
1	0.998001
2	0.996006
3	0.992028
4	0.984119
5	0.968491
6	0.937975
7	0.879797
8	0.774043
9	0.599142

Mapa Logístico

Portanto, $x = 0$ é um ponto-fixo da equação do mapa-logístico. Podemos testar a estabilidade deste ponto-fixo: para que ele seja estável temos que $|f'(x = 0)| < 1$, ou seja:

$$|f'(x = 0)| = |4\lambda[1 - 2(0)]| < 1,$$

ou seja, $\lambda < 0,25$ para que tenhamos a estabilidade.

Estabilidade para $0,25 < \lambda < 0,75$

Para os casos em que λ é maior do que 0,25 mas menor do que 0,75, a solução assimptótica de x_{n+1} varia sucessivamente para valores cada vez maiores de x.

Estabilidade para $0,25 < \lambda < 0,75$

Isto pode ser visto na figura (3), onde temos a representação dos valores de x_{n+1} para alguns valores de x_0 e λ, dentro do limite descrito acima.

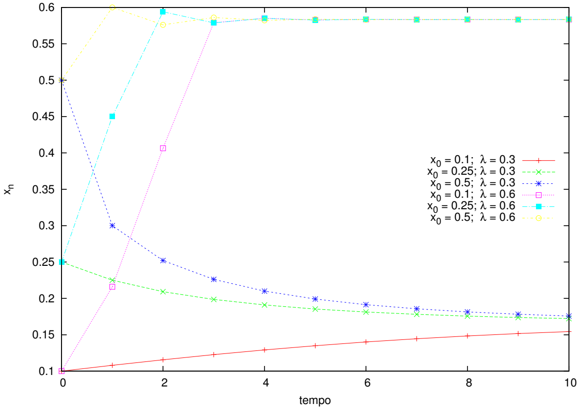


Figura: Mapa logístico em função do tempo discreto t para valores iniciais $x_0 = 0,1;\ 0,5$ e $0,9$ e λ = 0,3 e 0,6.

Estabilidade para $0,25 < \lambda < 0,75$

Primeiramente, calcula-se os pontos fixos por meio da equação[1]

$$x^* = 4\,\lambda\,x^*\,(1 - x^*).$$

Obtemos

$$\begin{aligned} x &= 0 && (8)\\ x &= 1 - \frac{1}{4\,\lambda}. && (9) \end{aligned}$$

Para analisarmos a estabilidade, precisaremos da derivada da função que define o mapa, ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\,\lambda\,x\,(1 - x), && (10)\\ f'(x) &= 4\,\lambda\,(1 - 2\,x). && (11) \end{aligned}$$

[1] Esta equação para os pontos fixos do mapa logístico será sempre a mesma. As mudanças de comportamento serão causadas pelo valor do parâmetro λ.

Estabilidade para $0,25 < \lambda < 0,75$

Quando aplicada em $x = 0$ resulta em

$$f'(0) = 4\,\lambda.$$

Como $\lambda > 0$, teremos este ponto fixo se torna instável quando $\lambda > 1/4$. O outro ponto fixo, $x = 1 - 1/(4\,\lambda)$, terá derivada igual a

$$f'(1 - 1/(4\,\lambda)) = 2 - 4\,\lambda,$$

o que implica que este ponto fixo será estável quando $1/4 < \lambda < 3/4$. O maior valor para ponto fixo estável será $x^* = 2/3$.

Estabilidade para $0,25 < \lambda < 0,75$

Podemos testar a estabilidade destes pontos fixos através do sistema:

$$\begin{cases} x & = x\,4\lambda\,(1-x) \\ 1 & > |4\lambda(1-2x)| \end{cases} \tag{12}$$

Podemos isolar λ na primeira equação ($\lambda = 1/[4(1-x)]$), e substituir na segunda, resultando em:

$$\left|\frac{(1-2x)}{(1-x)}\right| < 1. \tag{13}$$

Daí temos dois casos: quando o termo à esquerda é positivo ou negativo.

Estabilidade para $0,25 < \lambda < 0,75$

No primeiro caso é fácil de se mostrar que só teremos solução quando:

$$\left\{x = 0;\ \lambda = \frac{1}{4}\right\}.$$

Este é justamente o caso limite superior de $x = 0$. Quando o termo à esquerda da equação (13) for negativo, teremos:

$$\frac{(1-2x)}{(1-x)} < -1,$$

que resulta, depois de um pouco de álgebra, em:

$$\left\{x < \frac{2}{3};\ \lambda < \frac{3}{4}\right\}.$$

Estabilidade para $0,25 < \lambda < 0,75$

Em resumo, com λ entre 0,25 e 0,75, teremos que x_{n+1} tende assimptóticamente a valores cada vez maiores de x, entre 0 e 2/3. Estes valores de x são pontos-fixos estáveis. Os valores dos pontos fixos podem ser facilmente encontrados de forma gráfica, pois eles se encontram na intersecção entre as curvas $x_{n+1} = x_n\, 4\lambda(1 - x_n)$ e $x_{n+1} = x_n$ (já que quando $x_{n+1} = x$ os próximos valores de x serão sempre iguais). Por exemplo, a figura (3) mostra os gráficos correspondentes para $\lambda = 0,6$. Podemos ver graficamente que o valor assimptótico está ao redor de 0,58. O valor numérico pode ser facilmente encontrado por:

$$1 = 4(0,6)(1 - x) \to x = 7/12 \sim 0,58333...$$

$\lambda > 0{,}75$ e o Limite Cíclico

Para valores de λ maiores do que 0,75, vemos que não ocorre um ponto-fixo estável, conforme mostrado na seção anterior. Entretanto, podemos procurar por pontos fixos de ordem maior, em outras palavras, podemos procurar por valores de x que se repetem de forma cíclica mas não consecutiva a partir de sucessivas aplicações da equação que define o mapa. Por exemplo, pontos-fixos de segunda ordem são pontos em que $x_{n+2} = x_n$, ou seja, se repetem a cada duas iterações do mapa. O valor de $x_{n+2} \equiv f(f(x))$ é dado por:

$$\begin{aligned} f(f(x_n)) &= [x_n\, 4\,\lambda(1-x_n)]\; 4\lambda\,\{1-[x_n\, 4\lambda\,(1-x_n)]\} \\ &= 16 x_n \lambda^2 (1-x_n)(1-4x_n\lambda(1-x_n)). \end{aligned} \tag{14}$$

Os pontos fixos de segunda ordem que são encontrados ao se resolver a equação acima são visitados ciclicamente no limite assimptótico.

$\lambda > 0{,}75$ e o Limite Cíclico

Precisaremos resolver a seguinte equação para o cálculo dos pontos fixos

$$a^3\,x^4 \;-\; 2\,a^3\,x^3 \;+\; (a^3 + a^2)\,x^2 \;-\; (a^2 - 1)\,x = 0,$$

onde $a = 4\lambda$ e $x = x^*$ será o ponto fixo.
Sabemos que as soluções de período k também são soluções de órbitas de período $2\,k$, logo podemos fatorar as raízes $x_1^* = 0$ e $x_2^* = 1 - 1/(4\lambda)$ da expressão acima. Com isto obtemos

$$a^2\,x^2 \;-\; a\,(a+1)\,x \;+\; a \;+\; 1 = 0.$$

Cujas soluções são

$$x_3^* = \frac{1 + a - \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2\,a} \quad (15)$$

$$x_4^* = \frac{1 + a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2\,a}. \quad (16)$$

Os pontos x_1^* e x_2^* são instáveis nas condições vistas anteriormente.

$\lambda > 0{,}75$ e o Limite Cíclico

Para testar a estabilidade do pontos fixos, devemos derivar $F^{(2)}(x) = f(f(x))$ e testar se $|F^{(2)}(x^*)| < 1$. A forma mais simples de fazer isto é por meio do uso da regra da cadeia para a derivada, isto é

$$\frac{dF^{(2)}(x)}{dx} = \frac{df(f(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx}, \tag{17}$$

$$\left.\frac{dF^{(2)}(x)}{dx}\right|_{x=x_3^*} = \left.\frac{df(u)}{du}\right|_{u=f(x_3^*)} \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_3^*}. \tag{18}$$

Como $f(u)$ é a própria $f(x)$, podemos reescrever como

$$\left.\frac{dF^{(2)}(x)}{dx}\right|_{x=x_3^*} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=f(x_3^*)} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_3^*}.$$

$\lambda > 0{,}75$ e o Limite Cíclico

Notando que quando iteramos o mapa a partir de x_3^* obtemos x_4^*, ou seja, $x_4^* = f(x_3^*)$, temos

$$\left.\frac{dF^{(2)}(x)}{dx}\right|_{x=x_3^*} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_4^*} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_3^*} .$$

O que simplifica bastante o cálculo da estabilidade dos pontos fixos. A equação para a derivada em x_3^* fica

$$\lambda_3 = 4\lambda(1-2\,x_4^*)\,4\lambda(1-2\,x_3^*).$$

Substituindo as expressões para x_3^* e x_4^* na equação acima, obtemos

$$\lambda_3 = -(4\lambda)^2 + 2(4\lambda) + 4.$$

Temos que $\lambda_4 = \lambda_3$.

$\lambda >$ 0,75 e o Limite Cíclico

A estabilidade aaintótica para a órbitade período-2 ocorrerá quando

$$-1 < |-(4\lambda)^2 + 2(4\lambda) + 4| + 1.$$

Implicando que

$$3 < (4\lambda) < 1 + \sqrt{6} \simeq 3,449490.$$

$\lambda >$ 0,75 e o Limite Cíclico

Matematicamente, para calcularmos os pontos fixos de segunda ordem temos que resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x & = f(f(x)) \\ 1 & > |f'(f(x))| \end{cases} \tag{19}$$

Pode-se mostrar que a única solução do sistema acima que tem relevância para o caso específico do estudo do mapa logístico mostra que $0,75 < \lambda < (1+\sqrt{6})/4 = 0,86237$.

$\lambda > 0{,}75$ e o Limite Cíclico

A figura (4) mostra o plot de x_{n+1} para $x_0 = 0,25$ e $\lambda = 0,8$, mostrando a repetição cíclica dos valores assimptóticos de x_n para grandes valores de t.

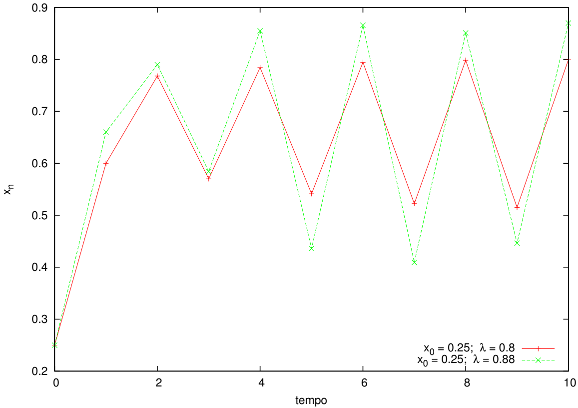


Figura: Mapa logístico em função do tempo discreto t para valores iniciais $x_0 = 0,25$ e λ = 0,8 e 0,88.

$\lambda > $ 0,75 e o Limite Cíclico

A figura (6) ilustra a obtenção gráfica dos dois valores assimptóticos de x para o caso em que $\lambda = 0,8$. Note que há um terceiro ponto-fixo (entre os dois valoes extremos) que corresponde ao caso em que temos ponto-fixo de primeira ordem $f(x) = x$. Os valores assimptóticos de x neste caso, obtidos matematicamente, são 0,513045 e 0,799455.

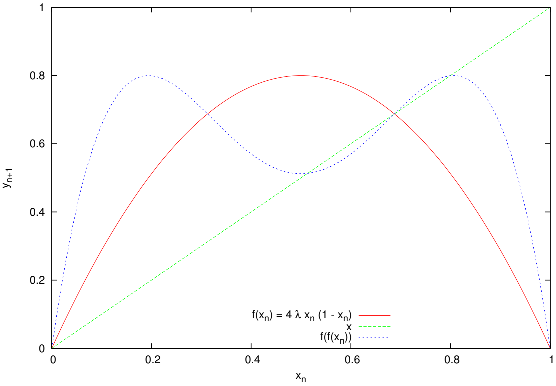


Figura: Mapa logístico em função do tempo discreto t para $\lambda = 0,8$. Também estão ilustradas as curvas $y = x$ e $y = f(f(x))$. Podemos notar a presença de um ponto-fixo de primeira-ordem instável (que ocorre quando $f(x) = x = 0,6875$, na intersecção entre as 3 curvas) e dois pontos fixos de segunda ordem (que ocorrem em $f(f(x)) = x = 0,513045$ e $0,799455$, que ocorrem na interseção de $f(f(x))$ e $y = x$).

$\lambda > $ 0,75 e o Limite Cíclico

A figura (4) mostra o plot de x_{n+1} para $x_0 = 0,25$ e $\lambda = 0,8$, mostrando a repetição cíclica dos valores assimptóticos de x_n para grandes valores de t.

A figura (6) ilustra a obtenção gráfica dos dois valores assimptóticos de x para o caso em que $\lambda = 0,8$. Note que há um terceiro ponto-fixo (entre os dois valoes extremos) que corresponde ao caso em que temos ponto-fixo de primeira ordem $f(x) = x$. Os valores assimptóticos de x neste caso, obtidos matematicamente, são 0,513045 e 0,799455.

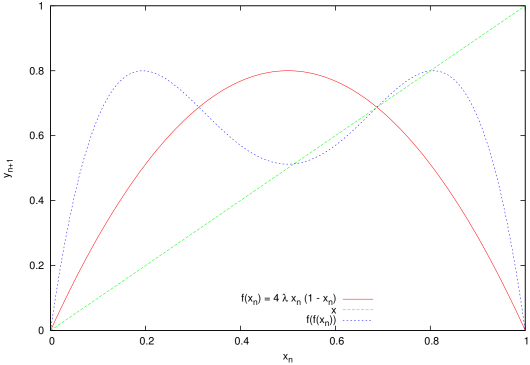


Figura: Mapa logístico em função do tempo discreto t para $\lambda = 0,8$. Também estão ilustradas as curvas $y = x$ e

$\lambda > 0{,}75$ e o Limite Cíclico

Podemos continuar procurando por ciclos maiores. Por exemplo, um ponto-fixo de 4 ciclos surge quando $f(f(f(f(x)))) = x$. Pode-se mostrar que este ponto-fixo se torna instável para $\lambda > 0,886023$. Já o ponto-fixo de 8 ciclos se torna instável para $\lambda > 0,891102$.
De maneira geral, podemos notar que à medida que λ aumenta à partir de 0,75:

- o número de ciclos visitados pelo mapa logístico aumenta gradativamente;
- o transiente necessário para que se estabeleça o ciclo também aumenta paulatinamente;
- a bifurcação do número de ciclos ocorre cada vez para variações menores de λ.