Método de Fehlberg na solução do problema de oscilações acopladas

Cristiane de Paula Oliveira

Instituto de Física – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

24 de janeiro de 2018

Resumo

Nestre trabalho serão estudados blá blá blá.

Palavras-chave: oscilações acopladas, método de Fehlberg, método de Runge-Kutta, solução numérica

1 Introdução

2 Formulação do problema

Neste trabalho será estudado um sistema constituido por 4 osciladores acoplados executando oscilações longitudinais com os extremos fixos.

A energia cinética do sistema pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{4}\dot{\eta}_i{}^2 \tag{1}$$

e a energia potencial pode ser escrita como

$$U = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{3}(\eta_{i+1}-\eta_i)^2 + \frac{1}{2}k\eta_4^2. \tag{2}$$

A lagrangiana $L = T - U$ desse sistema, portanto, é descrita por

$$L = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{4}\dot{\eta}_i{}^2 - \frac{1}{2}k\eta_1^2 - \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{3}(\eta_{i+1}-\eta_i)^2 - \frac{1}{2}k\eta_4^2. \tag{3}$$

As equações do movimento de cada oscilador é dada pelas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Portanto, as equações acopladas são

$$\begin{aligned}
\ddot{\eta}_1 &= \omega_0^2(\eta_2 - 2\eta_1), && (5)\\
\ddot{\eta}_2 &= \omega_0^2(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3), && (6)\\
\ddot{\eta}_3 &= \omega_0^2(\eta_2 - 2\eta_3 + \eta_4), && (7)\\
\ddot{\eta}_4 &= \omega_0^2(\eta_3 - 2\eta_4), && (8)
\end{aligned}$$

em que

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{9}$$

As soluções desse sistema de equações acopladas são

$$\eta_j(t) = \sum_{r=1}^{4} \rho_{rj}[\mu_r \cos(\omega_r t) - \nu_r \sin(\omega_r t)], \quad (10)$$

para $(j = 1, 2, 3, 4)$, em que

$$\omega_r = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{r\pi}{10}\right) \right| \quad (11)$$

são as autofrequências dos modos normais de oscilação,

$$\rho_{rj} = \sqrt{\frac{2}{5}} \sin\left(\frac{rj\pi}{5}\right) \quad (12)$$

são os autovetores associados às autofrequências dos modos normais de oscilações e μ_r e ν_r são aplitudes determinadas a partir das condições iniciais.

No problema analisado neste trabalho, as condições iniciais são

$$\begin{aligned} \eta_{j0} &= \epsilon\delta_{j1} && (13)\\ \dot{\eta_{j0}} &= 0, && (14) \end{aligned}$$

para $(j = 1, 2, 3, 4)$.

3 Métodos numéricos

Os métodos numéricos que serão utilizados para resolver o sistema são descritos a seguir.

3.1 Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

O método de Runge-Kutta de 4^a ordem consiste em encontrar

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n; x_n)\, h, && (15)\\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}; x_n + \frac{k_1}{2}\right) h, && (16)\\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}; x_n + \frac{k_2}{2}\right) h \text{ e} && (17)\\ k_4 &= f\left(t_n + h; x_n + k_3\right) h, && (18) \end{aligned}$$

de forma que

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right). \quad (19)$$

onde $f(t, x) = \frac{dx}{dt}$ e h é o tamanho do passo.

3.2 Método de Fehlberg

Este método utiliza um método de Runge-Kutta com erro de truncamento local de ordem 5 para obter uma estimativa do erro local num método de Runge-Kutta de ordem 4.

O método de Runge-Kutta de ordem 5 é

$$x_{n+1} = x_n + c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 + c_5k_5 + c_6k_6, \quad (20)$$

e o método de Runge-Kutta de ordem 4 é

$$x^*_{n+1} = x^*_n + c^*_1k_1 + c^*_2k_2 + c^*_3k_3 + c^*_4k_4 + c^*_5k_5 + c^*_6k_6, \quad (21)$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n; x_n)\, h, && (22)\\ k_2 &= f(t_n + a_2h; x_n + b_{21}k_1)\, h, && (23)\\ k_3 &= f(t_n + a_3h; x_n + b_{31}k_1 + b_{32}k_2)\, h, && (24)\\ &\quad \ldots \\ k_6 &= f(t_n + a_6h; x_n + b_{61}k_1 + b_{62}k_2 + \\ &\quad b_{63}k_3 + b_{64}k_4 + b_{65}k_5)\, h. && (25) \end{aligned}$$

Os coeficientes c_i,c_i^* e a_i,(i=1,2,...,6), e os coeficientes $b_{i,j}$,(i,j=1,2,...,6) e (i>j), são encontradas tabeladas.

A estimativa do erro corrente ϵ_c é

$$\epsilon_c = |x_{n+1} - x^*_{n+1}|. \tag{26}$$

A partir dessa estimativa do erro, se $\epsilon_c \leq \epsilon$, utiliza-se esse passo e calcula-se um novo h pela equação (27) para o passo seguinte. Se $\epsilon_c > \epsilon$, rejeita-se esse h e calcula-se um novo passo pela equação (27) para esse mesmo ponto.

$$h_{novo} = h \left(\frac{\epsilon}{2\epsilon_c} \right)^{\frac{1}{4}}, \tag{27}$$

em que ϵ é a tolerância do erro.

4 Resultados e análises

Figura 1: Mapa para $a = 1,2$ e $b = 2,5$.

5 Considerações finais

Referências

[1] F. R. Marotto. *Snap-Back Repellers Imply Chaos in* $\mathbb{R}^n$, Journal of Mathematical Analysis and Aplications **63**, 199-223 (1978)

[2] S. M. Salman, A. A. Elsadany. *On the bifurcation of Marotto's map and its application in image encryption*, Journal of Computational and Applied Mathematics **328**, 177–196 (2018)

[3] L. H. A, Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*, (editora Livraria da Física, 3ª edição, 2011)

A APÊNDICE - INSTRUÇÕES

Para compilar e rodar todos os programas utiliza-se o script:

```
$ sh Coupled.sh
```

Ao final, plota-se os gráficos utilizando:

```
gnuplot> load 'PlotAll.gnu'
```