Movimento de Foguetes

Cristiane de Paula Oliveira

Instituto de Física – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

19 de janeiro de 2018

Resumo

Neste trabalho buscou-se estudar o movimento de foguetes. Para isso, foram desenvolvidos modelos matemáticos baseados na análise do *momentum* linear do foguete. No primeiro momento, estuda-se o movimento de foguetes no espaço livre. Depois, considera-se o movimento de ascensão vertical sob ação da gravidade. Por último, leva-se em conta também a resistência do ar na ascensão vertical sob gravidade. Este último problema não possui solução analítica. Utilizaram-se os métodos de Euler, de Runge-Kutta de 2^a e 4^a ordem para encontrar soluções numéricas de cada problema.
Palavras-chave: movimento de foguetes; solução numérica; método de Euler; método de Runge-Kutta

1 Introdução

Um problema interessante para a aplicação da dinâmica de Newton é o movimento de foguetes simplificados. Métodos numéricos podem ser particularmente úteis para resolução desse problema quando a solução analítica não é conhecida ou não é simples de ser encontrada.

Neste trabalho, busca-se aplicar três métodos numéricos para resolver três problemas com complexidade crescente relacionados ao movimento de foguetes.

O texto está organizado da seguinte forma: na seção 2 formula-se matematicamente os problemas que serão abordados; na seção 3 faz-se uma breve apresentação dos métodos numéricos de solução das equações diferenciais encontradas na seção 2; na seção 4 apresentam-se e discutem-se os resultados e, por fim, na seção 5 fazem-se considerações finais.

2 Formulação física dos problemas

Neste trabalho considerou-se uma versão simplificada do movimento de foguetes. Como referencial teórico para os dois primeiros casos utilizou-se a formulação adotada no livro Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas [1], de Thornton & Marion. Na vida real, existem muito mais fatores a serem levados em consideração no estudo desse movimento. Ainda assim, o estudo de modelos simples apresentam resultados interessantes.

2.1 Movimento de Foguete no Espaço Livre

Para um determinado tempo t, a massa de um foguete é m e sua velocidade é v. Durante um intervalo dt,uma massa dm' é ejetada com velocidade $-u$ em relação ao foguete. O *momentum* linear do foguete no tempo t é dado por

$$p(t) = mv, \tag{1}$$

e o *momentum* linear do foguete no tempo $t + dt$ é dado por

$$p(t + dt) = (m - dm')(v + dv) + dm'(v - u). \tag{2}$$

Como não há nenhuma força externa agindo sobre o foguete, isto é, $F_{ext} = 0$, há conservação do *momentum* linear do sistema

$$dp \equiv p(t + dt) - p(t) = 0. \tag{3}$$

Desta forma,

$$(m - dm')(v + dv) + dm'(v - u) - mv = 0. \tag{4}$$

$$mv + m\,dv - v\,dm' - dm'\,dv + v\,dm' - u\,dm' - mv = 0.$$

Ignorando-se o produto de dois diferenciais $dm'dv$, obtemos,

$$dv = u\frac{dm'}{m}. \tag{5}$$

A massa positiva dm' ejetada da espaçonave representa a massa negativa $dm \equiv m(t+dt) - m(t)$ perdida pela espaçonave. Ou seja,

$$dm = -dm'. \tag{6}$$

Assim, considererandos-se a perda de massa total da espaçonave, a equação 5 se torna

$$dv = -u\frac{dm}{m} \tag{7}$$

Sendo m_0 e v_0 a massa e velocidade iniciais do foguete, integra-se e obtém-se a solução exata

$$v = v_0 - u\ln\left(\frac{m}{m_0}\right). \tag{8}$$

Pela equação 8, percebe-se que como a massa diminui, m é sempre menor que m_0. Então, $\ln(\frac{m}{m_0}) < 0$ em todo o intervalo. Dessa forma, a velocidade vai aumentar de forma logarítmica.

2.2 Ascensão Vertical sob Gravidade

Busca-se estudar agora o movimento de um foguete sob ação da gravidade. Diferente do problema anterior, em que o foguete estava no espaço livre, agora existem forças externas atuando sobre foguete. Ou seja, $F_{ext} \neq 0$.

Sabendo-se que $F_{ext} = \frac{dp}{dt}$, podemos utilizar uma forma modificada da equação 4 onde o lado direito é substituido por $F_{ext}dt$.

Como o foguete está sob ação da gravidade e considerando-se que o movimento se dá somente na vertical, $F_{ext} = -mg$. Substituindo $F_{ext}dt$ na equação 4, obtém-se

$$-mg\,dt = m\,dv + u\,dm. \tag{9}$$

A equação 9 pode ser reescrita da forma

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{u}{m}\frac{dm}{dt}. \tag{10}$$

Considera-se que a taxa de queima do combustível constante e negativa, portanto,

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha, \quad \alpha > 0. \tag{11}$$

A equação 10 possui três incógnitas: v, m e t. Para eliminar a dependência com o tempo, multiplicam-se ambos os lados de 10 por α^{-1}.

Com isso, obtém-se

$$dv = \left(\frac{g}{\alpha} - \frac{u}{m}\right) dm. \tag{12}$$

Analogamente ao problema do foguete no espaço livre, sendo m_0 e v_0 a massa e velocidade iniciais, 12 pode ser integrada resultando na solução exata

$$v = v_0 + \frac{g}{\alpha}(m - m_0) - u\ln\left(\frac{m}{m_0}\right). \tag{13}$$

Da mesma forma que a equação 8, $m < m_0$ e $\ln(\frac{m}{m_0}) < 0$. Como existe o termo $\frac{g}{\alpha}(m - m_0)$, que é sempre menor que 0, a velocidade devido a queima do combustível é menor que a encontrada pelo foguete livre.

2.3 Ascensão Vertical com Resistência do Ar

Os problemas anteriores desconsideraram a resistência do ar. Supõe-se que a força de resistência do ar seja proporcional ao quadrado da velocidade. Assim, $F_{res} = -\gamma\, mv^2$.

Como o foguete também está em ascensão vertical sob ação da gravidade $F_{ext} = -mg - \gamma\, mv^2$. Novamente, modifica-se o lado direito da 4 substuindo $F_{ext}dt$. Isso resulta em

$$(-mg - m\gamma\, v^2)\, dt = m\, dv + u\, dm. \tag{14}$$

A equação 14 pode ser rearranjada e escrita da forma

$$\frac{dv}{dt} = -g - \gamma\, v^2 - \frac{u}{m}\frac{dm}{dt}. \tag{15}$$

Como no problema anterior, a equação possui três incógnitas: v, m e t. Usa-se a definição de 11 e multiplica-se ambos os lados de 15 por α^{-1}. Dessa maneira, obtém-se

$$dv = \left(\frac{g}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}v^2 - \frac{u}{m}\right) dm. \tag{16}$$

A equação 16 não possui solução analítica simples de ser obtida.

3 Métodos Numéricos de Solução

3.1 Método de Euler

Um dos métodos mais simples para aproximar soluções de problemas de valor inicial de primeira ordem é o método de Euler. Este método utiliza

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n)\, h \tag{17}$$

onde $f(t,x) = \frac{dx}{dt}$ e h é o tamanho do passo.

Nos problemas apresentados neste trabalho, $f = f(m,v)$, onde m é a massa total do foguete (foguete+combustível) e v é sua velocidade. Enquanto a velocidade do foguete aumenta, sua massa total diminui com o tempo.

3.2 Método Runge-Kutta 2^a ordem

Existem três maneiras principais pelas quais o método de Runge-Kutta de 2^a ordem pode ser implementado. O que será utilizado neste trabalho é o método conhecido como Ponto Central.

Este método constiste em encontrar

$$k_1 = f(t_n; x_n) e \tag{18}$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}; x_n + \frac{k_1\, h}{2}\right) \tag{19}$$

de forma que

$$x_{n+1} = x_n + k_2\, h \tag{20}$$

onde $f(t,x) = \frac{dx}{dt}$ e h é o tamanho do passo.

3.3 Método Runge-Kutta 4^a ordem

O método de Runge-Kutta de 4^a ordem consiste em encontrar

$$k_1 = f(t_n; x_n), \tag{21}$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}\, h; x_n + \frac{1}{2} k_1\, h\right), \tag{22}$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}\, h; x_n + \frac{1}{2} k_2\, h\right) e \tag{23}$$

$$k_4 = f\left(t_n + h; x_n + k_3\, h\right) \tag{24}$$

de forma que

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2\, k_2 + 2\, k_3 + k_4\right] h \tag{25}$$

onde $f(t,x) = \frac{dx}{dt}$ e h é o tamanho do passo.

4 Resultados e análises

Como problema de valor inicial, considera-se como base o Exemplo 9.12 do livro Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas [1]

> Considere o primeiro estágio de um foguete *Saturno V* utilizado no programa lunar *Apollo*. A massa inicial é $2,8 \times 10^6$ kg e a massa do combustível do primeiro estágio é $2,1 \times 10^6$ kg. Suponha um empuxo médio de 37×10^6 N. A velocidade de exaustão é 2600 m/s. [...]

O empuxo é definido como

$$Empuxo = -u\frac{dm}{dt}$$

com o valor de empuxo do problema podemos calcular a taxa de queima de combustível α, cujo valor segundo o problema é $\alpha = 1,42 \times 10^4$ kg/s.

Também se calcula a massa final após toda a queima do combustível $m_f = 0,7 \times 10^6$ kg.

A aceleração da gravidade é considerada constante e com valor 9,8 m/s^2

4.1 Movimento de Foguete no Espaço Livre

Para estudar o movimento de foguete no espaço livre, utiliza-se a equação 7 na forma $\frac{dv}{dm}$ como $f(m,v)$.

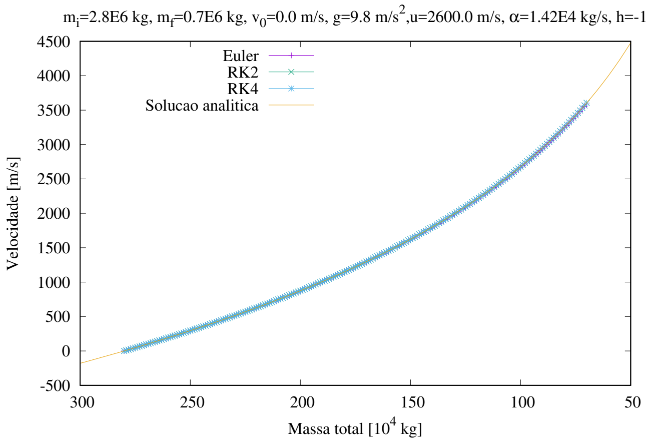

Figura 1: Velocidade do foguete (no espaço livre) em função da perda de massa para os diferentes métodos de solução numérica e comparação com a solução exata. Nesta escala torna-se indistiguível a diferença entre as soluções numéricas e a solução exata.

Na figura 1, mostra-se o comportamento geral das soluções numéricas e exata. Percebe-se que é difícil distinguir as diferenças de cada método em relação a solução exata.

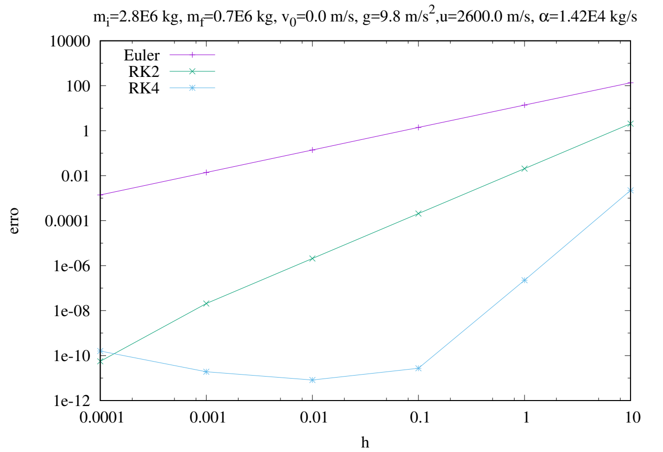

Figura 2: Erro global no instante final ($m = 0,7 \times 10^6$ kg) para diferentes valores de h para o problema do foguete no espaço livre.

Analisou-se o erro global no final do intervalo para diferentes valores de passo h para os três diferentes métodos. Na figura 2 é possível ver essa relação.

A partir gráfico, é possível perceber que para obter-se um erro de mesma ordem de grandeza que o método RK2, o método de RK4 pode utilizar um valor de h até 3 ordens maior. Comparando-se RK4 com o método de Euler, percebe-se que para obter-se um erro de mesma ordem de grandeza, o método de Euler necessita um valor de h até cinco ordens de grandeza menor.

Ainda analisando o gráfico da figura 2, nota-se que para determinado valor de h o método de Runge-Kutta de 4^a ordem não passa a ser mais preciso. Isso se deve pois a solução numérica deste método converge muito mais rapidamente para a solução exata. Para um valor de h pequeno o suficiente, o valor do erro chega próximo ao limite de precisão da máquina. Ou seja, o erro de truncamento do método e o erro de arredondamento da máquina são comparáveis.

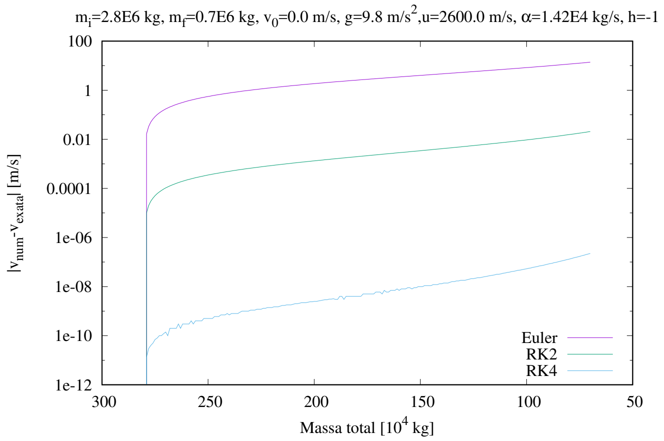

Figura 3: Valor absoluto da diferença entre a solução numérica de cada método e a solução exata do problema do foguete no espaço livre para o valor $h = 1$. Percebe-se que o método de Runge-Kutta de 4^a ordem é quase 5 ordens de grandeza mais preciso que o Runge-Kutta de 2^a ordem. E o método de Runge-Kutta e 2^a ordem é quase 3 ordens de grandeza mais preciso que o método de Euler.

Para dar continuidade às análises escolheu-se $h = 1$, pois com o mesmo número de passos, o método RK4 atinge um erro de 5 ordens de grandeza menor que RK2 e 8 ordens de grandeza menor que Euler. Também optou-se por esse valor por estar distante do limite de precisão da máquina.

Como na figura 1 não é possível distinguir a solução exata das soluções numéricas, faz-se necessário analizar um gráfico do erro em cada passo para $h = 1$. Na figura 3, evidencia-se a diferença de precisão entre os três métodos numéricos utilizados.

4.2 Ascensão Vertical sob Gravidade

Para o estudo do problema do movimento do foguete em ascensão vertical sob ação da gravidade utilizou-se a equação 12 na forma $\frac{dv}{dm}$ como $f(m, v)$.

A análise feita e os resultados obtidos foram basicamente os mesmos da seção anterior sobre o movimento do foguete no espaço livre.

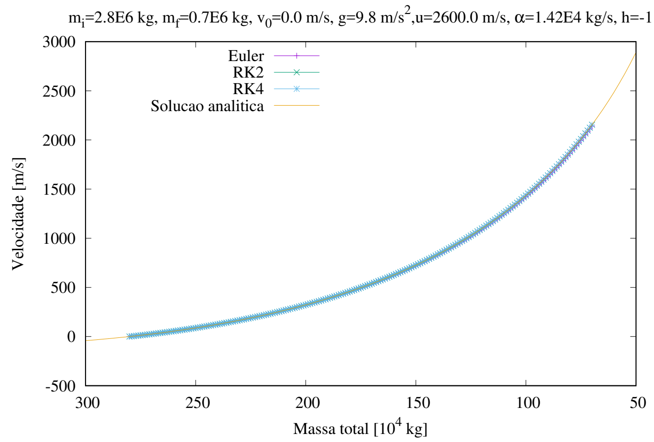

Figura 4: Velocidade do foguete em função da perda de massa para os diferentes métodos de solução numérica e comparação com a solução exata. Assim como no gráfico da figura 1, não se vizualiza a diferença entre as soluções numéricas e a solução exata.

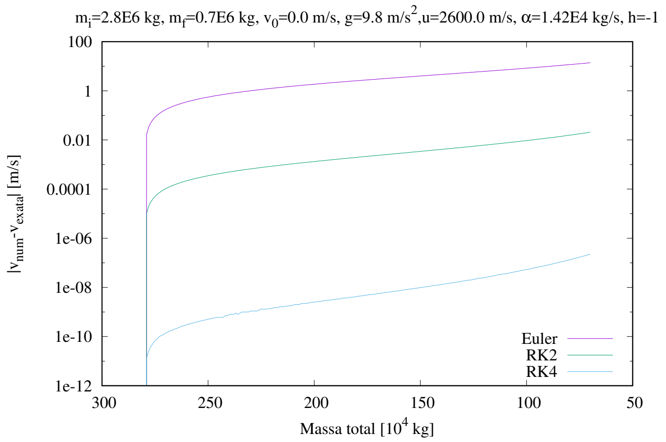

Figura 6: Mesma relação que a figura 3, porém para o caso do foguete em ascensão vertical sob ação da gravidade. Novamente o erro de RK4 é quase 5 ordens de grandeza menor que RK2 e o erro de RK2 três ordens de grandeza menor que Euler para $h = 1$.

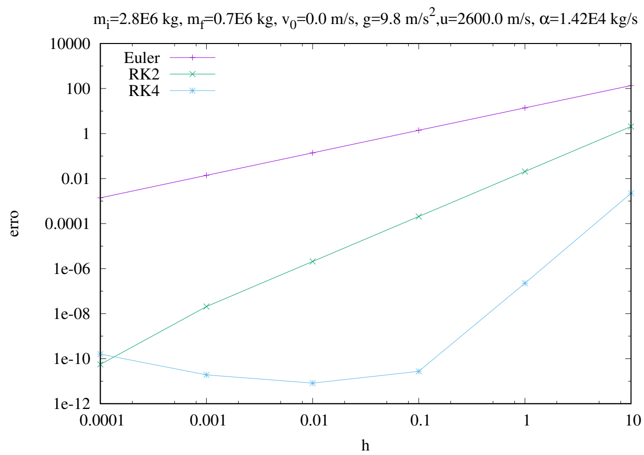

Figura 5: Erro global no instante final ($m = 0,7 \times 10^6$ kg) para diferentes valores de h para o problema do foguete em ascensão vertical sob ação da gravidade.

Uma diferença encontrada foi que o valor máximo da velocidade obtida no final do intervalo (após toda queima de combustível), encontrando-se uma velocidade final menor, como mostra-se na figura 4. A outra diferença foi que a inclinação do resultado na figura 1 é diferente da inclinação da figura 4.

4.3 Ascensão Vertical com Resistência do Ar

Para a resolução deste problema considerou-se a equação 16 na forma $\frac{dv}{dv}$ como $f(m, v)$. Este problema tem a complexidade adicional de considerar a resistência do ar.

Como este problema não tem solução analítica simples de ser obtida, não foi possível estimar os erros de cada método. Em vez disso, variou-se o coeficiente de arrasto γ, diminuindo-o até o limite em que γ tende a zero.

Na figura 7, mostra-se como a velocidade é limitada para cada valor de γ. Quando $\gamma = 10^{-6}$, pode-se perceber que a solução aproxima-se muito da solução $\gamma = 0$, que é o resultado com solução exata encontrado na seção anterior. Com isso, podemos presumir que os erros envolvidos nesse problema em que não conhecemos a solução exata tenha comportamento muito próximo ao caso anterior (ascensão vertical desconsiderando a resistência do ar).

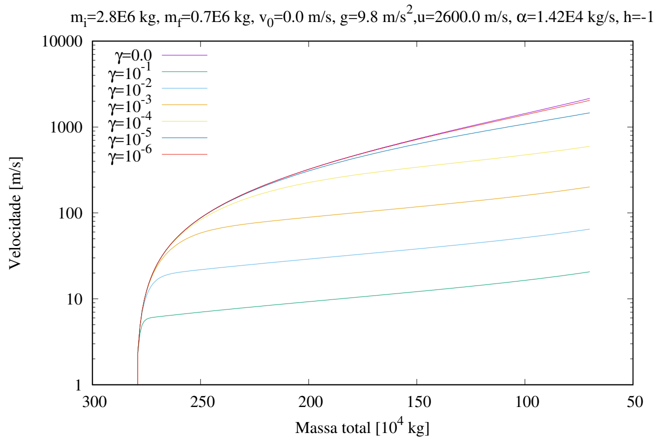

Figura 7: Relação entre a velocidade do foguete e massa total do foguete para diferentes coeficientes de arrasto γ. A solução numérica foi obtida pelo método de Runge-Kutta de 4^a ordem com $h = 1$. Percebe-se que quando γ tende a zero a solução tende a solução obtida na seção 4.2 para o foguete em ascensão vertical sobre ação da gravidade.

5 Considerações Finais

Neste trabalho buscou-se estudar soluções de equações diferenciais do movimento de foguetes através de três diferentes métodos numéricos: método de Euler, método de Runge-Kutta de 2^a ordem e método de Runge-Kutta de 4^a ordem.

Analisaram-se três problemas envolvendo o movimento de planetas com complexidades crescentes. O primeiro foi o movimento de foguetes no espaço livre. Em seguida, o movimento de foguetes em ascensão vertical sob gravidade e, finalmente, o movimento de foguetes em ascensão vertical sob gravidade e com resistência do ar.

Para os dois primeiros problemas, encontrou-se aproximadamente o mesmo resultado para as análises de erros usando cada um dos três métodos. O método de Runge-Kutta de 4^a se mostrou muito mais preciso, para um mesmo número de passos, que Runge-Kutta de 2^a ordem, que por sua vez se mostrou mais preciso que o método de Euler. A única diferença significativa encontrada na análise dos problemas 1 e 2 foi a velocidade máxima atingida pelo foguete, que já era esperado.

Para o terceiro problema, que não possui solução analítica simples de se obter, analisou-se o comportamento da solução para diferentes coeficientes de arrasto. Fez-se o limite do coeficiente de arrasto tendendo a zero. Com isso a resolução numérica reproduziu exatamente a solução encontrada no problema 2. Dessa forma, acredita-se que os erros envolvidos nesse problema são similares aos erros encontrados nos problemas anteriores.

Referências

[1] THORNTON, T. S. MARION B. J. *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas*, (editora Cengage Learning, 5ª edição, 2011)

[2] ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*, (editora CENGAGE Learning, 9ª edição, 2011)

A APÊNDICE - INSTRUÇÕES

Para compilar e rodar todos os programas utiliza-se o script:

```
$ sh Rocket.sh
```

Ao final, plota-se os gráficos importantes utilizando:

```
gnuplot> load 'Rocket.gnu'
```

Uma breve descrição da função de cada arquivo é encontra-se a seguir:

1. Rocket.sh: Compila e rodas todos os programas;
2. Rocket.gnu: Plota todos os gráficos;
3. RocketAll.gnu: Plota uma comparação da solução dos três problemas usando RK4;
4. RocketRes_c.gnu: Plota os gráficos do problema 3 para os diferentes métodos;
5. RocketFreeError: Plota o erro em cada ponto para o problema 1;
6. RocketGravError: Idem ao anterior mas para o problema 2;
7. RocketFreehError: Plota o erro global no final do intervalo para cada h para o problema 1;
8. RocketGravhError: Idem ao anterior mas para o problema 2;
9. RocketFreeMotion: Plota a solução v vs. m para o problema 1;
10. RocketGravMotion: Idem ao anterior mas para o problema 2;
11. RocketFree_h.c: Encontra erro global no final do intervalo para diferentes h para o problema 1;
12. RocketGrav_h.c: Idem ao anterior mas para o problema 2;
13. RocketFree.c: Encontra solução numérica para o problema 1;
14. RocketGrav.c: Encontra solução numérica para o problema 2;
15. RocketRes.c: Encontra solução numérica para o problema 3;